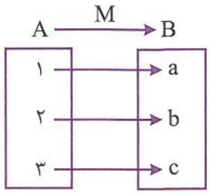
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

نگاشت

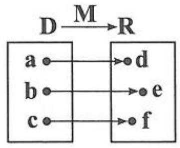


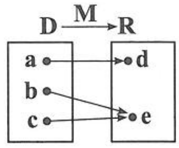
تعریف: به تناظری که به هر عضو مجموعه‌ی A یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی B را نظیر می‌کند، نگاشت از A به B می‌گویند. معمولاً نگاشت را با حروف بزرگ نشان می‌دهند. نماد $M : A \to B$، نگاشت M از مجموعه‌ی A به B را نشان می‌دهد.
به‌طور مثال تناظر مقابل نگاشت M از A به B است و $M(۱) = a$ یعنی a تصویر عدد ۱ تحت نگاشت M است.

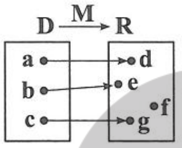
نگاشت از صفحه به صفحه: اگر در نگاشت M از A به B، مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲ = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ باشند، می‌گویند M نگاشتی از صفحه به صفحه است. مثلاً $M(x,y) = (۲x^۲, -y)$ ضابطه‌ی نگاشتی از صفحه به صفحه است که نقطه‌ی $(۱,۱)$ را به نقطه‌ی $(۲,-۱)$ تصویر می‌کند.

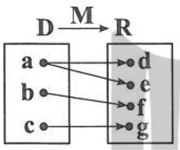
مثال:

۱- در کدام‌یک از موارد زیر، تناظر M، نگاشتی از D به R نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

نگاشت یک‌به‌یک: اگر در نگاشت M از D به R هر عضو مجموعه‌ی R فقط تصویر یک عضو از مجموعه‌ی D باشد، آن‌گاه نگاشت M را یک‌به‌یک گویند. مثلاً نگاشت $M(x,y) = (x-۱, ۲y)$ یک‌به‌یک است. اما نگاشت $E(x,y) = (x^۲, y)$ یک‌به‌یک نیست زیرا تصویر نقاط $(۲,۱)$ و $(-۲,۱)$ نقطه‌ی $(۴,۱)$ است.

تمرین: مشخص کنید کدامیک از نگاشت های زیر یک به یک هستند.

الف) $M(x,y) = (x+1, 2y) \qquad M(X,$

ب) $T(x,y) = (x^2, y)$

تبدیل: نگاشت یک‌به‌یک از صفحه‌به‌صفحه را تبدیل می‌نامند. در تبدیل هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.

مثال: کدام‌یک از نگاشت‌های زیر تبدیل نمی‌باشد؟

۱) $T(x,y) = (x-y, -x+y)$ ۲) $F(x,y) = (-x+۱, -y+۲)$ ۳) $E(x,y) = (-y+۲, -x+۳)$ ۴) $G(x,y) = (-۲x, y+۱)$

تمرین۱: تصویر مثلث ABC با راس های $A(0,2)$ و $B(3,0)$ و $C(0,0)$ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-2)$ را بدست آورید و مثلث و تصویرش را در دستگاه مختصات رسم کنید.

تمرین ۲: مشخص کنید نقطه ی $A'(20,12)$ تصویر چه نقطه ای از صفحه تحت نگاشت $D(x,y)=(4y,x-2)$ می باشد.

تبدیل ایزومتری: تبدیلی که فاصله‌ی بین نقطه‌ها را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود. در واقع اگر A و B دو نقطه‌ی دلخواه و A' و B' تصویر آن‌ها تحت تبدیل T باشند آن‌گاه T ایزومتری است هرگاه $AB=A'B'$.

به‌طور مثال تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-1)$ ایزومتری است زیرا برای دو نقطه‌ی دلخواه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داریم:

$$A'B'=\sqrt{(x_2+1-x_1-1)^2+(y_2-1-y_1+1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=AB$$

تذکر: به تبدیلی که ایزومتری باشد تبدیل طولپا نیز گفته می شود.

مثال:

(نهایی- شهریور ۹۳)

نقاط $A(3,3)$، $B(1,-1)$ و $C(-2,2)$ رأس‌های یک مثلث هستند.

آ) مختصات تصویر این مثلث را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+2,-y)$ به‌دست آورید.

ب) آیا این تبدیل ایزومتری است؟ چرا؟

پ) در این تبدیل شیب‌خط حفظ می‌شود یا خیر؟ چرا؟

۷۸

نکته: تصویر اشکال هندسی تحت تبدیل ایزومتری با خود شکل همنهشت است.

تبدیل همانی: **اگر تبدیل T هر نقطهٔ A از صفحهٔ P را بر خودش منطبق سازد، آن را تبدیل همانی می‌نامند.**

$$T(A)=I(A)=A$$

نقطه‌ی ثابت یک تبدیل: نقطه‌ی ثابت یک تبدیل، نقطه‌ای است که تصویر آن تحت تبدیل بر خودش منطبق است. یک تبدیل ممکن است یک یا دو یا ... یا بی‌شمار نقطه‌ی ثابت داشته باشد یا ممکن است نقطه‌ی ثابت نداشته باشد. برای یافتن نقطه‌ی ثابت تبدیل T باید معادله‌ی $T(x,y)=(x,y)$ را حل کنیم.

مثال: **تبدیل $F(x,y)=(۶x-۳y+۴,۵x-۲y+۴)$ چند نقطه‌ی ثابت دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

ترکیب دو نگاشت

ترکیب دو نگاشت F و G را با نماد FoG نشان می‌دهند که در آن ابتدا نگاشت G روی نقاط صفحه اثر می‌کند سپس نگاشت F نقاط حاصل را تصویر می‌کند و ضابطه‌ی آن به‌صورت $FoG(x,y)=F(G(x,y))$ است.

مثال: **اگر $F(x,y)=(y,x-۱)$ و $G(x,y)=(۳x,۲y-۱)$، آن‌گاه تصویر نقطه‌ی $A(۱,۲)$ تحت تبدیل FoG روی کدام خط قرار می‌گیرد؟**

۱) $x+y=۷$ ۲) $-x+y=۵$ ۳) $-x+y=۷$ ۴) $x+y=۵$

نوشتن معادله‌ی تصویر یک خط یا منحنی تحت یک نگاشت

به‌طور کلی برای یافتن تصویر یک خط یا منحنی تحت یک نگاشت، ضابطه‌ی نگاشت را برابر (x',y') قرار می‌دهیم و x و y را برحسب x' و y' به‌دست آورده و در معادله‌ی خط یا منحنی قرار می‌دهیم.

اما اگر تبدیل خطی باشد یعنی $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$، جهت یافتن معادله‌ی تصویر خط، علاوه بر روش فوق می‌توان تصویر دو نقطه‌ی دلخواه از خط را به‌دست آورد و معادله‌ی خط گذرنده از این نقاط تصویر را نوشت.

