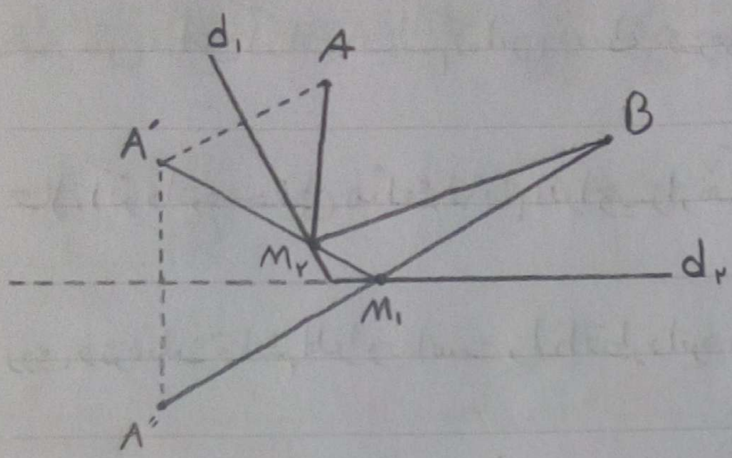
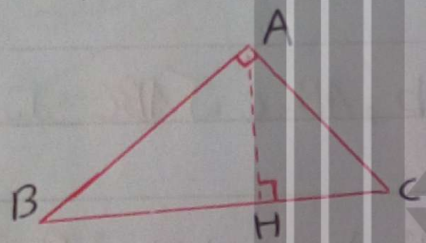



# فصل سوم روابط طولی در مثلث

یادآوری: روابط طولی در مثلث قائم الزاویه که پارسال با آن ها آشنا شده‌ایم عبارتند از:




1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

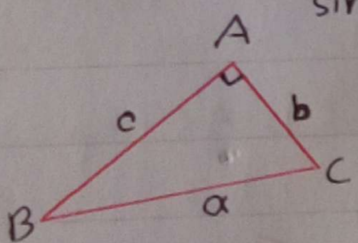
2) $AB^2 = BC.BH$

3) $AC^2 = BC.CH$

4) $AH^2 = BH.CH$

5) $AH.BC = AB.AC$

قضیه: در مثلث قائم الزاویه زیر ثابت کنید $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.




اثبات) $\sin B = \frac{b}{a} \longrightarrow \frac{b}{\sin B} = a$ ①

$\sin C = \frac{c}{a} \longrightarrow \frac{c}{\sin C} = a$ ②

$\sin A = \sin 90 = 1 \longrightarrow \frac{a}{\sin A} = a$ ③

$①, ②, ③ \longrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

یادآوری: در هندسه دهم ثابت کردیم که عمود منصف های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرسند.

همچنین در این کتاب دیدیم که این نقطهٔ همرسی مرکز دایره محیطی مثلث است.

حال اگر دایره محیطی مثلث قائم الزاویه را رسم کنیم مشاهده می کنیم مرکز این دایره در روی وتر مثلث قائم الزاویه است و لذا قطر دایره برابر است با وتر مثلث.

نتیجه: با توجه به مطالب بالا (در مثلث قائم الزاویه) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

قضیه سینوس ها: می خواهیم رابطهٔ فوق را برای هر مثلث دلخواهی اثبات کنیم.

در هر مثلث $ABC$ که $AB=c$ , $AC=b$ و $BC=a$ داریم: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

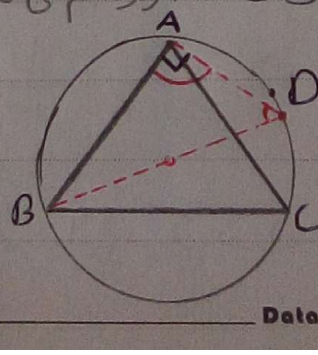
که در آن $R$ شعاع دایره محیطی مثلث $A\hat{B}C$ است.

اثبات) مثلث $ABC$ را در حالتهای مختلف زیر بررسی می کنیم:

حالت اول: $A=90$ (رابطه فوق برای این حالت اثبات شده است)

حالت دوم: $A<90$ دایرهٔ محیطی

مثلث $ABC$ را رسم می کنیم. سپس قطر $BD$ را مطابق شکل رسم کرده و $D$ را به $A$ وصل می کنیم.




محاطی $D=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$
$C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ $\Rightarrow \hat{D}=\hat{C}$ (1)

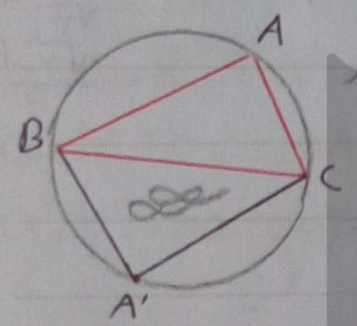
محاطی $B\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{180}{2}=90$
$\Rightarrow$ قائم الزاویه $\overset{\Delta}{AB\hat{D}}$

قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABD} \Longrightarrow \sin D = \frac{AB}{BD} \xrightarrow[BD=2R]{AB=c} \sin D = \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$

به طریق مشابه با رسم قطر های $AD'$ و $CD''$ ثابت می شود که

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$
$$\frac{b}{\sin B} = 2R$$

قضیه سینوس ها $(A>90)$: در هر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ثابت کنید $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$




$A'$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره در نظر می گیریم

زاویه‌ی محاطی $\hat{A} = \frac{\widehat{BA'C}}{2}$

زاویه محاطی $\hat{A'} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$

$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{A'} = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360}{2} = 180 \longrightarrow A + A' = \pi$

پس $A$ و $A'$ مکمل هم هستند، و چون $A>90$ لذا $A'<90$.

