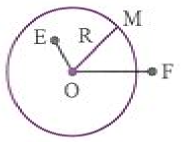
دایره

مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که فاصله‌اش از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه مقدار معلومی باشد **دایره** نامیده می‌شود. دایره را با حرف بزرگ نمایش می‌دهند مثلاً شکل مقابل دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است که با نماد $C(O,R)$ نشان داده می‌شود.

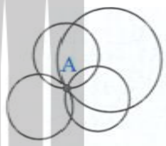


داخل دایره: مکان هندسی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره از شعاع دایره کم‌تر است، داخل دایره نامیده می‌شود ($OE < R$).

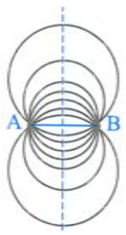
برون دایره: مکان هندسی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره از شعاع دایره بیش‌تر است، برون دایره نامیده می‌شود ($OF > R$).

چند نکته‌ی ساده:

① بر هر نقطه‌ی صفحه **بی‌نهایت** دایره می‌گذرد.

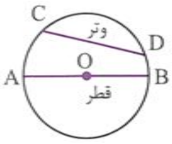


② از دو نقطه‌ی متمایز نیز **بی‌نهایت** دایره می‌گذرد و مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمودمنصف پاره‌خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.



تمرین: بنظر شما از سه نقطه ی غیر واقع بر یک خط چند دایره می گذرد؟

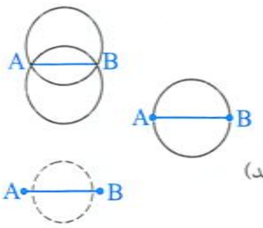
تمرین: درباره ی تعداد دایره هایی که از سه نقطه ی واقع بر یک خط می گذرند، بحث کنید.



وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطه‌ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند وتر دایره نامیده می‌شود. وتری که از مرکز دایره بگذرد قطر دایره نامیده می‌شود. هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که نیم‌دایره نامیده می‌شوند.

مثال: از دو نقطه‌ی A و B که به فاصله‌ی ۵ واحد از هم هستند، چند دایره به شعاع ۳ می‌گذرد؟

حل: از دو نقطه همان‌طور که گفتیم بی‌نهایت دایره (البته با شعاع‌های مختلف) می‌گذرد، ولی اگر فاصله‌ی دو نقطه و شعاع دایره اعداد معلومی باشند، جواب حداکثر ۲ خواهد بود به‌طوری که:



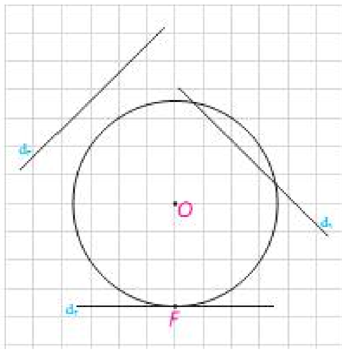
۱) اگر قطر بزرگ‌تر از AB باشد، آن‌گاه **دو** دایره از A و B می‌گذرد. (AB وتری از دایره است)

۲) اگر قطر مساوی AB باشد، آن‌گاه **یک** دایره از A و B می‌گذرد. (AB قطر دایره است)

۳) اگر قطر کوچک‌تر از AB باشد، آن‌گاه **هیچ** دایره‌ای از A و B نمی‌گذرد. (AB نمی‌تواند وتر یا قطر دایره باشد)

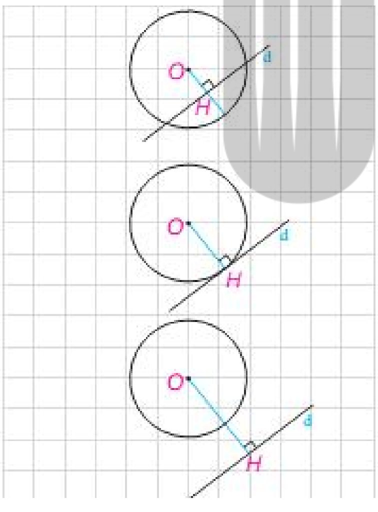
اکنون قطر دایره $۶ = 2R$ می‌باشد و $AB < ۶$ است، پس دو دایره از A و B می‌گذرد که شعاع آن‌ها ۳ باشد.

اوضاع نسبی خط و دایره



در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره **مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.



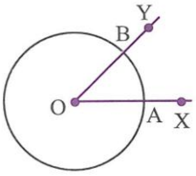
اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد $(OH < r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

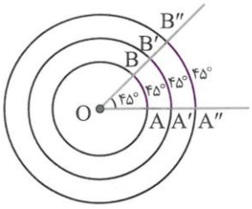
ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد $(OH = r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی ....

پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد $(OH > r)$، خط و دایره ....

زاویه‌ی مرکزی

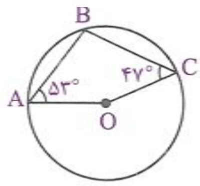


زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره باشد. در شکل مقابل $X\hat{O}Y$ یک زاویه‌ی مرکزی است. اگر A و B دو سر یک قطر نباشند زاویه‌ی مرکزی دایره را به دو کمان کوچک و بزرگ $\overset{\frown}{AB}$ تقسیم می‌کند.



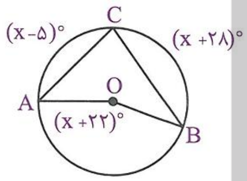
اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی: اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر است با اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن برحسب درجه و به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد. در شکل مقابل همه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{A''B''}$ به اندازه‌ی ۴۵° می‌باشند.

مثال:



در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{C}=۴۷^\circ$ و $\hat{A}=۵۳^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی AOC چند درجه است؟

مثال:



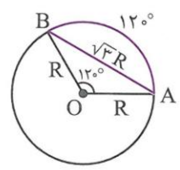
اگر در شکل روبه‌رو O مرکز دایره باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ چند درجه است؟

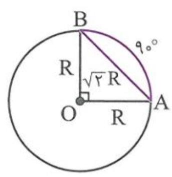
۱) ۱۳۵ ۲) ۱۲۱

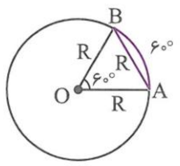
۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۷

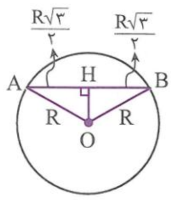
وترهای خاص در دایره

در دایره به شعاع R اگر اندازه‌ی وتر AB برابر R یا $R\sqrt{۲}$ یا $R\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر ۶۰° یا ۹۰° یا ۱۲۰° است و بالعکس.









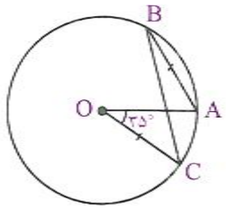
اثبات: مثلاً برای $AB=R\sqrt{۳}$، ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین AOB را رسم می‌کنیم:

$$OH^۲=OB^۲-BH^۲=R^۲-(\frac{R\sqrt{۳}}{۲})^۲=R^۲-\frac{۳R^۲}{۴}=\frac{R^۲}{۴}\Rightarrow OH=\frac{R}{۲}\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=۳۰^\circ$$

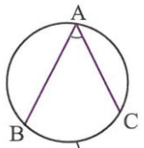
$$\Rightarrow A\hat{O}B=۱۲۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۲۰^\circ$$

مثال:

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB = OC$ و $A\widehat{O}C = ۳۵^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی BCO کدام است؟



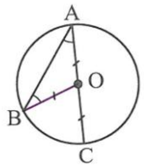
زاویه‌ی محاطی



کمان روبه‌رو به زاویه‌ی محاطی

زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود.