مثال: **خط به معادله‌ی $۲x-۳y=۲$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(۲x-y,-x+y)$ تصویر می‌کنیم. خط به معادله‌ی $ax+by+۲=۰$ به‌دست می‌آید. حاصل $a+b$ کدام است؟**

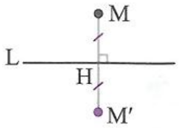
۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۶ ۴) -۶

بازتاب نسبت به خط و نقطه (تقارن محوری و مرکزی)

بازتاب نسبت به خط

تعریف: بازتاب نسبت به خط (تقارن محوری) تبدیلی است که با یک خط معلوم مانند L به نام محور تقارن یا محور بازتاب مشخص می‌گردد و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M در بازتاب نسبت به خط L است، هرگاه L عمودمنصف MM' باشد. معمولاً بازتاب نسبت به خط L را با نماد S_L نشان می‌دهند.

L عمودمنصف MM' است. $\Leftrightarrow S_L(M) = M'$



اگر نقطه‌ی M روی خط L باشد تصویرش خودش است.

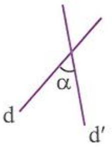
مثال ۱ تصویر نقطه‌ی $M(-1,-5)$ تحت بازتاب نسبت به خط به معادله‌ی $3x + y = 2$ را نقطه‌ی M' می‌نامیم. قدرمطلق تفاضل طول و عرض نقطه‌ی M' کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

مثال ۲ تصویر نقطه‌ی $A(3,1)$ نسبت به خط $y - x - 6 = 0$ نقطه‌ی $A'(a,b)$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) -5 ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) -6

روش یافتن معادله‌ی تصویر یک خط تحت بازتاب نسبت به خط

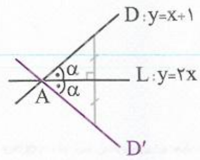


یادآوری: اگر m شیب‌خط d و m' شیب‌خط d' باشد به‌طوری که $mm' \neq -1$، آن‌گاه با فرض این‌که α زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط d و d' باشد، داریم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

مثال : تصویر خط $D: y = x+1$ تحت بازتاب نسبت به خط $L: y = 2x$، خط به معادله‌ی $ax + by - 5 = 0$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -2 ۳) ۳ ۴) -4



پاسخ : ابتدا نقطه‌ی تلاقی خط D و محور بازتاب یعنی خط L را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2 \Rightarrow A = (1,2)$$

شیب خط D' را m می‌نامیم. طبق دستور محاسبه‌ی زاویه‌ی بین دو خط، داریم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-2}{1+2m}\right| = \left|\frac{2-1}{1+2}\right| \Rightarrow |3m-6| = |1+2m| \Rightarrow 3m-6 = 1+2m \text{ یا } 3m-6 = -1-2m \Rightarrow m = 7 \text{ یا } m = 1$$

$m = 1$ همان شیب خط D است. پس شیب خط D' برابر $m = 7$ است و معادله‌ی خط D' برابر است با:

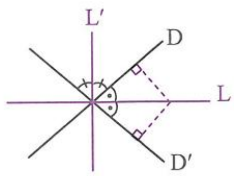
$$y - 2 = 7(x-1) \Rightarrow y = 7x - 5 \Rightarrow 7x - y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -1 \end{cases} \xrightarrow{+} a+b = 6 \Rightarrow$$

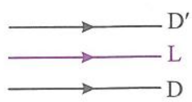
گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال : تصویر خط $x - 2y = 1$ تحت بازتاب نسبت به خط $y = -x + 3$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(1,2)$ ۲) $(0,-4)$ ۳) $(2,1)$ ۴) $(0,4)$

تعیین محور تقارن دو خط متقاطع و دو خط موازی





هر دو خط متقاطع دارای دو محور تقارن می‌باشند که نیمسازهای زوایای بین دو خط می‌باشند. از طرفی هر نقطه روی این نیمسازها از دو خط مفروض به یک فاصله‌اند.

با فرض $D: ax + by + c = 0$ و $D': a'x + b'y + c' = 0$، معادلات نیمسازهای دو خط

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

است که همان محور تقارن‌ها می‌باشند.

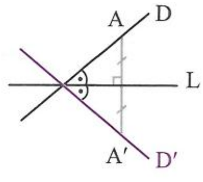
اگر دو خط موازی باشند آنگاه برای یافتن معادله ی محور تقارن دو خط، کافیست......

مثال : عرض از مبدأ محور بازتابی که خط $2x - 5y + 4 = 0$ را به خط $6x - 15y + 17 = 0$ تصویر می‌کند، کدام است؟

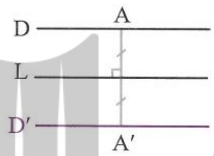
۱) $-\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{29}{30}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $-\frac{29}{30}$

خواص بازتاب نسبت به خط

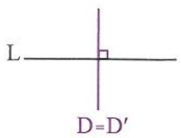
۱) بازتاب خط D خط D' است، هرگاه محور بازتاب، یکی از دو نیمساز زاویه‌ی تقاطع دو خط باشد (شکل آ). در حالتی که خط D با محور بازتاب موازی باشد، خط D' هم با محور بازتاب موازی است. (شکل ب)



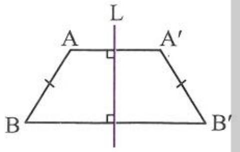
(آ)



(ب)

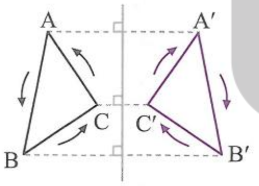


نتیجه: بازتاب نسبت به خط شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این‌که خط و محور بازتاب موازی باشند یا این‌که خط بر محور بازتاب عمود باشد.



۲) بازتاب نسبت به خط، یک تبدیل ایزومتری است. یعنی اندازه‌ی پاره‌خط‌ها را تغییر نمی‌دهد و شکل و تصویرش همنهشت‌اند.

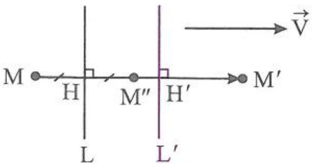
نتیجه: هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، دارای یک محور تقارن است. (خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند.)

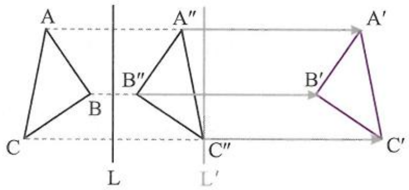


۳) بازتاب نسبت به خط، اندازه‌ی زاویه را تغییر نمی‌دهد، اما جهت زاویه و شکل را تغییر می‌دهد.

