فصل ۲ : (آشنایی با مقاطع مخروطی)

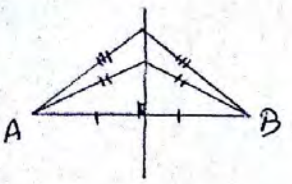
مکان هندسی :

مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که :

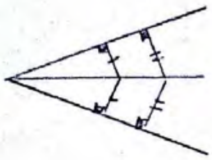
۱) دارای یک ویژگی مشترک باشند .

۲) هر نقطه که این ویژگی مشترک را داشته باشد عضو مجموعه نقاط مورد نظر باشد

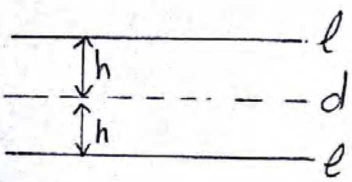
مکان‌های هندسی مهم و معروف :



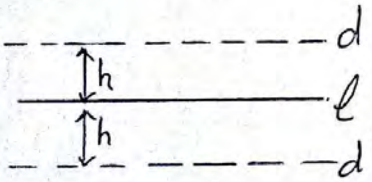
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند عمود منصف پاره خط AB است .



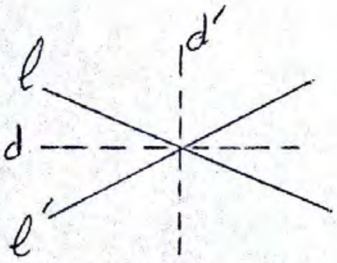
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه مورد نظر است .



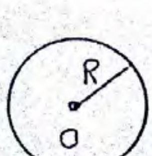
۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند، خطی است موازی با دو خط و در وسط آنها .



۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصله ثابت h باشند دو خط d و d' به موازات l و در طرفین خط l است

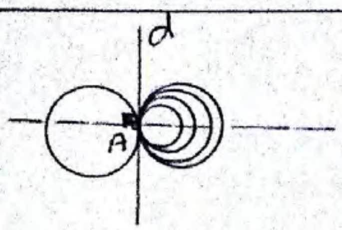


۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله باشند نیمسازهای زوایای بین l و l' است که بر هم عمودند .

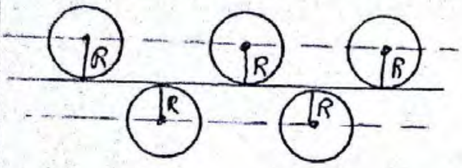


۶) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه معلوم O به فاصله R هستند دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است .

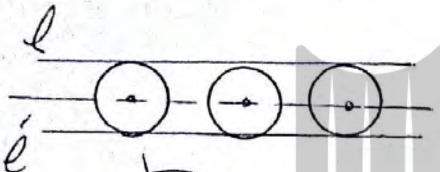
۷) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط d مماس باشند خطی است که در نقطه A بر d عمود است.

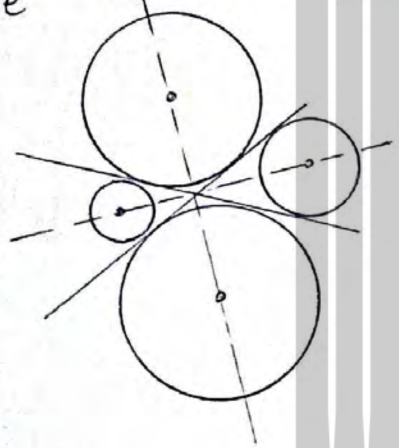


۸) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط d مماس اند (روی خط d می‌غلتند) دو خط به موازات d و به فاصله R از آن است که از مراکز دایره‌ها می‌گذرد.



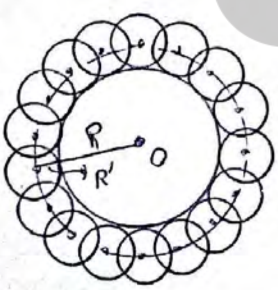
۹) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی l و l' مماس اند خطی است موازی با l و l' و در وسط آنها که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد



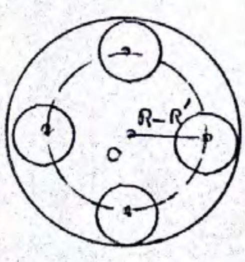


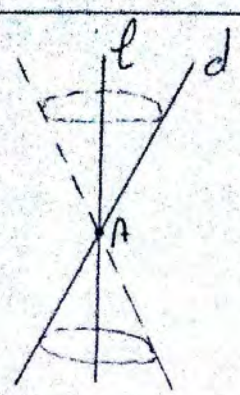
۱۰) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط l و l' مماس اند نیمسازهای زوایای بین دو خط l و l' است.

۱۱) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در خارج آن می‌غلتند (دو دایره مماس خارج اند) دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R+R'$



۱۲) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در داخل آن می‌غلتند (دو دایره مماس داخل اند) دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $R-R'$





رویهٔ مخروطی:

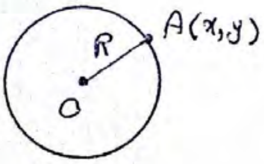
اگر دو خط d و l در نقطه A متقاطع باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌گویند. نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می‌نامند.

مقاطع مخروطی:

از برخورد یک صفحه با رویهٔ مخروطی اشکالی بدست می‌آید که آنها را مقاطع مخروطی می‌نامیم که عبارتند از:

۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) هذلولی

دایره:



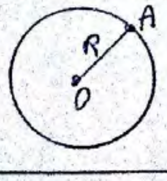
دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به فاصله ثابت (شعاع) هستند.

معادله استاندارد (کلاسیک) دایره:

معادله دایره‌ای که مرکزش نقطه $O\big|^{\alpha}_{\beta}$ و شعاعش برابر R باشد از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2}$$

اثبات:



$O\big|^{\alpha}_{\beta}$ $\quad$ $A\big|^{x}_{y}$

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

مثال ۱: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$ و شعاع آن برابر ۲ باشد.

$O\left|\begin{matrix}-2 \rightsquigarrow \alpha\\ 3 \rightsquigarrow \beta\end{matrix}\right.$ $\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$R=2 \qquad \Rightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=4$

مثال ۲: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ بوده و $A(3,-1)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$R=OA=\sqrt{(1-3)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=13$

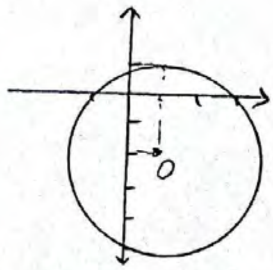
مثال ۳: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ بوده و بر خط به معادله $-3x+4y=4$ مماس باشد، سپس آن را رسم کنید.

حل: می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است.

$O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \qquad R=OH=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|-3(1)+4(-2)-4|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\dfrac{15}{5}=3$

خط مماس: $-3x+4y-4=0$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=9$



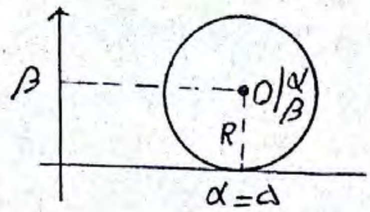
مثال ۴: مکان هندسی نقاطی مانند $M(x,y)$ را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ باشد.