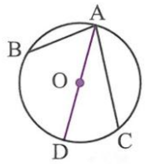
ویژگی زاویه‌ی محاطی: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف اندازه‌ی کمان مقابل به آن است.



اثبات: آ) فرض کنیم یک ضلع زاویه قطر دایره باشد.

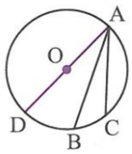
$$\left.\begin{array}{l} OB = OA \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \\ \text{زاویه‌ی خارجی } B\widehat{O}C = \widehat{A} + \widehat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow B\widehat{O}C = ۲\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{B\widehat{O}C}{۲}$$

اما $B\widehat{O}C$ زاویه‌ی مرکزی است پس با کمان $\overset{\frown}{BC}$ برابر است لذا $\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



ب) فرض کنیم مرکز دایره بین دو ضلع زاویه‌ی محاطی باشد، قطر AD را رسم می‌کنیم، بنابه قسمت (آ) داریم:

$$B\widehat{A}C = B\widehat{A}D + D\widehat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



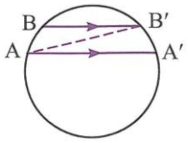
پ) فرض کنیم دو ضلع زاویه‌ی محاطی یک طرف مرکز دایره باشند، قطر AD را رسم می‌کنیم طبق قسمت (آ) داریم:

$$B\widehat{A}C = D\widehat{A}C - D\widehat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

رابطه‌ی کمان‌های محصور بین دو وتر موازی

در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

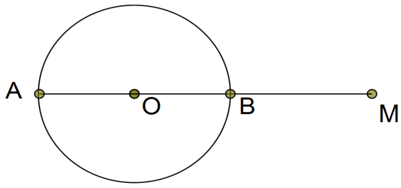
اثبات:

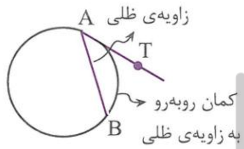


عکس قضیه فوق نیز صادق است. یعنی اگر کمان های محصور بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر برابرند.

اثبات:

بیشترین و کمترین فاصله ی یک نقطه خارج دایره از نقاط دایره: مطابق شکل اگر نقطه M خارج از دایره C باشد، آنگاه بیشترین فاصله ی M از نقاط دایره برابر MA و کمترین فاصله آن برابر MB است.





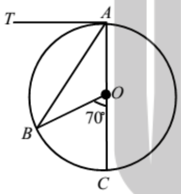
زاویه‌ی ظلی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره بوده و یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، زاویه‌ی ظلی نامیده می‌شود.

ویژگی زاویه‌ی ظلی: اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر است با نصف اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن. (نهایی- شهریور ۹۲- خرداد ۹۰)

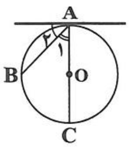
اثبات:

تمرین : زاویه ی $T\hat{A}B$ چند درجه است ؟



تست:

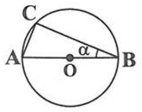
در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی A_2 برابر 50° است. اندازه‌ی کمان $\widehat{BC}$ بر حسب درجه کدام است؟



۱) 70° ۲) 75° ۳) 80° ۴) 85°

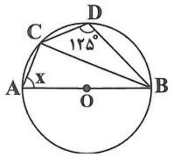
مثلث ABC در یک دایره محاط است و اندازه‌ی کمان‌های AB و BC و AC به ترتیب $x + 75^\circ$ و $2x + 7^\circ$ و $3x - 22^\circ$ است. اندازه‌ی یکی از زاویه‌های داخلی مثلث بر حسب درجه کدام است؟

۱) $57/7^\circ$ ۲) 59° ۳) 60° ۴) 64°



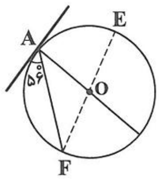
در شکل روبه‌رو $\widehat{BC} = ۵\widehat{AC}$ می‌باشد و O مرکز دایره است. زاویه‌ی α کدام است؟

۱) $۲۲/۵^\circ$
۲) ۱۸°
۳) ۱۵°
۴) ۲۰°



در شکل مقابل O مرکز دایره است، زاویه‌ی x کدام است؟

۱) ۶۵°
۲) ۴۵°
۳) ۵۵°
۴) ۷۵°



- در شکل مقابل، O مرکز دایره و زاویه‌ی A برابر ۵۶° است. کمان $\widehat{AE}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۱)

۱) ۶۸°
۲) ۶۶°
۳) ۶۴°
۴) ۶۲°

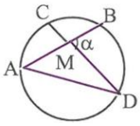
مرکز دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و دایره از دو رأس دیگر مثلث می‌گذرد، امتداد ضلع AC، دایره را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{D}B$ کدام است؟

۱) ۱۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۹۰°

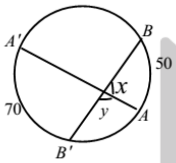
زاویه‌ی بین مماس‌ها و وترها در دایره

آ) زاویه‌ی بین دو وتر متقاطع در یک دایره: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند. (نهایی- شهریور ۹۳ و ۹۰- خرداد ۹۱- دی ۸۹)

اثبات:



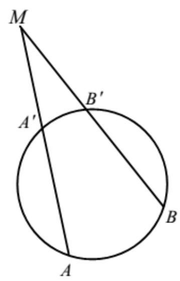
تمرین : y ,x را بیابید .



ب) زاویه‌ی بین امتداد دو وتر: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

اثبات:

تمرین : اندازه ی زاویه ی M را در هریک از حالات زیر به دست آورید .

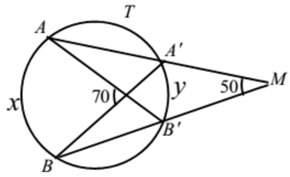


الف) $\overset{\frown}{A'B'} = 80^\circ ,\ \overset{\frown}{AB} = 120^\circ$

ب) $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'} = 30^\circ$

ج) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} + 60^\circ$

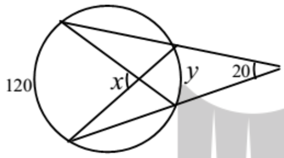
د) $\overset{\frown}{A'B'} = \dfrac{\overset{\frown}{BB'}}{4} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{3} = \dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{2}$



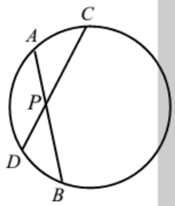
تمرین : $y\,,x$ **را به دست آورید .**

تمرین

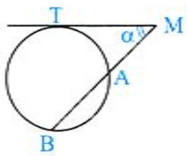
– در شکل زیر مقدار $x+y$ **چقدر است ؟**



· در شکل زیر $AC=2x^{\circ}$ **,** $BD=3x^{\circ}$ **,** $C\hat{P}B=5x^{\circ}$ **است .** x **را به دست آورید .**



توجه: در حالت خاص، اگر یکی از وترها تبدیل به مماس شود، باز هم قضیه‌ی فوق برقرار است:



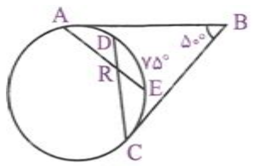
$$\alpha=\frac{|\widehat{TB}-\widehat{TA}|}{۲}$$

اثبات:

ت) اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس: اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس بر دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

اثبات:

مثال : در شکل مقابل، AB و BC بر دایره مماس‌اند و $\hat{B}=50^\circ$ و $\widehat{DE}=75^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{R}C$ کدام است؟



۱) ۱۵۵°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۵۷/۵°
۴) ۱۵۲/۵°

نکته‌ی کلیدی: اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر α باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان‌های ایجاد شده روی دایره به‌ترتیب $180^\circ-\alpha$ و $180^\circ+\alpha$ است.

