

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

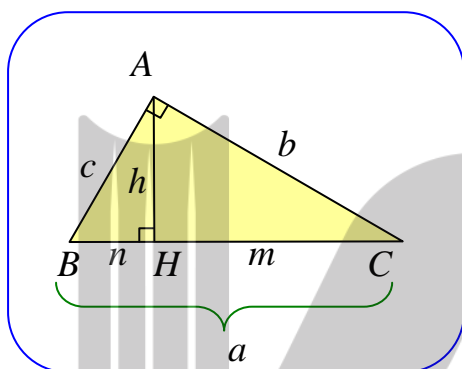
درس اول: قضیه ی سینوس ها

در این درس با یک قضیه ی بسیار مهم و کاربردی موسوم به قضیه ی سینوس ها در مثلث آشنا شویم.

یادآوری روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

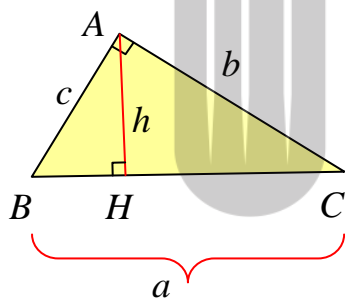
منظور از روابط طولی، رابطه هایی است که در مورد اندازه های پاره خط ها و زاویه ها در شکل های مختلف، بحث می کند. در سال گذشته با برخی از این روابط طولی در مثلث قائم الزاویه آشنا شده اید. مهمترین این

روابط عبارتند از :



- ۱) $a^2 = b^2 + c^2$
- ۲) $b^2 = a \times m$
- ۳) $c^2 = a \times n$
- ۴) $h^2 = m \times n$
- ۵) $a \times h = b \times c$

اکنون با توجه به این روابط طولی و تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه می توان، نتایج جالب دیگری را به دست آورد. به ادامه ی مطلب توجه نمایید.



تمرین ۱: در مثلث قائم الزاویه ی ABC شکل مقابل، ارتفاع وارد

بر وتر را رسم می کنیم و اندازه ی آن را h قرار می دهیم. با توجه به

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2} \quad \text{شکل ثابت کنید که:}$$

حل:

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{b^2 c^2} + \frac{c^2}{b^2 c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} = \left(\frac{a}{bc}\right)^2 = \left(\frac{a}{ah}\right)^2 = \frac{1}{h^2}$$

تمرین ۲: در یک مثلث قائم الزاویه، مجموع معکوس مربعات اندازه های دو ضلع زاویه ی قائمه برابر $\frac{1}{25}$

است. اندازه ی ارتفاع وارد بر وتر را تعیین کنید.

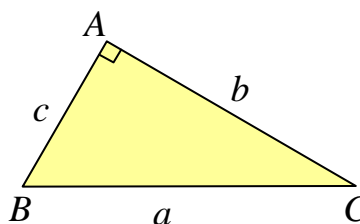
تمرین ۳: ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل به آن ضلع برابر طول وتر است.

اثبات:

$$\sin A = \sin(90^\circ) = 1 \rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{1} = a$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{b}{a}} = \frac{ab}{b} = a$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\frac{c}{a}} = \frac{ac}{c} = a$$



تمرین برای حل:

۴: طول اضلاع قائم از مثلث قائم الزاویه ای ۹ و ۱۲ واحد است. اندازه‌ی تصویر ضلع کوچکتر بر روی وتر کدام است؟

۷/۲ (۴)

۶ (۳)

۵/۴ (۲)

۴/۸ (۱)

۵: پاره خطی به طول a داده شده است. پاره خطی به طول \sqrt{a} را رسم کنید. (روش رسم را توضیح دهید.)

قضیه سینوس ها: در هر مثلث، نسبت اندازه‌ی هر ضلع به سینوس زاویه‌ی روبرو به آن ضلع، با قطر

(دو برابر اندازه‌ی شعاع) دایره‌ی محیطی مثلث برابر است.

اثبات: این قضیه را برای در مثلث ABC در سه حالت $\angle A = 90^\circ$ و $\angle A < 90^\circ$ و $\angle A > 90^\circ$ ثابت می‌کنیم.

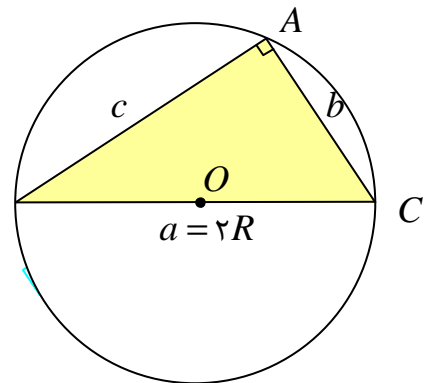
حالت اول: در مثلث ABC ، $\angle A = 90^\circ$ است.

در این صورت مثلث ABC قائم الزاویه است و وتر BC قطر دایره‌ی محیطی می‌باشد. لذا طبق تمرین قبل داریم:

$$\sin A = \sin(90^\circ) = 1 \rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{1} = a = 2R$$

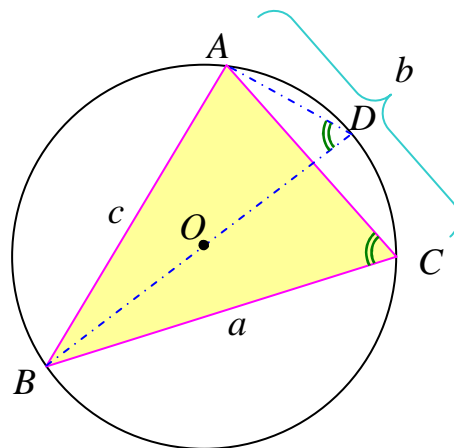
$$\sin B = \frac{b}{BC} \rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{b}{BC}} = BC \rightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R$$

$$\sin C = \frac{c}{BC} \rightarrow \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\frac{c}{BC}} = BC \rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$



حالت دوم: در مثلث ABC ، $\angle A < 90^\circ$ است.

در این حالت قطر BD را رسم می‌کنیم و D را به A وصل می‌کنیم. دو زاویه‌ی D و C محاطی و روبرو به یک کمان هستند، لذا با هم مساویند. همچنین مثلث ABD قائم الزاویه و زاویه‌ی BAD (روبرو به قطر) قائم الزاویه است. پس طبق حالت قبل می‌توان نوشت:



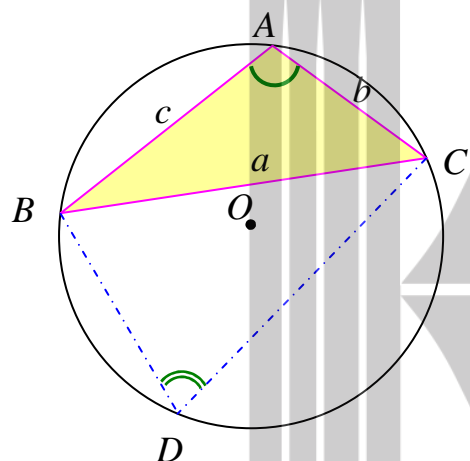
$$\sin C = \sin D \xrightarrow{\sin D = \frac{AB}{BD}} \sin C = \frac{AB}{BD} \rightarrow \frac{c}{\sin C} = BD \xrightarrow{BD = 2R} \frac{c}{\sin C} = 2R$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \quad \text{و} \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

حالت سوم: در مثلث ABC ، $\angle A > 90^\circ$ است.

در این نقطه‌ی دلخواه D روی کمان BC (کمان مقابل زاویه‌ی A) را به نقاط B و C وصل می‌کنیم. زاویه‌های A و D مکمل یکدیگرند. (چرا؟) و A منفرجه است، لذا زاویه‌ی D حاده است. پس:



$$\sin A = \sin(\pi - D)$$

یعنی

$$\sin A = \sin D$$

و در مثلث BCD طبق قسمت قبل داریم:

$$\frac{a}{\sin D} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

لذا

از طرف چون زاویه‌های دیگر مثلث ABC حاده هستند، پس طبق قسمت قبل خواهیم داشت.

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \quad \text{و} \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

قضیه‌ی سینوس ها: در هر مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

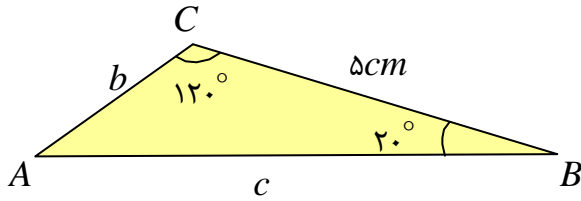
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره‌ی محیطی مثلث است.

تمرین ۶: با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی

مقادیر b و c را به دست آورید.

($\sin 20^\circ = 0.34$ و $\sin 40^\circ = 0.64$)



تمرین ۷: در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ و $\angle A = 120^\circ$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ ، مقدار شعاع دایره‌ی

محیطی مثلث و اندازه‌ی زاویه های B و C را به دست آورید.

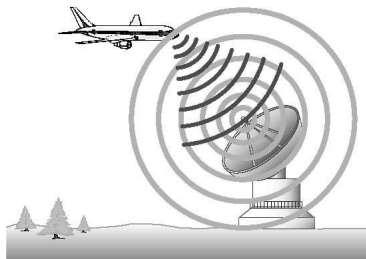
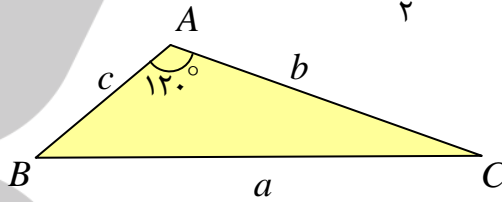
حل: به کمک قضیه‌ی سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ} = 2R \xrightarrow{\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\rightarrow \frac{20}{\sqrt{3}} = 2R \rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin B} = 2\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3 \sin B} = \frac{20}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin B = \frac{10 \times 3\sqrt{2}}{3 \times 20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

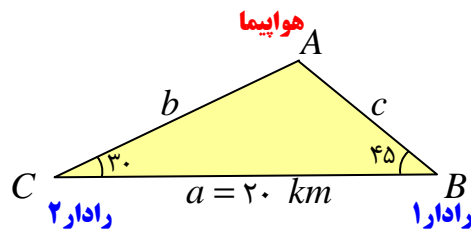
$$\rightarrow \begin{cases} \angle B = 45^\circ & \frac{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ}{\rightarrow \angle C = 15^\circ} \\ \angle B = 135^\circ & \frac{\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ}{\rightarrow \angle C = \text{وجود ندارد.}} \end{cases}$$



تمرین ۸: دو ایستگاه رادار که در فاصله‌ی ۲۰ کیلومتری از هم

واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده اند.