$AM=\sqrt{2}\,BM \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=2\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right] \Rightarrow x^2+y^2=10 \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=(\sqrt{10})^2$

مکان مطلوب، دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{10}$ است.

مثال ۵) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+2$ بوده و در نقطه ای به طول ۵ بر محور طول ها مماس باشد (هماهنگ ۸۴ - دیماه)

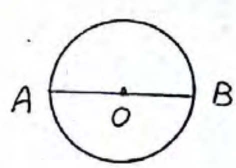


$O\left|\begin{matrix}\alpha=5\\\beta=R\end{matrix}\right.$ $\quad O\in x=y+2 \Rightarrow 5=R+2 \Rightarrow \boxed{R=3}$

$O\left|\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\right.$, $R=3 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-5)^2+(y-3)^2=9$

مثال ۶) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A\left|\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right.$ دو سر قطری از دایره باشند.



وسط AB ، $O\left|\begin{matrix}\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+3}{2}=2\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow O\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$

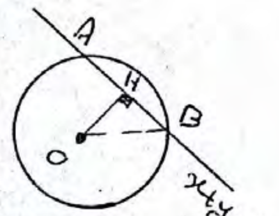
$R=OA=\sqrt{(2-1)^2+(1+1)^2}$

$\Rightarrow \boxed{R=\sqrt{5}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=5$

مثال ۷) معادله دایره ای را بنویسید که $O\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



حل: می دانیم عمودی که از مرکز دایره بر وتر آن رسم می شود، آن وتر را نصف می کند.

$AB=2\sqrt{2} \Rightarrow BH=\sqrt{2}$

$OH=\dfrac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=\dfrac{5}{2}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{2}$

مثال ۸) معادله دایره ای را بنویسید که از دو نقطه $A(1,-2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و مرکزش روی خط $y=2x$ باشد.

$O\in y=2x \Rightarrow O\left|\begin{matrix}\alpha\\2\alpha\end{matrix}\right.$

$OA=OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+(2\alpha+2)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha)^2}$

$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1+4\alpha^2+8\alpha+4=\alpha^2-6\alpha+9+4\alpha^2 \Rightarrow 6\alpha+5=-6\alpha+9 \Rightarrow 12\alpha=4$

$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{3}} \Rightarrow O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ $\qquad R=OA=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{2}{3}+2\right)^2}=\sqrt{\frac{68}{9}}$

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{68}{9}$

معادله گسترده دایره (معادله ضمنی):

اگر معادله استاندارد دایره را باز کنیم معادله ضمنی یا گسترده دایره بصورت زیر خواهد بود:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

که در آن: مختصات مرکز $= O = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ ، شعاع $= R = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}$

مثال) مرکز و شعاع دایره $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ را بدست آورید.

$a=-4$
$b=-4$
$c=7$

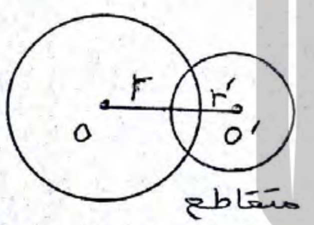
$O\left| \begin{array}{l} -\frac{a}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \\ -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \end{array} \right.$

$R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}} = \sqrt{\frac{(-4)^2+(-4)^2-4(7)}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

یادآوری (هندسه ۲):

فاصله مراکز دو دایره $=$ خط المرکزین $= OO' = d$

وضعیت دو دایره نسبت بهم:

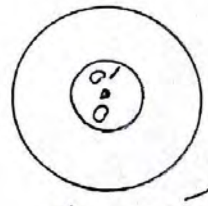


متقاطع

$r-r'<d<r+r'$

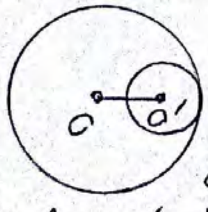
متداخل

$d<r-r'$



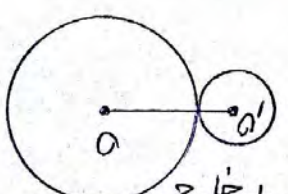
هم مرکز

$d=0$



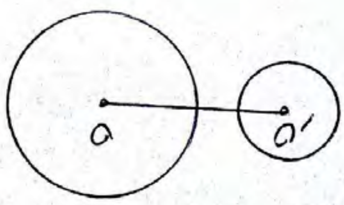
مماس داخل

$d=r-r'$



مماس خارج

$d=r+r'$



متخارج

$d>r+r'$

مثال) وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ و $x^2+y^2-10x-14y+73=0$

$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})=(2,3)$

$r=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$

$O'=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(5,7)$ $\quad r'=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-10)^2+(-14)^2-4(73)}{4}}=\sqrt{1}=1$

$d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ $\quad \begin{cases} d=5 \\ r+r'=4+1=5 \end{cases} \Rightarrow d=r+r' \Rightarrow$ دو دایره مماس مشترک خارجی اند

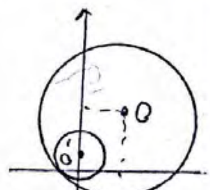
ب) $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

$O(0,0)\ ,\ r=3$ $\quad O'(1,-1)$ $\quad r'=\sqrt{\frac{(-2)^2+(2)^2-4(1)}{4}}=1$

$d=OO'=\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$ $\quad \begin{cases} d=\sqrt{2} \\ r+r'=3+1=4 \\ r-r'=3-1=2 \end{cases}$ $\quad d<r-r' \Rightarrow$ دو دایره متداخل

مثال) معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ بوده و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

$O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(2,3)$ $\quad r'=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}{4}}=\sqrt{\frac{64}{4}}=\sqrt{16}=4$



$d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$d=|r-r'| \Rightarrow |r-4|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-4=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=\pm 2\sqrt{2}+4$

$\Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=(4\pm 2\sqrt{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2y-23-16\sqrt{2}=0 \\ x^2+y^2-2y-23+16\sqrt{2}=0 \end{cases}$

چون مرکز دو دایره می تواند درون دایره دوم قرار داشته باشد مسئله ۲ جواب دارد

مثال) وضعیت خط به معادله $x+y=4$ و دایره $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنید

فاصله مرکز دایره تا خط را پیدا می کنیم.

$O\begin{vmatrix} -\frac{a}{2}=-\frac{-2}{2}=1 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{0}{2}=0 \end{vmatrix}$ $\quad R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-2)^2+0^2-4(-3)}{4}}=\sqrt{\frac{16}{4}}=\sqrt{4}=2$

$OH=\frac{|1+0-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad OH>r \Rightarrow$ خط خارج دایره است و نقطه برخوردی ندارند.

شرط دایره بودن معادله گسترده:

برای اینکه معادله گسترده $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره باشد باید:

۱) ضریب x^2 و ضریب y^2 برابر باشند (در موقع استفاده از فرمولهای مرکز و شعاع در معادله گسترده ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشد)

۲) $a^2+b^2-4c>0$ (زیر رادیکال باید مثبت باشد.)

