

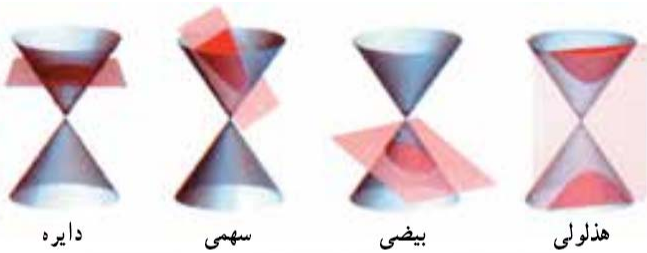
بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**info**

<https://konkur.info>

**سطح مخروطی :** هرگاه یکی از دو خط متقاطع حول دیگری دوران کند سطحی ایجاد می کند که آن را سطح مخروطی گویند. در این تعریف خط ثابت را محور و خط متحرک را مولد و نقطه‌ی تقاطع دو خط را رأس می نامند.



**مقطع مخروطی :** مقطع (مجموعه‌ی نقاط مشترک صفحه

و سطح مخروطی) هر صفحه با سطح مخروطی را مقطع مخروطی گویند. به طوری که :

**الف :** هرگاه صفحه قاطع عمود بر محور، سطح مخروطی را قطع کند و از رأس آن نگذرد مقطع دایره است.

**ب :** هرگاه صفحه قاطع به طور مایل فقط یکی از دامنه‌های رویه را قطع کند و موازی با مولد نباشد، مقطع بیضی است.

**ج :** هرگاه صفحه شامل محور رویه نباشد و هر دو دامنه را قطع کند، آن گاه اشتراک آن‌ها دو منحنی مجزا یعنی مقطع هذلولی است.

**د :** هرگاه صفحه قاطع موازی مولد، سطح مخروطی را قطع کند و بر سطح مقطع مماس نگردد (و از رأس سطح مخروطی عبور نکند)، مقطع سهمی است.

**ه :** هرگاه صفحه قاطع با رویه فقط در رأس مشترک باشد، آن گاه مقطع یک نقطه است.

**و :** هرگاه صفحه قاطع از رأس آن بگذرد و بر رویه مماس گردد (مقطع شامل رأس و فقط یک مولد باشد)، مقطع یک خط راست است.

**ز :** هرگاه صفحه قاطع از رأس آن بگذرد و هر دو دامنه‌ی رویه را قطع کند، آن گاه مقطع دو خط متقاطع است. (ص ۳۵ کتاب جدید)

مثال) صفحه‌ای از رأس یک سطح مخروطی می گذرد و هر دو دامنه‌ی رویه را قطع می کند، فصل مشترک حاصل کدام شکل می تواند باشد

(۱) دو خط راست (۲) دایره (۳) بیضی (۴) هذلولی

جواب: گزینه ۱ صحیح است. چون صفحه از رأس سطح مخروطی می گذرد پس مقطع نمی تواند دایره، بیضی، سهمی و هذلولی باشد.

مثال) صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی دوار عمود است، مقطع حاصل کدام می تواند باشد؟

(۱) سهمی یا نقطه (۲) دایره یا نقطه (۳) هذلولی (۴) دو خط متقاطع

جواب: گزینه ۲ صحیح است. چون صفحه بر محور سطح مخروطی دوار عمود است، پس مقطع حاصل دایره یا نقطه است.

مثال) مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی، کدام وضع را دارد؟

(۱) موازی یک مولد (۲) موازی محور (۳) عمود بر یک مولد (۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد

جواب: گزینه ۱ صحیح است. طبق تعریف سهمی موازی یک مولد است. (کنکور سراسری ریاضی ۷۸)

مثال) صفحه‌ای یک سطح مخروطی را قطع نمی کند. فصل مشترک حاصل کدام شکل نمی تواند باشد؟

(۱) دو خط راست (۲) سهمی (۳) هذلولی (۴) بیضی (کنکور سراسری تجربی ۷۱)

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

مثال) صفحه‌ی  $p$  یک سطح مخروطی دوار را طوری قطع نموده است که مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است وضع

صفحه‌ی  $p$  نسبت به این سطح مخروطی کدام است؟

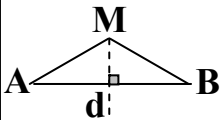
(۱) به موازات محور (۲) به موازات مولد (۳) عمود بر مولد (۴) گذرا از رأس (کنکور آزمون پیش دانشگاهی ریاضی ۷۶)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. چون مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است پس هذلولی است.

(۱) خطوط  $d_1$  و  $d_2$  متناظرند از نقطه  $A$  واقع بر  $d_1$  حداکثر چند خط می گذرد که با خط  $d_2$  متقاطع و با آن زاویه  $30^\circ$  درجه می سازد؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) بیشمار (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

(ص ۳۶ کتاب جدید)



یادآوری: الف) هر نقطه‌ی روی عمودمنصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن است.

اگر خط  $d$  عمودمنصف پاره خط  $AB$  باشد، در این صورت  $M \in d \Leftrightarrow MA = MB$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمودمنصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوئیم عمودمنصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله اند.

مکان هندسی: مجموعه‌ی همه‌ی نقطه‌های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند، یعنی هر نقطه در این مجموعه

دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد.

س ۱) واژه زیر را تعریف کنید: مکان هندسی

س ۲) جمله زیر را با کلمه مناسب تکمیل کنید.

نقطه  $M$  روی عمود منصف پاره خط  $AB$  است اگر و فقط اگر فاصله  $M$  از  $A$  و  $B$  ..... باشد.

فعالیت ۱: ۱) هر نقطه روی نیمساز زاویه .....  
۲) هر نقطه که ..... روی نیمساز زاویه است.  
اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر .....  
بنابراین می‌توان گفت:

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....  
س ۳) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد ..... است.

مثال) در مثلث  $ABC$  زاویه‌ی  $\hat{A} > \hat{C}$ ، نیمساز زاویه‌ی  $B$  و عمودمنصف ضلع  $AB$  در نقطه‌ی  $D$  متقاطع اند.  $M$  و  $N$  پای

عمودهایی است که از نقطه‌ی  $D$  به ترتیب بر  $BA$  و  $BC$  رسم شده اند، کدام نابرابری درست است؟

۱)  $NC > NB$  ۲)  $NC < NB$  ۳)  $DA > DC$  ۴)  $AM > BN$  (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)

۲) در مثلث  $ABC$ ، داریم  $\hat{B} = 50^\circ$  و  $\hat{C} = 60^\circ$  نیمساز داخلی زاویه  $A$  و عمودمنصف ضلع  $BC$  در نقطه  $M$  متقاطع اند،

زاویه  $\hat{MBC}$  چند درجه است؟

۲۰ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴) (کنکور سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)

۳) مثلث  $ABC$  مفروض است مکان هندسی نقاطی مانند  $O$  در صفحه‌ی مثلث  $ABC$  به طوری که  $\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{AB}{AC}$  باشد.

کدام یک از اجزای نظیر رأس  $A$  است؟ (  $S$  نماد مساحت است.)

۱) میانه ۲) فقط نیمساز داخلی ۳) ارتفاع ۴) نیمسازهای داخلی و خارجی

س ۴) مکان هندسی مرکز دایره هایی را که بر دو خط متقاطع داده شده مماسند چیست؟

فعالیت ۲: دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطه‌ی دلخواه  $A$  روی دایره، از  $O$  چه فاصله ای دارد؟

ب) اگر  $B$ ، یک نقطه در صفحه باشد و از  $O$  به فاصله‌ی  $r$  باشد ( $OB = r$ ) با برهان خلف نشان دهید،  $B$  روی دایره است و از

الف) و ب) نتیجه بگیرید:  $A \in C \Leftrightarrow OA = r$

نتیجه: نقطه‌ی  $A$  روی دایره‌ی  $C(O, r)$  است، اگر و تنها اگر .....