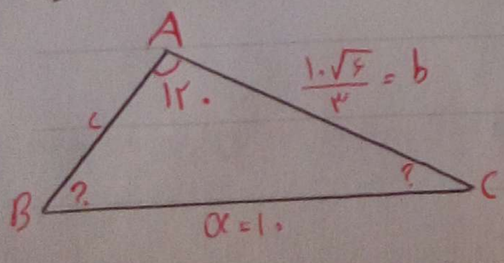
$A = \pi - A'$ (1)

$\xrightarrow{(1)} \sin A = \sin(\pi - A') = \sin A' \Longrightarrow \sin A = \sin A' \xrightarrow{A'<90} \frac{a}{\sin A'} = 2R \xrightarrow{\sin A = \sin A'} \frac{a}{\sin A} = 2R$

به طریق مشابه $\frac{b}{\sin B} = 2R$ و $\frac{c}{\sin C} = 2R$ بنابراین:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

مثال: در مثلث $ABC$ ، $BC=10$ ، $\hat{A}=120$ ، $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازهٔ زاویه های $B$ و $C$ را بدست آورید.



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \longrightarrow \frac{10}{\sin 120}=2R \longrightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \longrightarrow \frac{20}{\sqrt{3}}=2R$$

$\longrightarrow R=\frac{10}{\sqrt{3}}$ شعاع

$$\frac{b}{\sin B}=2R \longrightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B}=\frac{20}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{20}{\sqrt{3}}\cdot \sin B=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

$$\longrightarrow \sin B=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{18}}{6}=\frac{3\sqrt{2}}{6} \longrightarrow B=45 \qquad A+B+C=180 \longrightarrow \hat{C}=15$$

$$\frac{c}{\sin C}=2R \longrightarrow \frac{c}{\sin 15}=\frac{20}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \frac{c}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{20}{\sqrt{3}} \Longrightarrow c=AB=\frac{20}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \checkmark$$

$$\sin 120=\sin(\pi-60)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 15=\sin(\underbrace{45-30}_{\alpha-\beta})=\sin\alpha.\cos\beta-\sin\beta.\cos\alpha=\sin 45.\cos 30-\sin 30.\cos 45=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

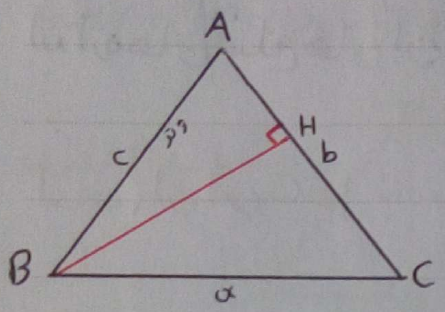
درس دو

## قضیه کسینوس ها

قضیه کسینوس ها: حالت اول ($A=90$) در این حالت مثلث $ABC$ قائم الزاویه است و لذا قضیه فیثاغورس را داریم. $a^2=b^2+c^2$. وچون $\cos 90=0$ لذا حکم بدست می آید.

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

حالت دوم ($A<90$)




$$A\hat{B}H: \cos A = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AH}{AB} = \frac{b-CH}{c} \quad 1$$

$$\sin A = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{c} \quad 2$$

$$1 \longrightarrow CH = b - AH \xrightarrow{AH = c.\cos A} CH = b - c.\cos A \quad (1)$$

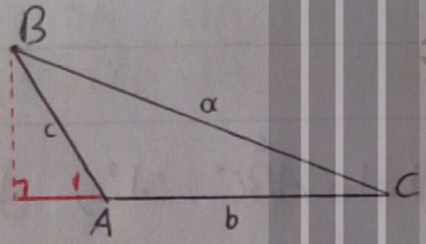
$$2 \longrightarrow BH = c.\sin A \quad (2)$$

فیثاغورس $B\hat{C}H: a^2 = CH^2 + BH^2 \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} (b - c.\cos A)^2 + (c.\sin A)^2$

$$a^2 = b^2 - 2b.c.\cos A + c^2.\cos^2 A + c^2.\sin^2 A$$

$$a^2 = b^2 - 2bc.\cos A + c^2(\underbrace{\cos^2 A + \sin^2 A}_{1}) \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

حالت سوم ($A<90$)




$$A\hat{B}H: \sin A_1 = \frac{BH}{c} \longrightarrow BH = c.\sin A_1 \quad (1)$$

$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \longrightarrow AH = c.\cos A_1 \quad (2)$$