مثال) در تساوی $mx^2+5y^2+20x-10y+n+1=0$ مقادیر m و n را چنان بیابید که معادله دایره باشد:

ضرایب x^2 و y^2 باید برابر باشند $\Rightarrow \boxed{m=5} \Rightarrow 5x^2+5y^2+20x-10y+n+1=0$

$$\xrightarrow{\div 5} x^2+y^2+4x-2y+\frac{n+1}{5}=0$$

$$a^2+b^2-4c>0 \Rightarrow 16+4-4\left(\frac{n+1}{5}\right)>0 \Rightarrow 20>4\left(\frac{n+1}{5}\right) \Rightarrow 5>\frac{n+1}{5}$$

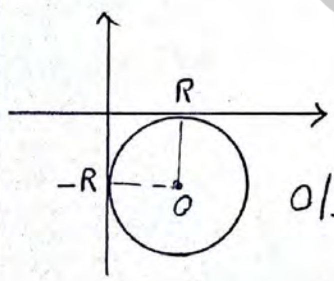
$$\Rightarrow 25>n+1 \Rightarrow \boxed{n<24}$$

(کنکور ریاضی ۹۵)

دو دایره گذرا بر نقطه $(2,-9)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس هستند. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۷
۴) ۱۹

حل) گزینه (۳) نقطه $(2,-9)$ در ناحیه چهارم است پس دو دایره در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس اند:



$O\big|^{R}_{-R}$

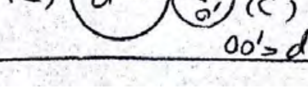
$$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2 \Rightarrow (2,-9)\in C$$

$$\Rightarrow (2-R)^2+(-9+R)^2=R^2 \Rightarrow R^2-22R+85=0$$

$$\Rightarrow (R-17)(R-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} R=5 & \text{شعاع دایره کوچک} \\ R=17 & \text{شعاع دایره بزرگ} \end{cases}$$

مثال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'(5,7)$ بوده و بر دایره $C: x^2+y^2-4x-6y+4=0$ مماس باشد.

حل: دایره مورد نظر را $C'(O',R')$ در نظر می‌گیریم دو حالت داریم:



$OO'=d=R+R'$

$OO'=d=R'-R$

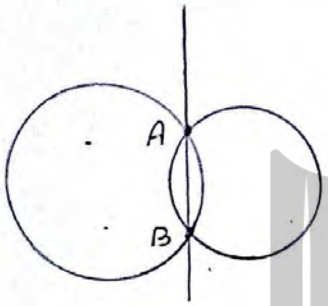
$$C: x^2+y^2-4x-6y+4=0 \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}-\frac{a}{2}=2\\ -\frac{b}{2}=3\end{array}\right. \qquad R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=3$$

$$d=OO'=\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$d=R'+R \Rightarrow 5=R'+3 \Rightarrow R'=2 \Rightarrow C': (x-5)^2+(y-7)^2=4$$

$$d=R'-R \Rightarrow 5=R'-3 \Rightarrow R'=8 \Rightarrow C': (x-5)^2+(y-7)^2=64$$

وتر مشترک دو دایره:



اگر دو دایره همدیگر را در دو نقطه A و B قطع کنند به پاره خط AB وتر مشترک دو دایره می گوییم. برای بدست آوردن معادله وتر مشترک، کافی است معادله دو دایره را از هم کم کنیم (زیرا مختصات A و B در معادله دو دایره صدق می کنند پس در تفاضل آنها هم صدق می کنند)

مثال) معادله وتر مشترک دو دایره $C: x^2+y^2-2x+y+1=0$ و $C': x^2+y^2-y-1=0$ را بنویسید و سپس مختصات محل تلاقی دو دایره و طول وتر مشترک را بیابید.

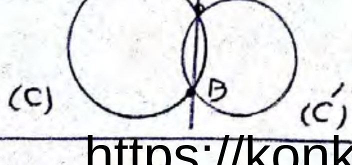
$$C-C'=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x+y+1-x^2-y^2+y+1=0 \Rightarrow -2x+2y+2=0$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} \boxed{x-y-1=0}$$ معادله وتر مشترک

$$\begin{cases} x-y-1=0 \Rightarrow y=x-1 \\ C': x^2+y^2-y-1=0 \Rightarrow x^2+(x-1)^2-(x-1)-1=0 \Rightarrow x^2+x^2-2x+1-x+1-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1-1=0 \Rightarrow A(1,0) \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$AB=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ طول وتر مشترک



هماهنگ ـ شهریور ۹۹)

معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(3,1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $4x+3y+5=0$ مماس باشد (۱٫۲۵ نمره)

$$R=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(3)+3(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$$

$$O\Big|\begin{matrix}3\\1\end{matrix} \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=16$$

$R=4$

(هماهنگ شهریور ۹۹

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس داخل باشد (۲ نمره)

$$O'\Big|\begin{matrix}-\frac{a}{2}=-\frac{-8}{2}=4\\[4pt]-\frac{b}{2}=-\frac{4}{2}=-2\end{matrix} \Rightarrow O'\Big|\begin{matrix}4\\-2\end{matrix} \qquad r'=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{\frac{(-8)^2+4^2-4(16)}{4}} \Rightarrow \boxed{r'=2}$$

$$OO'=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$|r-r'|=OO' \Rightarrow |r-2|=5 \Rightarrow \begin{cases} r-2=5 \Rightarrow \boxed{r=7} & \text{ق ق} \\ r-2=-5 \Rightarrow r=-3 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$O\Big|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\ ,\ r'=2 \qquad \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(r')^2$$

$$\Rightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=2^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4$$

(تمرینات صـ ۴۶ کتاب درسی)

۱) معادله دایره‌ای را بنویسید که:

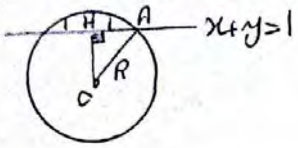
الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

$OA=R=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$ $\qquad (x-1)^2+(y-1)^2=5$

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد.

$R=OH=\frac{|3(2)+4(1)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$ $\qquad (x-2)^2+(y-1)^2=4$

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند:



$OH=\frac{|(-1)+(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\qquad R^2=1^2+(\frac{3}{\sqrt{2}})^2=1+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$

$(x+1)^2+(y+1)^2=\frac{11}{2}$

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد

حل: محل برخورد قطرها همان مرکز دایره است

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix} \Rightarrow O\Big|^{2}_{-1}$ $\qquad OH=R=\frac{|4(2)+3(-1)-6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ $\qquad (x-2)^2+(y+1)^2=\frac{1}{25}$

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

$O\in y=2x-1 \Rightarrow O\Big|^{x}_{2x-1}$ $\qquad OA=OB\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(2x-1-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(2x-1-0)^2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1+4x^2-12x+9=x^2-6x+9+4x^2-4x+1\Rightarrow x=0\Rightarrow O\Big|^{0}_{-1}$

$R=OA=\sqrt{(1-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{10}$ $\qquad (x-0)^2+(y+1)^2=10$

---

۲) حدود a را طوری بدست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

$\underbrace{x^2-3x+\frac{9}{4}}-\frac{9}{4}+\underbrace{y^2+5y+\frac{25}{4}}-\frac{25}{4}+a=0\Rightarrow(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{34}{4}-a$

$\frac{34}{2}-a\geq 0\Rightarrow\frac{34}{4}\geq a$

---

۳) وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-2)$ $\qquad R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\sqrt{10}$

$OA=\sqrt{(-1-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}<\sqrt{10}$ نقطه A داخل دایره $\qquad OB=\sqrt{(1-1)^2+(-2+2)^2}=0<\sqrt{10}$ نقطه B مرکز دایره

به همین ترتیب $OC=\sqrt{26}>\sqrt{10}$ خارج دایره و $OD=\sqrt{10}=\sqrt{10}$ روی دایره است.