نتیجه: دایره‌ی  $C(O, r)$  مکان هندسی نقاطی از صفحه است که .....

س ۵) مکان هندسی مرکز دایره هایی را پیدا کنید که از نقطه مفروض  $A$  می گذرند و شعاع آنها برابر  $R$  است.

س ۶) دایره  $C(O, 6)$  داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماس هایی به طول ۸

بر این دایره می توان رسم کرد.

مثال) دایره  $C(O, 8)$  داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره که از آن نقطه مماس هایی به طول ۶ بر این دایره

می توان رسم کرد کدام است؟



۱) یک خط (۲) دایره ای به شعاع ۶ (۳) دایره ای به شعاع ۸ (۴) دایره ای به شعاع ۱۰

جواب: گزینه ۴ صحیح است.  $OM = \sqrt{36 + 64} = 10$  بنابراین مکان هندسی مورد نظر دایره به مرکز  $O$  و شعاع ۱۰ می باشد.

س ۷) دایره  $C(O, R)$  داده شده است. مکان هندسی نقطه ای را تعیین کنید که مماس های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم

عمود باشند.

۴) مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می توان دو خط عمود بر هم و مماس بر دایره به شعاع  $2\sqrt{2}$  رسم کرد کدام است؟

۱) دایره به شعاع ۲ (۲) دایره به شعاع ۳ (۳) دایره به شعاع ۴ (۴) دایره به شعاع ۵

س ۸) در دایره  $C(O, R)$  وترهای به طول  $K$  رسم شده اند. مکان هندسی نقطه‌ی  $M$  وسط این وترها را تعیین کنید.

مثال) مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در دایره ای به قطر ۱۰ کدام است؟

۱) یک مربع (۲) دایره ای به مرکز همان دایره و شعاع ۴

۳) دایره ای به مرکز همان دایره و شعاع ۳ (۴) دو پاره خط عمود بر هم

جواب: گزینه ۲ صحیح است. فرض کنیم  $AB = 6$  وتری از دایره‌ی  $C(O, R = 5)$  باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی  $O$  مرکز دایره از

نقطه‌ی  $M$  وسط وتر  $AB$  همواره مقدار ثابت زیر است.  $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

پس مکان هندسی نقطه‌ی  $M$  دایره ای به مرکز  $O$  و به شعاع ۴ است.

س ۹) سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی متر پرتاب می کنیم، مکان هندسی نقطه ای درون

مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود.

س ۱۰) پاره خط  $AB$  به اندازه‌ی  $L$  واحد از صفحه‌ی مختصات چنان می لغزد که همواره دو سر آن،  $A$  و  $B$  بر روی محورهای

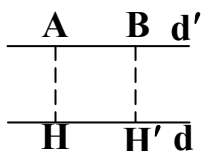
مختصات قرار دارند. مکان هندسی نقطه‌ی  $M$  وسط  $AB$  کدام است؟

س ۱۱) مطلوب است مکان هندسی نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت  $a^2$  باشد.

فعالیت ۳: دو خط موازی  $d, d'$  را که فاصله‌ی آنها از هم ۲ سانتی متر است، در نظر بگیرید.

آیا نقطه های دلخواه  $A$  و  $B$  روی  $d, d'$  از خط  $d$  فاصله‌ی یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟

آیا می توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از  $d$  به فاصله‌ی ۲ سانتی متر باشد و روی  $d'$  نباشند؟



همه نقاطی که از  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر واقع اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

آیا گزاره زیر درست است؟

یک نقطه در صفحه، از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  که

موازی  $d$  هستند، واقع باشد.

آیا نتیجه گیری زیر درست است؟ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر هستند، دو خط راست موازی

$d$  (در دو طرف آن) و به فاصله ۲ سانتی متر از آن می باشد.

۵) اگر فاصله ی دو خط موازی برابر ۶ باشد، مکان هندسی نقاطی از صفحه این دو خط که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۴ باشد کدام گزینه است؟

۱) یک خط موازی با آن دو خط و بین آن دو خط و بین آن دو خط

۳) دو خط موازی با آن دو خط و خارج آن دو خط (۴ خط) تهی

مثال: دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله بوده و از  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

حل: مکان هندسی نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله اند، عمودمنصف  $AB$

و مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی

$d$  به فاصله ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه ی برخورد خط  $L$

(عمودمنصف  $AB$ ) و دو خط موازی  $d'$  و  $d''$  جواب مسئله است (نقاط  $M_1$  و  $M_2$ ).

بحث در وجود جواب: اگر  $L$  یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$  را قطع کند

دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر با دو خط

موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر  $L$  بر یکی از دو خط  $d'$  و  $d''$

منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد. (ص ۳۸ کتاب جدید)

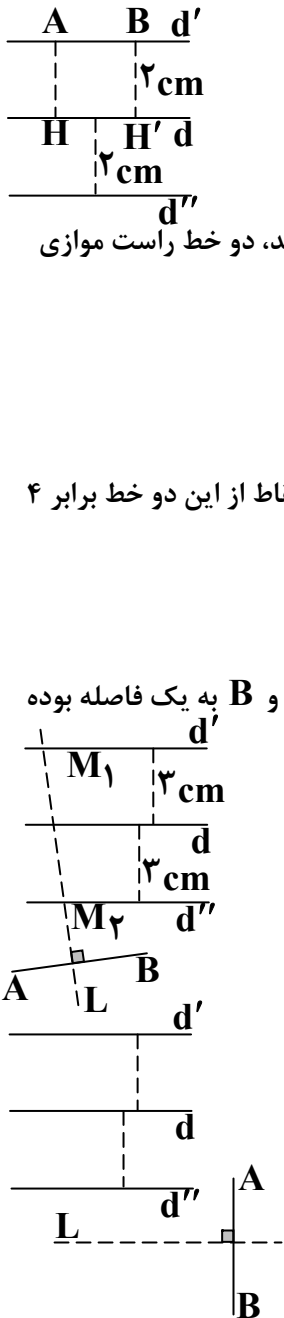
تمرین ۱) مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه ی دایره هایی در صفحه که بر خط  $d$  در نقطه ی ثابت  $A$  مماس اند.

پ) مرکز همه ی دایره هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر خط  $d$  در صفحه مماس اند.

ت) مرکزهای همه ی دایره هایی با شعاع ثابت  $r$  که بر دایره ی  $C(O, r)$  در صفحه ی این دایره مماس خارج اند. (ص ۳۹ کتاب جدید)



۶) چند نقطه روی یک دایره وجود دارد که از دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  به یک فاصله باشد؟  
(۱) حداکثر ۲ تا (۲) همواره ۲ تا (۳) حداکثر ۴ تا (۴) همواره ۲ تا

س۱۲) دو خط  $L$  و  $L'$  در نقطه  $O$  متقاطع اند، نقاطی در صفحه این دو خط مشخص کنید که از دو خط به یک فاصله و از نقطه  $O$  به فاصله  $R_{cm}$  باشد مسئله چند جواب دارد؟ ( $R \neq 0$ )

س۱۳) مکان هندسی مرکز تویی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌گلتد را با رسم شکل بیابید.

س۱۴) مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می‌گلتد چیست؟

س۱۵) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می‌گلتد ..... می‌باشد.