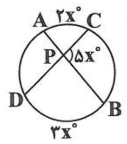
اثبات:

مثال ۱ از نقطه‌ی M دو مماس MA و MB بر یک دایره رسم شده است. اگر C نقطه‌ای روی کمان کوچک $\widehat{AB}$ باشد به طوری‌که $A\hat{C}B=3\hat{M}$، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{M}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰
۲) ۳۶
۳) ۳۴
۴) ۳۲

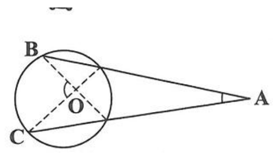
تست:

در شکل مقابل $\widehat{AC}=2x^\circ$ و $\widehat{BD}=3x^\circ$ و $C\hat{P}B=5x^\circ$، مقدار x چند درجه است؟



۱) ۲۰°
۲) ۲۴°
۳) ۳۲°
۴) ۳۶°

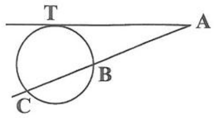
در شکل مقابل $\hat{A}=27^\circ$ و $\hat{O}=71^\circ$، کمان $\widehat{BC}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)



۱) ۹۸°
۲) ۱۰۰°
۳) ۱۰۲°
۴) ۱۰۴°

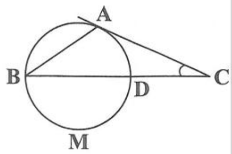
در شکل مقابل M وسط کمان EF است و $BC = 50^\circ$، اندازه‌ی $B + D$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) 160°
۲) 175°
۳) 180°
۴) 230°



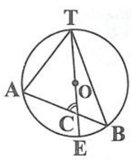
در شکل، AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$، زاویه‌ی A چند درجه است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) 18°
۲) 72°
۳) 36°
۴) 144°



در شکل مقابل مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه‌ی C چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴



در شکل مقابل O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ و $\widehat{B} = 35^\circ$، زاویه‌ی C چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

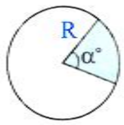
۱) 60°
۲) 61°
۳) 62°
۴) 63°

محیط و مساحت در دایره

۱ مساحت دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$S = \pi R^2$$

۲ مساحت قطاع α° از دایره به شعاع R برابر است با:

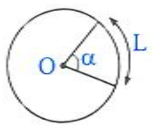


$$S = \frac{\alpha}{360}(\pi R^2)$$

۳ محیط دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$P = 2\pi R$$

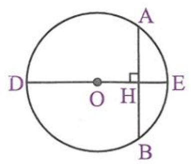
۴ طول کمان α° از دایره‌ای به شعاع R برابر است با:



$$L = \frac{\alpha}{360}(2\pi R)$$

رابطه‌ی قطر عمود بر وتر در دایره

قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$DE \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE} \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$$

اثبات:

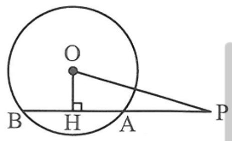
تمرین: روش رسم دایره ای که سه نقطه ی متمایز A ، B و C از آن را در اختیار داریم، شرح دهید.

مثال:

از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $(\sqrt{۲}-۱)۴$ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

مثال:

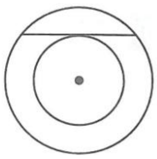


در شکل مقابل، $AB=۶$ و $OH=۱$ و $O\widehat{H}A=۹۰^\circ$، شعاع دایره چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی- ۷۶)

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$

۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

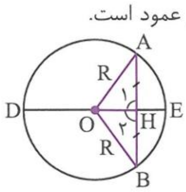
مثال:



شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۶ و ۱۰ سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید. (نهایی- شهریور ۹۱)

عکس قضیه‌ی فوق درست است و دو حالت دارد:

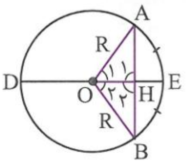
۱) در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



اثبات:

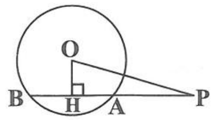
۲) در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

اثبات:



مثال:

در شکل مقابل $AB = ۶$ و $OH = ۱$ و $O\widehat{H}A = ۹۰^\circ$ شعاع دایره چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی ۷۶)



۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$ ۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

در دایره‌ی با شعاع ۱۲، طول وتری که عمود منصف شعاعی از دایره باشد، چه‌قدر است؟

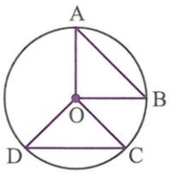
۱) $۳\sqrt{۱۳}$ ۲) ۲۷ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

در یک دایره، نقطه‌ی C روی وتر AB آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متر تقسیم کرده است. اگر فاصله‌ی این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت دایره کدام است؟

۱) ۷۲π ۲) ۱۲۸π ۳) ۶۴π ۴) ۱۰۸π

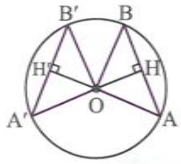
خواص وترهای مساوی در دایره

۱) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.



اثبات:

۲) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) وترهای متساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس. (نهایی- شهریور ۸۵)



اثبات:

مثال : اندازه‌ی دو وتر در یک دایره $4x+4$ و $3x+9$ سانتی‌متر است. اگر کمان‌های نظیر دو وتر برابر باشد در صورتی‌که فاصله‌ی مرکز دایره تا وسط یکی از وترها برابر ۵ باشد آن‌گاه طول شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

خواص وترهای نامساوی در دایره

۱) در یک دایره، از دو وتر نابرابر آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

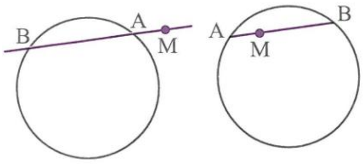
اثبات:

۲) کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

اثبات:

مثال: اگر M نقطه ای داخل دایره $C(O,10)$ باشد و $OM=5$ باشد، طول کوتاهترین و بزرگترین وتری که از M می گذرد چند است؟

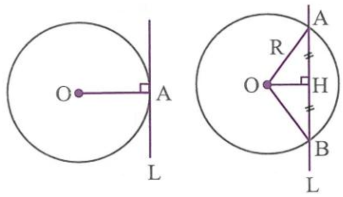
خط‌های قاطع و مماس نسبت به دایره



خط قاطع: هر خط که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع نامیده می‌شود. اگر از نقطه‌ی M واقع در صفحه‌ی یک دایره، خطی رسم شده و دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند پاره‌خط‌های MA و MB دو قطعه‌ی قاطع نامیده می‌شوند.

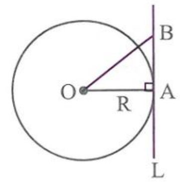
خط مماس: خطی که دایره را در یک نقطه قطع کند، خط مماس نامیده می‌شود و خواص آن به شرح زیر است:

آ) خط مماس بر دایره همواره در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است.



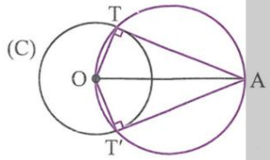
اثبات: فرض کنیم خط L در نقطه‌ی A بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس است. فرض کنیم خط L بر OA عمود نباشد در این‌صورت عمود OH را بر L رسم می‌کنیم و پاره‌خط BH را روی L به‌اندازه‌ی AH رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH و BOH به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند پس $OB = OA = R$. یعنی B روی دایره قرار دارد. در این صورت L دایره را به جای یک نقطه در دو نقطه قطع می‌کند که با فرض مماس بودن آن تناقض دارد. پس $OA \perp L$

ب) خطی که در انتهای یک شعاع بر آن عمود باشد، بر دایره مماس است.



اثبات: فرض کنیم خط L در انتهای شعاع OA بر آن عمود باشد، B را نقطه‌ای دیگر از خط L در نظر می‌گیریم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOB داریم $OB > OA$ یا $OB > R$ و این یعنی B خارج دایره قرار دارد و خط L فقط در نقطه‌ی A دایره را قطع می‌کند پس L بر دایره مماس است.

رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن

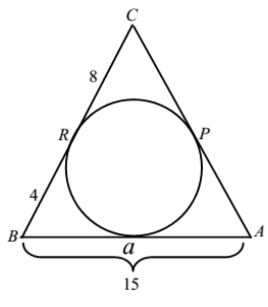


نقطه‌ی A را خارج دایره‌ی $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم، O را به A وصل می‌کنیم. دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره‌ی (C) را T و T′ می‌نامیم. زوایای OTA و OT′A روبه‌رو به قطرند پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT′ در نقاط T و T′ بر دایره‌ی (C) مماس‌اند و با فرض $OA > R$ مسأله همواره دو جواب دارد.

پ) از هر نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که هم‌اندازه‌اند. (نهایی- شهریور ۹۳ و ۸۷- خرداد ۹۱)

اثبات:

تمرین: در شکل زیر اضلاع مثلث بر دایره مماسند. طول ضلع AC را بیابید.



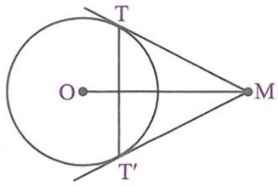
مثال:

دایره‌ی $C(O,4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌انـد (T و T' نقطه‌های تماس‌اند). (نهایی- شهریور ۸۸)

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

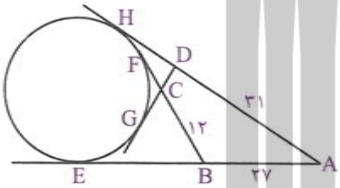
ب) طول وتر TT' را به‌دست آورید.

پ) اندازه‌ی زاویه‌ی TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.



مثـال در شـکل مقابـل، AH ، AE ، BF و DG بـر دایـره ممـاس‌انـد و $AB = 27$ ، $BC = 12$ و $AD = 31$ است. اندازه‌ی CD کدام است؟

۱) ۶	۲) ۷
۳) ۸	۴) ۹



خواص دو مماس رسم شده بر یک دایره‌ی معلوم از یک نقطه خارج آن

در شکل مقابل، MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس‌اند و H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با OM است. ثابت کنید:

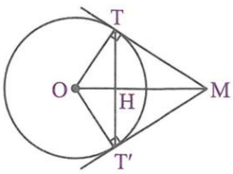
آ) OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب) OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است.

پ) $OH.OM = R^2$

ت) $TT'^2 = 4OH.HM$

ث) $TT'.OM = 2R.MT$



اثبات آ)

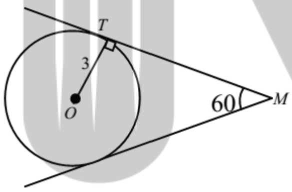
اثبات ب)

اثبات پ)

اثبات ت)

اثبات ث)

مثال: در شکل زیر طول مماس MT چقدر است ؟



مثال:

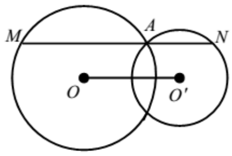
دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر مماس بر دایره‌ی کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرســوم از دو سر این وتر بر دایره‌ی بزرگ‌تر در نقطه‌ی M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصله‌ی M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۶

۳) ۱۷ ۴) ۱۹

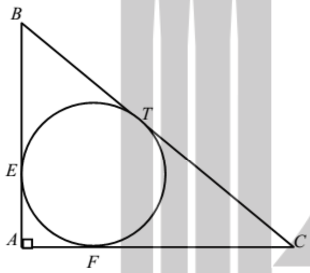
تکلیف:

۱ـ دودایره $C(o,4)$, $C'(o',3)$ مفروضند .اگر $oo'=5$ باشدوازنقطه ی تقاطع دو دایره خطی موازی oo' رسم کنیم تاآنهارادر M , N قطع کند MN را بدست آورید :

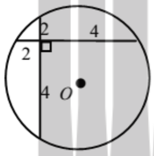


۲ـ اگر فاصله ی وتر AB ازمرکز دایره ی $C(\circ,26)$ برابر ۱۰باشد ،طول وتر AB ر ابدست آورید .

۳ـ در مثلث قائم الزاویه زیر $AC=4$, $AB=3$ است . طول CT چقدر است ؟



٤ ـ در شکل روبرو شعاع دایره را بدست آورید .



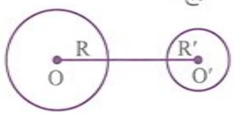
۵ ـ دودایره ی هم مرکز اند وشعاع انها $r_1=4$, $r_2=5$ است. طول قاطعی که دو دایره را قطع می کند در دایره بزرگ تر ۸ است طول بخشی ازآن که در دایره ی کوچکتر قراردارد چقدر است؟

٦ ـ نقطه M به فاصله ۲ از مرکز دایره $C(\circ,4)$ قرار گرفته است . طول کوتاهترین وتر گذرنده از M چقدر است؟

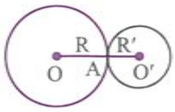
وضع دو دایره نسبت به هم

دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) دو دایره‌ی برون هم (دو دایره‌ی متخارج) $\Leftrightarrow d > R + R'$

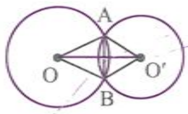


۲) دو دایره‌ی مماس برون (مماس خارج) $\Leftrightarrow d = R + R'$



نکته: لازم به ذکر است که نقاط O، A و O' روی یک امتدادند، زیرا OA و $O'A$ بر خط مماس بر دو دایره در نقطه‌ی A عمودند.

۳) دو دایره‌ی متقاطع $\Leftrightarrow R - R' < d < R + R'$



نکته: در دو دایره‌ی متقاطع، خط‌المرکزین دو دایره همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. زیرا مطابق شکل هر یک از نقاط O و O' از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

۴) دو دایره‌ی مماس درون $\Leftrightarrow d = R - R'$

۵) دو دایره‌ی متداخل $\Leftrightarrow d < R - R'$

۶) دایره‌های هم‌مرکز $\Leftrightarrow d = ۰$

نتیجه:

اگر R و r طول شعاع‌های دو دایره باشد (که $R \geq r$) و d طول خط‌المرکزین باشد، آن‌گاه:

$d < R - r$	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$	$d > R + r$	وضعیت
صفر	۱	۲	۳	۴	تعداد مماس مشترک
متداخل	مماس داخل	متقاطع	مماس خارج	متخارج	

مثال : وضعیت دایره ها را در هر قسمت مشخص کنید .

۱) $R = 8 \ , \ R' = 4 \ , \ oo' = 2$

۲) $R = 6 \ , \ R' = 3 \ , \ oo' = 3$

۳) $R = 7 \ , \ R' = 2 \ , \ oo' = 10$

٤) $R = 10 \ , \ R' = 6 \ , \ oo' = 16$

٥) $R = 6 \ , \ R' = 3 \ , \ oo' = 5$

تمرین

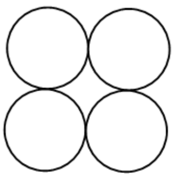
۱ – سه دایره $C_1(o,5)$, $C_2(o',1)$, $C_3(o'',2)$ در یک امتداد مفروض اند . اگر $oo''=6$, $oo'=3$ باشد ، دو دایره C_3,C_2 چه وضعی نسبت به هم دارند ؟

۲ – در دو دایره به شعاع های $R_1=4$, $R_2=3$ و طول خط المرکزین $d=\sqrt{2}-1$ مفروض است . وضعیت دو دایره نسبت به هم چگونه است ؟

۳ – دو دایره به مرکزهای o,o' و شعاع های ۱ و ۳ مماس داخل اند . مساحت مربعی به قطر oo' چقدر است ؟

٤ – دو دایره به شعاع های ۹ و ۱۲ مماس دورنی اند . اندازه ی بزرگ ترین قطعه مماس که یک سر آن بر روی دایره بزرگ تر و سر دیگر آن بر دایره کوچک تر مماس باشد ، چقدر است ؟

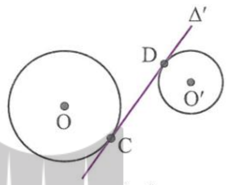
۵ – چهار دایره مساوی به شعاع r مطابق شکل برهم مماسند . شعاع دایره ای که با این چهار دایره مماس داخل است را به دست آورید .