فاصله‌ی هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



حل :

$$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C) = 180 - (30 + 45) = 105^\circ$$

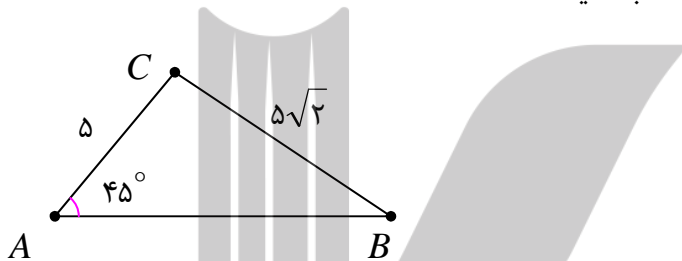
اکنون به کمک ماشین حساب داریم: $\sin(105^\circ) \approx 0.96$ و $\sin 45 = 0.7$ و $\sin 30 = 0.5$ لذا

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{20}{0.96} = \frac{b}{0.7} \rightarrow b = \frac{20 \times 0.7}{0.96} = 14/58$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{20}{0.96} = \frac{c}{0.5} \rightarrow c = \frac{20 \times 0.5}{0.96} = 10/41$$

تمرین برای حل :

۹: در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی B را محاسبه کنید.



۱۰: در مثلثی $BC = 10$ و $\angle A = 45^\circ$ و $\angle B = 60^\circ$ اندازه‌ی دیگر اضلاع مثلث را بیابید.

$$(\sin 75^\circ = 0.96)$$

۱۱: نشان دهید که مثلثی با مشخصات $a = 2$ و $b = 6$ و $\angle A = 60^\circ$ وجود ندارد.

۱۲: در مثلث ABC ، $BC = 20$ و $\angle B + \angle C = 120^\circ$ و $AC = \frac{20\sqrt{6}}{3}$

الف: شعاع دایره‌ی محیطی مثلث را بدست آورید.

ب: اندازه‌ی زاویه‌های B و C پیدا کنید.

درس دوم: قضیه کسینوس ها

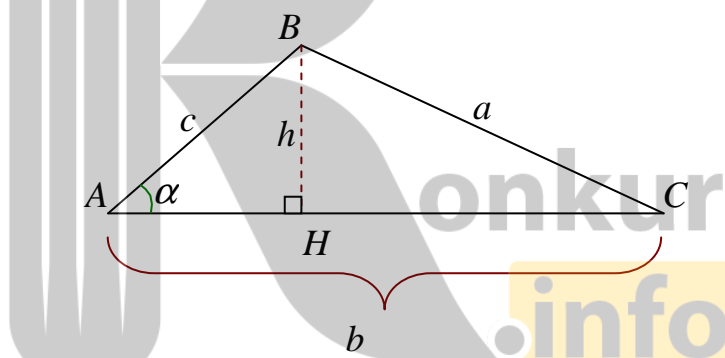
در این درس با یک قضیه بسیار مهم و کاربردی دیگری موسوم به قضیه کسینوس ها در مثلث آشنا شویم.

قضیه کسینوس ها: در هر مثلث، مربع هر ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین این دو ضلع برابر است.

اثبات: این قضیه را برای در مثلث ABC در سه حالت $\angle A = 90^\circ$ و $\angle A < 90^\circ$ و $\angle A > 90^\circ$ ثابت می کنیم.

حالت اول: در مثلث ABC ، $\angle A < 90^\circ$ است.

در این حالت ابتدا ارتفاع BH را رسم می کنیم. سپس با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت:



$$\Delta(ABH): \cos \alpha = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \times \cos \alpha$$

$$\Delta(ABH): c^2 = h^2 + AH^2$$

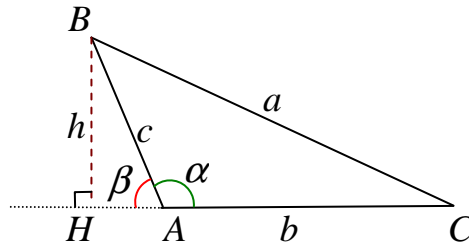
$$\Delta(BCH): a^2 = h^2 + CH^2 \xrightarrow{CH=b-AH} a^2 = h^2 + (b-AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2b \times AH + AH^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2b \times (c \times \cos \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

حالت دوم: در مثلث ABC ، $\angle A > 90^\circ$ است.

در این حالت ابتدا ارتفاع BH را رسم می کنیم. سپس با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت:



چون β زاویه ی خارجی رأس A می باشد. پس $\beta = \pi - \alpha$ لذا:

$$\sin \beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\Delta(ABH): \cos \beta = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = c \times \cos \beta \rightarrow AH = -c \times \cos \alpha$$

$$\Delta(ABH): c^2 = h^2 + AH^2$$

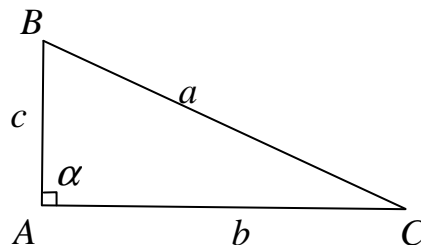
$$\Delta(BCH): a^2 = h^2 + CH^2 \xrightarrow{CH=b+AH} a^2 = h^2 + (b+AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = h^2 + b^2 + 2b \times AH + AH^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2b \times (-c \times \cos \alpha)$$

$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

حالت سوم: در مثلث ABC ، $\angle A = 90^\circ$ است.



در این حالت طبق قضیه ی فیثاغورس می توان نوشت:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

حال چون $\cos A = 0$ پس مانعی ندارد که بنویسیم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

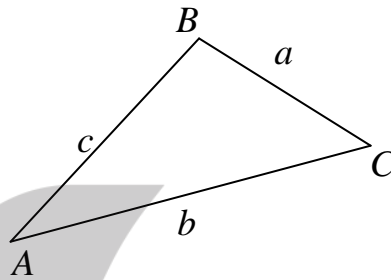
پس در این حالت، قضیه‌ی داده شده نیز برقرار است.

قضیه‌ی کسینوس ها: در هر مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

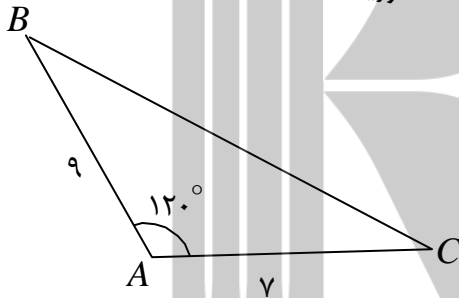
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



تمرین ۱: با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی ضلع BC را به دست آورید.



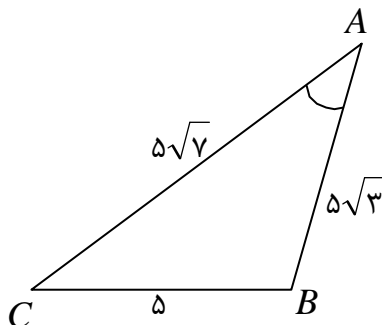
تمرین ۲: طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

$$(\cos 108^\circ = -0.3)$$

توجه: با توجه به رابطه‌ی فوق می توان نتیجه گرفت که:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

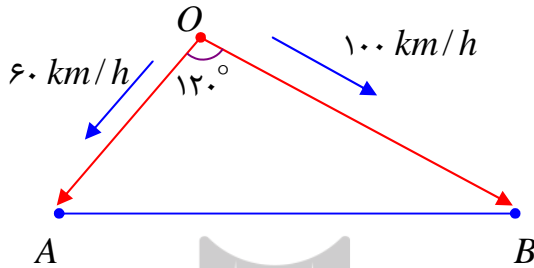
تمرین ۳: با توجه به شکل مقابل کسینوس زاویه‌ی A را محاسبه کنید.



حل :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5\sqrt{7})^2 + (5\sqrt{3})^2 - (5)^2}{2(5\sqrt{7})(5\sqrt{3})}$$

$$= \frac{175 + 75 - 25}{50\sqrt{21}} = \frac{225}{50\sqrt{21}} = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{2(21)} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$



تمرین ۴: مطابق شکل مقابل، دو قایق از یک

نقطه در دریاچه ای با سرعت های ۶۰ و ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و با زاویه ی ۱۲۰ درجه از هم دور می شوند. تعیین کنید که نیم ساعت بعد این دو قایق چه فاصله ای از یکدیگر دارند؟

حل : با توجه به نقطه ی شروع دو قایق و سرعت های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق به صورت زیر است.

$$OA = 60 \times \frac{1}{2} = 30 \text{ km}$$

و

$$OB = 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ km}$$

حال به کمک قضیه ی کسینوس ها می نویسیم.

$$AB^2 = (30)^2 + (50)^2 - 2(30)(50)\cos(120)$$

$$\rightarrow AB^2 = 900 + 2500 - 3000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 900 + 2500 + 1500 = 4900$$

$$\rightarrow AB = 70 \text{ km}$$

تمرین ۵: در مثلث ABC داریم، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\angle A = 60^\circ$ در این صورت:

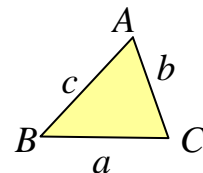
الف : طول ضلع BC را به دست آورید.

ب : اندازه ی زاویه های ABC و ACB را به دست آورید.