۴) وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-2x=4$

$O(0,0)$, $R=2$ و $O'(1,0)$, $R'=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1$ $\quad R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره در دو نقطه متقاطع

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$

$O(0,1)$, $R=1$ $\quad O'(1,0)$, $R'=1$

$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$ $\quad R-R'<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره در دو نقطه متقاطع

ج) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

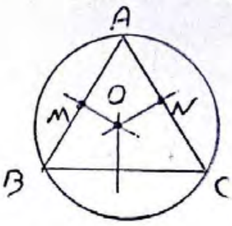
$O(0,0)$, $R=1$ $\quad O'(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $R'=2$

$OO'=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}}=3=R+R' \Rightarrow$ دو دایره مماس خارج

به همین ترتیب قسمت (د) دو دایره متخارج اند.

۵) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث $A\hat{B}C$ هستند معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

حل: مرکز دایره محیطی مثلث محل برخورد عمود منصف اضلاع مثلث است.



وسط AB: $M\left|\begin{array}{l}\frac{-1+1}{2}=0\\ \frac{-1+1}{2}=0\end{array}\right.$ $\quad$ شیب AB $=\frac{-1-1}{-1-1}=1 \xrightarrow{\text{قرینه}} -1 \xrightarrow{\text{معکوس}} -1$

$m_{\text{عمود منصف } AB}=-1 \Rightarrow y-0=-1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-x}$

وسط AC: $N\left|\begin{array}{l}\frac{-1+1}{2}=0\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{array}\right.$ $\quad$ شیب AC $=\frac{-1-(-3)}{-1-1}=\frac{2}{-2}=-1 \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} 1 \Rightarrow m_{\text{عمود منصف } AC}=1$

$\Rightarrow y-(-2)=1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x-2}$

$\begin{cases} y=x-2 \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \end{array} \Rightarrow O\left|\begin{array}{l}1\\-1\end{array}\right.$ $\quad R=OA=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-(-1))^2}=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

۶) وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت بهم مشخص کنید.

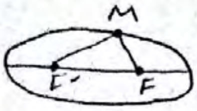
الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$O(2,2)$, $R=1$ $\quad$ فاصله O تا خط $=OH=\frac{|3(2)+4(2)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{14}{5}>R \Rightarrow$ خط دایره را قطع نمی‌کند

قسمت (ب) و (ج) مانند الف حل می‌شود.

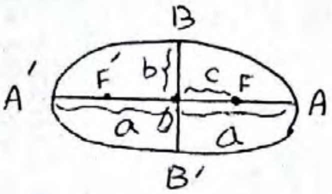
بیضی :

بیضی مکان هندسی نقاطی است مانند M که مجموع فواصل نقطه M از دو نقطه ثابت F و F' داخل بیضی مقدار ثابت $2a$ است که این مقدار ثابت را قطر بزرگ بیضی می نامند.



$MF + MF' = 2a =$ طول قطر بزرگ

اجزای بیضی :



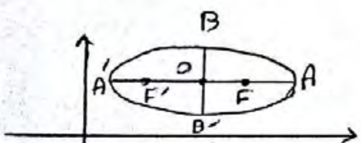
۱) دو نقطه F و F' داخل بیضی را کانون‌های بیضی می نامند و فاصله آنها را فاصله کانونی نامیده و با $FF' = 2c$ نشان می دهیم.

۲) $AA' = 2a$ را قطر بزرگ بیضی و $BB' = 2b$ را قطر کوچک بیضی نامیده که همان دو محور تقارن بیضی است و محل برخورد آنها یعنی O را مرکز بیضی می نامند که همان مرکز تقارن بیضی است.

۳) به مقدار ثابت $e = \frac{c}{a}$ که $0 < e < 1$ است خروج از مرکز بیضی می گوئیم که همواره مثبت است. اگر e به عدد 1 نزدیک شود بیضی کشیده تر و هر قدر e به صفر نزدیکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می شود.

معادلات بیضی :

۱) بیضی افقی : اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور xها و قطر کوچک آن هم راستا با محور yها باشد بیضی را افقی می نامند.



که دارای ویژگی های زیر است :

$AA' = 2a$ = قطر بزرگ

$BB' = 2b$ = قطر کوچک

$FF' = 2c$ = فاصله کانونی

$O\Big|_{\beta}^{\alpha}$ = مرکز بیضی

$a > b > 0$

$a > c$

$c^2 = a^2 - b^2$: رابطه بین a و b و c

$e = \frac{c}{a}$ = خروج از مرکز بیضی

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها هستند) و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند.

$A\Big|_{\beta}^{\alpha+a}$, $A'\Big|_{\beta}^{\alpha-a}$, $B(\alpha, \beta+b)$, $B'(\alpha, \beta-b)$

مختصات کانونها : $\begin{cases} F\Big|_{\beta}^{\alpha+c} \\ F'\Big|_{\beta}^{\alpha-c} \end{cases}$

$AB = \sqrt{a^2+b^2}$

فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی

معادله بیضی افقی : $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$

مخرج x بزرگتر باشد افقی

* در بیضی افقی A و A' و F و F' با O هم عرض و B و B' با O هم طول هستند.

مثال ۱: طول قطرها، مختصات رئوس و کانون‌ها و خروج از مرکز بیضی به معادله $9x^2+16y^2=144$ را بدست آورید.

$$9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144} \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{(x-0)^2}{16}+\frac{(y-0)^2}{9}=1$$

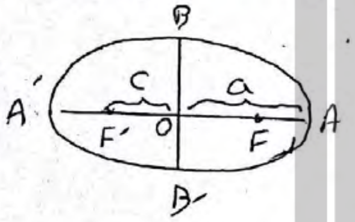
بیضی افقی است.

مرکز $O\Big|^{0}_{0}$ $\quad a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4 \Rightarrow A\Big|^{4}_{0} \quad A'\Big|^{-4}_{0}$ ، $AA'=2a=2\times 4=8$

$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow B\Big|^{3}_{0}$ و $B'\Big|^{-3}_{0}$ ، $BB'=2b=2(3)=6$

$c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\pm\sqrt{7} \quad F\Big|^{\sqrt{7}}_{0}$ و $F'\Big|^{-\sqrt{7}}_{0} \quad FF'=2c=2\sqrt{7}$

مثال ۲: فاصله یک راس کانونی بیضی از مرکز و راس ناکانونی به ترتیب ۲ و $\sqrt{5}$ است. بیشترین فاصله نقطه M روی بیضی از یکی از کانون‌های بیضی چقدر است؟



فاصله O تا A $= a = 2$

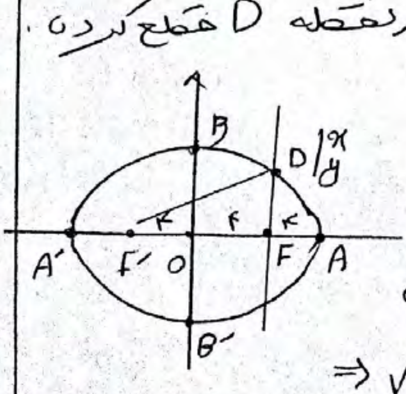
$AB=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2^2+b^2}=\sqrt{5} \Rightarrow 4+b^2=5$

$b^2=1 \Rightarrow \underline{|b=1|}$ $\qquad c^2=a^2-b^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$

بیشترین فاصله یکی از نقاط بیضی از کانون فاصله A تا F' یا A' تا F است

$AF'=A'F=a+c=2+\sqrt{3}$

مثال ۳: مرکز بیضی مقابل بر مبدا مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای مختصات منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد مختصات D را بدست آورید.