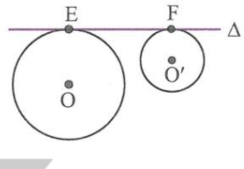
مماس مشترک‌های دو دایره

آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)

ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند (خط Δ')



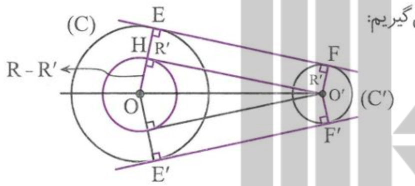
(ب)



(آ)

بنابه قرارداد اندازه‌ی EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازه‌ی CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره



آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

۲) از نقطه‌ی O' مماس $O'H$ را بر دایره‌ی فوق رسم می‌کنیم.

۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی (C) را در نقطه‌ی E قطع کند.

۴) مطابق شکل از نقطه‌ی O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایره‌ی C' را در نقطه‌ی F قطع کند. EF مماس مشترک خارجی دو دایـره اسـت. زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($EH \overset{\parallel}{=} O'F = R'$ و $\hat{H} = 90^\circ$). اگر O' خارج دایره‌ی به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسأله همـواره دو جواب دارد.

محاسبه‌ی طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHO' داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = (R - R')^2 + EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

با فرض این‌که طول خط‌المرکزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

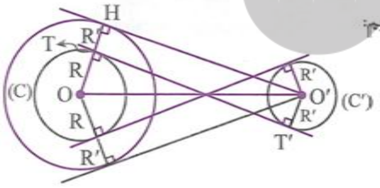
$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

طول خط‌المرکزین در دو دایره‌ی متقاطع به شعاع ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایـره را بـه‌دسـت آورید. (نهایی- خرداد ۹۰)

تست:

- اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $12\sqrt{2}$ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) $7\sqrt{6}$ (سراسری ریاضی ۹۱)



ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) به مرکز O و شعاع $R+R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

۲) از نقطه‌ی O' مماس $O'H$ را بر دایره‌ی فوق رسم می‌کنیم.

۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایره‌ی (C) نقطه‌ی T می‌نامیم.

۴) از نقطه‌ی O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایره‌ی (C') را در نقطه‌ی T' قطع کند. خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است زیرا $\widehat{T} = \widehat{T'} = ۹۰^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است چون $O'T' = R' \overset{\parallel}{=} TH$ و $\widehat{H} = ۹۰^\circ$). اگر O' خارج دایره‌ی به مرکز O و شعاع $R+R'$ باشد مسأله همواره دو جواب دارد.

محاسبه‌ی طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل فوق و با فرض $OO' = d$ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OO'H$ داریم:

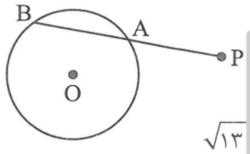
$$OO'^{۲} = OH^{۲} + O'H^{۲} \Rightarrow d^{۲} = (R+R')^{۲} + TT'^{۲} \Rightarrow TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}$$

رابطه‌ی طولی در دایره

آ) وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابرند.

اثبات:

مثال:



فاصله‌ی نقطه‌ی P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است، اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}(\sqrt{11}-1)$ ۲) $\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1)$ ۳) $\sqrt{11}-2$ ۴) $\sqrt{13}-2$

مثال:

نقطه‌ی C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، گذرنده از نقطه‌ی C کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۲)

۱) ۸ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$

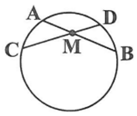
مثال:

دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد، مماس درونی‌اند، اندازه‌ی بزرگ‌ترین قطعه‌ی مماس که یک سر آن بر روی دایره‌ی بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه‌ی تماس) بر روی دایره‌ی کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۷۸)

۱) ۹ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) ۱۲ ۴) $8\sqrt{3}$

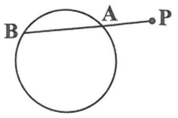
مثال:

- در شکل مقابل $MA = ۶$ و $MB = ۳$ و $MD = ۲/۵$، طول MC کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۶)



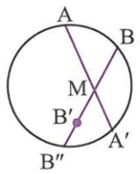
۱) ۱۷/۱
۲) ۶/۹
۳) ۷
۴) ۷/۲

در شکل مقابل $PA = ۵$ و $AB = ۳$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است، فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مرکز دایره کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)



۱) $۲\sqrt{۲۱}$
۲) $۲\sqrt{۱۴}$
۳) $۴\sqrt{۷}$
۴) $۳\sqrt{۷}$

عکس قضیه‌ی وترهای متقاطع: اگر دو پاره‌خط متقاطع باشند به‌طوری که حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر باشند آن‌گاه از انتهای این پاره‌خط‌ها یک دایره می‌گذرد.

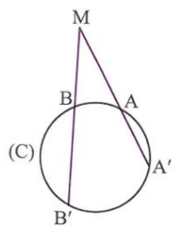


اثبات (روش کتاب درسی): بر سه نقطه‌ی A، B و A' یک دایره می‌گذرد (دایره‌ی محیطی مثلث ABA'). اگر این دایره از نقطه‌ی B' بگذرد حکم ثابت است در غیر این‌صورت این دایره، خط شامل MB را در نقطه‌ای دیگر مانند B'' قطع خواهد کرد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{r} MA.MA' = MB.MB'' \\ (\text{فرض})\ MA.MA' = MB.MB' \end{array}\right\} \Rightarrow MB.MB'' = MB.MB' \Rightarrow MB'' = MB'$$

چون نقاط B' و B'' یک طرف نقطه‌ی Mاند از تساوی اخیر نتیجه می‌شود B'' بر B' منطبق است که تناقض می‌باشد پس دایره‌ی مذکور از نقطه‌ی B' هم می‌گذرد یعنی چهار نقطه‌ی A، B، A' و B' روی یک دایره‌اند.

رابطه‌ی طولی برای وترهایی با امتدادهای متقاطع



۱) مطابق شکل، اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند آن‌گاه: (نهایی- دی ۹۰- شهریور ۸۹)

$$MA.MA' = MB.MB'$$

اثبات:

۲) عکس (۱) هم درست است یعنی اگر امتداد دو پاره‌خط AA' و BB' یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند به‌طوری که $MA.MA' = MB.MB'$، آن‌گاه نقاط A، B، A' و B' روی یک دایره قرار دارند.

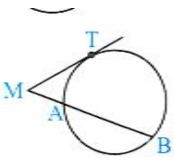
اثبات: از شکل فوق استفاده می‌کنیم. بنابه فرض $MA.MA' = MB.MB'$ پس $\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}\\ \widehat{M} = \widehat{M}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حالت دوم تشابه}} \overset{\Delta}{MAB'} \sim \overset{\Delta}{MBA'} \Rightarrow \widehat{A'} = \widehat{B'}$$

بنابراین نقطه‌ی B' روی کمان درخور زاویه‌ی $\widehat{A'}$ روبه‌رو به پاره‌خط AB قرار دارد پس چهار نقطه‌ی A، B، B' و A' روی یک دایره‌اند.