حل : با توجه به قضیه ی کسینوس ها داریم.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$\rightarrow a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2})\cos(60^\circ)$$



$$\rightarrow a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2})\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow a^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 + 8 - 2\sqrt{12} - 4 = 12 \rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

همچنین با توجه به قضیه سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = 4 \rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \angle C = 45^\circ$$

و در نهایت داریم:

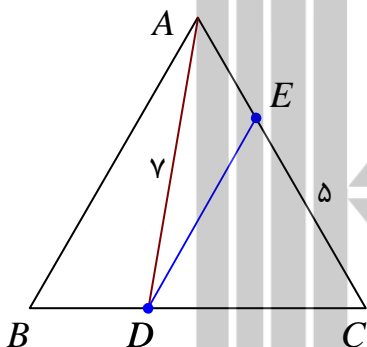
$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

تمرین ۶: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع ۸

واحد، روی ضلع BC نقطه‌ی D ، به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A ،

همچنین روی ضلع AC نقطه‌ی E ، به فاصله‌ی ۵ واحد از رأس C

در نظر گرفته شده اند.

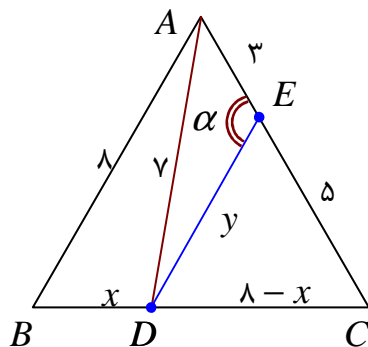


الف: با فرض اینکه $CD > BD$ ، تعیین کنید که نقطه‌ی D از نقاط B و C چه فاصله‌ای دارد؟

ب: تعیین کنید که نقطه‌ی E از نقطه‌ی D چه فاصله‌ای دارد؟

ج: اندازه‌ی زاویه‌ی AED را محاسبه کنید؟

حل: قرار می دهیم، $BD = x$ و $DE = y$ و $\angle AED = \alpha$ در این صورت داریم:



$$\Delta(ABD): x^2 = x^2 + 8^2 - 2(x)(8)\cos 60 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow (x-3)(x-5) = 0$$

$$\rightarrow x = 3, x = 5 \xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, DC = 5$$

و چون $DC = CE = 5$ پس مثلث DEC متساوی الساقین است و چون یک زاویه 60° درجه دارد، پس متساوی الاضلاع است. یعنی $DE = 5$. در مثلث DEC زاویه α یک زاویه خارجی است. پس:

$$\alpha = 60 + 60 = 120^\circ$$

تمرین ۷: یک کشتی از یک نقطه با سرعت 60 کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° درجه انحراف به راست با سرعت 40 کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

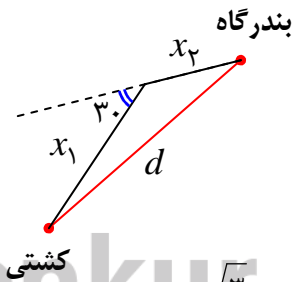
حل:

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ x_1 = 60 \times 1 = 60 \text{ km} \end{cases}$$

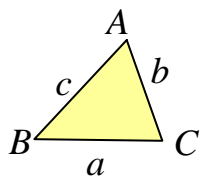
$$\begin{cases} t_2 = 1.5 - 1 = 0.5 \\ x_2 = 40 \times (0.5) = 20 \text{ km} \end{cases}$$

$$d^2 = (60)^2 + (20)^2 - 2(60)(20)\cos(150) = 3600 + 400 - 2400 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\rightarrow d^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} \xrightarrow{\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}} d = \sqrt{6078} = 77/96 \text{ km}$$



تمرین ۸: به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید، در مثلث ABC



الف: $\angle A > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب: $\angle A < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

پ: $\angle A = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

اثبات الف:

$$\angle A > 90^\circ \rightarrow \cos A < 0 \rightarrow 2bc \cos A < 0 \rightarrow -2bc \cos A > 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc \cos A > 0$$

$$\rightarrow 2bc \cos A < 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A < 0 \rightarrow \angle A > 90^\circ$$

اثبات ب:

$$\angle A < 90^\circ \rightarrow \cos A > 0 \rightarrow 2bc \cos A > 0 \rightarrow -2bc \cos A < 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc \cos A < 0$$

$$\rightarrow 2bc \cos A > 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A > 0 \rightarrow \angle A < 90^\circ$$

اثبات پ:

$$\angle A = 90^\circ \rightarrow \cos A = 0 \rightarrow 2bc \cos A = 0 \rightarrow -2bc \cos A = 0$$

$$\xrightarrow{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 \xrightarrow{-(b^2+c^2)} -2bc \cos A = 0$$

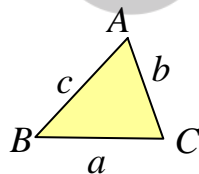
$$\rightarrow 2bc \cos A = 0 \xrightarrow{\div 2bc} \cos A = 0 \rightarrow \angle A = 90^\circ$$

تمرین ۹: در هر مورد، مشخصاتی از مثلث ABC داده شده است. به کمک این مشخصات، نوع زاویه A (حاد، منفرجه یا قائمه بودن) را تعیین کنید.

الف: $AB = 10$ و $AC = 6$ و $BC = 9$

ب: $AB = 8$ و $AC = 4$ و $BC = 9$

ج: $AB = 8$ و $AC = 15$ و $BC = 17$



حل: به کمک تمرین قبل، کافی است، مقدار a^2 را با $b^2 + c^2$ مقایسه کنیم. در این صورت:

الف:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 36 + 100 = 136 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow \angle A < 90^\circ$$

ب:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 81 \\ b^2 + c^2 = 16 + 64 = 80 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow \angle A > 90^\circ$$

ج :

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 289 \\ b^2 + c^2 = 225 + 64 = 289 \end{array} \right\} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \angle A = 90^\circ$$

تمرین ۱۰ : در مثلثی رابطه‌ی $a = 2b \cos C$ برقرار است. نوع مثلث را تعیین کنید.

حل :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \xrightarrow{\cos C = \frac{a}{2b}} \frac{a}{2b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\rightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \rightarrow b^2 - c^2 = 0 \rightarrow b^2 = c^2 \rightarrow b = c$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است.

تمرین ۱۱ : در مثلث ABC ثابت کنید که :

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

حل :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \rightarrow \frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \rightarrow \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} \end{aligned}$$

تمرین برای حل :

۱۲ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است. کسینوس بزرگترین زاویه‌ی این مثلث را تعیین کنید.

۱۳ : طول قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم که طول ضلع آن ۵ سانتی متر باشد را پیدا کنید.

۱۴ : در مثلثی رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ برقرار است. اندازه‌ی زاویه‌ی A چقدر است؟

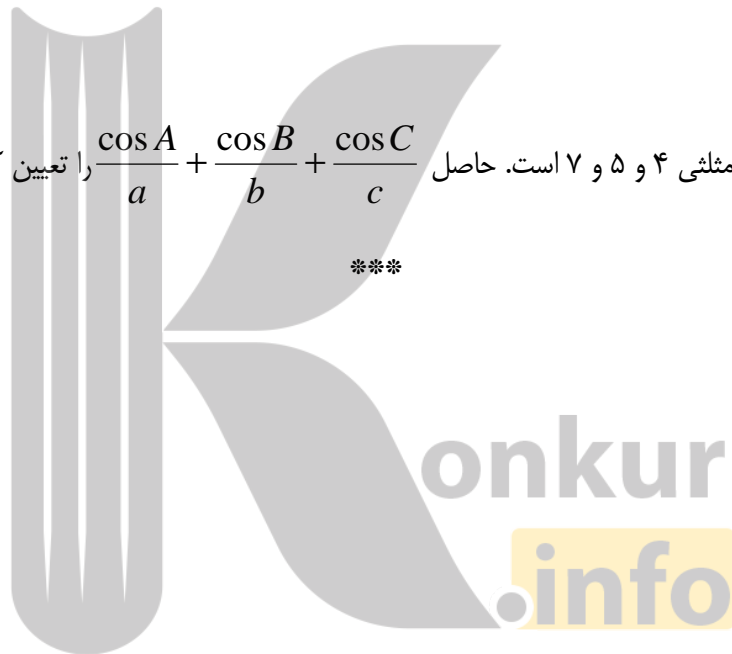
۱۵ : در مثلثی رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ برقرار است. اندازه‌ی زاویه‌ی A چقدر است؟

۱۶ : در مثلثی $a = 4$ و $b = 2\sqrt{3}$ و $\angle C = 30^\circ$ اندازه‌ی دیگر زاویه‌ها و ضلع سوم مثلث را بیابید.

۱۷ : در مثلث ABC ، اگر $AB = BC = 2$ و $AC = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}$. اندازه‌ی زاویه‌ی ABC را محاسبه

کنید.

۱۸ : طول اضلاع مثلثی ۴ و ۵ و ۷ است. حاصل $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$ را تعیین کنید.



محاسبه‌ی طول میانه‌ها

می‌دانید که میانه پاره خطی است که یک رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کند. در این قسمت رابطه‌ی آن را معرفی می‌کنیم که به کمک آن می‌توان با داشتن اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه‌ی میانه را محاسبه کرد.

قضیه‌ی طول میانه‌ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ ، اگر اندازه‌ی

میانه‌ی وارد بر ضلع a برابر m_a باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$$

اثبات :

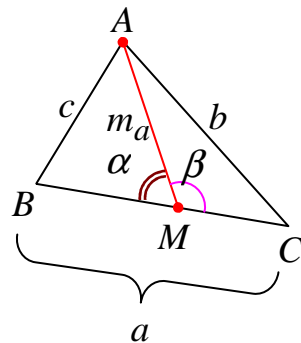
$$\beta = 180^\circ - \alpha \rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\Delta(AMC): b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(m_a)\cos \beta$$

$$\rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + a.m_a \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta(ABM): c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)(m_a)\cos \alpha$$

$$\rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a.m_a \cos \alpha \quad (2)$$



اکنون اگر روابط (1) و (2) را نظیر به نظیر جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$b^2 + c^2 = \left(\frac{a^2}{4} + m_a^2 + a.m_a \cos \alpha\right) + \left(\frac{a^2}{4} + m_a^2 - a.m_a \cos \alpha\right)$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

توجه : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ ، اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر

ضلع a برابر m_a باشد، در این صورت می‌توان نوشت:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

قضیه‌ی طول میانه‌ها : در هر مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

تمرین ۱۹: در مثلث ABC با اضلاع $BC = 8$ و $AC = 6$ و $AB = 4$ ، طول میانه‌ی AM را تعیین

کنید.

