فصل دوم: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۱- نگاشت:

یک نگاشت از D به R ، یک عمل نظیر سازی است که به هر عضو مجموعه‌ی D یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی R را نظیر می‌کند.

۲- تبدیل:

تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه‌ی A از صفحه P ، دقیقا یک نقطه مثل A' را از صفحه P نظیر می‌کند و بالعکس،
هر نقطه‌ی A' ازصفحه P ، دقیقا تصویر یک نقطه‌ی A از صفحه‌ی P است.

اگر تبدیل را با حرف T نشان دهیم، آن را به‌صورت مقابل می‌نویسیم
$$\begin{cases} T : P \to P \\ T(A) = A' \end{cases}$$

یا:
(تبدیل، نگاشتی یک به یک از صفحه بروی خودش است.
یعنی در تبدیل هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.)
$$T(A) = A \to T(x , y) = (x' , y')$$

۳- تصویر:

تبدیل ها می‌توانند موقعیت و اندازه‌ی پاره‌خط یا شکل را تغییر دهند. به تبدیل یافته‌ی یک شکل اولیه، تصویر آن شکل گوییم.

۴- نقطه‌ی ثابت تبدیل :

در هر تبدیل ، نقطه ای را که تبدیل یافته‌ی آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود را نقطه‌ی ثابت تبدیل می‌نامیم.
یک تبدیل ممکن است یک یا دو یا ..... بیشمار نقطه‌ی ثابت داشته باشد یا ممکن است هیچ نقطه‌ی ثابتی نداشته باشد.
برای یافتن نقطه‌ی ثابت تبدیل T باید معادله $T(x , y) = (x , y)$ را حل کنیم.

۵- تبدیل‌های طولپا (ایزومتری) :

تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند ، تبدیلات طولپا (ایزومتری) می‌نامیم.
اگر پاره‌خط $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB تحت یک تبدیل طولپا باشد، آنگاه $A'B' = AB$ است.

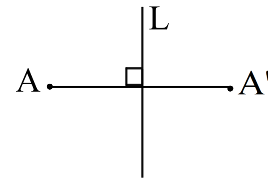
۶- بازتاب :

بازتاب نسبت به خط (تقارن محوری)، تبدیلی است که با یک خط معلوم مانند L به‌نام محور بازتاب یا محور تقارن مشخص می‌شود.

نقطه‌ی M' تصویر نقطه M در بازتاب نسبت به خط L است هرگاه عمودمنصف پاره خط MM' باشد

معمولا بازتاب نسبت به خط L را با نماد S_L یا همان S نمایش می‌دهند

$S_L(A) = A' \Leftrightarrow$ خط L عمود منصف AA' باشد



۷- ویژگی‌های بازتاب نسبت به خط :

۱) تصویر هر نقطه روی محور بازتاب بر خودش منطبق است $A \in L \Rightarrow S(A) = A$
بنابر این بازتاب دارای بیشمار نقطه‌ی ثابت است که روی محور آن قرار دارد.

۲) در هر بازتاب اندازه‌ی هر پاره‌خط و اندازه‌ی تصویر آن باهم برابر است یعنی بازتاب تبدیل طولپا (ایزومتری) است.
$S(AB) = A'B' \Rightarrow AB = A'B'$

۳) بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این‌که خط و محور بازتاب موازی هم یا بر هم عمود باشند.

- در حالتی که خط با محور بازتاب متقاطع باشد آنگاه محور بازتاب نیمساز زاویه بین خط و تبدیل یافته آن خواهد بود.

۴) بازتاب نسبت به خط اندازه‌ی زاویه را تغییر نمی‌دهد

۵) بازتاب نسبت به خط جهت شکل را تغییر می‌دهد.

۶) بازتاب نسبت به خط دارای بی‌شمار نقطه‌ی ثابت است که همگی روی محور بازتاب قرار دارند.

۷) در هر بازتاب تصویر تصویر هر نقطه بر آن نقطه منطبق است. یعنی $SoS(A) = S(S(A)) = S(A') = A$

۸) ترکیب بازتابی با محور L و انتقالی با بردار $\vec{v}$ که $\vec{v} \perp L$ ، بازتابی است به محور L' ، که خط L' از انتقال L توسط بردار $\frac{\vec{v'}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۸- حالت‌های خاص بازتاب نسبت به خط :

۱) بازتاب نسبت به محور x ها: $S(x , y) = (x , -y)$

۲) بازتاب نسبت به محور y ها: $S(x , y) = (-x , y)$

۳) بازتاب نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) : $S(x , y) = (y , x)$

۴) بازتاب نسبت به خط $y = -x$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) : $S(x , y) = (-y , -x)$

۵) بازتاب نسبت به خط $x = k$: $S(x , y) = (۲k - x , y)$

۶) بازتاب نسبت به خط $y = k$: $S(x , y) = (x , ۲k - y)$

۹- بازتاب نسبت به نقطه :

بازتاب نسبت به نقطه یا (تقارن مرکزی) تبدیلی است که با یک نقطه‌ی معلوم به‌نام مرکز بازتاب (مرکز تقارن) مشخص می‌شود.