۴) بازتاب نسبت به خط دارای بی‌شمار نقطه‌ی ثابت است که همگی روی محور بازتاب قرار دارند.

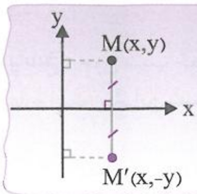
۵) ترکیب بازتابی با محور L و انتقالی با بردار $\vec{V}$ که $\vec{V} \perp L$، بازتابی است به محور L' که خط L' از انتقال خط L با بردار $\frac{\vec{V}}{2}$ به‌دست می‌آید.





حالت‌های خاص بازتاب نسبت به خط

۱) بازتاب نسبت به محور x ها: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(x,-y)$ است.

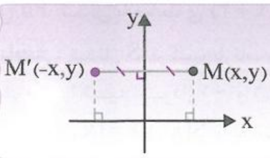


نکات مهم:

آ) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط در بازتاب نسبت به محور x ها، در معادله‌ی خط، y را به $-y$ تبدیل می‌کنیم.

ب) در بازتاب نسبت به محور x ها اگر شیب خط مفروض m باشد، آن‌گاه شیب خط تصویر $-m$ است.

۲) بازتاب نسبت به محور y ها: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(-x,y)$ است.

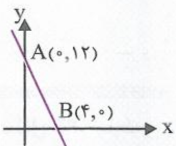


نکات مهم:

آ) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط در بازتاب نسبت به محور y ها، در معادله‌ی خط، x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم.

ب) دربازتاب نسبت به محور y ها، اگر شیب خط مفروض m باشد، آن‌گاه شیب خط تصویر $-m$ است.

مثال ۲۲: تصویر خط روبه‌رو تحت بازتاب نسبت به محور y ها کدام است؟



۱) $۲x+y-۱۲=۰$ ۲) $۴x+۳y-۳۶=۰$

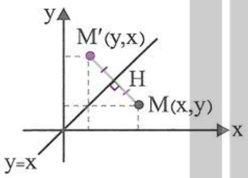
۳) $۲x+y-۹=۰$ ۴) $۳x-y+۱۲=۰$

پاسخ: ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم:

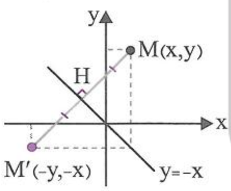
$$y-۰=\frac{۱۲-۰}{۰-۴}(x-۴)\Rightarrow y=-۳(x-۴)=-۳x+۱۲$$

حال x را به $-x$ تغییر می‌دهیم $y=۳x+۱۲$ یا $۳x-y+۱۲=۰$. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

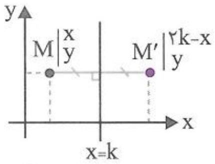
۳) بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(y,x)$ می‌باشد.



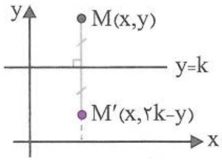
۴) بازتاب نسبت به نیمسازهای ربع دوم و چهارم $(y=-x)$: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(-y,-x)$ است.



تمرین: معادله ی بازتاب خط $2x+3y-1=0$ را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بنویسید.



۵) بازتاب نسبت به خط $x=k$: مطابق شکل، ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(۲k-x,y)$ است. این بازتاب ترکیب بازتاب نسبت به محور yها و انتقال با بردار $\vec{V}(۲k,۰)$ است.



۶) بازتاب نسبت به خط $y=k$: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(x,۲k-y)$ است. این بازتاب ترکیب بازتاب نسبت به محور xها و انتقال با بردار $\vec{V}(۰,۲k)$ است.

مثال : خط $۲x-y+۳=۰$ را تحت بازتاب نسبت به خط $x=-۱$ تصویر می‌کنیم. معادله‌ی تصویر کدام است؟

۱) $۲x+y+۱=۰$ ۲) $x-۲y+۳=۰$ ۳) $۲x+y=۰$ ۴) $۴x+y+۳=۰$

پاسخ : روش اول: ابتدا نقطه‌ی تلاقی خط $۲x-y+۳=۰$ و محور بازتاب $x=-۱$ را می‌یابیم:

$x=-۱, ۲x-y+۳=۰ \Rightarrow -۲-y+۳=۰ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow$ نقطه‌ی تلاقی $=(-۱,۱)$

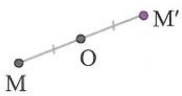
اما بازتاب نسبت به خط $x=-۱$ (خط موازی محور yها) شیب را قرینه می‌کند، پس شیب تصویر -۲ است بنابراین معادله‌ی تصویر برابر $y-۱=-۲(x+۱)$ یا $۲x+y+۱=۰$ است.

روش دوم: کافی است در معادله‌ی خط $۲x-y+۳=۰$، x را به $۲k-x=-۲-x$ تغییر دهیم تا معادله‌ی تصویر به‌دست آید:

$۲(-۲-x)-y+۳=۰ \Rightarrow -۴-۲x-y+۳=۰ \Rightarrow ۲x+y+۱=۰$

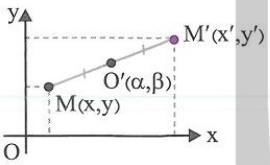
بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

بازتاب نسبت به نقطه (تقارن مرکزی)



بازتاب نسبت به نقطه یا تقارن مرکزی تبدیلی است که با یک نقطه‌ی معلوم به نام مرکز بازتاب (مرکز تقارن) مشخص می‌شود و M' تصویر نقطه‌ی M در بازتاب به مرکز O است، هرگاه O وسط MM' باشد تقارن مرکزی را با نماد S_O نشان می‌دهند. $S_O(M)=M' \Leftrightarrow$ O وسط MM' است.

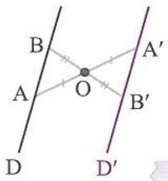
ضابطه‌ی تحلیلی بازتاب نسبت به نقطه‌ی $O'(\alpha,\beta)$:



$$\begin{cases}\dfrac{x+x'}{۲}=\alpha\\[2mm]\dfrac{y+y'}{۲}=\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=۲\alpha-x\\y'=۲\beta-y\end{cases}\Rightarrow S(x,y)=(۲\alpha-x,۲\beta-y)$$

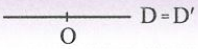
حالت خاص: ضابطه‌ی تحلیلی بازتاب نسبت به مبدأ مختصات $O(۰,۰)$ برابر است با $S(x,y)=(-x,-y)$

خواص بازتاب نسبت به نقطه



۱) تصویر هر خط در بازتاب نسبت به نقطه، خطی است موازی با آن. بنابراین بازتاب نسبت به نقطه شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

نکته: اگر مرکز بازتاب روی خط مفروض باشد تصویر خط بر خودش منطبق است.