اگر از نقطه‌ی M خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، مطابق شکل داریم:

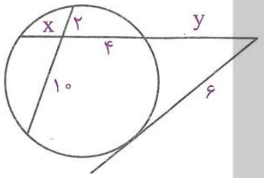
$$MT^2 = MA \cdot MB$$



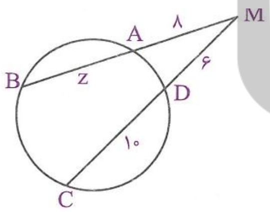
اثبات:

مثال:

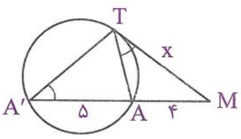
در شکل زیر مقدارهای x و y را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۳)



با توجه به شکل، مقدار z را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۲)



مقدار x را در شکل زیر به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۰)



چندضلعی‌های محیطی

هرگاه همه‌ی ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند.

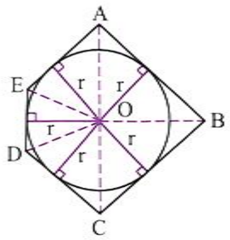
شکل‌های فوق سه چندضلعی محیطی را نشان می‌دهند. مثلث همواره یک چندضلعی محیطی است زیرا نیمساز زوایای داخلی آن همرسند و دایره‌ی مماس بر اضلاع آن، دایره‌ی محاطی داخلی مثلث نامیده می‌شود.

چندضلعی‌های منتظم مانند مربع محیطی‌اند اما سایر چندضلعی‌ها ممکن است محیطی باشند یا نباشند.

ویژگی مشترک چندضلعی‌های محیطی

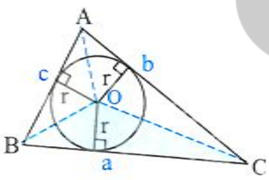
۱) یک چندضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زاویه‌های آن همرس باشند.

اثبات:



نتیجه: چون نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس اند، پس هر مثلث محیطی است.

تمرین: با توجه به شکل زیر شعاع دایره محاطی مثلث را بر حسب محیط و مساحت مثلث بیان کنید.



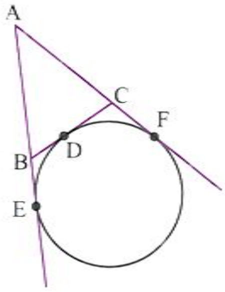
۲) مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با نصف محیط آن در شعاع دایره‌ی محاطی آن.

اثبات:از شکل قسمت (۱) استفاده می کنیم:

مثال: اندازه ی اضلاع مثلثی ۱۱،۱۴و۱۵ است.اندازه ی پاره خط هایی را که دایره محاطی مثلث بر روی اضلاع مثلث ایجاد می کند، بیابید.

مثال: در یک مثلث قایم الزاویه، دایره ی محاطی داخلی، وتر را به دو پاره خط به طول های ۴و۶ تقسیم کرده است. مساحت این مثلث را بیابید.

دایره ی محاطی خارجی مثلث: به دایره ای گفته می شود که بر یک ضلع از مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس باشد.



مثال:

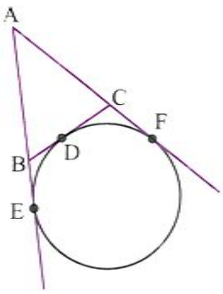
در مثلثی به طول اضلاع ۵،۷ و ۳ واحد، دایره‌ی محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه‌ی تماس ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟ (سراسری ریاضی – ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

تمرین: شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ را حساب کنید.

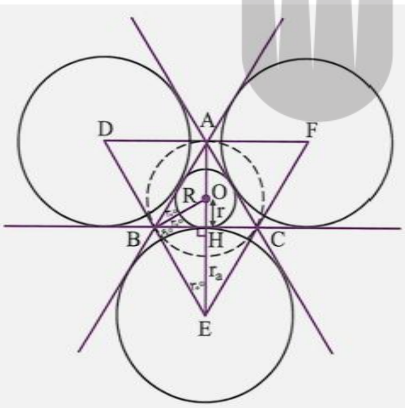
تمرین: طول خط المرکزین دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به اندازه ی ضلع ۵ را حساب کنید.

تمرین:



: مثلث ABC مفروض است. دایره‌ای بر ضلع BC در نقطه‌ی D و بر امتداد اضلاع AB و AC به‌ترتیب در نقاط E و F مماس است (دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC). ثابت کنید محیط مثلث برابر است با 2AE

رابطه‌ی شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع



در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مطابق شکل $OB = R$ شعاع دایره‌ی محیطی، $OH = r$ شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و $HE = r_a$ شعاع دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع $BC = a$ است.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{OBH}(90^\circ - 60^\circ - 30^\circ) \Rightarrow OH = \dfrac{OB}{2} \Rightarrow R = 2r \\ \overset{\Delta}{OBE}(90^\circ - 60^\circ - 30^\circ) \Rightarrow OB = \dfrac{OE}{2} \Rightarrow R = \dfrac{r + r_a}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow r_a = \frac{3R}{2}$$

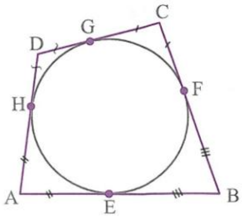
$$\Rightarrow r_a = r_b = r_c = 3r = \frac{3R}{2} = h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

و می‌توان نوشت $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ، $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ و $r_a = r_b = r_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

مثال: طول خط المرکزین دایره ی محیطی و دایره ی محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{3}$ را بیابید.

مثال : مساحت مثلث متساوی الاضلاعی که راس های آن مرکز دایره های محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۳ است را بیابید.

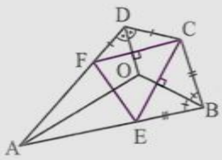
خواص چهارضلعی‌های محیطی



۱) در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل آن، دو به دو برابرند.

اثبات:

۲) اگر مجموع اضلاع مقابل یک چهارضلعی برابر باشد، آن چهارضلعی محیطی است (عکس شماره‌ی ۱).



اثبات: در چهارضلعی $ABCD$ داریم $AB+CD=AD+BC$، مطابق شکل BE را برابر BC و DF را برابر CD جدا می‌کنیم. در مثلث‌های متساوی‌الساقین EBC و CDF نیمسازهای زوایای B و D عمودمنصف‌های اضلاع CF و CE هستند، پس نقطه‌ی تلاقی آن‌ها O، نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های مثلث EFC است از طرفی داریم:

$AB+CD=AD+BC \Rightarrow AE+\cancel{BE}+\cancel{CD}=AF+\cancel{DF}+\cancel{BC} \Rightarrow AE=AF \Rightarrow$ (فرض) $\overset{\Delta}{AEF}$ متساوی‌الساقین است.

بنابراین عمودمنصف EF از نقطه‌ی O می‌گذرد و نیمساز زاویه‌ی A است اما می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است، پس نقطه‌ی O از اضلاع چهارضلعی $ABCD$ به یک فاصله است. در نتیجه دایره‌ای وجود دارد که بر اضلاع چهارضلعی $ABCD$ مماس است لذا این چهارضلعی محیطی است.

مثال:

در چهارضلعی محیطی $ABCD$, $AB+CD=8$ است . محیط چهارضلعی را حساب کنید .

مثال:

- سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می گذرند و اندازه سه ضلع متوالی آن به ترتیب ۷۲ و ۱۰۷ و ۹۱ می باشد . اندازه ضلع چهارم را به دست آورید .

مثال:

- یک ذوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع $R = 3$ محیط است . اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد ، طول ساق آن را به دست آورید .

مثال: در یک ذوزنقه ی متساوی الساقین محیطی، اندازه ی قاعده ها ۲و ۸ است. مساحت ذوزنقه را بیابید.