$DF'^2=y^2+8^2 \qquad OA=a=8 \Rightarrow AA'=2a=16$

طبق تعریف بیضی: $DF+DF'=2a=16 \Rightarrow y+\sqrt{y^2+64}=16$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+64}=16-y \Rightarrow y^2+64=256-32y+y^2 \Rightarrow 32y=192 \Rightarrow \boxed{y=6}$

$x=OF=4 \qquad \Rightarrow D\Big|^{x=4}_{y=6}$

مثال ۴: نقاط $F\left|\begin{matrix}-8\\4\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ کانونهای یک بیضی اند. اگر بزرگترین قطر بیضی برابر ۲۶ باشد مختصات دوسر قطر بزرگ، دوسر قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$F\left|\begin{matrix}-8\\4\end{matrix}\right. ,\ F'\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right. \Rightarrow O\left|\begin{matrix}\frac{-8+2}{2}=-3=\alpha\\ \frac{4+4}{2}=4=\beta\end{matrix}\right.$$

$\Rightarrow$ عرض مرکز با عرض کانونها برابر است $\Rightarrow$ بیضی افقی

$$FF'=\sqrt{(-8-2)^2+(4-4)^2}=\sqrt{100}=10 \Rightarrow FF'=2c=10 \Rightarrow \boxed{c=5}$$

قطر بزرگ $=2a=26 \Rightarrow \boxed{a=13}$ $\quad c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=169-b^2 \Rightarrow b^2=144 \Rightarrow \boxed{b=12}$

دوسر قطر بزرگ: $A\left|\begin{matrix}\alpha+a=-3+13=10\\ \beta=4\end{matrix}\right.$ $\quad A'\left|\begin{matrix}\alpha-a=-3-13=-16\\ \beta=4\end{matrix}\right.$

دوسر قطر کوچک: $B\left|\begin{matrix}\alpha=-3\\ \beta+b=4+12=16\end{matrix}\right.$ $\quad B'\left|\begin{matrix}\alpha=-3\\ \beta-b=4-12=-8\end{matrix}\right.$

خروج از مرکز $=e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{13}$

مثال ۵: نقاط $B\left|\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$ دوسر قطر کوچک یک بیضی اند. اگر اندازه فاصله کانونی بیضی برابر ۶ باشد مختصات دوسر قطر بزرگ و مختصات کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$B\left|\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right. ,\ B'\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right. \Rightarrow O\left|\begin{matrix}\frac{3+3}{2}=3\\ \frac{-1+7}{2}=3\end{matrix}\right.$$

$\Rightarrow$ مختصات مرکز با طول قطر / طول مرکز با طول قطر کوچک برابر $\Rightarrow$ بیضی افقی

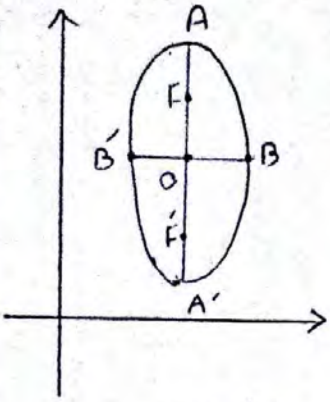
$$BB'=\sqrt{(3-3)^2+(7-(-1))^2}=\sqrt{64}=8 \Rightarrow BB'=2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

فاصله کانونی $=FF'=2c=6 \Rightarrow \boxed{c=3}$ $\quad , \quad c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=a^2-16 \Rightarrow a^2=25$ $\quad \boxed{a=5}$

دوسر قطر بزرگ: $A\left|\begin{matrix}\alpha+a=8\\ \beta=3\end{matrix}\right.$ $\quad A'\left|\begin{matrix}\alpha-a=-2\\ \beta=3\end{matrix}\right.$

کانونها: $F\left|\begin{matrix}\alpha+c=6\\ \beta=3\end{matrix}\right.$ $\quad F'\left|\begin{matrix}\alpha-c=0\\ \beta=3\end{matrix}\right.$

خروج از مرکز: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$



۲) بیضی قائم: اگر قطر بزرگ بیضی هم راستا با محور y ها و قطر کوچک آن هم راستا با محور x ها باشد بیضی را قائم می نامند که دارای ویژگی های زیر است:

قطر بزرگ $= AA' = 2a$ قطر کوچک $= BB' = 2b$

فاصله کانونی $= FF' = 2c$ مرکز بیضی $= O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ $a > b > 0$ ، $a > c$

رابطه بین a و b و c : $c^2 = a^2 - b^2$

خروج از مرکز بیضی $= e = \dfrac{c}{a}$

A و A' را رئوس کانونی (در امتداد کانونها هستند) و B و B' را رئوس غیر کانونی (در امتداد کانونها نیستند) می نامند:

$A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\right.$ $A'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right.$ $B'\left|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right.$

مختصات کانونها: $\begin{cases} F\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right. \\ F'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right. \end{cases}$ فاصله یک راس کانونی از یک راس غیر کانونی $= AB = \sqrt{a^2+b^2}$

معادله بیضی قائم: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$

مخرج y^2 بزرگتر باشد قائم

در بیضی قائم A و A' و O و F و F' هم طول و B و B' و O هم عرض هستند.

مثال) معادله یک بیضی بصورت $2x^2 + y^2 = 10$ است نوع بیضی را مشخص کرده سپس مختصات رئوس، کانونها، مرکز و اندازه قطرها را بیابید.

$2x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow \dfrac{2x^2}{10} + \dfrac{y^2}{10} = \dfrac{10}{10} \Rightarrow \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{10} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{5} + \dfrac{(y-0)^2}{10} = 1$

$O\left|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right.$ بیضی قائم است (مخرج y^2 بزرگتر است)

$a^2 = 10 \Rightarrow a = \pm\sqrt{10} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\ \sqrt{10}\end{matrix}\right.$ $A'\left|\begin{matrix}0\\ -\sqrt{10}\end{matrix}\right.$ قطر بزرگ $= 2a = 2\sqrt{10}$

$b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm\sqrt{5} \Rightarrow B\left|\begin{matrix}\sqrt{5}\\ 0\end{matrix}\right.$ $B'\left|\begin{matrix}-\sqrt{5}\\ 0\end{matrix}\right.$ قطر کوچک $= 2b = 2\sqrt{5}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 10 - 5 = 5 \Rightarrow c = \pm\sqrt{5} \Rightarrow F\left|\begin{matrix}0\\ \sqrt{5}\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}0\\ -\sqrt{5}\end{matrix}\right.$