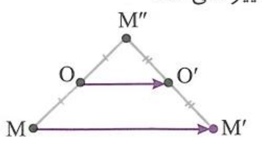


۲) بازتاب نسبت به نقطه، ایزومتری است، مطابق شکل فوق $AB = A'B'$

۳) بازتاب نسبت به نقطه، اندازه‌ی زاویه و جهت آن را تغییر نمی‌دهد و به‌طور کلی جهت شکل را عوض نمی‌کند.

۴) مرکز بازتاب یا همان مرکز تقارن، نقطه‌ی ثابت آن است و تنها نقطه‌ای است که تحت یک بازتاب نسبت به نقطه تغییر نمی‌کند.

۵) ترکیب دو بازتاب نسبت به نقطه، یک انتقال است.

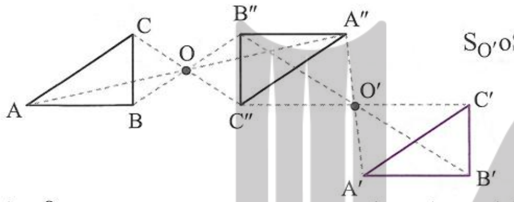


اثبات: مطابق شکل نقطه M'' تصویر نقطه‌ی M تحت بازتاب به مرکز O و M' تصویر M'' تحت بازتاب به مرکز O' است. بنابه قضیه‌ی تالس داریم: $\overrightarrow{MM'} = ۲\overrightarrow{OO'}$

یعنی M' تصویر نقطه‌ی M تحت انتقال با بردار ثابت $۲\overrightarrow{OO'}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$S_{O'} o S_O (M) = T_{۲\overrightarrow{OO'}}(M) = M'$$

مثلاً مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $۲\overrightarrow{OO'}$ است.



۶) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط مفروض تحت بازتاب به مرکز $O'(\alpha,\beta)$، در معادله‌ی خط به جای x و y به‌ترتیب $۲\alpha - x$ و $۲\beta - y$ را قرار می‌دهیم.

۷) ترکیب یک بازتاب نسبت به نقطه و یک انتقال همواره بازتاب نسبت به نقطه است.

۳۹- کدام گزینه درباره‌ی بازتاب نسبت به یک نقطه صحیح نیست؟

۱) ایزومتری است. ۲) شیب خط را حفظ نمی‌کند. ۳) جهت شکل را حفظ می‌کند. ۴) زاویه‌ی بین دو خط را حفظ می‌کند.

- قرینه‌ی خط $y = -۳x + ۵$ نسبت به نقطه‌ی $A(۱,۳)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

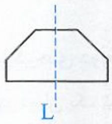
۱) $(۲,۳)$ ۲) $(۳,۲)$ ۳) $(۲,۴)$ ۴) $(۱,۴)$

. بازتاب خط $x - ۲y = ۴$ نسبت به نقطه‌ی $(۲,a)$، خط $x - ۲y + ۶ = ۰$ است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

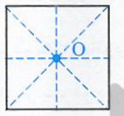
محور تقارن و مرکز تقارن

محور تقارن



تعریف: شکل F دارای خط تقارن است، اگر خطی مانند L وجود داشته باشد به‌طوری‌که تصویر F تحت بازتاب نسبت به خط L بر خود شکل منطبق باشد. در این صورت خط L محور تقارن شکل F است. (یعنی هر نقطه‌ی شکل را نسبت به آن خط قرینه کنیم نقطه‌ای روی همان شکل باشد.)

مرکز تقارن



تعریف: شکل F دارای مرکز تقارن است، اگر نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد، به‌طوری که تصویر F تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی O بر خود شکل منطبق باشد. در این صورت نقطه‌ی O مرکز تقارن شکل F است. (یعنی هر نقطه‌ی شکل را نسبت به O قرینه کنیم نقطه‌ای روی خود شکل باشد.)

– کدام‌یک از شکل‌های زیر، فقط یک محور تقارن دارد؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) ربع دایره ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) لوزی

(آزاد ریاضی ۷۲)

– در بین چندضلعی‌های زیر، کدام فقط یک محور تقارن دارد؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ۴) مستطیل

– دو دایره‌ی متقاطع که شعاع‌های آن‌ها مساوی است، چند محور تقارن دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

(سراسری تجربی ۷۴)

– هر دو خط متقاطع در صفحه ....

۱) یک محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد.

۲) دو محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد.

۳) فقط یک مرکز تقارن دارد.

۴) فقط چهار محور تقارن دارد.

(سراسری ریاضی ۷۰)

– کدام شکل مرکز تقارن ندارد؟

۱) مستطیل ۲) لوزی

۳) مثلث متساوی‌الاضلاع ۴) شش‌ضلعی منتظم

(سراسری تجربی ۷۱)

– هفت‌ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ☆

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱

– کدام شکل هندسی یک مرکز تقارن و بیش از چهار محور تقارن دارد؟

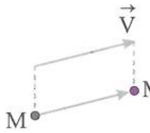
۱) پنج‌ضلعی منتظم ۲) شش‌ضلعی منتظم ۳) لوزی ۴) مربع

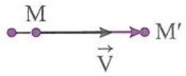
(آزاد ریاضی ۷۰)

– کدام‌یک از اشکال زیر مرکز تقارن ندارد؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) پانزده‌ضلعی منتظم ۴) چهارده‌ضلعی منتظم

انتقال

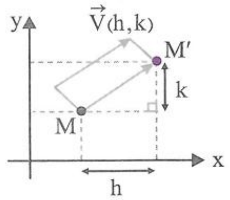




انتقال تبدیلی است که با یک بردار معلوم غیرصفر مانند $\vec{V}$ مشخص می‌شود و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ است هرگاه $\overrightarrow{MM'}=\vec{V}$. به همین جهت اگر M روی امتداد بردار $\vec{V}$ نباشد M' با رسم متوازی‌الاضلاع برداری به‌دست می‌آید.

انتقال با بردار $\vec{V}$ را با نماد $T_{\vec{V}}$ نشان می‌دهیم و M' تصویر نقطه‌ی M در انتقال با بردار $\vec{V}$ را به‌صورت $T_{\vec{V}}(M)=M'$ می‌نویسیم.

ضابطه‌ی تحلیلی انتقال



انتقال با بردار $\vec{V}(h,k)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $M'(x',y')$ تصویر نقطه‌ی $M(x,y)$ در این انتقال باشد، داریم:

$$\begin{cases} x'-x=h \\ y'-y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی انتقال با بردار $\vec{V}(h,k)$ برابر $T(x,y)=(x+h,y+k)$ است.