تمرین ۲) نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).  
(ص ۳۹ کتاب جدید)



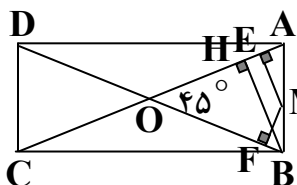
تمرین ۳) نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  به فاصله  $3$  سانتی متر باشد.  
(بحث کنید).  
(ص ۳۹ کتاب جدید)

تمرین ۴) نقطه  $A$  و خط  $d$  در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از  $A$  به فاصله  $2$  سانتی متر و از  $d$  به فاصله  $3$  سانتی متر باشد (بحث کنید).  
(ص ۳۹ کتاب جدید)

تمرین ۵) هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟  
(ص ۳۹ کتاب جدید)

تمرین ۶) هرگاه دو خط  $d$  و  $L$  موازی باشند، از دوران  $d$  حول  $L$  سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه  $P$ ، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های مختلف در باره ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).  
(ص ۳۹ کتاب جدید)

مثال) دو خط  $d$  و  $d'$  با زاویه ی  $45^\circ$  درجه یکدیگر را قطع کرده اند. مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آن نقاط تا این دو خط برابر ۲ می باشد دارای چه مساحتی است؟



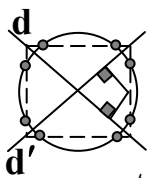
۴ (۱)       $4\sqrt{2}$  (۲)      ۸ (۳)       $8\sqrt{2}$  (۴)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. می دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق همواره مقداری ثابت و برابر ارتفاع وارد بر ساق آن مثلث است. به این ترتیب می توان نشان داد مکان هندسی نقاطی که مجموع آن نقاط تا دو نیم خط متقاطع یکسان است، قاعده مثلث متساوی الساقینی است که ارتفاع وارد بر ساق آن مثلث برابر آن مقدار یکسان است. در صورتی که هدف یافتن مکان نقاطی باشد که مجموع فواصل آن نقاط تا دو نیم خط متقاطع یکسان باشد، این مکان، تبدیل به چهار پاره خط می شوند که در کنار یکدیگر تشکیل مستطیل خواهد داد.

$$\hat{O} = 45^\circ \text{ و } ME + MF = MH = 2 \Rightarrow OH = 2 \Rightarrow OB = 2\sqrt{2} \Rightarrow s_{ABCD} = \frac{(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) \sin 45}{2} = 8\sqrt{2}$$

مثال) دو خط متقاطع  $d$  و  $d'$  و دایره ی  $C$  مفروض اند، بر دایره ی  $C$  حداکثر چند نقطه می توان یافت که مجموع فواصلشان از دو خط  $d$  و  $d'$  مساوی  $k$  باشد؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۸ (۴)



جواب: گزینه ۴ صحیح است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله هایشان از دو خط ثابت متقاطع  $d$  و  $d'$  برابر عدد ثابت و معلوم  $k$  باشد ضلع های مستطیلی است که این دو خط قطرهای آن هستند و فاصله ی هر رأس مستطیل از قطرهایش  $k$  است. رأس های مستطیل هم جزء مکان هستند. تعداد نقاط مشترک این مستطیل با دایره  $C$  جواب مسأله است.

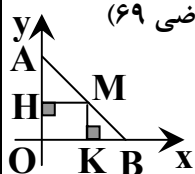
بنابراین حداکثر هشت نقطه می توان یافت که مجموع فواصلشان از دو خط  $d$  و  $d'$  مساوی  $k$  باشد. توجه: اگر این مستطیل مربعی

به ضلع به  $k\sqrt{2}$  باشد و دایره ای به مرکز محل برخورد دو قطر و به شعاع  $X$  به طوری که  $\frac{k\sqrt{2}}{2} < X < \frac{k\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2}$  باشد رسم

کنیم ۸ نقطه به دست می آید.

مثال) مکان هندسی مجموعه ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر ۵ باشد، کدام است؟

(۱) مربعی به ضلع ده (۲) مربعی به ضلع  $10\sqrt{2}$  (۳) مربعی به قطر  $10\sqrt{2}$  (۴) مربعی به قطر ۱۰ (کنکور سراسری ریاضی ۶۹)



جواب: گزینه ۴ درست است. فرض کنیم  $M(x, y)$  نقطه ای از مکان باشد داریم:  $|x| + |y| = 5$

پس:  $x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 5$  و  $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 5$

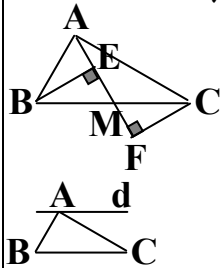
و  $x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 5$  و  $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 5$

با رسم نمودار معادله ی خطوط فوق دیده می شود که مکان هندسی مجموعه ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر ۵ باشد، مربعی به طول قطر ۱۰

س ۱۶) دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ی ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید. (مسئله چند جواب دارد؟ (بحث کنید))

مثال) مثلث ABC مفروض است. از نقطه‌ی A چند خط می‌توان رسم کرد که نقاط B و C از آن به یک فاصله باشد؟

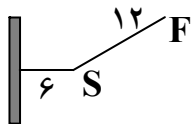
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



جواب: گزینه ۳ صحیح است. با توجه به همنهشتی دو مثلث BME و CMF فاصله‌ی نقاط B و C از نقطه‌ی M وسط BC عبور می‌کند، یکسان است. لذا به عنوان یکی از این خطوط فاصله‌ی نقاط B و C تا میانه‌ی AM یکسان است. همچنین واضح است فاصله‌ی نقاط B و C از خط d که موازی BC و از نقطه‌ی A رسم می‌شود یکسان است.

س ۱۷) در صفحه‌ی مثلث ABC، چند خط وجود دارد که هر سه نقطه‌ی A، B و C از آن‌ها به یک فاصله باشند؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) سه (۴) بیشمار



س ۱۸) مکان هندسی نقطه‌ی ای در فضا را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله d باشد.

س ۱۹) مکان هندسی رأس‌های مثلثی‌هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند را تعیین کنید.

س ۲۰) مکان هندسی نقطه‌ی ای از صفحه را پیدا کنید که از دو خط موازی به یک فاصله باشد.

س ۲۱) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که بر دو خط متوازی مماس باشند.

س ۲۲) مکان هندسی وسط‌های پاره‌هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، پیدا کنید.

س ۲۳) مکان هندسی نقطه‌ی ای در فضا را پیدا کنید که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد.

س ۲۴) مکان هندسی نقطه‌ی ای از فضا که از دو صفحه موازی به یک فاصله است، کدام است؟

- (۱) یک خط راست موازی آن صفحه (۲) یک صفحه عمود بر آن دو صفحه  
(۳) یک خط عمود بر آن دو صفحه (۴) صفحه‌ی ای موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن دو صفحه

س ۲۵) دو صفحه‌ی P و Q و خط d با هم موازیند. مکان هندسی نقطه‌ی ای از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله باشد و از خط موازی d به فاصله‌ی معلوم k باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید. (در مورد جواب‌های مسئله بحث کنید.)

س ۲۶) مکان هندسی نقطه‌ی ای در درون یک مکعب که از دو وجه مقابل آن به یک فاصله است، کدام است؟

- (۱) صفحه‌ی ای عمود بر آن دو وجه (۲) یک خط موازی آن دو وجه  
(۳) تنها یک نقطه (۴) صفحه‌ی ای موازی آن دو وجه و به یک فاصله از آن دو

س ۲۷) دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ی ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند.