حل:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(36 + 16) - 64} = \frac{1}{2} \sqrt{104 - 64} = \frac{1}{2} \sqrt{40} = \sqrt{10}$$

تمرین برای حل:

۲۰: طول اضلاع مثلثی ۹ و ۸ و ۳ سانتی متر می باشند، طول میانه‌ی وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث را

محاسبه کنید.

تمرین ۲۱: ثابت کنید که در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات دو قطر با مجموع مربعات اضلاع برابر

است.

اثبات:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha \rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha$$

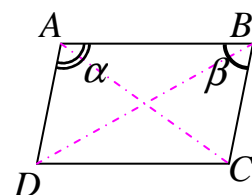
$$\Delta(ABD): BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2(AB)(AD)\cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta(ABC): AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \beta$$

$$\xrightarrow{\cos \beta = -\cos \alpha} AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2(AB)(BC)\cos \alpha$$

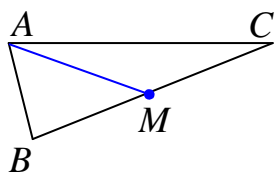
$$\xrightarrow{AB=DC, BC=AD} AC^2 = DC^2 + BC^2 + 2(AB)(AD)\cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} AC^2 + BD^2 = AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2$$



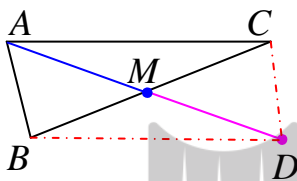
نتیجه: بنا بر اینکه در متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی می باشند. در هر متوازی الاضلاع مجموع مربعات دو قطر با دو برابر مجموع مربعات هر دو ضلع مجاور برابر است.

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$



تمرین ۲۲: در مثلث مقابل AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC است. ثابت کنید:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$



اثبات: میانه‌ی AM را از طرف نقطه‌ی M به اندازه‌ی خودش امتداد می دهیم، تا نقطه‌ی D بدست آید. نقطه‌ی D را به نقاط B و C وصل می کنیم. قطرهای چهارضلعی بدست آمده، همدیگر را نصف می کنند، لذا این چهارضلعی متوازی الاضلاع است. پس:

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + DC^2 + BD^2 + AB^2$$

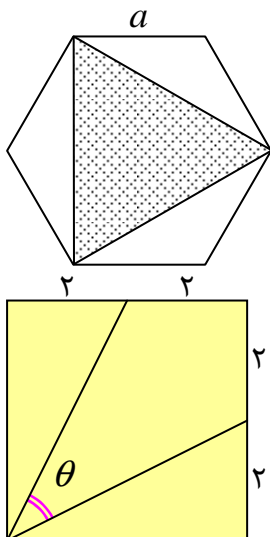
$$\xrightarrow{AC=BD, DC=AB} AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$$

$$\xrightarrow{AD=2AM} (2AM)^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2)$$

$$\rightarrow (2m_a)^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$$

$$\rightarrow 2m_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \rightarrow m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

تمرین برای حل:



۲۳: در شکل مقابل شش ضلعی منتظم به ضلع a داده شده است. مساحت مثلثی که از وصل کردن یک در میان رئوس شش ضلعی تشکیل می شود را تعیین کنید.

۲۴: در مربع شکل مقابل، مقدار $\sin \theta$ کدام است؟ (راه حل قید شود).

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۱)$$

قضیهی استوارت

در این قسمت به معرفی یک قضیهی معروف در هندسه، موسوم به قضیهی استوارت، می پردازیم. این قضیه اندازهی پارهخط وارد از یک رأس بر ضلع روبرو را بر حسب اندازه اضلاع مثلث و دو پارهخط ایجاد شده بر روی ضلع را تعیین می کند.

قضیهی استوارت: اگر D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC در مثلث ABC باشد. در این صورت می توان

نوشت:

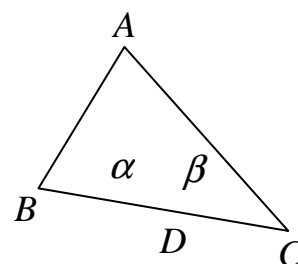
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

اثبات: با توجه به شکل مقابل برای مثلث های ADB و ADC قضیهی کسینوس ها را می نویسیم. در این

صورت داریم:

$$\beta = 180^\circ - \alpha \rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\Delta(ABD): AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2(AD)(DB)\cos \alpha$$



$$\xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot DC + DB^2 \cdot DC - 2(AD)(DB)(DC)\cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta(ADC): AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2(AD)(DC)\cos \beta$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot DB + DC^2 \cdot DB + 2(AD)(DC)(DB)\cos \alpha \quad (2)$$

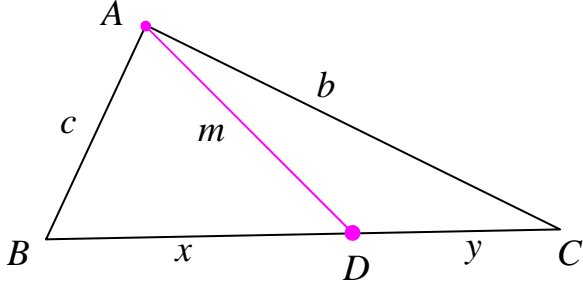
حال روابط (1) و (2) را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot DC + DB^2 \cdot DC + AD^2 \cdot DB + DC^2 \cdot DB$$

$$\rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 (DC + DB) + DB \cdot DC (DB + DC)$$

$$\rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

قضیه استوارت: اگر D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC در مثلث ABC باشد. در این صورت می‌توان نوشت:



$$xb^2 + yc^2 = (x + y)m^2 + xy(x + y)$$

تمرین ۲۵: به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را ثابت کنید.

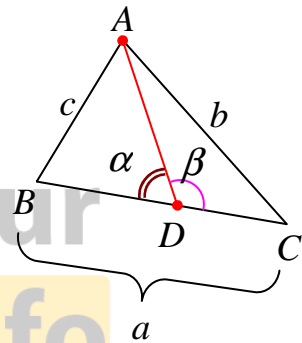
حل: گیریم که نقطه‌ی D پای میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد. پس $DB = DC$ لذا طبق قضیه استوارت داریم.

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\xrightarrow{DB=DC} AB^2 \cdot DB + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB^2 \cdot BC$$

$$\xrightarrow{BC=2DB} c^2 \cdot DB + b^2 \cdot DB = m_a^2 \cdot 2DB + DB^2 \cdot a$$

$$\xrightarrow{\div DB} c^2 + b^2 = 2m_a^2 + DB \cdot a$$

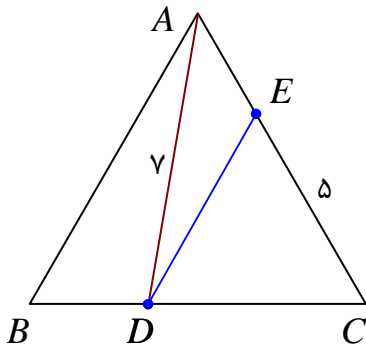


$$\xrightarrow{DB=\frac{1}{2}a} c^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \rightarrow m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

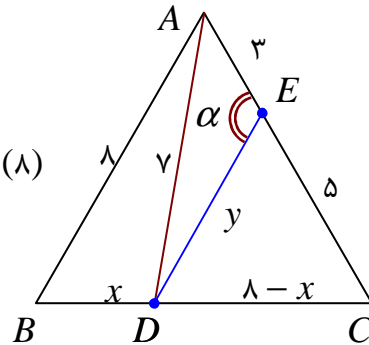
تمرین ۲۶: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع ۸

واحد، روی ضلع BC نقطه‌ی D ، به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A ، همچنین روی ضلع AC نقطه‌ی E ، به فاصله‌ی ۵ واحد از رأس C در نظر گرفته شده‌اند. با فرض اینکه $CD > BD$ ، تعیین کنید که

نقطه‌ی D از نقاط B و C چه فاصله‌ای دارد؟



حل: قرار می دهیم، $BD = x$ و $DE = y$ و $\angle AED = \alpha$ در این صورت داریم:



$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

$$\rightarrow (8)^2 \cdot (\lambda - x) + (8)^2 \cdot (x) = (y)^2 \cdot (\lambda) + (x) \cdot (\lambda - x) \cdot (\lambda)$$

$$\rightarrow 64(\lambda - x) + 64x = 49 \times \lambda + \lambda x(\lambda - x)$$

$$\rightarrow 64 \times \lambda - 64x + 64x = 49 \times \lambda + \lambda x(\lambda - x)$$

$$\xrightarrow{\div \lambda} \rightarrow 64 = 49 + \lambda x - x^2 \rightarrow x^2 - \lambda x + 15 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$$

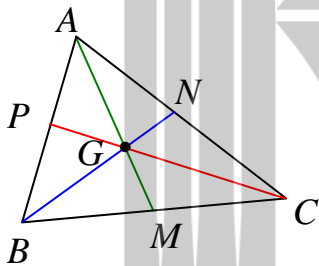
$$\xrightarrow{\div \lambda} \rightarrow x = 3, \quad x = 5 \xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, \quad DC = 5$$

تمرین ۲۷: اگر AM و BN و CP میانه های مثلث ABC و نقطه G محل تلاقی آنها باشد.

ثابت کنید که:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

حل:



$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \rightarrow 2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{AG = \frac{2}{3}m_a \rightarrow m_a = \frac{3}{2}AG}{\rightarrow 2\left(\frac{3}{2}AG\right)^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{9}{2}AG^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \rightarrow AG^2 = \frac{2}{9}\left(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2}{9}b^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2$$

به همین ترتیب:

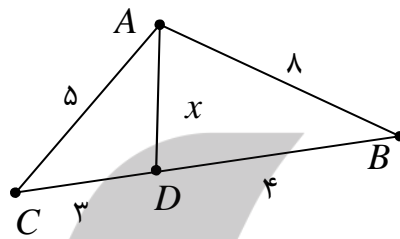
$$BG^2 = \frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}b^2$$

$$CG^2 = \frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2$$

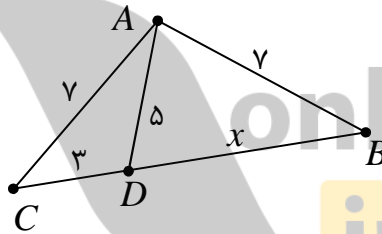
که با جمع هر سه تساوی فوق داریم :

$$\begin{aligned}
 & AG^2 + BG^2 + CG^2 \\
 &= \left(\frac{2}{9}b^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}a^2\right) + \left(\frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{9}b^2\right) + \left(\frac{2}{9}a^2 + \frac{2}{9}b^2 - \frac{1}{9}c^2\right) \\
 &= \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

۲۸: با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی پاره خط AD را به دست آورید.