مثال : اگر $T(x,y)=(-ax-۳b,by+۴a)$ ضابطه‌ی یک انتقال باشد،تصویر نقطه‌ی $(۱,۱)$ تحت این انتقال کدام است؟

۱) $(-۴,۵)$ ۲) $(-۲,-۳)$ ۳) $(۳,۴)$ ۴) $(-۴,۳)$

پاسخ : $T(x,y)=(-ax-۳b,by+۴a)$ وقتی ضابطه‌ی یک انتقال است که ضرایب x و y برابر یک باشند، در نتیجه $a=-۱$ و $b=۱$ می‌شود و داریم:

$$T(x,y)=(x-۳,y-۴) \Rightarrow T(۱,۱)=(۱-۳,۱-۴)=(-۲,-۳)$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال : آیا $E(x,y)=(x+۳,۲y)$، ضابطه‌ی یک انتقال است؟ توضیح دهید.

پاسخ : خیر، برای این‌که E انتقال باشد باید اعداد ثابت h و k وجود داشته باشند که:

$$E(x,y)=(x+h,y+k) \Rightarrow (x+۳,۲y)=(x+h,y+k) \Rightarrow \begin{cases} h=۳ \\ k=y \end{cases}$$

چون مقدار k متغیر شد پس E نمی‌تواند انتقال باشد.

مثال : آیا $F(x,y)=(\frac{۳x-۲}{۳},\frac{۴y+۱}{۴})$ ضابطه‌ی یک انتقال است؟ توضیح دهید.

پاسخ : بله، زیرا:

$F(x,y)=(x-\frac{۲}{۳},y+\frac{۱}{۴}) \Rightarrow$ F انتقال با بردار $\vec{V}(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۴})$ است.

تمرین: خط $y=2x-1$ را با بردار $\vec{v}=(2,3)$ انتقال می دهیم. تصویر نقطه ی $A(3,5)$ را تحت این انتقال بیابید.

تعیین معادله‌ی تصویر یک خط تحت یک انتقال

اگر از دستور کلی برای مشخص کردن معادله‌ی تصویر یک خط تحت یک انتقال با بردار $\vec{V}(h,k)$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$T(x,y)=(x',y')\Rightarrow(x+h,y+k)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$$

یعنی در معادله‌ی خط باید x و y را به $x'-h$ و $y'-k$ تغییر دهیم یا به عبارتی جهت تعیین معادله‌ی تصویر کافی است، در معادلـه‌ی خـط، x را به $x-h$ و y را به $y-k$ تغییر دهیم.

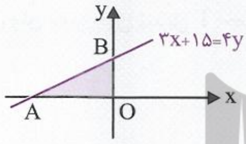
مثال : خط $۴y=۳x$ را تحت بردار $\vec{V}(-۱,۳)$ انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیه‌ی محدود به خط تصویر و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۷۱}{۸}$ ۲) $\frac{۷۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷۷}{۸}$

پاسخ : با توجه به مطلب فوق، جهت یافتن تصویر خط $۴y=۳x$ در انتقال با بردار $\vec{V}(-۱,۳)$، کافی است در معادله‌ی خط x را بـه $x+۱$ و y را به $y-۳$ تغییر دهیم:

$$۳(x+۱)=۴(y-۳)\Rightarrow۳x+۳=۴y-۱۲\Rightarrow۳x+۱۵=۴y$$

حال مختصات نقطه‌ی برخورد خط اخیر را با محورهای مختصات می‌یابیم:

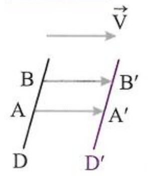


$$x=۰\Rightarrow y=\frac{۱۵}{۴}\quad,\quad y=۰\Rightarrow x=\frac{-۱۵}{۳}=-۵$$

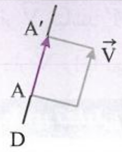
$$S(AOB)=\frac{۱}{۲}|OA|\times|OB|=\frac{۱}{۲}\times۵\times\frac{۱۵}{۴}=\frac{۷۵}{۸}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

خواص انتقال



۱) تصویر یک خط تحت یک انتقال با آن خط موازی است. یعنی انتقال شیب خط را تغییر نمی‌دهد، زیرا با توجه به شکل روبه‌رو، چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است، پس $D \parallel D'$



نکته: اگر بردار انتقال با خط مفروض موازی باشد آن‌گاه تصویر خط بر خودش منطبق است.

مثال : اگر تصویر خط به معادله‌ی $(a-3)x - 2y + 6 = 0$ تحت انتقالی که بردارش موازی این خط است، خط بـه معادلـه‌ی $6x + 4y + b + 1 = 0$ باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

۱) -13 ۲) -12 ۳) 3 ۴) 5

پاسخ : تـصویر هـر خـط تحـت انتقـالی کـه بـردارش بـا خـط مـوازی اسـت خـودش مـی‌شـود. پـس دو خـط $(a-3)x - 2y + 6 = 0$ و $6x + 4y + b + 1 = 0$ باید بر هم منطبق باشند و این وقتی ممکن است که:

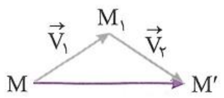
$$\frac{a-3}{6} = \frac{-2}{4} = \frac{6}{b+1} \Rightarrow \begin{cases} a-3=-3 \\ b+1=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-13 \end{cases} \Rightarrow a+b=-13$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲) انتقال یک تبدیل ایزومتری است، در نتیجه انتقال‌یافته‌ی هر شکل با خودش همنهشت است.

۳) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش تحت یک انتقال نظیر می‌سازند دارای طول‌های مساوی و جهت‌های یکسان هستند.

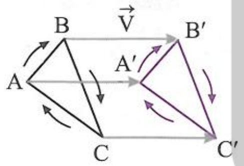
۴) انتقال نقطه‌ی ثابت ندارد یعنی با فرض $\vec{V} \neq \vec{O}$ تصویر هیچ نقطه‌ای بر خودش منطبق نیست.



۵) نتیجه‌ی ترکیب چند انتقال، انتقالی است که بردار آن مساوی مجموع بردارهای آن انتقال‌ها است.

$$T_{\vec{V}_2} o T_{\vec{V}_1}(M) = T_{\vec{V}_1} o T_{\vec{V}_2}(M) = T_{\vec{V}_1+\vec{V}_2}(M) = M'$$

۶) انتقال اندازه‌ی زاویه و جهت آن را تغییر نمی‌دهد، هم‌چنین جهت شکل را حفظ می‌کند.