تست:

- اگر $AB = a + 1$ و $BC = 4a - 3$ و $CD = 3a + 2$ و $DA = a + 3$ ضلع‌های متوالی یک چهارضلعی‌محیطی باشند، مقدار a کدام است؟

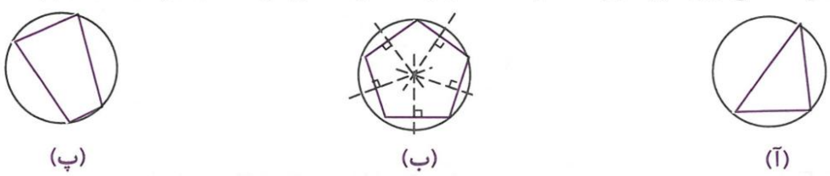
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

چهارضلعی ABCD را بر دایره‌ای به مرکز O محیط کرده‌ایم، مجموع زاویه‌های $A\hat{O}B$ و $C\hat{O}D$ کدام است؟

۱) 90° ۲) 180° ۳) 120° ۴) 240°

چندضلعی‌های محاطی

اگر همه‌ی رأس‌های یک چندضلعی روی دایره قرار داشته باشند آن را چندضلعی محاطی می‌نامند و دایره را محیط بر چندضلعی گویند.



(آ) (ب) (پ)

ویژگی مشترک چندضلعی‌های محاطی

یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف اضلاع آن همرس باشند.

اثبات:

نتیجه:

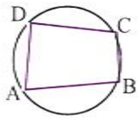
مثلث همواره یک چندضلعی محاطی است زیرا عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس‌اند، چندضلعی‌های منتظم هم همواره محاطی‌اند.

ویژگی چهارضلعی‌های محاطی

یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند. (نهایی- شهریور ۹۱)

اثبات:

آ) اگر چهارضلعی محاطی باشد آن‌گاه زوایای مقابل آن مکمل‌اند. زیرا:

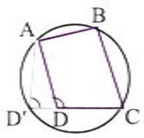


$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{\widehat{BCD}}{۲}+\frac{\widehat{BAD}}{۲}=\frac{\text{کل دایره}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۳۶۰^\circ-(\hat{A}+\hat{C})=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

ب) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.

اثبات: فرض کنیم در چهارضلعی ABCD، $\hat{B}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$. در این‌صورت از سه نقطه‌ی A، B و C یک دایره می‌گذرد (دایره‌ی محیطی مثلث ABC) حال ثابت می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی D می‌گذرد. به همین جهت از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر این دایره از رأس D نگذرد نقطه‌ی برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A وصل می‌کنیم. داریم:

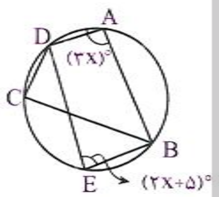


$$\left.\begin{array}{l}\text{چهارضلعی محاطی } ABCD' \Rightarrow \hat{B}+\hat{D'}=۱۸۰^\circ \\ \text{(فرض) } \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{D}=\hat{D'}$$

از طرفی $\hat{D}$ زاویه‌ی خارجی $\overset{\Delta}{ADD'}$ است پس $\hat{D}>\hat{D'}$. این دو نتیجه تناقض است. بنابراین دایره از رأس D می‌گذرد.

مثال:

در دایره‌ی مقابل، $\hat{A}=(۳x)^\circ$، $\hat{E}=(۲x+۵)^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{C}B$ چند درجه است؟



مثال : طول دو ضلع مجاور یک چهارضلعی محاطی ۴ و ۸ می‌باشد. اگر قطرهای این چهارضلعی بزرگ‌ترین مقدار خود را داشته باشند، آن‌گاه شعاع دایره‌ی محیطی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۵

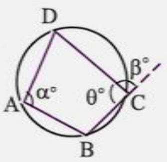
مثال:

ثابت کنید هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی محاطی است.

تمرین: ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی هر ذوزنقه ی متساوی الساقین، محاطی است.

ویژگی‌های بیش‌تر چهارضلعی محاطی

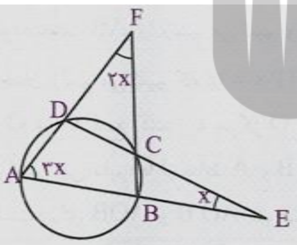
۱) در هر چهارضلعی محاطی، اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی برابر اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی مقابل به آن است.



اثبات:

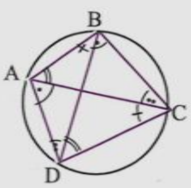
مثال:

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



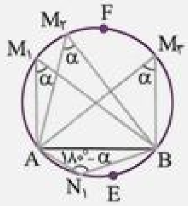
۲) در هر چهارضلعی محاطی اندازه‌ی زاویه‌ی بین یک ضلع و یک قطر برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی بین ضلع مقابل و قطر دیگر.

اثبات:



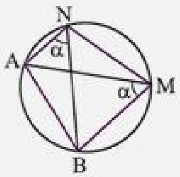
کمان درخور یک زاویه

دایره‌ی معلوم $C(O,R)$ و وتر ثابت AB را در آن در نظر می‌گیریم، همه‌ی زوایای محاطی که رأس آن‌ها روی کمان $\widehat{AFB}$ قرار دارد و اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B عبور می‌کنند هم‌اندازه‌اند $(\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3 = \cdots = \alpha)$



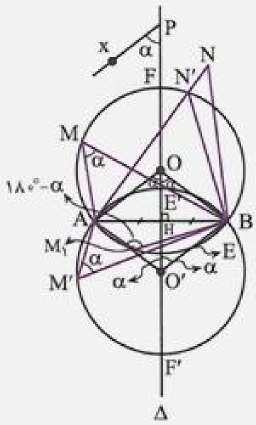
هم‌چنین همه‌ی زاویه‌های محاطی که رأس آن‌ها روی کمان $\widehat{AEB}$ قرار دارد و اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B عبور می‌کنند هم‌اندازه‌اند $(\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 = \widehat{N}_3 = \cdots = 180^\circ - \alpha)$

بنابه قرارداد کمان $\widehat{AFB}$ را کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB و کمان AEB را کمان درخور زاویه‌ی $180^\circ - \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌نامند.



قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB بخشی از یک دایره‌ی منحصر به فرد است. مثلاً اگر مطابق شکل مقابل، نقاط M و N یک طرف پاره‌خط AB باشند و $A\widehat{M}B = A\widehat{N}B = \alpha$، قطعاً نتیجه می‌شود چهار نقطه‌ی A، B، M و N روی یک دایره‌اند و چهارضلعی $ABMN$ محاطی است.

قضیه: مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلع‌هایش از دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند، کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر 2α است.



اثبات: ابتدا طریقه‌ی رسم دو دایره را می‌یابیم. دو نقطه‌ی ثابت A و B را در نظر می‌گیریم عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. از نقطه‌ی دلخواه P واقع بر خط Δ، نیم‌خط Px را چنان رسم می‌کنیم که $H\widehat{P}x = \alpha$ باشد. از نقاط A و B خط‌هایی موازی Px رسم می‌کنیم تا Δ را در O و O' قطع کنند. به مرکز O و شعاع OA و هم‌چنین به مرکز O' و شعاع $O'A$ دو دایره رسم می‌کنیم، این دایره‌ها از نقاط A و B می‌گذرند. با توجه به خطوط موازی و مورب و متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های AOB و $AO'B$ نتیجه می‌شود که زوایای مرکزی AOB و $AO'B$ برابر 2α و در نتیجه $\widehat{AEB} = \widehat{AE'B} = 2\alpha$ است.