۲۹: با توجه به شکل مقابل مقدار x را بیابید.

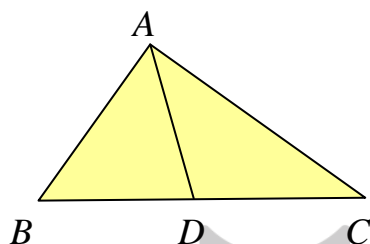


درس سوم : قضیه نیمسازهای زاویه های داخلی

یکی دیگر از قضایای مهم هندسی ، قضیه نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث است. در این درس با این قضیه و روش محاسبه طول نیمساز آشنا شویم.

قضیه نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث : در هر مثلث ، نیمساز هر زاویه داخلی ، ضلع

روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می کند.



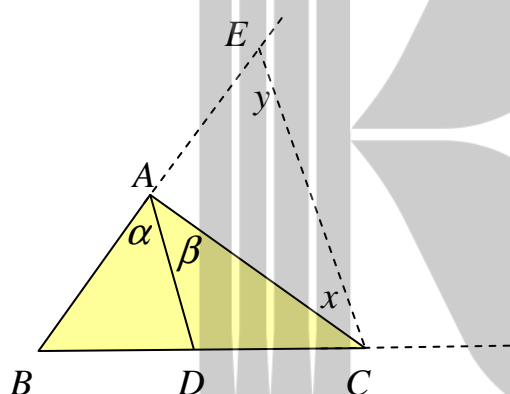
پاره خط AD نیمساز زاویه BAC است. فرض :

$$\text{حکم : } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

اثبات: اضلاع AB و BC را از طرف نقاط A و C امتداد داده و سپس از نقطه C خطی موازی با نیمساز

زاویه A یعنی AD رسم می کنیم تا امتداد AB را

در نقطه E قطع کند. در این صورت داریم:



$$AD \parallel CE \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \angle \beta = \angle x$$

$$AD \parallel CE \text{ و } BE \text{ مورب} \Rightarrow \angle \alpha = \angle y$$

از طرفی طبق فرض داشتیم: $\angle \alpha = \angle \beta$ پس $\angle x = \angle y$ و در نتیجه مثلث ACE متساوی الساقین

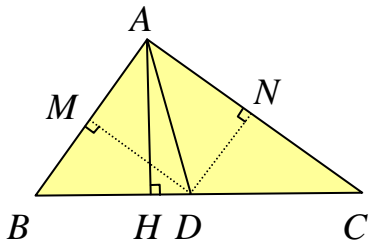
$$\text{است، یعنی } AE = AC$$

از طرفی طبق قضیه تالس داریم:

$$AD \parallel CE \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD} \xrightarrow{AE=AC} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

روش دوم : از نقطه D بر اضلاع مثلث دو خط DM و DN را عمود می کنیم. می دانیم که هر نقطه

روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس $DM = DN$ از طرفی:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BD}{\frac{1}{2} AH \times DC} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$$

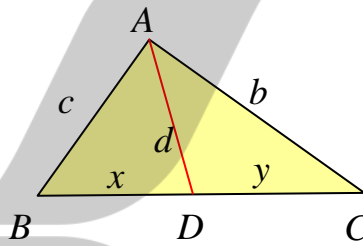
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} DM \times AB}{\frac{1}{2} DN \times AC} \stackrel{DM=DN}{=} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$

قضیه‌ی نیمسازها: در هر مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ اگر AD

نیمساز زاویه‌ی داخلی A داریم:

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

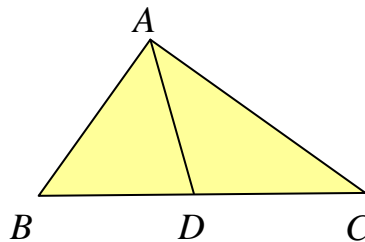


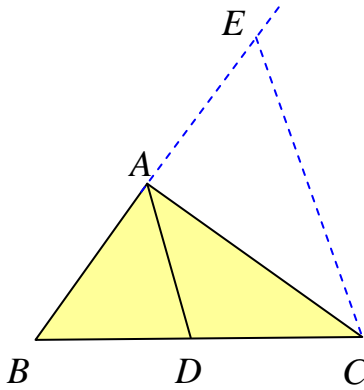
تمرین ۱: نقطه‌ی D روی ضلع BC از مثلث ABC طوری قرار دارد که $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$. ثابت کنید،

نقطه‌ی D پای نیمساز نظیر رأس A است.

فرض: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

پاره خط AD نیمساز زاویه‌ی BAC است. حکم





اثبات: از نقطه‌ی C خطی موازی با AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌ی E قطع کند. در این صورت و بنابر قضیه‌ی

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE} \quad (1) \quad \text{تالس در مثلث } BCE \text{ داریم:}$$

اکنون با توجه به فرض داریم:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad (2)$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \rightarrow AE = AC \quad \text{بنابر نتایج ۱ و ۲ می‌توان نوشت:}$$

یعنی مثلث ACE متساوی الساقین است. پس $\angle AEC = \angle ACE$. و چون AD و CE موازیند، پس:

$$\begin{cases} \angle CAD = \angle ACE \\ \angle BAD = \angle AEC \end{cases} \rightarrow \angle BAD = \angle CAD$$

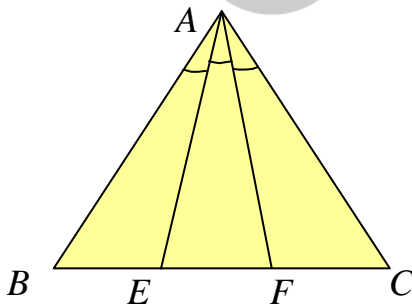
یعنی AD نیمساز زاویه‌ی BAC است.

نتیجه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند و برعکس

تمرین ۲: در شکل مقابل AE و AF زاویه‌ی A را به سه

قسمت برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید که:

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB \times AE}{AC \times AF}$$



اثبات:

الف: در مثلث ABF پاره خط AE نیمساز زاویه‌ی BAF است. پس:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AF}{EF} \rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{BE}{EF} \quad (1)$$

ب: در مثلث AEC پاره خط AF نیمساز زاویه EAC است. پس:

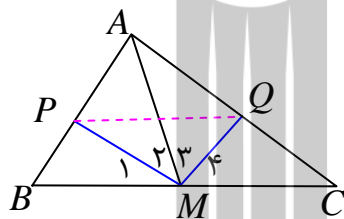
$$\frac{AE}{EF} = \frac{AC}{CF} \rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{EF}{CF} \quad (2)$$

اکنون نتایج ۱ و ۲ را در همدیگر ضرب می کنیم.

$$\frac{AB}{AF} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{EF} \times \frac{EF}{CF} \rightarrow \frac{AB \times AE}{AC \times AF} = \frac{BE}{CF}$$

تمرین ۳: در مثلث ABC میانه AM و نیمساز های دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید. اگر

این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC



موازیند.

اثبات:

در مثلث AMB پاره خط PM نیمساز رأس M است، پس:

$$\frac{MB}{PB} = \frac{AM}{AP} \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} \quad (1)$$

در مثلث AMC پاره خط QM نیمساز رأس M است، پس:

$$\frac{MC}{QC} = \frac{AM}{AQ} \rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \quad (2)$$

از مقایسه ی روابط ۱ و ۲ و بنابر اینکه $MB = MC$ ، پس می توان نوشت: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

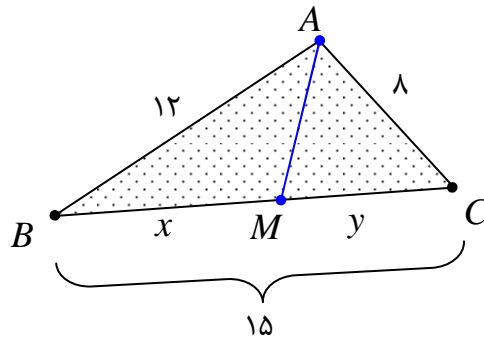
و طبق عکس قضیه ی تالس نتیجه می شود: $PQ \parallel BC$

تمرین ۴: اندازه های سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی متر می باشند. اندازه ی پاره خط هایی که نیمساز

درونی زاویه ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید.

حل: می دانیم که در هر مثلث بزرگترین زاویه روبرو به بزرگترین ضلع است. از طرفی نیمساز هر زاویه ی

داخلی ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می کند. پس:



$$x + y = 15$$

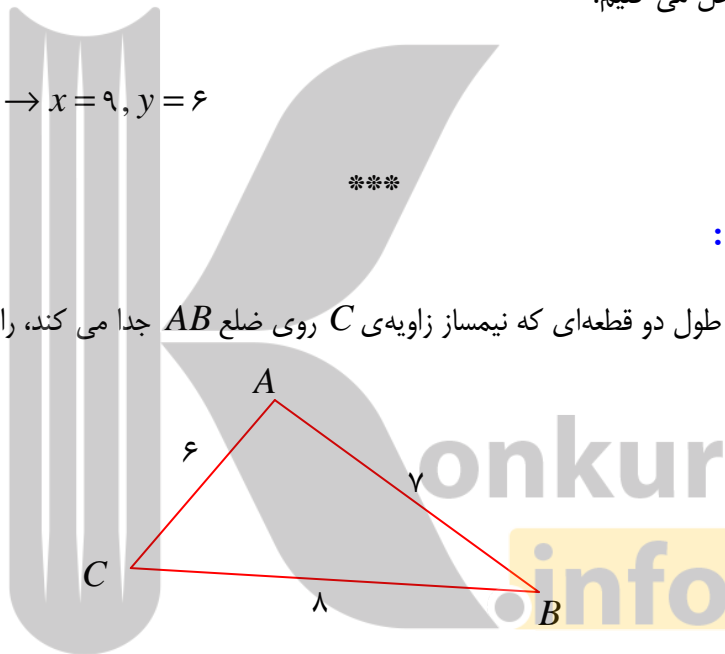
$$\frac{12}{x} = \frac{8}{y} \rightarrow \frac{12}{8} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{y} \rightarrow 2x = 3y \rightarrow 2x - 3y = 0$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9, y = 6$$

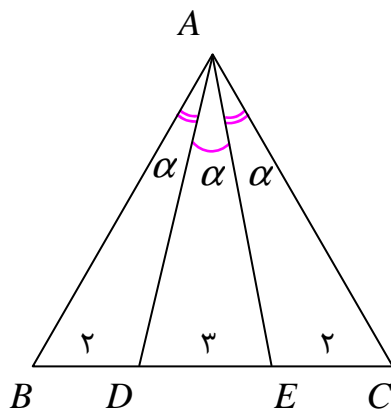
تمرین برای حل :

۵: در شکل روبرو، طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه‌ی C روی ضلع AB جدا می کند، را حساب کنید.