مثال : خط $2x - y + 1 = 0$ را ابتدا تحت بردار $\vec{V}(k, 1+k)$ تصویر می‌کنیم و سپس تصویر آن را تحت بردار $\vec{U}(1-k, -k)$ انتقال می‌دهیم تـا خط d به‌دست آید. معادله‌ی خط d کدام است؟

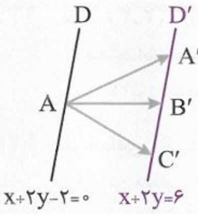
۱) $2x - y + 1 = 0$ ۲) $2x - y = 0$ ۳) $2x + y = 0$ ۴) $2x + y - 1 = 0$

پاسخ : با توجه به خواص انتقال کافی است خـط $2x - y + 1 = 0$ را تحـت بـردار $\vec{V} + \vec{U} = (k+1-k, 1+k-k) = (1,1)$ انتقـال دهـیم. بـه همین جهت به جای x و y در معادله‌ی خط به‌ترتیب $x-1$ و $y-1$ را قرار می‌دهیم:

$$2(x-1) - (y-1) + 1 = 0 \Rightarrow 2x - 2 - y + 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال : همه‌ی بردارهای انتقال‌هایی را به‌دست آورید که خط $x+2y-2=0$ را به خط $x+2y=6$ تصویر می‌کنند.



پاسخ : دو خط داده شده موازی‌اند. نقطه‌ی ثابت A را روی خط D در نظر می‌گیریم، تمام بردارهایی که ابتدای آن‌ها A و انتهایشان روی D′ است خط D را به خط D′ تصویر می‌کنند.

$$A(0,1) \quad , \quad A'(t,\frac{6-t}{2})$$

$$\overline{AA'}=(t-0,\frac{6-t}{2}-1) \Rightarrow \overline{AA'}=(t,\frac{4-t}{2})$$

t عددی حقیقی است که با تغییر آن همه‌ی بردارهای انتقال به‌دست می‌آیند.

مثال خط به معادله‌ی $3x-4y=3$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-3)$ تصویر می‌کنیم. فاصله‌ی خط و تصویرش کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تمرین:

دو معادله‌ی خط $L_1: 3x-2y-6=0$ و $L_2: 3x-2y-12=0$ مفروض‌اند. ضابطه‌ی دو انتقال متفاوت که تحت آن‌ها L_2 تصویر L_1 باشد را بنویسید.
(نهایی- دی ۸۵)

تمرین:

خط $x+2y-6=0$ مفروض است. معادله‌ی خط تصویر را تحت انتقال $T(x,y)=(x-3,y+1)$ به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۸۸)

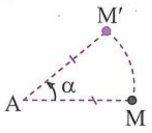
تست:

اگر نگاشت $T(x,y)=(ax-2 , by+c)$ نگاشت انتقال در امتداد بردار $\vec{v}(k,2)$ باشد، $a+k+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۴ ۴) ۵

دوران

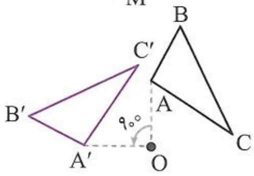
تعریف: دوران تبدیلی است که با یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز دوران و یک زاویه‌ی معلوم جهت‌دار (جهت مثبت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) به نام زاویه‌ی دوران مشخص می‌شود و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M در دوران به مرکز A و زاویه‌ی α است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:



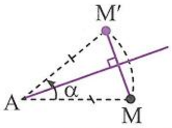
آ) $AM = AM'$ ب) $M\hat{A}M' = \alpha$

دوران به مرکز A و زاویه‌ی α را با نماد R_A^{α} نشان می‌دهند و داریم: $R_A^{\alpha}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM' = AM \\ M\hat{A}M' = \alpha \end{cases}$

مثلاً در شکل مقابل مثلث ABC به مرکز O و زاویه‌ی ۹۰° دوران داده شده است.



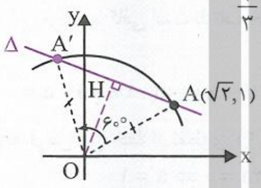
تذکر: عمودمنصف پاره‌خطی که نقطه و تصویرش را در یک دوران به هم وصل می‌کند، از مرکـز دوران می‌گذرد زیرا در شکل مقابل مثلث AMM' متساوی‌الساقین است.



نکات: ۱) مرکز هر دوران نقطه‌ی ثابت آن دوران است، یعنی مرکز دوران، تنها نقطه‌ای است که تصویرش تحت یک دوران خودش است.
۲) اگر M' تصویر M در دوران به مرکز A و زاویه‌ی α باشد، آن‌گاه M تصویر M' در دوران به مرکز A و زاویه‌ی $-\alpha$ است.

مثال: نقطه‌ی $(۱,\sqrt{۲})$ را تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی ۶۰° تصویر می‌کنیم. فاصله‌ی مبدأ مختصـات از خـط گذرنـده از نقطـه و تصویرش کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$



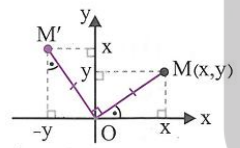
پاسخ: فاصله‌ی O تا خط Δ همان ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع OAA' است. بـرای محاسـبه‌ی آن کافی است طول ضلع مثلث را محاسبه کنیم:

$$OA = \sqrt{(\sqrt{۲})^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳} \quad , \quad H\hat{A}O = ۶۰^\circ \Rightarrow OH = \frac{OA\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

حالت‌های خاص دوران

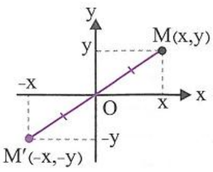
آ) **دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی ۹۰°:** مطابق شکل دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتـر و یـک زاویه‌ی حاده همنهشت‌اند، پس مختصات نقطه‌ی M' برابر $M'(-y,x)$ است. بنابراین:



$$R(x,y) = (-y,x)$$

نکته: دوران به زاویه‌ی ۹۰° (زاویه‌ی -۲۷۰°)، شیب خط را عکس و قرینه می‌کند.

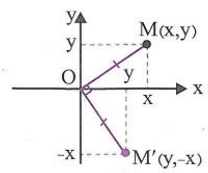
ب) **دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی به اندازه‌ی $\pm۱۸۰^\circ$ (بازتاب نسبت به نقطه):**



$$R(x,y) = (-x,-y)$$

نکته: دوران تحت زاویه‌ی $\pm۱۸۰^\circ$، همان بازتاب نسبت به نقطه است و شیب خط را حفظ می‌کند.

پ) **دوران تحت مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی به اندازه‌ی ۲۷۰° (زاویه‌ی -۹۰°):**



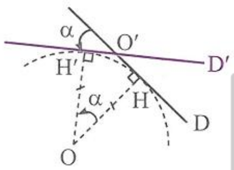
$$R(x,y) = (y,-x)$$

نکته: دوران تحت زاویه‌ی ۲۷۰° (زاویه‌ی -۹۰°)، شیب خط را عکس و قرینه می‌کند.