قائم الزاویه $B\hat{C}H \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BH^2 + CH^2 = BC^2 \xrightarrow{(1),(2)} BH^2 + (AH + b)^2 = BC^2$

$$\xrightarrow{(1),(2)} a^2 = (c.\sin A_1)^2 + (c.\cos A_1 + b)^2 \Longrightarrow a^2 = c^2.\sin^2 A + c^2.\cos^2 A + b^2 - 2bc\cos A$$

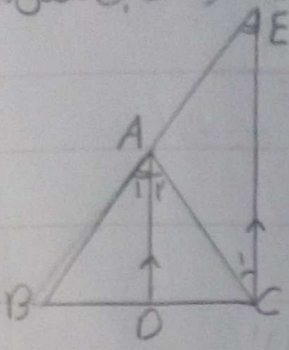
$$a^2 = c^2(\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{1}) + b^2 - 2bc.\cos A \longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

درس سه قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث و محاسبهٔ طول نیمسازها

قضیه نیمسازها: در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت

اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کنند.

اثبات) از رأس C خطی به موازات نیمساز AD رسم کرده سپس ضلع AB را مطابق شکل از رأس




A امتداد می‌دهیم تا دو خط همدیگر را در نقطه E قطع کنند.

$AD \parallel CE \xrightarrow[\text{مورب}]{AC} C_1 = A_2 \xrightarrow{A_1 = A_2} C_1 = E \longrightarrow A\hat{C}E \Longrightarrow AE = AC$ ①

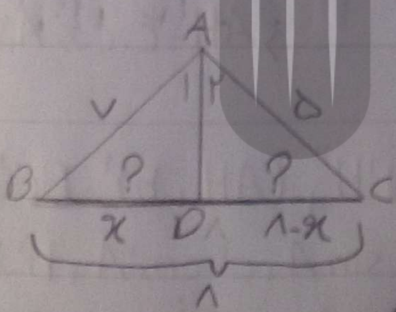
متساوی‌الساقین

$AD \parallel CE \xrightarrow[\text{مورب}]{BE} E = A_1$

$AD \parallel CE \xrightarrow[\text{مورب}]{BE} E = A_1$ فرض: $A_1 = A_2$ حکم: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

$B\hat{C}E: AD \parallel CE \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{قضیه}} \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{①} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{ویژگی}} \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

مثال: در مثلث $A\hat{B}C$ به اضلاع ۸، ۷، ۵ طول دو قطعه‌ای را که روی ضلع بزرگتر ایجاد می‌شود را بدست آورید.

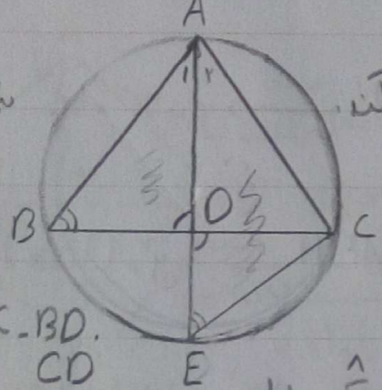



جواب) بنا به قضیه نیمساز: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \longrightarrow \frac{۷}{x} = \frac{۵}{۸-x} \longrightarrow ۵x = ۵۶ - ۷x$

$۱۲x = ۵۶ \longrightarrow x = \frac{۵۶}{۱۲} = \frac{۱۴}{۳} \Longrightarrow BD = \frac{۱۴}{۳}$ و $CD = ۸ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$

نتیجه: (طول نیمساز مثلث) در هر مثلث مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل

ضرب اندازهٔ دو ضلع زاویه - حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل



فرض: $AD$ نیمساز

ایجاد می‌کند. $AD$ را امتداد داده تا دایره را در $E$ قطع کند.

سپس $E$ را به $C$ وصل می‌کنیم.

حکم: $AD^2 = AB.AC - BD.CD$

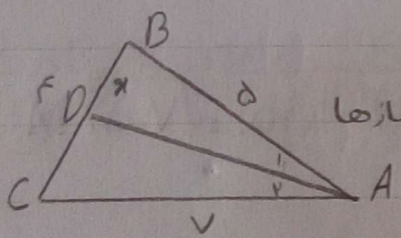
$$\hat{E} \text{ محاطی } \Longrightarrow \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \longrightarrow B = E \ ①$$
$$\hat{B} \text{ محاطی } \Longrightarrow B = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\begin{cases} A_1 = A_2 & \text{نیمساز} \\ B = E & ① \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{B}D \sim A\hat{C}E \xrightarrow[\text{متناسب}]{\text{اضلاع}} \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$

$$AB.AC = AD.AE = AD.(AD+DE) = AD^2 + AD.DE \xrightarrow[AD.DE = BD.DC]{\text{رابطه طولی در دایره}} AB.AC = AD^2 + BD.DC$$

$$\longrightarrow AD^2 = AB.AC - BD.DC$$
حکم

مثال: در مثلث به اضلاع ۴، ۵، ۷ طول نیمساز کوچکترین زاویه را بدست آورید؟



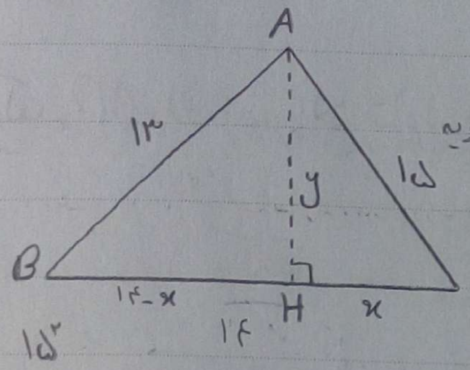
بنا به قضیه نیمسازها: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \longrightarrow \frac{7}{x} = \frac{5}{8-x} \longrightarrow 5x = 56 - 7x$