مثال ۲: نقاط $A(-3,4)$ و $A'(-3,-6)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی اند. اگر اندازه کوچکترین قطر برابر ۶ باشد مختصات دو سر قطر کوچک، کانونها و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

$$O\left|\begin{array}{l}\frac{-3-3}{2}=-3\rightsquigarrow \alpha\\ \frac{4+(-6)}{2}=-1\rightsquigarrow \beta\end{array}\right.$$

⇐ A و A' و O هم طول هستند ⇐ بیضی قائم

$$AA'=2a \Rightarrow \sqrt{(-3-(-3))^2+(-6-4)^2}=2a \Rightarrow 10=2a \Rightarrow \boxed{a=5}$$

$$2b=6 \Rightarrow \boxed{b=3} \qquad c^2=a^2-b^2=5^2-3^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$$

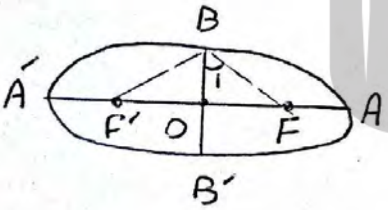
دو سر قطر کوچک:
$$\begin{cases} B\left|\begin{array}{l}\alpha+b=-3+3=0\\ \beta=-1\end{array}\right.\\ B'\left|\begin{array}{l}\alpha-b=-3-3=-6\\ \beta=-1\end{array}\right.\end{cases}$$

کانونها:
$$\begin{cases} F\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta+c=-1+4=3\end{array}\right.\\ F'\left|\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta-c=-1-4=-5\end{array}\right.\end{cases}$$

خروج از مرکز $=e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

(هماهنگ - دیماه ۹۷)

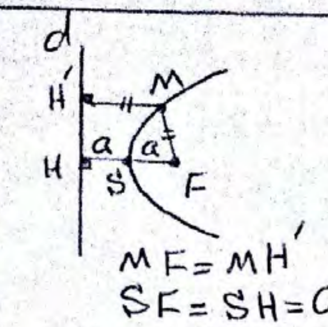
اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



$$2a=2(2b) \Rightarrow a=2b$$

$$c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2 \Rightarrow c=\sqrt{3}\,b$$

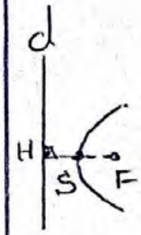
$$tg\,\hat{B}_1=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1=60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F'=2\times 60=120^\circ$$



سهمی:

مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت مانند d و یک نقطه ثابت مانند F خارج از خط به یک فاصله باشند. نقطه ثابت F را کانون سهمی و خط ثابت d را خط هادی سهمی می نامند. هر نقطه دیگری هم روی سهمی در نظر بگیریم فاصله اش از F و خط هادی به یک اندازه است

ویژگی های سهمی:



۱) سهمی سه جزء اصلی دارد:

F = کانون سهمی S = راس سهمی d = خط هادی سهمی

۲) فاصله راس سهمی تا کانون برابر است با فاصله راس سهمی تا خط هادی به عبارت دیگر راس سهمی وسط کانون و خط هادی قرار دارد.

$SH = SF$

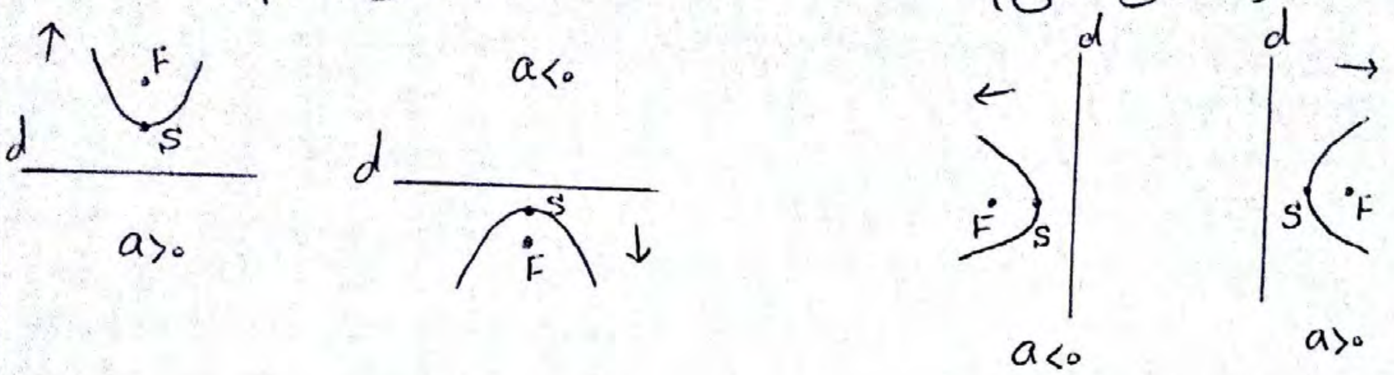
۳) فاصله راس سهمی تا کانون را فاصله کانونی سهمی نامیده با a نشان می دهیم a را پارامتر سهمی نیز می نامند.

$SF = SH = a$

۴) کانون همواره در دهانه سهمی قرار دارد و خط هادی همواره پشت سهمی است و سهمی هرگز خط هادی را قطع نمی کند.

۵) اگر $a > 0$ باشد دهانه سهمی در جهت مثبت محورهای مختصات (راست یا بالا) باز می شود و اگر $a < 0$ باشد دهانه سهمی در جهت منفی محورهای مختصات (چپ یا پایین) باز می شود.

(سهمی افقی) (سهمی قائم)



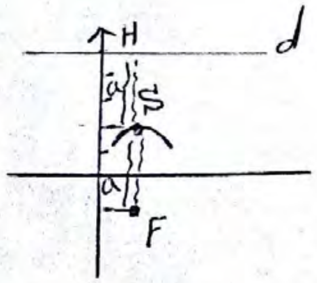
۶) اگر سهمی افقی باشد خط هادی با محور yها موازی است و معادله خط هادی بصورت $x=k$ است.

۷) اگر سهمی قائم باشد خط هادی با محور xها موازی است و معادله خط هادی بصورت $y=k$ است.

۸) امتداد SF محور تقارن یا محور کانونی سهمی است که بر خط هادی عمود است.

مثال) اگر $S(1,2)$ و $F(1,-1)$ به ترتیب راس و کانون یک سهمی باشند معادله خط تقارن سهمی را بنویسید.

حل: رأس و کانون را رسم می‌کنیم:



$$a=SF=\sqrt{(1-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9}=\pm3$$

چون دهانه سهمی رو به پایین است پس: $a=-3<0$

$SF=SH=3$

خط هادی پشت سهمی است.

$y=2+3 \Rightarrow \boxed{y=5}$

معادلات استاندارد (کلاسیک - صورت متعارف) سهمی:

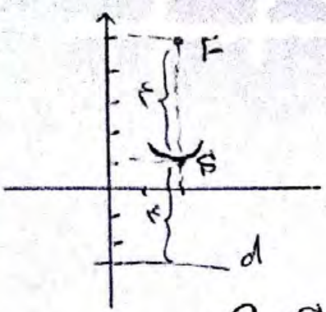
۱) سهمی افقی باشد: $S\Big|^h_k$ راس سهمی و a پارامتر

$\boxed{(y-k)^2=4a(x-h)}$ معادله سهمی — توان y برابر ۲ است.