س ۲۸) مکان هندسی نقطه‌ی ای از یک صفحه که از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه به فاصله‌ی ثابتی است چیست؟

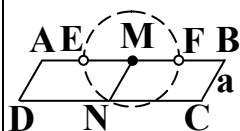
مثال) در متوازی‌الاضلاع ABCD طول BC برابر با a و ضلع AB ثابت است. اگر زاویه‌ی A تغییر کند، مکان هندسی وسط CD کدام است؟

- (۱) قسمتی از دایره به قطر AB (۲) قسمتی از دایره‌ی ای به مرکز وسط AB و شعاع a



(۳) خطی موازی  $AB$

(۴) دایره ای به مرکز  $A$  و شعاع  $AB$



جواب: گزینه ۲ صحیح است. فرض کنیم نقاط  $M$  و  $N$  به ترتیب وسط های ضلع های  $AB$  و  $CD$  باشند. بدیهی است که چهارضلعی  $MNCB$  متوازی الاضلاع است پس: (مقدار ثابت)  $MN = BC = a$  از طرفی جای نقطه  $M$  نیز ثابت می باشد در نتیجه تغییر زاویه  $M$  تابع تغییر زاویه  $A$  است. و چون ضلع های  $AB$  و  $AD = BC = a$  ثابت اند پس مکان هندسی نقطه  $N$  وسط ضلع  $CD$  دایره ای است به مرکز  $M$  و شعاع  $a$ . به جز دو نقطه  $E$  و  $F$  که در آن حالت متوازی الاضلاع به پاره خط تبدیل می شود.

کره: کره مکان هندسی نقطه ای از فضا است که از یک نقطه ثابت داده شده در آن به فاصله ی معین باشد.

س(۳۱) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از نقطه ثابتی واقع در آن به فاصله ثابتی است چیست؟

مثال) اگر  $AB = ۱۲$  باشد، چند نقطه در فضا می توان یافت کرد که از  $A$  به فاصله ی ۶ و از  $B$  به فاصله ی ۴ باشند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

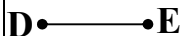
جواب: گزینه ۱ صحیح است. یک مکان هندسی نقاط در فضا که از نقطه  $A$  به فاصله ی ۶ باشند کره ای به مرکز  $A$  و شعاع ۶ است و مکان هندسی دیگر نقاط در فضا که از نقطه  $B$  به فاصله ی ۴ باشند کره ای به مرکز  $B$  و شعاع ۴ است. چون  $۱۲ > ۶ + ۴$  می باشد پس این دو کره دارای نقطه ی مشترک نخواهند بود. (هندسه ۳ دوازدهم ۹۸-۹۷)

س(۳۲) مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه ی متمایز  $A$  و  $B$  واقع در یک صفحه می گذرند چیست؟

س(۳۳) سه نقطه متمایز  $A$ ،  $B$  و  $C$  در یک صفحه داده شده اند. نقطه ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه  $B$  و  $C$  به یک فاصله و از نقطه  $A$  به فاصله ی معلوم  $R$  باشد.

س(۳۴) مکان هندسی مرکز دایره ای را تعیین کنید که در نقطه مشخص  $A$  بر یک خط داده شده مماس باشد و این دایره از نقطه ی ثابت  $B$  خارج آن خط بگذرد.

س(۳۵) با استفاده از خط کش و پرگار مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض  $DE$  قطر آن باشد. (روش رسم را توضیح دهید.) (مراحل رسم را توضیح دهید.)



س(۳۶) پاره خط  $AB$  به طول ۱۰ سانتی متر در یک صفحه مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از  $A$  به فاصله ی ۶ و از  $B$  به فاصله ی ۴ باشند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

س(۳۷) مکان هندسی مرکز دایره های به شعاع  $R$ ، که بر خط مفروض  $d$  مماس است چیست؟

س(۳۸) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو خط موازی  $L$  و  $L'$  به یک فاصله باشد و از نقطه ثابت  $O$  به فاصله ی  $R$  باشد، را بیابید. (مثال) دو صفحه موازی هم و نقطه  $P$  به فاصله ۵ و ۱۱ واحد از دو صفحه در بالای هر دو قرار دارد. مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه  $P$  به فاصله ۱۰ واحد باشد، کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱ خارج از کشور)

(۱) دایره ای به شعاع ۶ (۲) پاره خط به طول ۶ (۳) دایره به شعاع  $۴\sqrt{۲}$  (۴) پاره خط به طول  $۴\sqrt{۲}$  (۵)  $\left. \begin{matrix} M \\ P \\ R \end{matrix} \right\} ۵$  جواب: گزینه ۱ صحیح است. یک مکان هندسی نقطه ای که از دو صفحه ی موازی  $M$  و  $R$  به یک فاصله باشد صفحه ای است موازی آن دو و به فاصله ی یکسان از آن دو. مکان هندسی دیگر نقاطی که از نقطه ثابت  $P$ ، به فاصله ۱۰ باشد سطح کره ای به مرکز  $P$  و به شعاع ۱۰ است. این دو مکان را رسم می کنیم. نقطه ی تلاقی این دو مکان جواب مسئله است. لازم به ذکر است که کره و این صفحه متقاطع اند. پس فصل مشترک آنها یک دایره است. با توجه به

شکل دایره ای به شعاع ۶ مکان هندسی مورد نظر است.  $r^2 = ۱۰^2 - ۸^2 = ۳۶ \Rightarrow r = ۶$

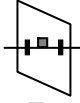
س(۳۹) مکان هندسی مرکز دایره هایی که در نقطه ثابت  $A$  بر دایره  $C(O, R)$  مماسند کدام شکل است؟

- (۱) خط مماس بر دایره  $(C)$  در نقطه  $A$  (۲) نیم خط  $OA$  (به مبدأ  $O$ ) (۳) دایره ای مماس بر دایره  $(C)$  در نقطه  $A$  (۴) خط  $OA$

نکته : (معرفی چند مکان هندسی معروف) مکان هندسی



الف : نقطه ای در صفحه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است، خط عمود منصف آن پاره خط

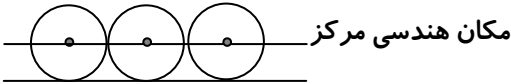


ب : نقطه ای در فضا که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است، صفحه عمود منصف آن پاره خط

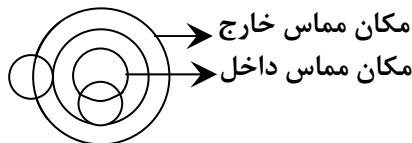


پ : مرکز دایره هایی که از نقطه مفروض A می گذرند و شعاع آن ها برابر R است، دایره به مرکز A و شعاع R می باشد.

ت : مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می غلتد،

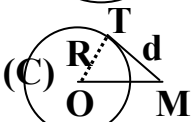


خطی موازی خط فوق می باشد.



ث : مراکز دایره هایی که با شعاع معلوم r بر محیط دایره مفروض به شعاع R مماس باشند

عبارت است از دو دایره هم مرکز با آن دایره و به شعاع های  $R \pm r$



ج : نقطه ای از صفحه ی دایره ی  $C(O, R)$  که از آن نقطه می توان مماس های به طول d بر این دایره رسم کرد

دایره ای است به مرکز O و به شعاع  $\sqrt{R^2 + d^2}$ .