$\longrightarrow 12x = 56$

$\longrightarrow x = \frac{56}{12} = \frac{14}{3} \Longrightarrow BD$

قضیه هرون: مثال: در مثلث $A\hat{B}C$ با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع $AH$ را رسم کنید.

مطابق شکل مقادیر $y$ و $x$ را بدست آورید سپس مساحت مثلث $\hat{ABC}$ را محاسبه کنید.




$\hat{ACH}$ قائم الزاویه $\xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قضیه}} y^2+x^2=15^2$

$\hat{ABH}$ قائم الزاویه $\xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قضیه}} y^2+(14-x)^2=13^2 \longrightarrow$

$$\cancel{y^2}+196-28x+\cancel{x^2}=13^2 \longrightarrow 15^2+196-169-28x=13^2 \Longrightarrow 225+196-169=28x$$

$$\Rightarrow x=9 \ , \ y^2+9^2=225 \longrightarrow y^2=225-81 \longrightarrow y=12$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$$

اگر همین روش مثال فوق را در حالت کلی در مثلث $\hat{ABC}$ که در آن $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ به کار ببریم آن گاه به قضیه ای به نام هرون می رسیم.

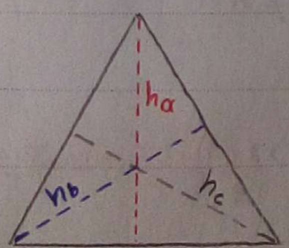
قضیه هرون: $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ که در آن $P$ نصف محیط است. $(P=\frac{a+b+c}{2})$

مثال: مساحت مثلث AB با اضلاع ۱۵ و ۱۴ ، ۱۳ را بدست آورید.

$$P=\frac{13+14+15}{2}=21$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{7056}=84$$

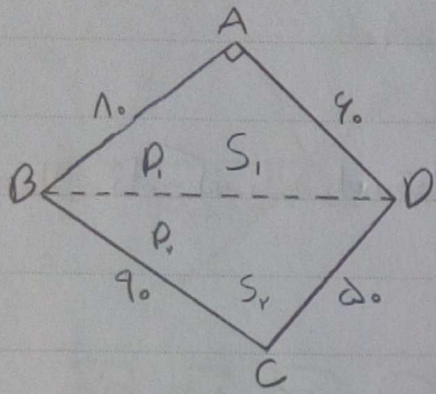
## ارتفاع های مثلث




در مثلث $\hat{ABC}$ مطابق شکل داریم:

$$h_a=\frac{2S}{a} \ , \ h_b=\frac{2S}{b} \ , \ h_c=\frac{2S}{c}$$

در شکل زیر مساحت چهارضلعی ABCD را بدست آورید.




$BD^2=80^2+60^2=6400+3600=10000 \longrightarrow BD=100$

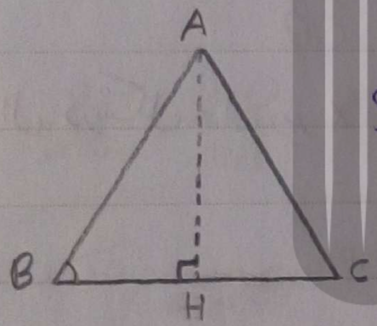
$P_1=\frac{60+80+100}{2}=120 \longrightarrow S_1=\sqrt{P_1(P_1-a)(P_1-b)(P_1-c)}=$

$\sqrt{120(120-100)(120-80)(120-60)}=\sqrt{120\times20\times40\times60}=2400$

$P_2=\frac{50+90+100}{2}=120 \quad S_2=\sqrt{P_2(P_2-a)(P_2-b)(P_2-c)}=\sqrt{120(120-100)(120-90)(120-50)}=$

$\sqrt{120\times20\times30\times70}=600\sqrt{14} \qquad S=2400+600\sqrt{14}$

روشی دیگر برای محاسبهٔ مساحت مثلث



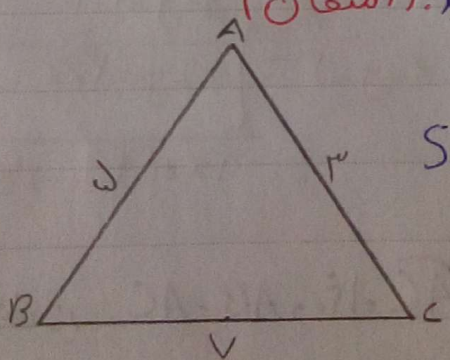

$S=\frac{1}{2}BC.AH$ ①, $\sin B=\frac{AH}{AB} \Rightarrow AH=\sin B.AB$ ②

$\xrightarrow{①,②} S=\frac{1}{2}BC.AB.\sin B$

به طریق مشابه و در حالت کلی

$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}BC.AC.\mathrm{sic}\,C=$

مثال: در مثلث زیر اندازهٔ زاویه A را بدست آورید. (امتحان)