مثال: خط $۵ = ۳x - ۲y$ را حول مبدأ مختصات و زاویه‌ی ۲۷۰° دوران می‌دهیم، معادله‌ی تصویر $y = ax + b$ می‌باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟

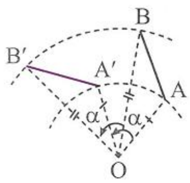
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) -۱

خواص دوران



۱) دوران یافته‌ی یک خط، خطی است که با آن خط زاویه‌ی مساوی و هم‌جهت با زاویه‌ی دوران می‌سازد. برای دوران دادن خط D می‌توان دو نقطه‌ی دلخواه از آن را دوران داد. خط گذرنده از نقاط تصویر جواب است. اما راه ساده‌تر این است که از مرکز دوران بر خط D عمود کنیم و پای عمود را به‌اندازه‌ی زاویه‌ی α دوران دهیم نقطه‌ی H' به‌دست می‌آید سپس در نقطه‌ی H' خط D' را عمود بر OH' رسم می‌کنیم.

نکته: چهارضلعی $OHO'H'$ شبه لوزی (کایت) است (مگر این‌که $\alpha = ۹۰^\circ$ باشد که مربع می‌شود) و O روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط D و D' واقع است.



نتیجه: دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این‌که زاویه‌ی دوران $\pm۱۸۰^\circ$ باشد.

۲) دوران ایزومتری است.

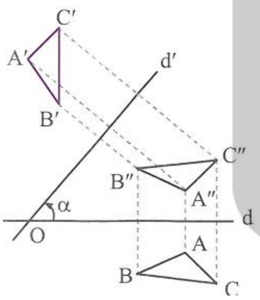
مطابق شکل $A'B'$ دوران یافته‌ی پاره‌خط AB به مرکز O و زاویه‌ی α است. چون دو مثلث AOB و $A'OB'$ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند پس $AB = A'B'$

۳) دوران اندازه‌ی زاویه و جهت آن را حفظ می‌کند و به‌طور کلی جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۴) مرکز دوران نقطه‌ی ثابت آن است.

۵) ترکیب دو دوران با مرکزهای یکسان، دورانی است با همان مرکز و زاویه‌ی مجموع زوایای دوران‌های مفروض.

۶) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز آن محل تلاقی محورهای بازتاب‌ها و زاویه‌ی دوران دو برابر زاویه‌ی بین دو محور بازتاب است. مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC در دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۲α می‌باشد.



مثال: خط به معادله‌ی $۳y = ۴x - ۷$ را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بازتاب می‌کنیم، سپس قرینه‌ی خط حاصل را نسبت به محور yها به‌دست می‌آوریم، خط به معادله‌ی $y = (m-۱)x + \frac{۷}{۴}$ ایجاد می‌شود. m کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

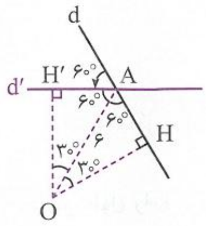
پاسخ : روش اول: ترکیب بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم و بازتاب نسبت به محور yها چون محورهایشان متقاطع و زاویه‌ی بین آن‌ها ۴۵° است، یک دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی دوران ۹۰° است، لذا شیب خط تصویر عکس و قرینه‌ی شیب خط مفروض است.

$$m - ۱ = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow m = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

روش دوم: تصویر خط به معادله‌ی $۳y = ۴x - ۷$ در بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، خط به معادله‌ی $۳x = ۴y - ۷$ است. قرینه‌ی این خط نسبت به محور yها برابر $-۳x = ۴y - ۷$ یا $y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۷}{۴}$ می‌باشد، در نتیجه $m - ۱ = -\frac{۳}{۴}$ یا $m = \frac{۱}{۴}$ بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال : در دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۶۰° در صفحه، خط d و تصویرش در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. اگر $OA = ۶$ باشد، آن‌گاه فاصله‌ی مرکز دوران از خط تصویر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۴



پاسخ : مطابق شکل خط d' تصویر خط d در دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۶۰° است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH' ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است. پس:

$$OH' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \Rightarrow OH' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ = ۳\sqrt{۳}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست ۱:

دوران یافته‌ی خط $y - ۲x = ۳$، تحت زاویه‌ی ۹۰° به مرکز دوران $(۰،۰)$ خط $l_۱$ است. معادله‌ی تصویر خط $l_۱$، تحت انتقال $T(x، y) = (x + ۱، y - ۲)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $۲y - x + ۴ = ۰$ ۲) $۲y + x + ۶ = ۰$ ۳) $y - ۲x + ۵ = ۰$ ۴) $y + ۲x + ۱ = ۰$

تست ۲:

تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی $۲y - x = ۵$، تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی دوران ۹۰° در جهت مثلثاتی، خط مفروض را با کدام مختصات قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) $(۵،۵)$ ۲) $(-\frac{۵}{۳}،\frac{۵}{۳})$ ۳) $(۱،۳)$ ۴) $(-۳،۱)$

تست ۳:

در دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۶۸° در صفحه، خط d و تبدیل یافته‌اش در P متقاطع‌اند، زاویه‌ی OP با خط d کدام است؟ $(O \notin d)$

۱) ۶۸° ۲) ۵۶° ۳) ۴۸° ۴) ۲۲° (سراسری ریاضی ۷۱)

تست۴:

- ترکیب دو دوران با یک مرکز و به زاویه‌های 50° و 130° چه نوع تبدیلی است؟ (آزاد ریاضی ۷۵)

۱) تقارن مرکزی ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) تقارن محوری

تست۵:

- دوران یافته‌ی $A(1,2)$ حول $B(2,1)$ و با زاویه‌ی 90° کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(1,0)$ ۳) $(0,-1)$ ۴) $(-1,-1)$

تست۶:

اگر خط $x = 2$ دوران‌های متوالی $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, \ldots, 360^\circ$ حول مبداء داشته باشد، مساحت شکل حاصل چه‌قدر است؟

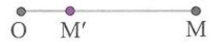
۱) $16(\sqrt{2}-1)$ ۲) $8(\sqrt{2}-1)$ ۳) $32(\sqrt{2}-1)$ ۴) $16(2-\sqrt{2})$ (آزاد ریاضی ۸۵)

تجانس (همسانی)

تعریف: تجانس تبدیلی است که با یک نقطه‌ی ثابت O به نام مرکز تجانس و یک عدد حقیقی k مخالف صفر به نام نسبت تجانس مشخص می‌شود و M' تصویر نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k است، هرگاه:

آ) نقاط O، M و M' روی یک امتداد باشند.

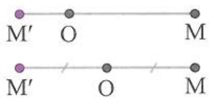
ب) $OM' = k.OM$. (فاصله‌ی نقطه‌ی تصویر از مرکز تجانس، k برابر فاصله‌ی نقطه از مرکز است.)



اگر $k > ۱$، تجانس انبساطی نامیده می‌شود.　　اگر $۰ < k < ۱$، تجانس انقباضی است.

اگر $k = ۱$ باشد، تجانس تبدیل همانی است یعنی هر نقطه را به خودش تصویر می‌کند.