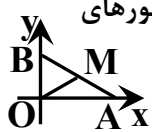
چ : نقطه ای از صفحه ی دایره  $C(O, R)$  که مماس های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند،

دایره ای به مرکز O و به شعاع  $R\sqrt{2}$  است. (دایره ی مونث)



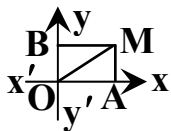
ح : نقطه ی در صفحه ی دایره  $C(O, R)$  که از آن بتوان وترهای به طول K در این دایره رسم نمود،

دایره ای به مرکز O و به شعاع  $\sqrt{R^2 - (\frac{K}{2})^2}$  است.



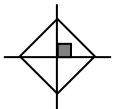
خ : نقطه ی M وسط پاره خط AB به اندازه ی L واحد از صفحه ی مختصات که همواره دو سر آن، A و B بر روی محورهای

مختصات قرار دارند، دایره ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع  $\frac{1}{2}L$ .



د : نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت  $a^2$  باشد.

دایره ای است به مرکز O (محل برخورد دو خط) و به شعاع |a|



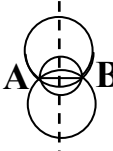
ذ : مجموعه ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر K باشد،

مربعی به طول قطر  $2K$  (و یا مربعی به ضلع  $K\sqrt{2}$ )

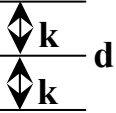


ر : مجموعه ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله هایشان از دو ضلع یک زاویه ی معلوم برابر عدد ثابت k باشد (درون زاویه)

قاعده ی مثلث متساوی الساقینی است که دو ساق آن دو ضلع زاویه هستند و ارتفاع وارد بر ساق مثلث نیز k است.



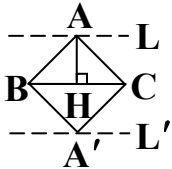
ز : مرکز دایره هایی که از دو نقطه متمایز A و B واقع در یک صفحه می گذرند، خط عمود منصف پاره خط AB می باشد.



ژ: نقطه ای از صفحه که از یک خط داده شده  $d$  در آن صفحه به فاصله معلوم  $k$  باشد. دو خط موازی خط  $d$  و به فاصله  $k$  که در دو طرف خط  $d$  قرار گرفته اند می باشد. ( $k > 0$ )

س: نقطه ای از فضا که از یک صفحه داده شده  $P$  به فاصله معلوم  $k$  باشد. دو صفحه موازی صفحه  $P$  و به فاصله  $k$  که در دو طرف صفحه  $P$  قرار گرفته اند می باشد. ( $k > 0$ )

ش: مرکز دایره های به شعاع  $R$ ، که بر خط مفروض  $d$  مماس است، دو خط راست موازی خط  $d$ ، در دو طرف آن و به فاصله  $R$  از  $d$  می باشند.



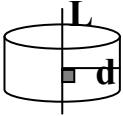
ص: رأس های مثلثی هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند، دو خط  $L$  و  $L'$  است که موازی قاعده  $BC$  یکی بالای آن و دیگری پایین قاعده به فاصله ارتفاع قرار دارند.

ق: وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو صفحه موازی واقعند، صفحه ای است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

ک: مرکز دایره هایی از فضا که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشند، یک صفحه که از  $A$  می گذرد و بر خط  $L$  عمود است می باشد.

ض: مرکز ثقل مثلث هایی که قاعده ای مشترک داشته و ارتفاع وارد بر این قاعده در هم می آید مشترک باشد. خطی است موازی قاعده و به فاصله  $\frac{1}{3}$  ارتفاع از آن

ط: نقطه ای در فضا که از یک خط داده شده  $L$  به فاصله  $d$  باشد. سطح جانبی استوانه ای است که خط  $L$  محور تقارن آن است. به طوری که فاصله هر نقطه ای روی سطح از خط  $L$  برابر  $d$  باشد.



ظ: نقطه ای از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله باشد، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

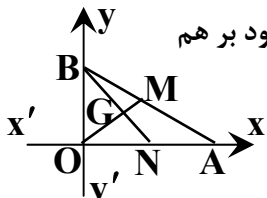
ع: نقطه ای از فضا که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد، صفحه ای است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

غ: مکان هندسی مرکز دایره هایی که بر دو خط متوازی مماس باشند. خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

ف: وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

گ: مرکز دایره هایی را که بر دو خط متقاطع داده شده مماسند، دو خط، نیمسازهای زاویه های ایجاد شده بین دو خط متقاطع است که بر هم عمود نیز هستند.

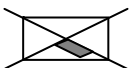
ل: مرکز ثقل مثلث قائم الزاویه  $ABO$  را که وترش  $AB$ ، طول ثابتی دارد و دو سر اصلی وتر روی دو خط عمود بر هم



$x'Ox$  و  $y'Oy$  تغییر مکان می دهد، دایره ای به مرکز  $O$  و به شعاع  $\frac{1}{3} AB$  است.

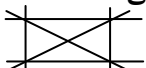
م: نقاطی از صفحه که مجموع فاصله هایشان از دو خط ثابت متقاطع، برابر عدد ثابت و معلوم  $k$  باشد ضلع های مستطیلی است که این دو خط قطرهای آن هستند و فاصله هر رأس مستطیل از قطرهایش  $k$  است. رأس های مستطیل هم جزء مکان هستند.

ن: نقاطی از صفحه که اگر از آن نقاط دو خط به موازات دو خط متقاطع  $L$  و  $L'$  رسم کنیم محیط متوازی الاضلاعی به محیط ثابت و

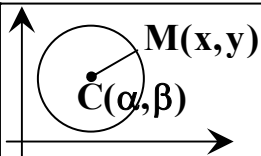


مشخص  $k$  به دست آید نقاط روی مستطیلی به قطر  $k$  است.

و: نقاطی از صفحه که تفاضل فواصلشان از دو خط ثابت و متقاطع، برابر عدد ثابت و معلوم  $k$  باشد امتداد اضلاع مستطیلی است که



این دو خط قطرهای آن بوده و فاصله هر رأس مستطیل تا قطرش  $k$  است ( $\frac{1}{2}$  نیم خط)



معادله کانونیک (استاندارد) دایره: معادله دایره به مرکز  $C(\alpha, \beta)$  و شعاع  $R$  به صورت  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$  است.

حالت خاص: معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع  $R$  به صورت  $x^2 + y^2 = R^2$  است.

مثال: معادله دایره ای به مرکز  $O'(2, -1)$  و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

حل: به کمک دستور بالا معادله استاندارد دایره ای فوق نوشته می شود:  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$   
اگر در این معادله،  $y = 0$  قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور  $x$  ها به دست می آید:

$$(x - 2)^2 + 1 = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 3 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

لذا دایره فوق محور  $x$  ها را در نقاط  $A(2 - \sqrt{3}, 0)$  و  $B(2 + \sqrt{3}, 0)$  قطع می کند