A' تصویر نقطه‌ی A در بازتاب به مرکز O است : هرگاه O وسط AA' باشد.

تقارن مرکزی را با نماد S_O نشان می‌دهند. O وسط AA' است $\Leftrightarrow S_O(A) = A'$

۱۰- حالت‌های خاص بازتاب نسبت به نقطه :

۱) بازتاب نسبت به نقطه $M(\alpha , \beta)$: $S(x , y) = (2\alpha - x , 2\beta - y)$

۲) بازتاب نسبت به $O(0 , 0)$ (مبدا مختصات) : $S(x , y) = (- x , - y)$

۱۱- خواص بازتاب نسبت به نقطه :

۱) تصویر هرخط در بازتاب نسبت به نقطه، خطی است موازی با آن. بنابر این بازتاب نسبت به نقطه شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

- اگر مرکز بازتاب روی خط مفروض باشد تصویر خط بر خودش منطبق است.

۲) بازتاب نسبت به نقطه طولپا (ایزومتری) است.

۳) بازتاب نسبت به نقطه، اندازه‌ی زاویه را تغییر نمی‌دهد.

۴) بازتاب نسبت به نقطه، جهت را تغییر نمی‌دهد.

۵) ترکیب دو بازتاب نسبت به نقطه، یک انتقال است. $S_{O'} o S_O(A) = T_{2OO'}(A) = A'$

۶) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط مفروض تحت بازتاب به مرکز $O(\alpha , \beta)$ ، کافی است که در معادله خط به جای x و y به ترتیب $2\alpha - x$ و $2\beta - y$ را قرار دهیم.

۷) ترکیب یک بازتاب نسبت به نقطه و یک انتقال ، همواره یک بازتاب نسبت به نقطه است.

۱۲- محور تقارن و مرکز تقارن :

شکلی دارای خط تقارن است، هرگاه خطی مانند L وجود داشته باشد، به‌طوری که تصویر شکل تحت بازتاب نسبت به خط L بر خودش منطبق شود. در این‌صورت خط L محور تقارن شکل است.

شکلی دارای مرکز تقارن است، هرگاه نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد، به‌طوری که تصویر شکل تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی O بر خود شکل منطبق شود. در این صورت نقطه‌ی O مرکز تقارن شکل می‌باشد.

- هر n ضلعی منتظم دارای n محور تقارن است

اگر n زوج باشد آن شکل یک مرکز تقارن دارد ولی اگر n فرد باشد، شکل مرکز تقارن ندارد.

۱۳- انتقال :

انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

اگر A' تصویر A در انتقال با بردار $\vec{v}$ باشد آن را به‌صورت $T_{\vec{v}}(A) = A'$ می‌نویسیم.

- اگر $\vec{v} = (a , b)$ بردار انتقال و A' تصویر نقطه‌ی $A(x , y)$ در این انتقال باشد، ضابطه‌ی انتقال به‌صورت $T(x , y) = (x + a , y + b)$ می‌باشد.

- در ضابطه‌ی انتقال باید ضریب x و y یک باشد و همچنین باهم جابجا نشوند.

۱۴- خواص انتقال :

۱) انتقال یک تبدیل طولپا (ایزومتری) است. $T_{\vec{v}}(AB) = A'B' \Rightarrow AB = A'B'$

بنابر این تصویر هر چندضلعی در یک انتقال، با آن چندضلعی همنهشت است

۲) تصویر یک خط تحت انتقال، با آن خط موازی است. یعنی انتقال شیب خط را تغییر نمی‌دهد
(اگر بردار انتقال با خط مفروض موازی باشد، آنگاه تصویر خط بر خودش منطبق است.)

۳) انتقال با بردار غیر صفر، نقطه‌ی ثابت ندارد، یعنی تصویر هیچ نقطه‌ای بر خودش منطبق نیست.

۴) انتقال اندازه‌ی زاویه را ثابت نگه می‌دارد.

۵) انتقال جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۶) نتیجه ترکیب چند انتقال، انتقالی است که بردار آن مساوی مجموع بردارهای آن انتقال‌ها است.

$$T_{\vec{v_2}} o T_{\vec{v_1}}(A) = T_{\vec{v_1}+\vec{v_2}}(A) = A'$$

۷) ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است.

یعنی برای هرنقطه دلخواه A داریم $Sd_2 o Sd_1(A) = T_{\vec{v}}(A)$

۱۵- دوران :

دوران تبدیلی است که با یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز دوران ویک زاویه‌ی معلوم جهت‌دار به‌نام زاویه‌ی دوران مشخص می‌شود و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M در دوران به مرکز O و زاویه‌ی α است ، هرگاه داشته باشیم

الف) $OM = OM'$

ب) $\widehat{MOM'} = \alpha$

برای به‌دست آوردن M' ، ابتدا M را به O وصل می‌کنیم، سپس زاویه α را روی پاره‌خط OM و در جهت خواسته شده رسم می‌کنیم و روی ضلع دیگر زاویه پاره‌خطی به‌اندازه‌ی OM جدا می‌کنیم تا نقطه M' به‌دست آید.