$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=$

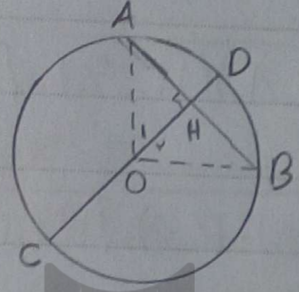
$7.5\times\underbrace{(7.5-7)}_{0.5}\underbrace{(7.5-3)}_{4.5}\underbrace{(7.5-5)}_{2.5}=$

$\sqrt{7.5\times0.5\times4.5\times2.5}\simeq6.5$ ①

$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}5\times 3.\sin A=7/5\sin A$ ②

$7/5\sin A=6/5 \Rightarrow \sin A=\frac{6/5}{7/5}\Rightarrow A=\sin^{-1}\left(\frac{65}{75}\right)\xrightarrow[A=120]{A=60} A=120$

سوال: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند؟



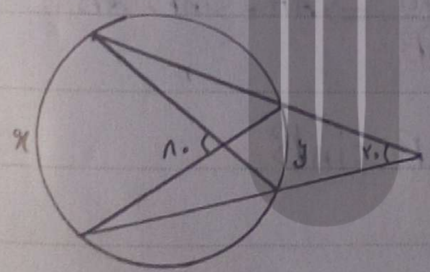

فرض: $CD\perp AB$

حکم: $AH=BH,\ \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$

$\begin{cases} OA=OB = \text{شعاع} \\ OH=OH = \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} \begin{cases} AH=BH \\ O_1=O_2 \xrightarrow{\text{مرکزی}} \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD} \end{cases}$

قطر دایره $CD \Rightarrow \overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD} \Rightarrow \overset{\frown}{CA}+\cancel{\overset{\frown}{AD}}=\overset{\frown}{CB}+\cancel{\overset{\frown}{BD}} \Rightarrow \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{CB}$

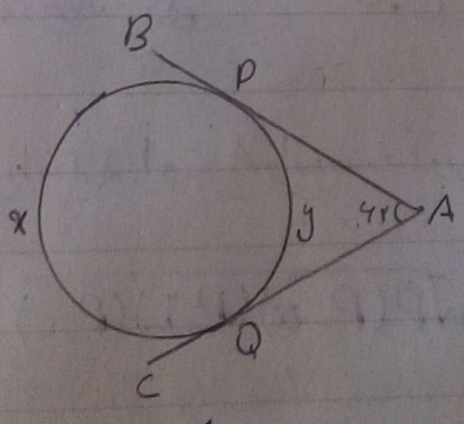
سوال: در شکل های زیر x و y را بدست آورید؟




$20=\frac{x-y}{2} \longrightarrow \begin{cases} x-y=40 \\ x+y=160 \end{cases}$

$80=\frac{x+y}{2} \longrightarrow$

$2x=200 \longrightarrow x=100,\ y=60$



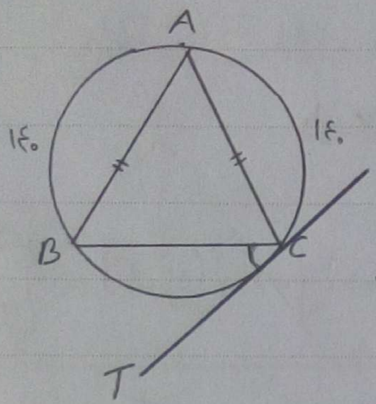

$62=\frac{x-y}{2}$

$x+y=360$

$\begin{cases} x-y=124 \\ x+y=360 \end{cases}$

$2x=484 \longrightarrow x=242,\ y=118$

سوال: در شکل زیر $AB=AC$ ، $\overset{\frown}{AC}=140$ . اندازهٔ زاویه $B\hat{C}T$ را بدست آورید.



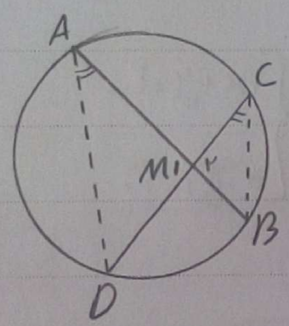
$AB = AC \Longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \longrightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۴۰$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰ \Longrightarrow ۱۴۰ + ۱۴۰ + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰$

$\longrightarrow \overset{\frown}{BC} = ۸۰ \Longrightarrow \underset{\text{ظلی}}{B\hat{C}T} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۸۰}{۲} = ۴۰$

سوال: هرگاه دو وتر دلخواه $AB$ و $CD$ در نقطه ای مانند $M$ همدیگر را قطع کنند (داخل دایره)

آنگاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. کلیدحل: تشابه مثلث ها



$A_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$

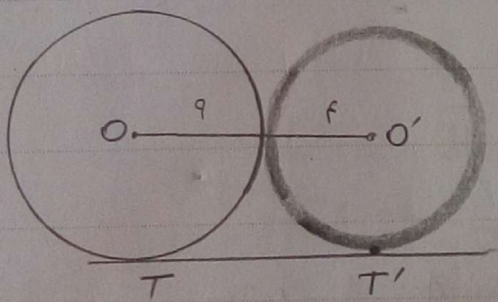
$C_{\text{محاطی}} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \longrightarrow \hat{A} = \hat{C}$ ①

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} & ① \\ M_1 = M_2 & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat{M}D \sim B\hat{M}C$

$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{AD}{BC} \Longrightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

سوال: دو دایره به شعاع های ۹ و ۴ مماس خارج هستند. اندازهٔ طول مماس مشترک خارجی

آنها را بدست آورید؟



$TT' = ?$

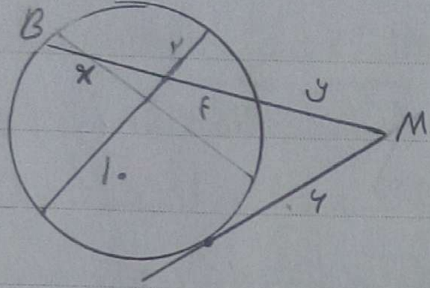
$OO' = d = ۹ + ۴ = ۱۳$ = خط المرکزین

$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

$TT' = \sqrt{۱۳^۲ - (۹ - ۴)^۲} = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵}$

$TT' = \sqrt{۱۴۴} = TT' = ۱۲$

سوال: در شکل زیر مقادیر $y$ و $x$ را بدست آورید؟



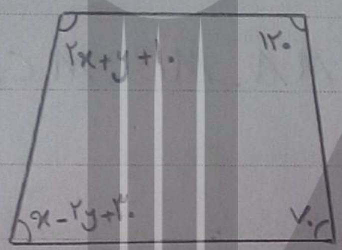
$x \times 4 = 2 \times 10 \longrightarrow x = 5$

$y \times (y+9) = 6 \times 6$

$y^2 + 9y - 36 = 0 \longrightarrow (y+12)(y-3) \longrightarrow \begin{cases} y = -12 & \text{غ ق} \\ y = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$

سوال: در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. $x$ و $y$ را بدست آورید ؟

در داخل دایره محاط شده است.



ویژگی چهارضلعی محاطی: زاویه های روبرو مکمل اند.

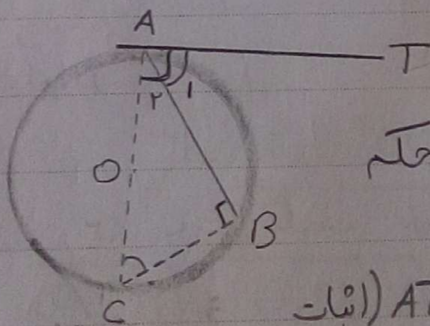
$2x + y + 10 + 70 = 180 \longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 100 \\ x - 2y = 30 \end{cases}$

$x - 2y + 30 + 120 = 180$

$\begin{cases} 2x + y = 100 \\ -2x + 4y = -60 \end{cases}$

$5y = 40 \longrightarrow y = 8 , x = 46$

مثال: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبروی آن.



حکم: $T\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{AB}$

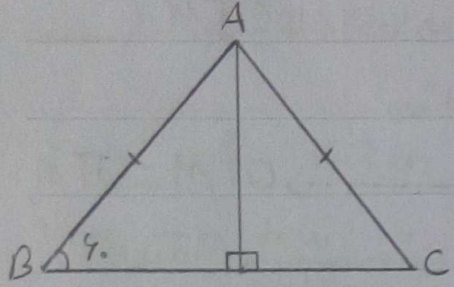
اثبات) $AT \perp AC \longrightarrow A_1 + A_2 = 90$ ①

محاطی $\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180}{2} = 90$

$A\hat{B}C : \hat{A}_2 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \xrightarrow{B = 90} A_2 + C = 90$ ②

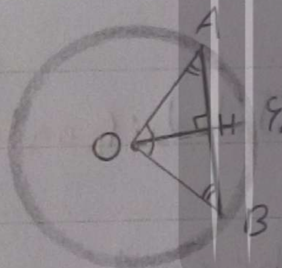
$A_2 + C = A_1 + A_2 \longrightarrow A_1 = C \, *$ محاطی $\hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \xrightarrow{*} A_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \Longrightarrow T\hat{A}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$

نکته: فرض کنیم ABC مثلث متساوی الاضلاع باشد آنگاه: $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.




مثال: در دایره $C(O,R)$ وتر AB برابر ۱۰ و $\widehat{AB}=60^\circ$ است. فاصلهٔ O از وتر AB را بدست آورید.