و اگر در این معادله،  $x = 0$  قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور  $y$  ها به دست می آید:

$$4 + (y + 1)^2 = 4 \Rightarrow (y + 1) = 0 \Rightarrow y = -1$$

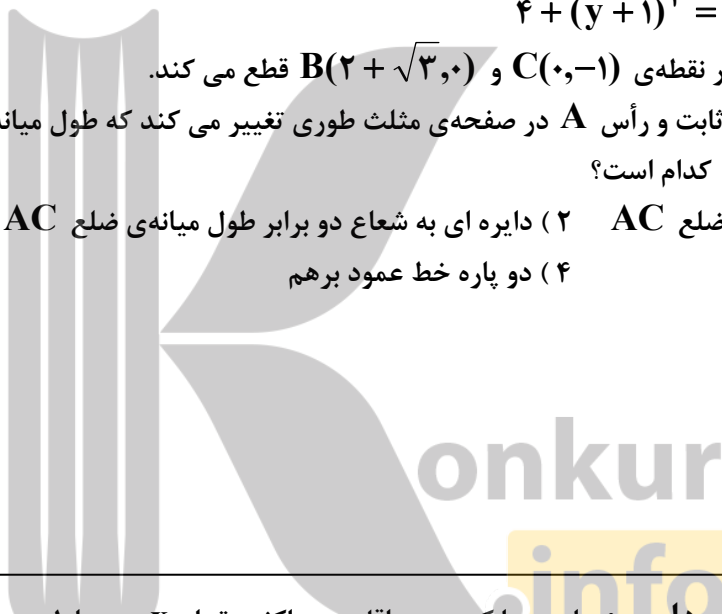
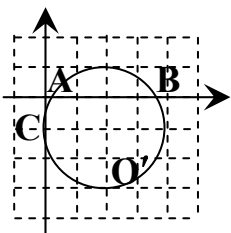
(ص ۴۰ کتاب جدید)

بنابراین دایره فوق محور  $y$  ها را در نقطه‌ی  $C(0, -1)$  و  $B(2 + \sqrt{3}, 0)$  قطع می کند.

(۱) در مثلث  $ABC$ ، ضلع  $BC$  ثابت و رأس  $A$  در صفحه‌ی مثلث طوری تغییر می کند که طول میانه‌ی ضلع  $AC$  همواره مقداری ثابت باشد. مکان هندسی رأس  $A$  کدام است؟

(۱) دایره ای به شعاع طول میانه‌ی ضلع  $AC$  (۲) دایره ای به شعاع دو برابر طول میانه‌ی ضلع  $AC$

(۳) خطی عمود بر ضلع  $BC$  (۴) دو پاره خط عمود برهم



نکته: دامنه و برد معادله‌ی دایره: برای پیدا کردن حداقل و حداکثر مقدار  $x$  در معادله‌ی یک دایره کافی است مرکز و شعاع دایره را پیدا کنیم. در این صورت اگر  $O(\alpha, \beta)$  مرکز دایره باشد، آن گاه حدود  $x$  به صورت زیر به دست می آید ( $x$  را به اندازه‌ی  $R$  حول  $\alpha$  نوسان می دهیم):  $\alpha - R \leq x \leq \alpha + R$  در نتیجه:  $D = [\alpha - R, \alpha + R]$  (دامنه)

و هم چنین برای پیدا کردن برد معادله‌ی دایره یا ماکسیمم و مینیمم  $y$ ، کافی است  $y$  را به اندازه‌ی  $R$  حول  $\beta$  نوسان دهیم. یعنی  $\beta - R \leq y \leq \beta + R$  در نتیجه:  $\Delta = [\beta - R, \beta + R]$

مثال: کمترین مقدار  $x$  از رابطه‌ی  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$  کدام است؟

جواب:  $O(\alpha, \beta) = (1, -2)$  و  $R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$  و  $1 - 5 \leq x \leq 1 + 5 \Rightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow \text{Min}(x) = -4$

(۱۲) طول قطر دایره‌ی  $9(x + 1)^2 + (3y - 2)^2 = 36$  چقدر است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶ (۴)

طریقه‌ی رسم دایره: برای رسم دایره مرکز آن را مشخص کنیم سپس به اندازه‌ی شعاع دایره در چهار طرف شمال، جنوب، شرق و غرب حرکت کنیم تا چهار نقطه دایره مشخص شود سپس این نقطه‌ها را به صورت کمان به هم وصل می کنیم.

مثال) سطح دایره  $(2x + 2)^2 + (2y - 4)^2 = 12$  در کدام نواحی محورهای مختصات قرار دارد؟

(۱) فقط دوم (۲) فقط اول و دوم و سوم (۳) فقط اول و دوم (۴) هر چهار ربع (کنکور آزاد ریاضی ۸۳)

جواب: گزینه ۳ صحیح است.  $R = \sqrt{3}$  و  $O'(-1, 2)$   $\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3 \Rightarrow (2x + 2)^2 + (2y - 4)^2 = 12$  اگر دایره رسم شود ملاحظه می گردد که از ناحیه سوم و چهارم نمی گذرد.

مثال) سطح دایره  $x^2 + 2x + y^2 - 2y = -\frac{1}{4}$  در کدام ربع های محورهای مختصات قرار دارد؟

(۱) فقط دوم (۲) فقط دوم و سوم (۳) فقط اول و دوم و سوم (۴) چهار ربع (کنکور آزاد ۸۶ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۳ صحیح است  $R = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1/3$  و  $O(-1, 1)$   $\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y = -\frac{1}{4}$  با رسم شکل ملاحظه می شود که این دایره از ربع های اول و دوم و سوم می گذرد اما از ربع چهارم نمی گذرد.

مثال) دایره  $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 6 = 0$  در چند نقطه محورهای مختصات را قطع می کند؟

(۱) چهار نقطه (۲) دو نقطه (۳) صفر (۴) یک نقطه (کنکور آزاد تجربی پزشکی ۸۸)

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

$$(y = 0) \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$$

معادله دو جواب دارد پس محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع می کند.

محور  $y$  ها قطع نمی شود  $(x = 0) \Rightarrow y^2 + 4y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8 < 0$

مثال) معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل هر کدام از آن ها از دو نقطه  $A(-4, 2)$  و  $B(2, -4)$  برابر ۵۴ باشد کدام است؟

$$(1) (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9 \quad (2) (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

$$(3) (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9 \quad (4) (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

جواب: گزینه ۴ صحیح است. فرض کنیم  $M(x, y)$  نقطه ای از مکان باشد.

$$MA^2 + MB^2 = 54 \Rightarrow (x + 4)^2 + (y - 2)^2 + (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 54$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 40 = 54 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y = 7 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

مثال) داخل دایره ای به معادله  $x^2 + y^2 = 3$  چند نقطه با مختصات صحیح نسبی وجود دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۳

جواب: گزینه ۳ درست است. شعاع دایره فوق  $\sqrt{3}$  است و داریم:  $2 > \sqrt{3} > -2$  بنابراین در دایره ای با شعاع  $\sqrt{3}$  فقط ۹ نقطه

با مختصات صحیح می توان یافت:  $(0, -1)$  و  $(0, 1)$  و  $(-1, 0)$  و  $(1, 0)$  و  $(0, 0)$  و  $(1, 1)$  و  $(1, -1)$  و  $(-1, 1)$  و  $(-1, -1)$

مثال) مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$  را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1^2 - 1 + y^2 - 4y + 2^2 - 4 + 1 = 0$$

جواب:

$$r = 2 \text{ و } O(-1, 2) \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow (ص ۴۱ کتاب جدید)$$

فعالیت: می خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را در حالت کلی به

دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow (x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}) + (y^2 + by + \dots - \dots) + c = 0$$

$$\Rightarrow (x + \dots)^2 + (y + \dots)^2 + \dots = 0 \Rightarrow (x + \dots)^2 + (y + \dots)^2 = \dots$$

$$\Rightarrow O(\dots, \dots) \text{ و } r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

با توجه به نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه ای در باره ی  $a$ ،  $b$  و  $c$  به دست می آید؟ (ص ۴۱ کتاب جدید)

**نتیجه:** با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می توان معادله ی آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله ی دایره می توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد. (ص ۴۱ کتاب جدید)

معادله ضمنی (یا گسترده یا کلی یا عمومی) دایره: هر معادله به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  را می

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

توان به صورت زیر به مربع کامل تبدیل کرد:

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 + \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = 0 \Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

در این صورت:

(۱) اگر  $\Delta = a^2 + b^2 - 4c < 0$  و یا  $a^2 + b^2 < 4c$  باشد این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

(۲) اگر  $\Delta = a^2 + b^2 - 4c = 0$  و یا  $a^2 + b^2 = 4c$  باشد این معادله نقطه ی  $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  از صفحه را مشخص می کند.