۲) سهمی قائم باشد: $S\Big|^h_k$ راس سهمی و a پارامتر

$\boxed{(x-h)^2=4a(y-k)}$ توان x برابر ۲ است.

مثال ۱: معادله سهمی به راس $S\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$ و کانون $F\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ را بیابید. و معادله خط هادی آن را نوشته نوع سهمی را مشخص کنید.



حل: راس و کانون را رسم می کنیم:

کانون در دهانه سهمی قرار دارد سهمی قائم و رو به بالا است پس $a>0$

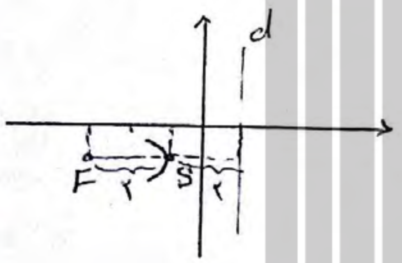
$$a=SF=\sqrt{(2-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{16}=\pm 4 \xrightarrow{a>0} \boxed{a=4}$$

$$(x-h)^2=4a(y-k)$$

معادله خط هادی: $y=-3$

$$\Rightarrow \boxed{(x-2)^2=16(y-1)}$$ معادله سهمی

مثال ۲: معادله سهمی به راس $S\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ و کانون $F\begin{vmatrix}-3\\-1\end{vmatrix}$ را بیابید و معادله خط هادی آن را نوشته نوع سهمی را مشخص کنید.



حل: راس و کانون را رسم می کنیم:

کانون در دهانه سهمی قرار دارد، سهمی افقی و رو به چپ است پس: $a<0$

$$a=SF=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-1-(-1))^2}=\sqrt{4}=\pm 2 \xrightarrow{a<0} \boxed{a=-2}$$

معادله خط هادی: $\boxed{x=1}$

$$(y-k)^2=4a(x-h)$$

$$\Rightarrow (y-(-1))^2=4(-2)(x-(-1))$$

$$\Rightarrow \boxed{(y+1)^2=-8(x+1)}$$ معادله سهمی

تذکر مهم:

اگر در معادله استاندارد سهمی پرانتزها را حساب کنیم معادله گسترده (ضمنی) سهمی بدست می آید که به روش مربع کامل کردن قابل تبدیل به معادله استاندارد می شود.

مثال ۱: با استاندارد کردن سهمی به معادله $x^2+4y-6x+9=0$ مختصات رأس و پارامتر سهمی را تعیین کنید:

$$x^2+4y-6x+9=0 \Rightarrow x^2-6x+9=-4y \Rightarrow (x-3)^2=-4(y-0)$$

سهمی قائم دهانه رو به پایین

$$\Rightarrow S\Big|^{3}_{0} \quad \text{و} \quad 4a=-4 \Rightarrow a=-1$$

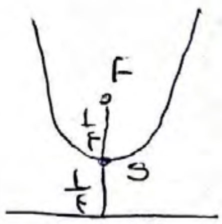
مثال ۲: معادله یک سهمی بصورت $y=x^2+3x+5$ داده شده است. آن را بصورت استاندارد (متعارف) تبدیل کرده و کانون، خط هادی و راس و محور سهمی را مشخص کنید.

$$x^2+3x+5=y \Rightarrow x^2+3x=y-5 \Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}=y-5+\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1\left(y-\frac{11}{4}\right)$$

سهمی قائم، دهانه رو به بالا

$S\Big|^{-\frac{3}{2}}_{\frac{11}{4}}$ $\quad 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$ $\quad F\Big|^{-\frac{3}{2}}_{\frac{11}{4}+\frac{1}{4}=3}$



خط هادی: $y=\frac{11}{4}-\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

محور سهمی: $x=-\frac{3}{2}$

مثال ۳: معادله یک سهمی بصورت $y^2-2y+8x+9=0$ داده شده است آن را بصورت استاندارد (متعارف) بنویسید و کانون، خط هادی و مختصات راس و محور سهمی را مشخص کنید

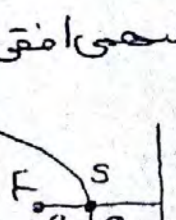
$$y^2-2y=-8x-9 \Rightarrow y^2-2y+1=-8x-9+1 \Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$$

سهمی افقی، دهانه به سمت چپ

$S\Big|^{-1}_{+1}$ $\quad 4a=-8 \Rightarrow a=-2$

اندازه $a=2$

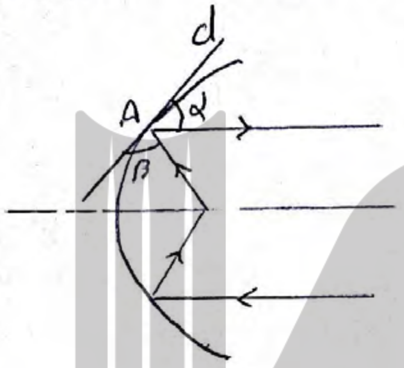
$F\Big|^{-1-2=-3}_{+1}$ $\quad y=1$ محور تقارن



خط هادی: $x=-1+2=1$

ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها :

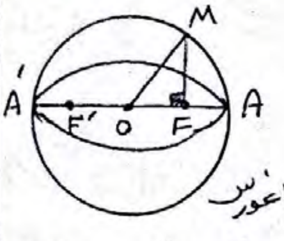
یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت در واقع اگر خط d بر سهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های α و β برابرند



از این ویژگی در ساخت چراغ جلوی اتومبیل‌ها استفاده می‌شود.

(نکته‌های مهم صـ ۶۷ کتاب درسی)

۲) قطر دایره C، مانند شکل قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



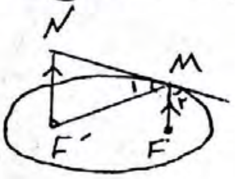
شعاع دایره $= OM = OA = a$ ، $OF = c$

فیثاغورس: $MF^2 = a^2 - c^2$

در بیضی $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow MF^2 = b^2 \Rightarrow MF = b = \frac{BB'}{2} =$ نصف قطر کوچک

۳) در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$

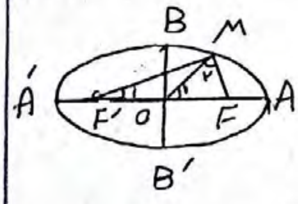


(ویژگی مماس بر بیضی) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

(و $NF' \parallel MF$ مورب MN) $\Rightarrow \hat{N} = \hat{M}_2$

$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N} \Rightarrow NF' = MF'$

۴) نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

$OA = 5$ ، $OB = 3$ ، $OF = 4 = OF' = c$

$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow c = 4 = OM$

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

$OM = OF \Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow O\hat{M}F$ متساوی‌الساقین

$OM = OF' \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{F'}_1 = x \Rightarrow$ خارجی $\hat{O}_1 = \hat{M}_1 + \hat{F'}_1 = 2x$

$\hat{M}_2 = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x$

$\hat{M}_1 = x$

$\Rightarrow \hat{M} = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90° - x + x = 90° \Rightarrow \overset{\triangle}{MFF'}$ قائم‌الزاویه