۶: در مثلث ABC داریم، $AB = 7$ و $AC = 5$ و $BC = 10$ است. طول های دو قطعه‌ای را که نیمساز

زاویه‌ی A روی ضلع مقابل آن ایجاد می کند، را به دست آورید.

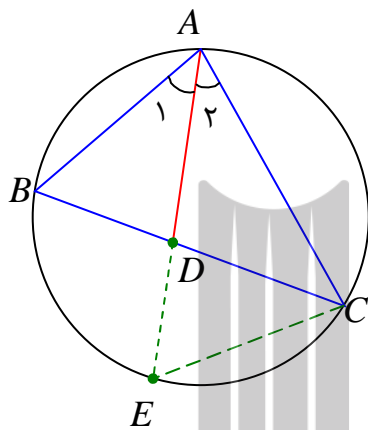


۷: با توجه به شکل زیر، حاصل $\frac{AB \times AD}{AC \times AE}$ را بدست آورید.

محاسبه‌ی طول نیمسازها

در این قسمت رابطه‌ی ای را معرفی می‌کنیم که به کمک آن می‌توان، به کمک اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه-ی نیمساز زاویه‌ی داخلی مثلث را محاسبه کرد.

قضیه‌ی طول نیمسازها: در هر مثلث، مربع اندازه‌ی هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه-ی دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه‌ی دو قطعه‌ی ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



اثبات: نیمساز زاویه‌ی داخلی A را امتداد می‌دهیم. تا دایره‌ی محیطی مثلث را در نقطه‌ی E قطع کند. سپس نقطه‌ی E را به C وصل می‌کنیم. در این صورت چون AD نیمساز زاویه‌ی A است، پس $\angle A_1 = \angle A_2$. همچنین چون دو زاویه‌ی B و E محاطی بوده و برابر نصف کمان AC می‌باشند، پس $\angle B = \angle E$. لذا دو مثلث ABD و AEC به حالت تساوی دو زاویه متشابهند.

پس:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$

از تناسب اول می‌توان نتیجه گرفت:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$

و چون $AE = AD + DE$ داریم.

$$AB \cdot AC = AD \cdot (AD + DE)$$

یا اینکه:

$$AB \cdot AC = AD^2 + AD \cdot DE \quad (1)$$

همچنین بنابر اینکه دو وتر AE و BC در داخل دایره متقاطع هستند. پس:

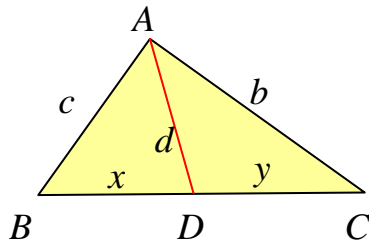
$$AD \cdot DE = BD \cdot DC \quad (2)$$

در نهایت از روابط (1) و (2) داریم:

$$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC$$

یعنی:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$



قضیهی طول نیمساز زاویهی داخلی: در مثلث ABC با

اضلاع $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ ، اگر نیمساز زاویهی A

برابر d و این نیمساز، ضلع a را به دو قطعه به طول های y و x

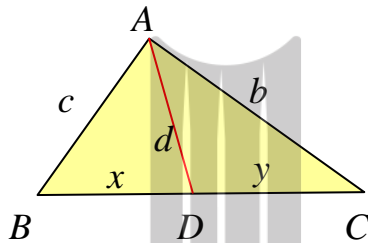
تبدیل کند، در این صورت می توان نوشت:

$$d_a = \sqrt{bc - xy}$$

تمرین ۸: در مثلث ABC ، $AB = 3$ و $AC = 5$ و $BC = 7$ است. نیمساز زاویهی داخلی A را به

دست آورید.

حل: به کمک قضیهی نیمسازها داریم.



$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{8}{5}$$

$$\xrightarrow{x+y=7} \frac{7}{y} = \frac{8}{5} \rightarrow y = \frac{35}{8}$$

$$\xrightarrow{x+y=7} x = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

اکنون به کمک قضیهی طول نیمسازها می توان نوشت:

$$d_a = \sqrt{bc - xy}$$

$$\rightarrow d_a = \sqrt{(5)(3) - \left(\frac{21}{8}\right)\left(\frac{35}{8}\right)} = \sqrt{15 - \frac{735}{64}} = \sqrt{\frac{225}{64}} \rightarrow d_a = \frac{15}{8}$$

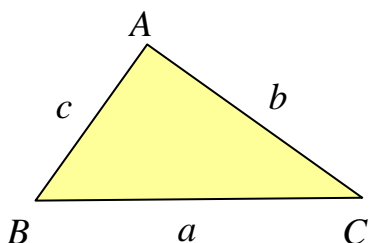
تمرین برای حل:

۹: در مثلث ABC ، $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. نیمساز زاویهی داخلی C را به دست

آورید.

درس چهارم : قضیه هرون برای محاسبه ی مساحت مثلث

به کمک اندازه‌ی سه ضلع مثلث می توان مساحت آن را محاسبه کرد. در این درس، با این روش را که موسوم به دستور هرون می باشد، آشنا شویم.



قضیه هرون : اگر c و b و a اندازه های سه ضلع یک

مثلث و $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط آن باشد. می توان

مساحت مثلث را به صورت زیر به دست آورد.

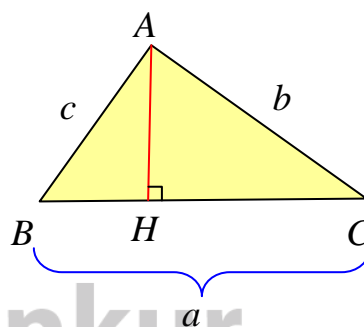
$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}$$

اثبات¹: در ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می کنیم. سپس رابطه ی فیثاغورس را در مثلث ABH می نویسیم.

$$\Delta(ABH) : AH^2 + BH^2 = c^2$$

$$\rightarrow AH^2 + (a - CH)^2 = c^2$$

$$\rightarrow AH^2 + a^2 - 2a \cdot CH + CH^2 = c^2$$



و چون در مثلث ACH داریم، $CH^2 + AH^2 = b^2$ پس :

$$b^2 + a^2 - 2a \cdot CH = c^2$$

لذا

$$CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

باز چون در مثلث ACH رابطه ی $CH^2 = b^2 - AH^2$ را داریم. پس:

$$AH^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

در ادامه داریم:

¹. اثبات این قضیه برای مطالعه است.

$$\begin{aligned}
AH^r &= \left[b - \left(\frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right) \right] \left[b + \left(\frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right) \right] \\
\rightarrow AH^r &= \left[\frac{2ab}{2a} - \frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right] \left[\frac{2ab}{2a} + \frac{a^r + b^r - c^r}{2a} \right] \\
\rightarrow AH^r &= \left(\frac{2ab - a^r - b^r + c^r}{2a} \right) \left(\frac{2ab + a^r + b^r - c^r}{2a} \right) \\
\rightarrow AH^r &= \frac{c^r - (a-b)^r}{2a} \times \frac{(a+b)^r - c^r}{2a} \\
\rightarrow AH^r &= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2a} \times \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2a} \\
\rightarrow AH^r &= \frac{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^r} \\
\rightarrow AH^r &= \frac{(a+b+c)(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)}{16} \times \frac{4}{a^r} \\
\rightarrow AH^r &= \frac{a+b+c}{2} \times \frac{c-a+b}{2} \times \frac{c+a-b}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{4}{a^r} \\
\rightarrow AH^r &= \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \times \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \times \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \times \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right) \times \frac{4}{a^r} \\
\frac{p = \frac{a+b+c}{2}}{2} \rightarrow AH^r &= p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c) \times \frac{4}{a^r} \\
\rightarrow AH &= \frac{r}{|a|} \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)} \\
\frac{|a|=a}{a} \rightarrow AH &= \frac{r}{a} \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}
\end{aligned}$$

با داشتن ارتفاع مثلث می توان مساحت را نیز محاسبه نمود.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} a \cdot AH \rightarrow S = \frac{1}{2} a \times \frac{r}{a} \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)} \\
\rightarrow S &= \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)}
\end{aligned}$$

توجه: چون در هر مثلث $S = \frac{1}{2}ah_a$ ، پس می توان نوشت:

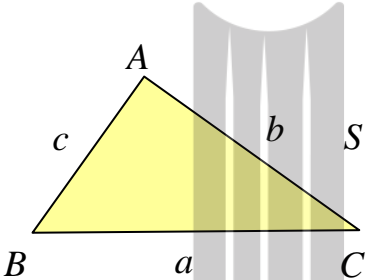
$$h_a = \frac{2S}{a}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$h_b = \frac{2S}{b} \quad \text{و} \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

یعنی می توان بدین شکل اندازه‌ی ارتفاع‌های مثلث را نیز به دست آورد.

قضیه‌ی هرون: مساحت مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ ، به صورت زیر



است.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن $p = \frac{a+b+c}{2}$ (نصف محیط) می باشد.

تمرین ۱: به کمک دستور هرون مساحت و ارتفاع‌های مثلثی را حساب کنید که اندازه‌ی اضلاع آن ۱۳

و ۱۴ و ۱۵ باشند.