نکته: (یادآوری) قطر (شعاع) عمود بر وتر آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



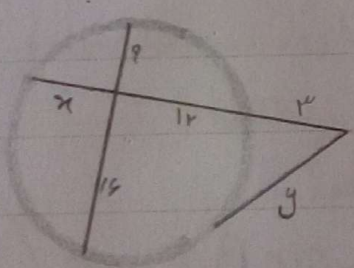

جواب) $OA=OB=R \to \hat{A}=\hat{B}$

$A\hat{O}B=\widehat{AB}=60$ مرکزی $\to A+B+\underbrace{AOB}_{60}=180 \to A+B=120 \to$

$A=B=60$

$O\hat{A}B$: متساوی الاضلاع $\xrightarrow{OH \text{ ارتفاع}} OH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}$

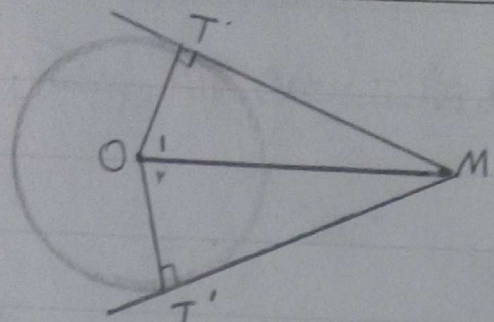
مثال: در شکل زیر y و x را بیابید.




$x.12=9\times 16 \to x=12$

$y^2=3\times(3+12+x)=81 \to y=9$

قضیه: ثابت کنید اندازهٔ مماس های رسم شده از نقطه M خارج دایره با هم برابرند.



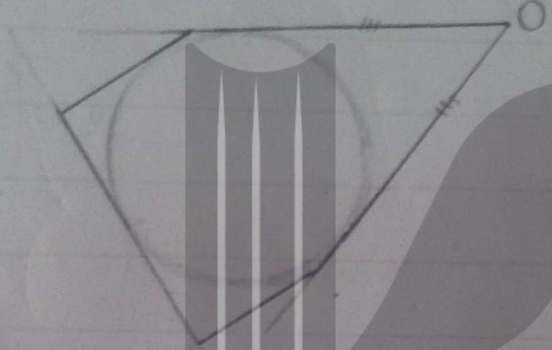

$OT \perp MT \longrightarrow$ قائم الزاویه $O\hat{T}M$

$OT' \perp MT' \longrightarrow$ قائم الزاویه $O\hat{T'}M$

$\begin{cases} OM = OM = \text{وتر مثلث} \\ OT = OT' = R \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{T}M \cong O\hat{T'}M$

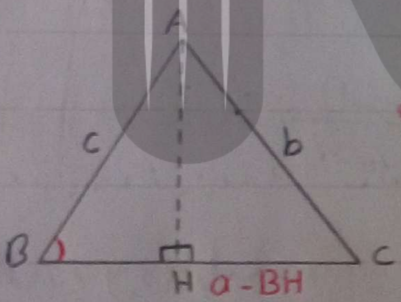
$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} MT = MT'$

مثال: در شکل زیر ثابت کنید $GO + LY = OL + GY$.




مثال (خیلی مهم): رابطه کسینوس ها را برای مثلثی که همه زاویه های آن حاده باشند را به دست آورید.

یادآوری: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$




✓ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ (۱)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ (۲)

رابطه کسینوس

$\cos B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{c} \longrightarrow BH = c.\cos B$ (1)

$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin B = \frac{AH}{c} \longrightarrow AH = c.\sin B$ (2)

$A\hat{C}H: CH^2 + AH^2 = b^2 \longrightarrow b^2 = (a - BH)^2 + AH^2 = a^2 - 2a.BH + BH^2 + AH^2$

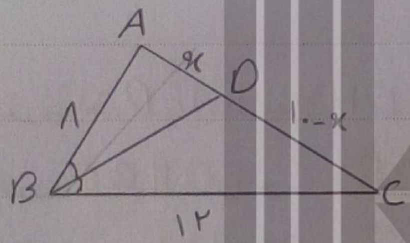
$$\xrightarrow{①,②} b^2 = a^2 - 2ac\cdot\cos B + (c\cdot\cos B)^2 + (c\cdot\sin B)^2$$

$$\longrightarrow b^2 = a^2 - 2ac\cdot\cos B + \underbrace{c^2\cos^2 B + c^2\sin^2 B}_{c^2\underbrace{(\cos^2 B + \sin^2 B)}_{1}} \longrightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$$

مثال: در یک مثلث طول اضلاع ۸، ۱۰ و ۱۲ می باشد. اندازهٔ نیمساز زاویهٔ متوسط

چقدر است؟ (یا اینطور مثال عددی می آید یا خود قضیه)

ب) اندازه قطعات ایجاد شده روی ضلع متوسط بدست آورید؟




ب) بنا به قضیه نیمسازها: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Longrightarrow \frac{8}{12} = \frac{x}{10-x}$

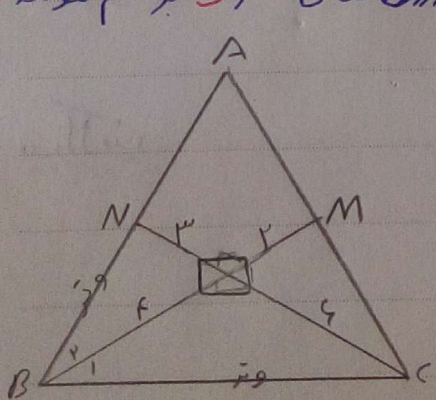
$$\longrightarrow 12x = 80 - 8x \longrightarrow 20x = 80 \longrightarrow x = 4$$

$$\Longrightarrow AD = 4,\ DC = 6$$

الف) $BD^2 = AB\cdot BC - AD\cdot DC$ بنا به قضیه نیمسازها

$$\longrightarrow BD^2 = 8\times 12 - 4\times 6 = 96 - 24 = 72 \longrightarrow BD = \sqrt{72}$$

مثال ۴ (خیلی خیلی مهم): در مثلث $A\hat{B}C$ میانه های نظیر رأس های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ برهم عمودند.