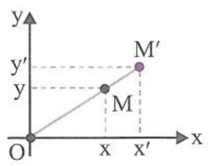
اگر $k > ۰$ باشد، تجانس مستقیم و اگر $k < ۰$ باشد تجانس معکوس نامیده می‌شود. مثلاً تصویر نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $k = -\frac{۱}{۲}$ به‌صورت روبه‌رو است.



اگر $k = -۱$ باشد، تجانس به مرکز O بازتاب نسبت به نقطه‌ی O است.

نکته: مرکز یک تجانس تحت یک تجانس تغییر نمی‌کند، یعنی هر تجانس یک نقطه‌ی ثابت دارد که همان مرکزش است. ضمناً تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k را با نماد H_O^k نشان می‌دهند.

ضابطه‌ی تحلیلی تجانس



اگر $M'(x',y')$ تصویر نقطه‌ی $M(x,y)$ در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس k باشد، چون $OM' = k.OM$، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Rightarrow H(x,y) = (kx,ky)$$

نتیجه: اگر M' تصویر M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد آن‌گاه M تصویر M' در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۱}{k}$ است.

مثال : تصویر خط $۳x - ۴y = ۲$ در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس ۳ از کدام نقطه می‌گذرد؟

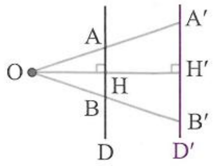
۱) $(۲,۳)$　　۲) $(-۲,-۳)$　　۳) $(۳,۲)$　　۴) $(-۳,۲)$

پاسخ :

$$H(x,y) = (۳x,۳y) = (x',y') \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{۳} \\ y = \frac{y'}{۳} \end{cases} \xrightarrow{۳x-۴y=۲} ۳(\frac{x'}{۳}) - ۴(\frac{y'}{۳}) = ۲ \Rightarrow ۳x' - ۴y' = ۶$$

نقطه‌ی $(-۲,-۳)$ در معادله‌ی خط اخیر صدق می‌کند. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

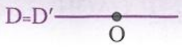
خواص تجانس

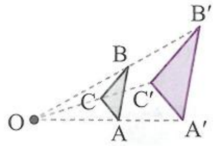


۱) تصویر یک خط در تجانس، خطی موازی با آن است. یعنی تجانس شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

$$H_O^k(D) = D' \Rightarrow D \parallel D'$$

نکته: اگر مرکز تجانس روی خط مفروض واقع باشد، آن‌گاه تصویر آن خط بر خودش منطبق است.



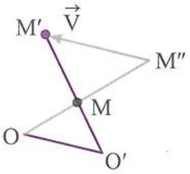


۲) تجانس طول را k برابر $(k > 0)$ و مساحت را k^2 برابر می‌کند. زیرا تصویر هر شکل در یک تجانس با خود شکل متشابه است.

۳) تجانس اندازه‌ی زاویه و جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۴) خط‌هایی که نقطه‌های نظیر را در یک تجانس به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس همرسند.

ترکیب تجانس و انتقال



ترکیب یک تجانس و یک انتقال همواره یک تجانس است که نسبت آن همان نسبت تجانس مفروض است.

اثبات: مطابق شکل تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k را در نظر می‌گیریم. تصویر نقطه‌ی M را تحت این تجانس M'' می‌نامیم و تصویر M'' را تحت انتقال $\vec{V}$ نقطه‌ی M' می‌نامیم.

از O موازی بردار $\vec{V}$ رسم می‌کنیم تا امتداد MM' را در نقطه‌ی O' قطع کند. بنابه تشابه دو مثلث روی شکل داریم $\frac{O'M'}{O'M} = \frac{OM''}{OM} = k$، پس $O'M' = kO'M$. یعنی M' تصویر نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O' و نسبت k است. نقطه‌ی O' ثابت و معلوم است زیرا به کمک قضیه‌ی تالس از رابطه‌ی برداری $\overrightarrow{OO'} = \frac{\vec{V}}{k-1}$ به‌دست می‌آید.

مثال : ثابت کنید تبدیل $D(x,y) = (2x+1, 2y-3)$ تجانس است، نسبت و مرکز آن را تعیین کنید.

پاسخ : تبدیل D ترکیب تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $k = 2$ و انتقال با بردار $\vec{V}(1,-3)$ است. پس تبدیل D یک تجانس به نسبت ۲ می‌باشد. می‌دانیم مرکز یک تجانس نقطه‌ی ثابت آن است، یعنی تصویرش خودش می‌باشد، پس:

$$D(x,y) = (x,y) \Rightarrow (2x+1, 2y-3) = (x,y) \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = x \\ 2y-3 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

بنابراین تبدیل D تجانس به مرکز $O'(-1,3)$ و نسبت تجانس ۲ است.

مثال ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O' = (-2,3)$ و نسبت تجانس $k = 3$ را بنویسید.

پاسخ : چون مرکز تجانس مبدأ مختصات نیست پس می‌توان گفت این تجانس ترکیب تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $k = 3$ و انتقال با بردار $\vec{V}(a,b)$ است. $H(x,y) = (3x+a, 3y+b)$

چون $O' = (-2,3)$ مرکز تجانس، نقطه‌ی ثابت آن است، پس:

$$H(-2,3) = (-2,3) \Rightarrow (-6+a, 9+b) = (-2,3) \Rightarrow \begin{cases} -6+a = -2 \\ 9+b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +4 \\ b = -6 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O' = (-2,3)$ و نسبت تجانس $k = 3$ عبارت است از:

$$H(x,y) = (3x+4, 3y-6)$$

تست ۱:

خط $y = ۲x$ را یک بار تحت تبدیل $T_1(x,y) = (x+۱ , y+۱)$ و یک بار تحت تبدیل $T_۲(x,y) = \left(\frac{x}{۲} , \frac{y}{۲}\right)$ منتقل می‌کنیم، فاصله‌ی بین این دو خط تبدیل یافته کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

تست ۲:

-خط به معادله‌ی $x + ۲y = ۲$ را تحت تجانس $D(x,y) = (۲x,۲y)$ تبدیل و سپس نمودار حاصل را تحت بازتاب نسبت به خط $y = -x$ تصویر می‌کنیم، معادله‌ی تصویر کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۹)

۱) $۲x + y + ۴ = ۰$ ۲) $۲x - y - ۴ = ۰$ ۳) $۲y - x - ۴ = ۰$ ۴) $۲x + y + ۱ = ۰$

تست ۳:

- نقاط $(۵,۳)$، $(۷,۱)$ و $(۱,-۱)$ سه رأس از مثلث قائم‌الزاویه‌اند. مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانسِ مبداء مختصات و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

تست ۴:

مجانس نقطه‌ی $A(۱,۲)$ نسبت به مرکز $B(۲,۱)$ و با نسبت تجانس $k = ۲$ کدام است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۴,۰)$ ۴) $(-۱,۴)$