(۳) اگر  $\Delta = a^2 + b^2 - 4c > 0$  و یا  $a^2 + b^2 > 4c$  باشد این معادله دایره به مرکز  $O(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2})$  و به طول

$$\text{شعاع } r = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

از صفحه را مشخص می کند.

و به عبارت دیگر در صورتی که  $\alpha = -\frac{a}{2}$  و  $\beta = -\frac{b}{2}$  و  $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c$  باشد آنگاه

(۱) اگر  $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c < 0$  و یا  $\alpha^2 + \beta^2 < c$  باشد این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

(۲) اگر  $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 0$  و یا  $\alpha^2 + \beta^2 = c$  باشد این معادله نقطه ی  $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$  از صفحه را مشخص می کند.

(۳) اگر  $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c > 0$  و یا  $\alpha^2 + \beta^2 > c$  باشد این معادله دایره به مرکز  $O(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2})$  و به طول

$$\text{شعاع } r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$$

از صفحه را مشخص می کند.

**توجه:** معادله ی  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  در صورتی که  $c < 0$  باشد همواره معادله ی یک دایره است.

**نتیجه:** با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می توان معادله ی آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله ی دایره می توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

**نکته:** در مقاطع مخروطی دایره و بیضی و هذلولی (افقی و یا قائم)، ریشه‌ی مشتق نسبی نسبت به  $x$  (یعنی  $f'_x = 0$ ) و هم چنین ریشه‌ی مشتق نسبی نسبت به  $y$  (یعنی  $f'_y = 0$ ) محورهای تقارن افقی و قائم مقطع را می‌دهند که محل برخورد این دو محور یعنی  $(f'_x = 0, f'_y = 0)$  مرکز تقارن یعنی مرکز این مقاطع می‌باشد.

**نکته:** در صورتی که داشته باشیم  $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  در معادله‌ی

$$O \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow x = \alpha = -\frac{a}{2} \\ f'_y = 0 \rightarrow y = \beta = -\frac{b}{2} \end{cases} \text{ حاصل را به دست می‌آوریم.}$$

(۱) اگر  $f(\alpha, \beta) > 0$  باشد این معادله هیچ نقطه‌ای از صفحه را مشخص نمی‌کند.

(۲) اگر  $f(\alpha, \beta) = 0$  باشد این معادله نقطه‌ی  $O(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2})$  از صفحه را مشخص می‌کند.

(۳) اگر  $f(\alpha, \beta) < 0$  باشد این معادله دایره به مرکز  $O(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2})$  و به طول شعاع  $r^2 = |f(\alpha, \beta)| = -f(\alpha, \beta)$

از صفحه را مشخص می‌کند.

**کار در کلاس:**

(۱) معادله‌ی دایره‌ی  $O(0, 1)$  و شعاع آن ۳ باشد.

(۲) معادله‌ی دایره‌ی  $O(0, 1)$  به مرکز مبدأ مختصات و شعاع  $r$  به چه صورت است؟

(۳) کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف)  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$

ب)  $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

ج)  $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$  (ص ۴۲ کتاب جدید)

onkur  
info

مثال: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که نقطه‌ی  $O(-2, -1)$  مرکز آن و  $M(1, 1)$  یک نقطه از آن باشد. (ص ۴۲ کتاب جدید)  
 حل: مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادله‌ی آن را بنویسیم. روشن است که  $OM = r$  پس طول

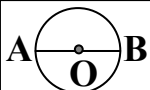
$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13}$$

OM را به دست می‌آوریم:

و معادله دایره را به صورت زیر نوشته می‌شود:  
 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 13$   
 و به روش دیگر می‌توان گفت مختصات هر نقطه روی دایره در معادله‌ی دایره صدق می‌کند.

$$(x - \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = r^2 \Rightarrow (1+2)^2 + (1+1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 13 \Rightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 13$$

س ۳۸) معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که از نقطه‌ی  $(1, -1)$  بگذرد و خطوط  $y = x + 1$  و  $y = 1 - x$  شامل دو قطر آن باشند.



نکته: اگر A و B دو سر قطری از دایره باشند آنگاه مختصات مرکز و شعاع دایره به صورت زیر خواهد بود.

$$O(\alpha = \frac{x_A + x_B}{2}, \beta = \frac{y_A + y_B}{2}) \text{ مرکز } O \text{ (وسط قطر } AB) \text{ و } R = OA = OB = \frac{AB}{2} \text{ (شعاع)}$$

۱۳) معادله‌ی دایره‌ی ای که نقاط  $A(1, 9)$  و  $B(7, 1)$  دو سر قطری از آن باشند، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 4y - 46 = 0 \quad (1) \quad x^2 + y^2 + 8x + 2y - 108 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0 \quad (3) \quad x^2 + y^2 + 16x + 8y - 170 = 0 \quad (4)$$

مثال) معادله‌ی دایره‌ی ای که خط  $3x - 4y = 24$  معادله‌ی قطری از آن بوده و دوسرین قطر بر محورهای مختصات واقع است، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \quad (1) \quad x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \quad (3) \quad x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0 \quad (4)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است. نقاط برخورد این قطر با محورهای مختصات را A و B می‌نامیم. نقطه‌ی C وسط پاره خط AB مرکز دایره است.  
 $x = 0 \Rightarrow -4y = 24 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow B(0, -6)$  و  $x = 8 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$  و  $A(8, 0)$

$$R = CA = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ و } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

نکته: کلیه قطرهای دایره از مرکز دایره می‌گذرند در نتیجه نقطه‌ی برخورد هر دو قطر دلخواه مرکز دایره می‌باشد بنابراین اگر در

معادله‌ی یک خط ضریب X یا ضریب Y پارامتری باشد آنگاه آن معادله نشان دهنده‌ی یک دسته خطوط است که برای پیدا کردن نقطه‌ی همرسی دسته خطوط کافی است به پارامتر فوق دو عدد دلخواه نسبت بدهیم و از حل دستگاه به دست آمده، نقطه‌ی همرسی دسته خطوط (مرکز دایره) را پیدا کنیم.

مثال) معادله دایره‌ی ای که اقطارش به معادله  $(m-1)x + 3y = m + 2$  بوده و از نقطه  $M(5, -2)$  می‌گذرد، کدام است؟

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \quad (1) \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad (2)$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad (3) \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = 25 \quad (4)$$

جواب: گزینه ۴ درست است. مرکز دایره  $C(1, 1)$  و  $m = 0 \Rightarrow -x + 3 = 2 \Rightarrow x = 1$  و  $m = 1 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

$$R = \sqrt{(1-5)^2 + (1-(-2))^2} = 5 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$



مثال) اگر  $O'(1,2)$  مرکز دایره  $x^2 + y^2 - ax + 2by = 0$  باشد،  $a + b$  کدام است؟  
 ۲ (۱)      -۲ (۲)      ۴ (۳)      صفر (۴)

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

$$O'(1,2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \\ \frac{-2b}{2} = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

مثال) شعاع دایره  $ax^2 + y^2 + 2x + 4y = k$  برابر ۲ است، آنگاه:

(کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۱)       $k = 2$  (۴)       $k = -1$  (۳)       $k = 1$  (۲)       $k = 0$  (۱)