حل:

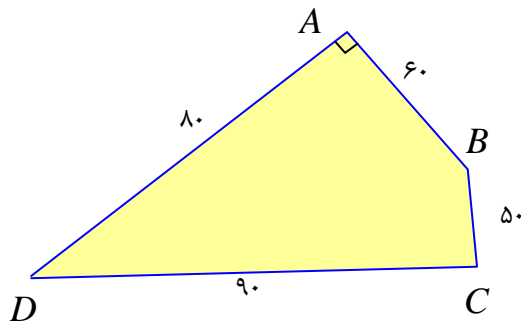
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{p \times (p-a) \times (p-b) \times (p-c)} = \sqrt{21 \times (21-13) \times (21-14) \times (21-15)}$$

$$\rightarrow S = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^2} = 84$$

$$\rightarrow \begin{cases} h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13} \\ h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \times 84}{14} = 12 \\ h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \times 84}{15} = \frac{56}{5} \end{cases}$$

تمرین ۲: مساحت چهارضلعی شکل مقابل را به دست آورید.



حل: ابتدا قطر BD را رسم می کنیم. در این صورت چون مثلث ABD قائم الزویه است. پس:

$$BD^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10000$$

$$\rightarrow BD = 100$$

$$\Delta(ABD): S_1 = \frac{1}{2} (80) \times (60) = 2400$$

$$\Delta(CBD): \begin{cases} p = \frac{100 + 50 + 90}{2} = 120 \\ S_2 = \sqrt{120 \times (120 - 100)(120 - 50)(120 - 90)} = 600\sqrt{14} \end{cases}$$

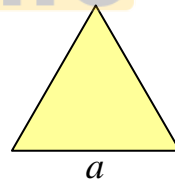
$$\rightarrow S_f = S_1 + S_2 = 2400 + 600\sqrt{14}$$

تمرین ۳: به کمک دستور هرولن مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

حل:

$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)}$$

$$\xrightarrow{b=c=a} S = \sqrt{p(p - a)^3}$$



$$\xrightarrow{p = \frac{3a}{2}} S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a\right)^3} = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

تمرین برای حل :

۴: مساحت مثلثی به اضلاع ۷ و ۸ و ۹ را به دست آورید.

۵: در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ سانتی متر، اندازه‌ی ارتفاع وارد از رأس با زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟

(د) ۹/۵

(ج) ۹/۶

(ب) ۸/۵

(الف) ۱۰/۵

دستوری سینوسی برای محاسبه‌ی مساحت مثلث

در این قسمت به روشی دیگر به یک دستور دیگر برای محاسبه‌ی مساحت مثلث می پردازیم.

قضیه (محاسبه‌ی مساحت مثلث): مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه-

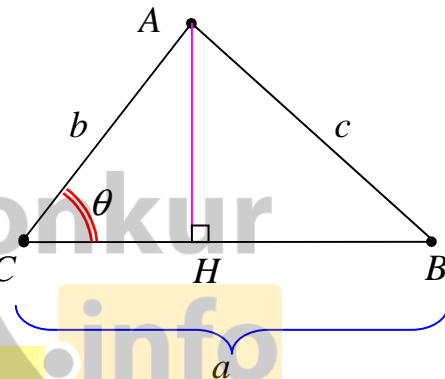
ی بین آن دو ضلع برابر است.

اثبات :

$$\Delta(ACH) : \sin \theta = \frac{AH}{AC} \rightarrow AH = AC \times \sin \theta$$

$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} BC \times AC \times \sin \theta$$

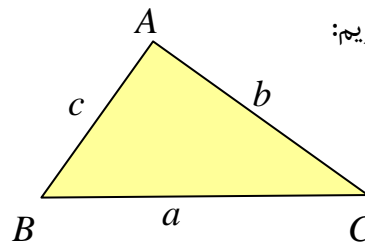
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$



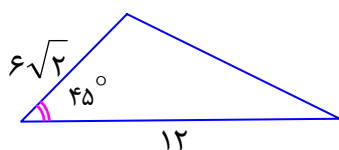
قضیه‌ی سینوسی مساحت مثلث : در هر مثلث ABC با اضلاع $AC = b$ و $BC = a$

و $AB = c$ داریم:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$



تمرین ۶: مساحت مثلث مقابل را حساب کنید.



تمرین ۷: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، را در نظر بگیرید. سپس ثابت کنید:

الف: مساحت این مثلث برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

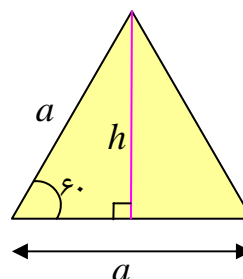
ب: اندازه‌ی ارتفاع مثلث برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

حل:

الف:

$$S = \frac{1}{2}(a)(a)\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$h = \frac{2S}{a} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

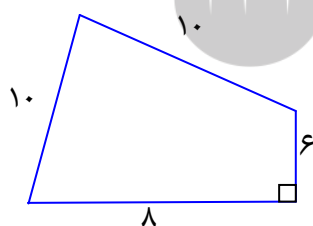


ب:

تمرین برای حل:

۸: مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع، به طول ضلع ۱۰ سانتی متر را حساب کنید.

۹: مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



۱۰: به کمک دستور سینوسی مساحت ثابت کنید در هر مثلث، نسبت

اندازه‌ی یک ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابل برابر نسبت اندازه‌ی ضلع

دیگر به سینوس زاویه‌ی مقابل می باشد. (قضیه‌ی سینوس ها)

۱۱: ثابت کنید که مساحت هر متوازی الاضلاع برابر حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین

آن دو ضلع است.

۱۲: مساحت متوازی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی دو ضلع آن $7\sqrt{3}$ و ۸ سانتی متر و زاویه‌ی بین

آنها 120° درجه است.

۱۳: ثابت کنید که مساحت هر چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه های دو قطر در سینوس کوچکترین زاویه ی بین آن دو قطر است.

۱۴: اگر c و b و a اندازه های سه ضلع یک مثلث و R شعاع دایره ی محیطی آن باشد، ثابت کنید که مساحت مثلث را می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$S = \frac{abc}{4R}$$



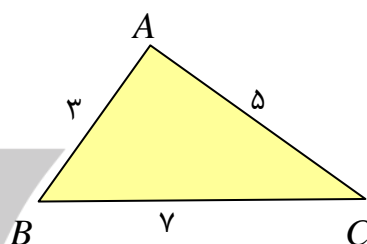
تعیین زاویه های مثلث به کمک مساحت

به کمک دستور هرون و با داشتن اندازه های اضلاع مثلث می توان مساحت را به دست آورد. اگر این مساحت را به کمک دستور سینوسی مساحت نیز محاسبه کرده و برابر همدیگر قرار دهیم، اندازه ی زاویه ها را می توان به دست آورد.

تمرین ۱۵: اندازه های سه ضلع مثلثی ۳ و ۵ و ۷ می باشند. اندازه ی زاویه ی مقابل به ضلع ۷ سانتی متر را به دست آورید.

حل :

$$p = \frac{3 + 5 + 7}{2} = \frac{15}{2}$$



$$S = \sqrt{p \times (p - a) \times (p - b) \times (p - c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \times \left(\frac{15}{2} - 3\right) \times \left(\frac{15}{2} - 5\right) \times \left(\frac{15}{2} - 7\right)}$$

$$\rightarrow S = \sqrt{\frac{15}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2}} = \frac{15}{4} \sqrt{3} \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin A = \frac{15}{2} \times \sin A \quad (2)$$

اکنون به کمک روابط ۱ و ۲ خواهیم داشت:

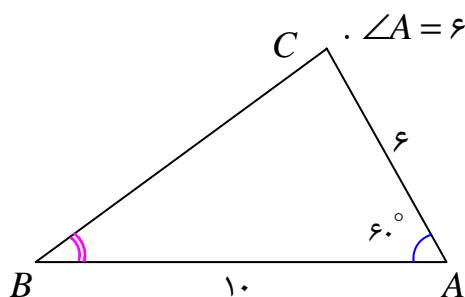
$$\frac{15}{2} \times \sin A = \frac{15}{4} \sqrt{3} \rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \angle A = 60^\circ \text{ or } \angle A = 120^\circ$$

تمرین ۱۶: در مثلث ABC ، $AB = 10$ و $AC = 6$ و $\angle A = 60^\circ$.

الف: طول BC را به دست آورید.

ب: مساحت مثلث را تعیین کنید.

پ: مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.



حل :

الف :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos A$$

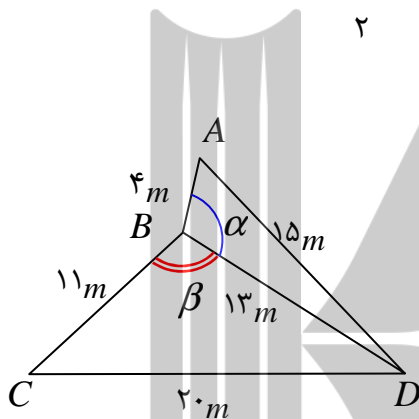
$$\rightarrow BC^2 = 36 + 100 - 2(6)(10)\left(\frac{1}{2}\right) = 76 \rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

ب :

$$S = \frac{1}{2}(AC)(AB) \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

پ :

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \rightarrow \frac{6}{\sin B} = \frac{2\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{6}{2\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{57}}{38}$$



تمرین ۱۷: دو قطعه زمین کوچک به شکل مثلث با یک

دیوار به طول ۱۳ متر، مطابق شکل از هم جدا شده اند. ابعاد

این قطعه زمین ها هم در شکل مشخص شده اند. اگر با

برداشتن دیوار، این دو قطعه به یک زمین تبدیل شود،

مساحت آن چقدر می شود؟ نشان دهید دیوار مشترک با

اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه های برابر می سازد.