ج) طول‌های MF و MF' را بدست آورید:

$MF + MF' = 10 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF.MF' = 100$

قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{MFF'}$: $MF^2 + MF'^2 = 64$

$\Rightarrow 64 + 2MF.MF' = 100 \Rightarrow$

$$2MF\cdot MF' = 36 \Rightarrow MF\cdot MF' = 18$$

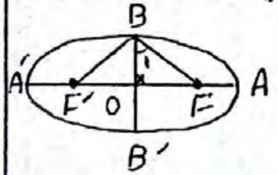
$$(MF'-MF)^2 = MF'^2 + MF^2 - 2MF'\cdot MF = 64 - 2(18) = 28 \Rightarrow MF'-MF = \sqrt{28}$$

$$\begin{cases} MF'-MF = \sqrt{28} \\ MF'+MF = 10 \end{cases} \Rightarrow MF' = \frac{2\sqrt{7}+10}{2} = \sqrt{7}+5$$

$$MF = 10-(\sqrt{7}+5) = 5-\sqrt{7}$$

---

۵) در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



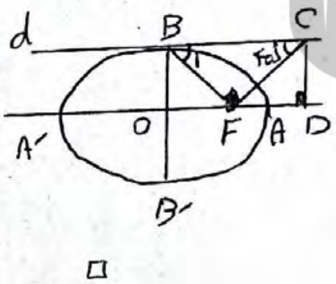
$$AA' = 2BB' \Rightarrow 2a = 2(2b) \Rightarrow a = 2b$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = (2b)^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \Rightarrow c = b\sqrt{3}$$

$$tg\hat{B}_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{b\sqrt{3}}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 2\hat{B}_1 = 120^\circ$$

---

۶) در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$ مقدار $\frac{AD}{AF}$ را بدست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{F} = 90^\circ \\ B\hat{C}F = 45^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = 45^\circ \Rightarrow FC = BF = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{a^2} = a$$

$$\square BCDO:\ CD = OB = b \Rightarrow FD = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{c^2} = c$$

$$AF = a-c \Rightarrow AD = c-(a-c) = 2c-a \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{2c-a}{a-c}$$

---

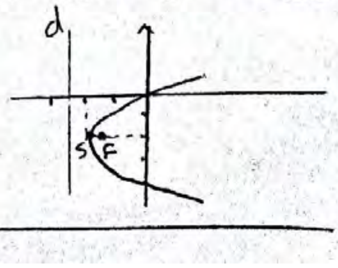
۷) سهمی به معادله $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات راس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید

$$y^2 + 4y = 2x \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 2x + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = 2(x+2)$$

راس سهمی: $S(-2,-2)$ $\quad 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $\quad F\left|\begin{array}{l} -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ -2 \end{array}\right.$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y(y+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

خط هادی: $x = -\frac{5}{2}$



۸) مختصات راس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را بدست آورید.

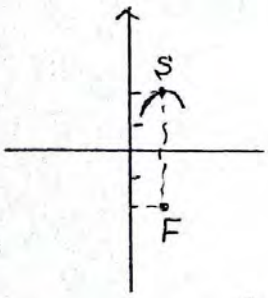
$y=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c \Rightarrow y=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c \Rightarrow y=a(x+\frac{b}{a})^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$\Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y+\frac{\Delta}{4a}=a(x+\frac{b}{2a})^2$

$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{1}{a}(y+\frac{\Delta}{4a}) \Rightarrow \quad S(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$

$4a=\frac{1}{a} \Rightarrow 4a^2=1 \Rightarrow a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow F\left|\begin{array}{l}\pm\frac{1}{2}-\frac{b}{2a}\\ -\frac{\Delta}{4a}\end{array}\right.$

۹) معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ راس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد



حل: با رسم راس و کانون داریم:

دهانه سهمی رو به پایین است پس $a<0$

فاصله F تا S برابر ۴ واحد است پس $a=-4$

نوع سهمی قائم است.

$(x-h)^2=4a(y-k) \Rightarrow (x-1)^2=4(-4)(y-2) \Rightarrow (x-1)^2=-16(y-2)$

۱۰) سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

$y^2=4(x-1) \Rightarrow (y-0)^2=4(1)(x-1) \Rightarrow S\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right. \qquad a=1$

سهمی افقی و دهانه آن به سمت راست است.

$F\left|\begin{array}{l}1+1=2\\0 \qquad 0\end{array}\right.$

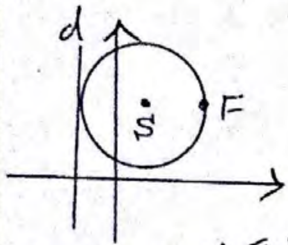
معادله دایره: $(x-2)^2+(y-0)^2=3^2 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=9 \Rightarrow y^2=9-(x-2)^2 \xrightarrow{y^2=4(x-1)}$

$4(x-1)=9-(x-2)^2 \Rightarrow 4x-4=9-x^2+4x-4 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

$x=3 \Rightarrow y^2=4(3-1)=8 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8} \qquad (3,\sqrt{8}),(3,-\sqrt{8})$

$x=-3 \Rightarrow y^2=4(-3-1) \Rightarrow y^2=-16$ غ ق ق

۱۱) سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس



حل: فرض کنیم $(y-k)^2=4a(x-h)$

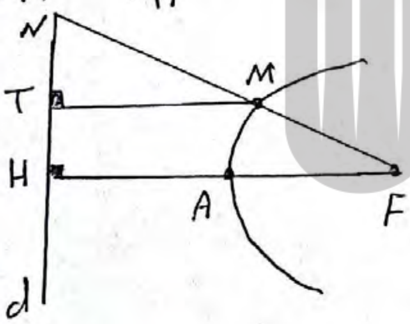
$F\left|\begin{matrix}a+h\\k\end{matrix}\right.$ $\quad S\left|\begin{matrix}h\\k\end{matrix}\right.$ $\quad$ خط هادی: $x=h-a$

اگر دایره از F بگذرد و بر d مماس باشد باید مرکز دایره همان راس سهمی باشد و قطر دایره برابر $2a$ بوده بنابراین $R=a$ و معادله دایره برابر خواهد بود با:
$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

پس مرکز دایره روی سهمی است پس نقاط روی سهمی در واقع مراکز دایره‌هایی هستند که از نقطه F گذشته و با محیطش بر خط هادی نیز مماس باشند

---

۱۲) در شکل سهمی با راس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$



$MT=MF\ ,\quad FA=HA=\frac{1}{2}HF$

$TM\parallel HF \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{FM}{FN}=\frac{TH}{NH}\Rightarrow FN=\frac{FM\cdot NH}{TH}$

$TM\parallel HF \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{NT}{NH}=\frac{TM}{HF}\Rightarrow HF=\frac{NH\cdot TM}{NT}$

$\Rightarrow 2FA=\frac{NH\cdot TM}{NT}\Rightarrow FA=\frac{NH\cdot TM}{2NT}$

$$\frac{FN}{FA}=\frac{\frac{FM\cdot NH}{TH}}{\frac{NH\cdot TM}{2NT}}=\frac{2NT\cdot FM}{TH\cdot TM}\overset{FM=TM}{=\!=}\frac{2NT}{TH}$$