چون مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH، BOH، $BO'H$ و $AO'H$ به حالت یک ضلع و زاویه‌ی حاده‌ی مقابل آن همنهشت‌اند، نتیجه می‌شود چهارضلعی $AOBO'$ لوزی است و شعاع دایره‌ها برابرند.

آ) هر نقطه روی کمان‌های $\widehat{AFB}$ و $\widehat{AF'B}$ رأس زاویه‌ای به‌اندازه‌ی α است که اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند، زیرا:

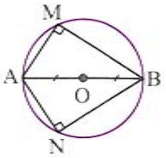
$$A\widehat{M}B = \frac{\widehat{AEB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

ب) حال ادعا می‌کنیم اگر نقطه‌ی N رأس هر زاویه در طرف کمان $\widehat{AFB}$ باشد به‌طوری که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرد و اندازه‌اش برابر α باشد، آن‌گاه N روی $\widehat{AFB}$ قرار دارد. برهان خلف: اگر این‌طور نباشد، N داخل یا خارج دایره قرار دارد. مثلاً N خارج دایره باشد، در این‌صورت زاویه‌ی $A\widehat{N'}B$ برابر α است و بنابه زاویه‌ی خارجی در مثلث BNN' نتیجه می‌شود $A\widehat{N'}B > A\widehat{N}B$ و $\alpha > \alpha$ که تناقض است اگر N داخل دایره باشد، با استدلال مشابه به همین تناقض می‌رسیم. در نتیجه نقطه‌ی N روی کمان $\widehat{AFB}$ است و مکان مطلوب کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB است.

تذکر: عموماً مسأله‌ای از مثلث که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به آن معلوم باشد مربوط به کمان درخور است.

نتایج:

۱) کمان‌های $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AE'B}$ از دو دایره‌ی O و O'، کمان درخور زاویه‌ی $۱۸۰^\circ - \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌باشند. زیرا در چهارضلعی محاطی $AMBM_۱$ داریم $A\widehat{M_۱}B = ۱۸۰^\circ - A\widehat{M}B = ۱۸۰^\circ - \alpha$



۲) کمان درخور زاویه‌ی ۹۰° روبه‌رو به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB است.

نکته: دو نقطه‌ی A و B به کمان درخور زاویه‌ی α یا $۱۸۰^\circ - \alpha$ نسبت به پاره‌خط AB تعلق ندارند و کمان درخورها نسبت به پاره‌خط AB قرینه‌اند.

۳) محاسبه‌ی شعاع دایره‌ای که کمان درخور، بخشی از آن است:

با فرض $AB = a$ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH داریم:

$$\sin\alpha = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{a}{۲}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$$

۴) محاسبه‌ی فاصله‌ی مرکز دایره از پاره‌خط AB:

$$\overset{\Delta}{AOH} : \cos\alpha = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OH = R\cos\alpha \xrightarrow[\text{است}\ \alpha\ \text{منفرجه باشد.}]{\text{به جهت این که ممکن}} OH = R\,|\cos\alpha|$$

با قرار دادن $R = \frac{a}{۲\sin\alpha}$ در تساوی اخیر داریم:

$$OH = \frac{a}{۲\sin\alpha}|\cos\alpha| = \frac{a}{۲|\tan\alpha|}$$

مثال: کمان درخور(یا کمان حاوی یا کمان شامل) زاویه ی ۳۰ درجه رو به رو به پاره خط $AB = 4$ بخشی از دایره ی $C(O,R)$ است.

الف) شعاع دایره را محاسبه کنید.

ب) فاصله ی پاره خط AB از مرکز دایره را محاسبه کنید.

مثال: دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A ، سه راس یک مثلث اند. اگر $BC = 6$ و $\hat{A} = 60$ و نیمساز زاویه ی A همواره از نقطه ی ثابتی مانند D بگذرد، فاصله ی D از نقطه ی B را بیابید.

مثال: در مثلث ABC ، ضلع $BC = 6$ و زاویه ی $\hat{A} = 30$ است. فاصله ی مرکز دایره ی محیطی این مثلث از ضلع BC را حساب کنید.

آزمون جامع فصل اول:

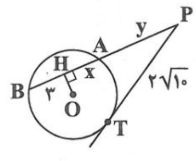
۱- اضلاع مثلثی با اندازه‌های ۸ ، ۱۱ و ۱۵ متناسب‌اند. دایره‌ی محاطی داخلی، ضلع بزرگ‌تر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۲- سه زاویه از یک چهارضلعی داده شده است. در کدام حالت چهارضلعی مورد نظر می‌تواند محاطی باشد؟

۱) °۹۰، °۸۱ و °۱۰۲ ۲) °۵۶، °۱۰۴ و °۱۲۴

۳) °۴۵، °۱۱۵ و °۱۲۵ ۴) °۸۳، °۷۸ و °۱۰۰



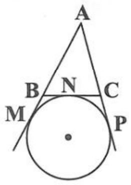
۳- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی $x + y$ چه‌قدر است؟ (O مرکز دایره است.)

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

۴- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ مماس برون هستند. به‌ازای کدام مقدار m، اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها $m + ۲$ است؟

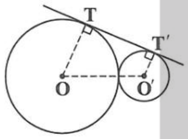
۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰



۵- در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O در نقطه‌ی N بر ضلع BC و در نقاط M و P بر امتداد اضـلاع AB و AC مماس است. اگر $AM = ۶$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲

۳) ۱۸ ۴) ۲۱



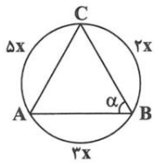
۶- در شکل مقابل اگر شعاع دایره‌ها به‌ترتیب ۲ و ۸ باشد، مساحت چهار ضلعی $OO'T'T$ کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۳۸

۳) ۴۰

۴) ۴۲



۷- در شکل مقابل زاویه‌ی α چند درجه است؟

۱) °۹۰ ۲) °۶۰

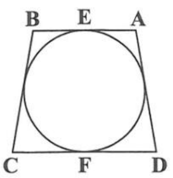
۳) °۸۰ ۴) °۷۵

۸- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ بر هم مماس خارج‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو مماس مشترک خارجی آنها تا نقطه‌ی تماس دو دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۹- ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی بر دایره به شعاع ۳ محیط است. اگر زاویه‌ی حاده‌ی ذوزنقه °۳۰ باشد، مساحت ذوزنقه چه‌قدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

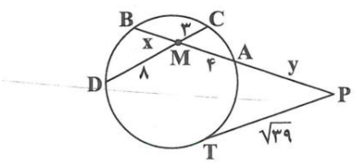


۱۰- مطابق شکل، ذوزنقه‌ی ABCD بر دایره محیط است. اگر $AE = ۴$ و $DF = ۹$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) ۶ ۴) $۶\sqrt{۲}$

۱۱- در شکل روبه‌رو مقدار $|x - y|$ چه‌قدر است؟



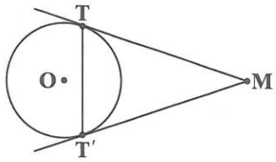
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۱

۱۲- در شکل زیر دایره‌ی $C(O\,،\,۲\sqrt{۱۵})$ مفروض است، به‌گونه‌ای کـه $OM=۱۶$ و دو خـط MT و MT' بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی وتر TT' چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۲) $\frac{۸\sqrt{۱۵}}{۳}$

۳) $\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۴}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۱۵}}{۳}$

۱۳- طول اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی x و $۲x+۱$ و $۳x$ و $x+۴$ است. محیط این چهارضلعی چند واحد است؟

۱) ۲۰   ۲) ۳۰   ۳) ۴۰   ۴) ۵۰

۱۴- نقطه‌ی M خارج دایره مفروض است. اگر فاصله‌ی دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌های دایره از M به‌ترتیب $۹\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲۷}$ باشند، طـول مماسی که از M نسبت به دایره رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۹   ۳) $۹\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$