$m_b = 6$ , $m_c = 9$ باشد، مقدار $\tan B$ را پیدا کنید.

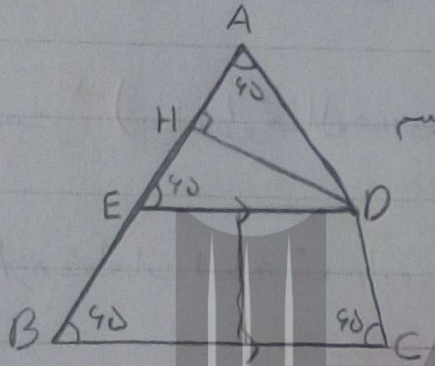
بنا به قضیه همرسی میانه ها داریم: $BD = 2DM$

$CD = 2DN$

$\tan B_1 = 6/4 = 3/2 \qquad \tan B_2 = 3/4 \qquad \tan B = \tan(B_1 + B_2) = \dfrac{\tan B_1 + \tan B_2}{1 - \tan B_1 \cdot \tan B_2} =$

$$\frac{3/2 + 3/4}{1 - 3/2 \cdot 3/4} = \frac{9/4}{-1/2} = -18$$

مثال: با دوبار استفاده از بازتاب چهار ضلعی شکل مقابل را به دو بخش با مساحت مساوی




تقسیم کنید؟ از نقطهٔ D خطی موازی BC مطابق شکل رسم

می کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ E قطع کند. لذا:

$BC \parallel ED \xrightarrow[\text{مورب}]{AB} B = E = 65 \xrightarrow[\text{الساقین}]{A=65\ \text{متساوی}}$ مثلث $\overset{\triangle}{A\hat{E}D}$

در نتیجه در مثلث $A\hat{E}D$، ارتفاع DH، مثلث را به دو قسمت همنهشت تقسیم می کند.

از طرفی چون $ED \parallel BC$ و $\hat{B} = \hat{C}$ پس EDCB ذوزنقهٔ متساوی الساقین است و کافیست وسط

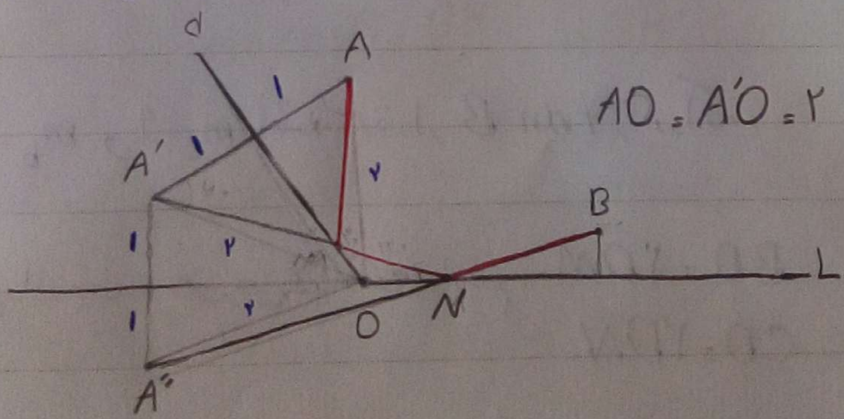
ضلع ED را به وسط ضلع BC وصل کنیم، ذوزنقه به دو قسمت همنهشت تقسیم شود.

* مثال: در شکل زیر دو خط همدیگر را در نقطه O و زاویهٔ ۱۲۰ قطع کرده اند. اگر فاصلهٔ A از خط

d برابر یک و فاصلهٔ B از خط L برابر نیم و $A\hat{O}D = 30$ باشد کوتاهترین مسیر از A به d

سپس به خط L و سرانجام به نقطهٔ B را رسم کنیم و با توجه به شکل طول این مسیر را

پیدا کنید.




$AO = A'O = 2$

Subject: Year: Month: Date: / /

ابتدا بازتاب نقطهٔ $A$ نسبت به خط $d$ را پیدا کرده و آن را $A'$ می‌نامیم سپس بازتاب نقطهٔ $A'$ نسبت به امتداد خط $L$ را بدست می‌آوریم و آن را $A''$ می‌نامیم. از $A''$ به نقطهٔ $B$ وصل کرده و محل برخورد آن را با خط $L$، $N$ می‌نامیم. حال از نقطهٔ $A'$ به نقطهٔ $N$ وصل می‌کنیم تا خط $d$ را در نقطهٔ $M$ قطع کند. کوتاه‌ترین مسیر خط شکستهٔ $AMNB$ خواهد بود.