حل :

$$\Delta(ABD): \begin{cases} p = \frac{4+13+15}{2} = 16 \\ S = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24 \end{cases}$$

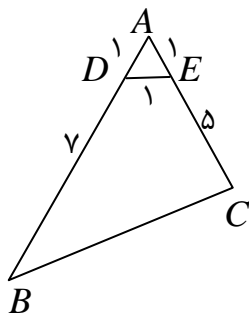
$$\Delta(BCD): \begin{cases} p = \frac{11+13+20}{2} = 22 \\ S = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66 \end{cases}$$

$$S_{ABCD} = A_{\Delta(ABD)} + S_{\Delta(BCD)} = 24 + 66 = 90 \text{ m}^2$$

$$S_{\Delta(ABD)} = \frac{1}{2} AB \times BD \sin \alpha \rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13} \quad (1)$$

$$S_{\Delta(BCD)} = \frac{1}{2} BC \times BD \sin \beta \rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin \beta \rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \sin \alpha = \sin \beta \rightarrow \alpha = \beta$$



تمرین ۱۸: با توجه به شکل مقابل،

اولاً: طول BC را به دست آورید.

ثانیاً: مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.

حل: با توجه به اینکه مثلث ADE متساوی الاضلاع است، پس زاویه DAE برابر 60° درجه است. پس:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos A$$

$$\rightarrow BC^2 = 36 + 64 - 2(6)(8)\left(\frac{1}{2}\right) = 52 \rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{\Delta(ABC)} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta(ADE)} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = S_{\Delta(ABC)} - S_{\Delta(ADE)} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47\sqrt{3}}{4}$$

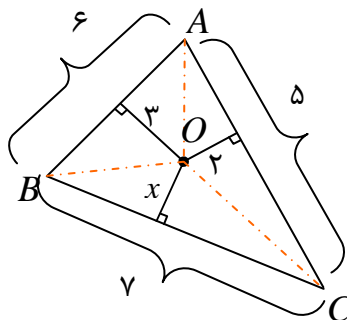
تمرین ۱۹: در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و ۶ به

ترتیب به فاصله ی ۲ و ۳ سانتی متر است، از ضلع بزرگتر چه فاصله ای دارد؟

حل:

$$\Delta(ABC): \begin{cases} p = \frac{5+6+7}{2} = 9 \\ S = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Delta(AOB): S = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$



$$\Delta(AOC): S = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$\Delta(BOC): S = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

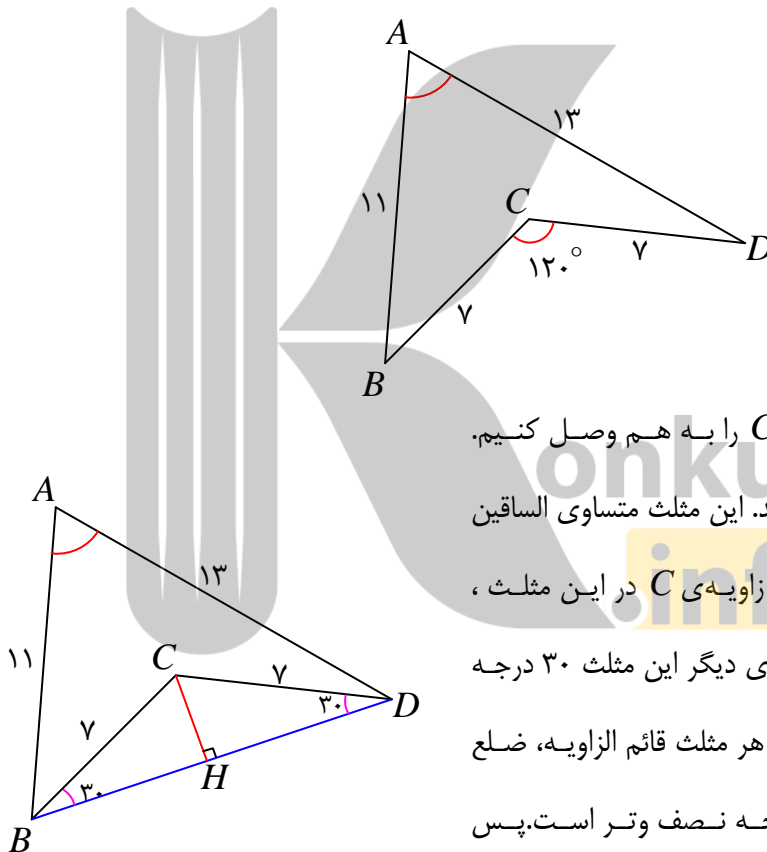
$$S_{\Delta(ABC)} = S_{\Delta(OAB)} + S_{\Delta(OAC)} + S_{\Delta(OBC)}$$

$$\rightarrow 6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.2$$

تمرین ۲۰: با توجه به شکل زیر

ب: مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بیابید.

الف: اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.



حل: اگر دو رأس B و C را به هم وصل کنیم، مثلث BCD بوجود می‌آید. این مثلث متساوی الساقین است. با توجه به اندازه‌ی زاویه‌ی C در این مثلث، معلوم می‌شود که دو زاویه‌ی دیگر این مثلث 30° درجه می‌باشند. نظر به اینکه در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبرو به زاویه‌ی 30° درجه نصف وتر است. پس

$$CH = \frac{BC}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta(BCD)} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times BD = \frac{7}{4}BD \\ S_{\Delta(BCD)} &= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{7}{4}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$P_{\Delta(ABD)} = \frac{11 + 13 + 7\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta(ABD)} = \sqrt{\left(12 + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)\left(12 + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 7\sqrt{3}\right)\left(12 + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 11\right)\left(12 + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 13\right)}$$

$$S_{\Delta(ABD)} = \sqrt{\left(12 + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)\left(12 - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{7\sqrt{3}}{2} - 1\right)}$$

$$S_{\Delta(ABD)} = \sqrt{\left(144 + \frac{174}{4}\right)\left(\frac{147}{4} - 1\right)} = \frac{143}{4}\sqrt{3}$$

از طرفی

$$S_{\Delta(ABD)} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A$$

لذا

$$\frac{143}{2} \sin A = \frac{143}{4} \sqrt{3} \rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \angle A = 60^\circ$$

همچنین

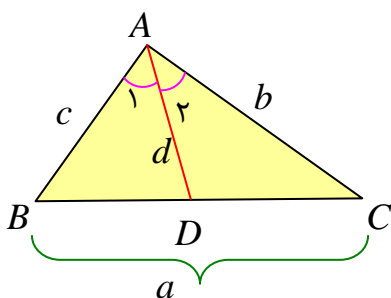
$$S_{ABCD} = S_{\Delta(ABD)} - S_{\Delta(BCD)} = \frac{143}{4} - \frac{49}{4} = \frac{94}{4} \sqrt{3}$$

محاسبه‌ی طول نیمسازها

در این قسمت رابطه‌ی را معرفی می‌کنیم که به کمک آن می‌توان، به کمک اندازه‌ی اضلاع مثلث، اندازه‌ی نیمساز زاویه‌ی داخلی مثلث را محاسبه کرد.

قضیه (طول نیمساز زاویه‌ی داخلی): در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$

و $AB = c$ ، اگر نیمساز زاویه‌ی A برابر d_a باشد. آنگاه



$$d_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

اثبات :

$$S_{\Delta(ABC)} = S_{\Delta(ABD)} + S_{\Delta(ACD)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AD \times AC \times \sin \frac{A}{2}$$

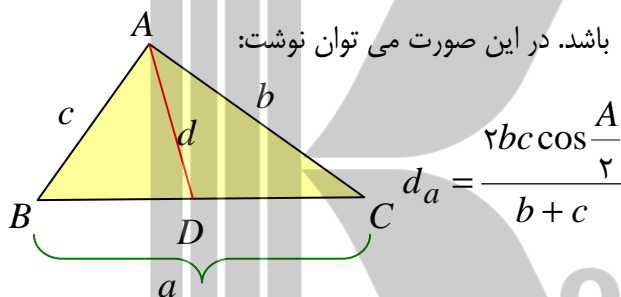
$$\xrightarrow{\times 2} AB \times AC \times \sin A = AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + AD \times AC \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\rightarrow AB \times AC \times \sin A = AD \times \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\frac{\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin A} \rightarrow 2 AB \times AC \times \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = AD \times \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\rightarrow 2 AB \times AC \times \cos \frac{A}{2} = AD \times (AB + AC) \rightarrow AD = \frac{2 AB \times AC \times \cos \frac{A}{2}}{AB + AC}$$

قضیهی طول نیمساز زاویهی داخلی: در مثلث ABC با اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ ، اگر نیمساز زاویهی A برابر d_a باشد. در این صورت می توان نوشت:

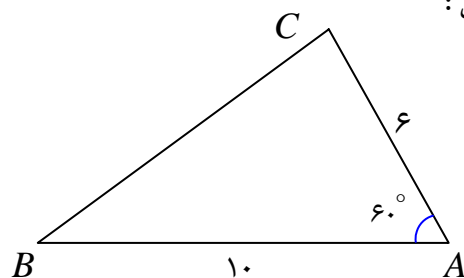


تمرین ۲۱: در مثلث ABC ، $AB = 10$ ، $AC = 6$ و $\angle A = 60^\circ$. طول نیمساز زاویهی A را به

دست آورید.

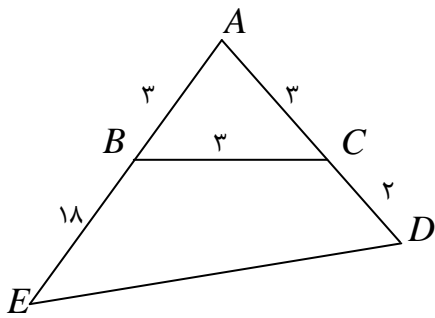
حل:

$$d_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2(6)(10) \cos 30^\circ}{6+10} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



تمرین برای حل :

۲۲: در شکل مقابل

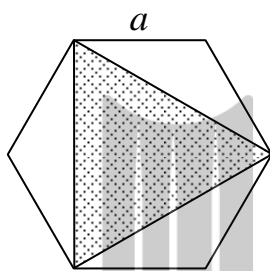


الف : طول ضلع DE را بدست آورید.

ب : مساحت چهارضلعی $BCDE$ را بیابید.

۲۳: در شکل مقابل شش ضلعی منتظم به ضلع a داده شده است. مساحت مثلثی که از وصل کردن یک در میان

رئوس شش ضلعی تشکیل می شود را تعیین کنید.



konkur
info

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