دوران به مرکز O و زاویه‌ی α را با نماد R_O^{α} نشان می‌دهند و داریم $R_O^{\alpha}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$

۱۶- نکات دوران :

- عمود منصف پاره‌خطی که نقطه و تصویرش را در یک دوران به هم وصل می‌کند، از مرکز دوران می‌گذرد.

- مرکز هر دوران نقطه‌ی ثابت آن دوران است. یعنی مرکز دوران، تنها نقطه‌ای است که تصویرش تحت یک دوران، خودش است.

- اگر M' تصویر M در دوران به مرکز O و زاویه‌ی α باشد، آنگاه M تصویر M' در دوران به مرکز O و زاویه‌ی α - است.

۱۷- حالت‌های خاص دوران :

۱) دوران نقطه‌ی $A(x,y)$ به مرکز مبدا مختصات و زاویه‌ی °۹۰ یا °۲۷۰- به‌صورت $R(x,y) = (-y,x)$ می‌باشد.

- دوران تحت زاویه °۹۰ یا °۲۷۰- ، شیب خط را قرینه و معکوس می‌کند.

۲) دوران نقطه $A(x,y)$ به مرکز مبدا مختصات و زاویه‌ی °۱۸۰± به‌صورت $R(x,y) = (-x,-y)$ می‌باشد.
- دوران تحت زاویه‌ی °۱۸۰± ، که همان بازتاب نسبت به نقطه است، شیب خط را ثابت نگه می‌دارد.

۳) دوران نقطه‌ی $A(x,y)$ به مرکز مبدا مختصات و زاویه‌ی °۲۷۰ یا °۹۰- به‌صورت $R(x,y) = (y,-x)$ می‌باشد.
- دوران تحت زاویه‌ی °۲۷۰ یا °۹۰- ، شیب خط را قرینه و معکوس می‌کند.

۱۸- خواص دوران :

۱) دوران یافته‌ی یک خط خطی است که با آن خط زاویه‌ی مساوی و هم‌جهت با زاویه‌ی دوران می‌سازد.
در نتیجه دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این که زاویه‌ی دوران °۱۸۰± باشد

۲) دوران طولپا (ایزومتری) است.

۳) دوران اندازه‌ی زاویه را تغییر نمی‌دهد.

۴) در دوران جهت شکل ثابت می‌ماند.

۵) ترکیب دو دوران با مرکزهای یکسان و زاویه‌های $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ ، یک دوران با زاویه‌ی $\alpha_۱+\alpha_۲$ می‌باشد.

۶) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز آن محل برخورد محورهای بازتاب‌ها و زاویه‌ی دوران دو برابر زاویه‌ی بین دو محور بازتاب است.

۱۹- تجانس :

تجانس تبدیلی است که با یک نقطه‌ی ثابت O به‌نام مرکز تجانس و یک عدد حقیقی $k \neq 0$ به‌نام نسبت تجانس مشخص می‌شود.

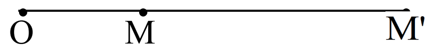
نقطه‌ی M' را مجانس نقطه‌ی M (تصویر نقطه‌ی M) در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم، هرگاه :

الف) نقاط O ، M و M' در یک امتداد باشند.

ب) $OM' = |k| \cdot OM$

اگر $0 < k < 1$ باشد

اگر $k > 1$ باشد



اگر $k < 0$ باشد

- هرگاه $k > 0$ باشد، نقاط M و M' در یک طرف نقطه‌ی O قرار دارند.

و اگر $k < 0$ باشد، نقاط M و M' در دوطرف نقطه‌ی O قرار دارند.

- اگر $k > 0$ باشد، تجانس مستقیم و اگر $k < 0$ باشد، تجانس معکوس نامیده می‌شود.

- اگر $|k| < 1$ باشد، تجانس را انقباضی و اگر $|k| > 1$ باشد، تجانس را انبساطی می‌نامیم.

- اگر $k = 1$ باشد، تجانس یک تبدیل همانی است و اگر $k = -1$ باشد، تجانس، یک بازتاب نسبت به نقطه‌ی O است.

۲۰- ضابطه تحلیلی تجانس :

اگر $M'(x', y')$ تصویر نقطه‌ی $M(x, y)$ در تجانس به مرکز مبدا مختصات و نسبت تجانس k باشد

چون $OM' = k \cdot OM$ ، نتیجه می‌شود:
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Rightarrow H(x, y) = (kx, ky)$$

۲۱- <u>خواص تجانس</u> :

۱) تصویر یک خط در تجانس، خطی موازی با آن است. یعنی تجانس شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

۲) تجانس طول را k برابر و مساحت را k^2 برابر می‌کند.

۳) تجانس اندازه‌ی زاویه را تغییر نمی‌دهد.

۴) تجانس جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۵) خطهایی که نقطه‌های نظیر را در تجانس به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس همرسند.