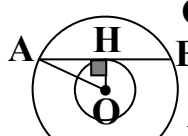
جواب: گزینه ۳ صحیح است. در دایره ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  باید برابر ۱ باشد پس:  $a = 1$  در نتیجه:

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 4k} = 2 \Rightarrow k = -1$$

مثال) دو دایره‌ی به معادله‌های  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$  مفروض اند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

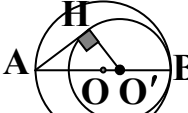
جواب: گزینه ۳ صحیح است.  $O = O' = (1, -1)$  و  $R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 - 4} = 1$  و  $R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 12} = \sqrt{5}$



$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow AH = 2 \Rightarrow AB = 4$$

مثال) دو دایره‌ی به معادله‌های  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 62 = 0$  و  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 34 = 0$  مفروض اند. اندازه

بزرگترین قطعه مماسی که یک سر آن بر روی دایره بزرگتر و سر دیگر آن قطعه‌ی تماس بر روی دایره کوچکتر باشد، برابر کدام است؟ (۱)

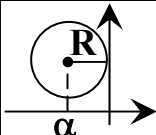


۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

جواب: گزینه ۳ صحیح است.  $O = (1, 1)$  و  $R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 248} = 8$  و  $O' = (-1, 1)$  و  $R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 136} = 6$

$$OO' = 2 \text{ و } AO' = 8 + 2 = 10 \text{ و } \Delta AHO': AH^2 = AO'^2 - O'H^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow AH = 8$$

نکته: معادله دایره‌ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر محور عرض‌ها مماس است به صورت زیر است.




$$r = |\alpha| \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2$$

مثال) دایره‌ی  $(2x - 1)^2 + (2y - 3)^2 = 1$  بر کدام خط مماس است؟

(کنکور آزاد تجربی ۷۶)       $y = -x$  (۴)       $x = 0$  (۳)       $y = 3x$  (۲)       $y = 0$  (۱)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. ابتدا معادله‌ی داده شده را به صورت استاندارد تبدیل می‌کنیم.

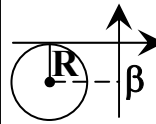
شعاع دایره  $R = \frac{1}{2}$  و مرکز دایره  $O(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$



$$(2x - 1)^2 + (2y - 3)^2 = 1 \xrightarrow{\div 4} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow O(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

دایره بر محور عرض‌ها یعنی خط  $x = 0$  مماس است.

نکته: معادله دایره‌ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر محور طول‌ها مماس است به صورت زیر است.



$$r = |\beta| \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \beta^2$$

مثال) معادله دایره ای که مرکز آن روی خط  $x - y = 2$  بوده و در نقطه ای به طول ۳- بر محور طول ها مماس باشد، کدام است؟

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad (2) \qquad (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25 \quad (1)$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 9 \quad (4) \qquad (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 9 \quad (3)$$

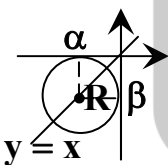
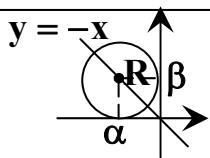
$$C(\alpha, \beta = \alpha - 2) \text{ و } \alpha = -3 \Rightarrow \beta = -3 - 2 = -5$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

$$R = |\beta| = |-5| = 5 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

۱۴) دایره ای بر دو نقطه‌ی  $(0, 2)$  و  $(4, 0)$  گذشته و بر محور  $x$  ها مماس است. این دایره محور  $y$  ها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

(کنکور سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)                      ۸ (۴)                      ۷ (۳)                      ۶ (۲)                      ۵ (۱)



نکته: معادله دایره ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر محورهای مختصات مماس است به صورت زیر است

$$r = |\alpha| = |\beta| \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 = \beta^2$$

تذکر: مرکز این دایره روی نیمساز ناحیه اول و سوم و یا نیمساز ناحیه دوم و چهارم واقع است. به عبارت دیگر:

الف: معادله‌ی دایره به شعاع  $R$  که بر محورهای مختصات در ربع اول مماس باشد.  $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$

ب: معادله‌ی دایره به شعاع  $R$  که بر محورهای مختصات در ربع دوم مماس باشد.  $(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$

پ: معادله‌ی دایره به شعاع  $R$  که بر محورهای مختصات در ربع سوم مماس باشد.  $(x + R)^2 + (y + R)^2 = R^2$

ت: معادله‌ی دایره به شعاع  $R$  که بر محورهای مختصات در ربع چهارم مماس باشد.  $(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$

۱۵) دو دایره گذرا بر نقطه‌ی  $(-9, 2)$  بر هر دو محورهای مختصات مماس است، شعاع دایره‌ی بزرگتر، کدام است؟

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)                      ۱۹ (۴)                      ۱۷ (۳)                      ۱۵ (۲)                      ۱۴ (۱)

۱۶) اگر دایره‌ی  $x^2 + ax + y^2 - 4y = b$  در ربع اول بر هر دو محور مماس باشد  $a + 2b$  چه قدر است؟  
 (۱) -۸ (۲) -۴ (۳) -۱۶ (۴) -۱۲ (کنکور آزاد تجربی ۸۴ غیر پزشکی)

مثال) معادله‌ی دایره‌ی ای که مرکزش روی خط  $y = 2x + 2$  و در ربع سوم بر هر دو محور مماس باشد، کدام است؟

(۱)  $x^2 + 4x + y^2 + 4y - 4 = 0$  (۲)  $x^2 + 4x + y^2 + 4y + 4 = 0$

(۳)  $x^2 + 4x + y^2 - 12 = 0$  (۴)  $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0$  (کنکور آزاد پزشکی صبح ۹۰)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. چون دایره در ربع سوم بر هر دو محور مماس است پس مرکز دایره بر روی خط  $y = x$  واقع است. از

طرفی مرکز دایره روی خط  $y = 2x + 2$  نیز می‌باشد پس:  $x = y = -2$  و در نتیجه:  $O(-2, -2)$  و  $R = |-2| = 2$

لذا معادله‌ی دایره به صورت زیر خواهد بود.  $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 4y + 4 = 0$

نکته: معادله‌ی دایره به شعاع  $R$  و مماس بر نیمساز ناحیه‌های

الف: اول و دوم به صورت  $x^2 + (y - R\sqrt{2})^2 = R^2$  یا  $x^2 + y^2 - 2R\sqrt{2}y + R^2 = 0$  می‌باشد.

ب: دوم و سوم به صورت  $(x + R\sqrt{2})^2 + y^2 = R^2$  یا  $x^2 + y^2 + 2R\sqrt{2}x + R^2 = 0$  می‌باشد.

ج: سوم و چهارم به صورت  $x^2 + (y + R\sqrt{2})^2 = R^2$  یا  $x^2 + y^2 + 2R\sqrt{2}y + R^2 = 0$  می‌باشد.

د: اول و چهارم به صورت  $(x - R\sqrt{2})^2 + y^2 = R^2$  یا  $x^2 + y^2 - 2R\sqrt{2}x + R^2 = 0$  می‌باشد.

نکته: معادله دایره‌ی ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر خط  $ax + by + c = 0$  مماس گردد به صورت زیر است.

$R = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$  (شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس می‌باشد).



فعالیت ۲: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که نقطه‌ی  $O(1, -1)$  مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی  $3x - 4y + 3 = 0$  مماس باشد.

(۱) با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه‌ی تماس  $(H)$  بر خط .....  
 (۲) طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از .....



(۳) به کمک دستور فاصله‌ی نقطه از خط داریم:  $r = OH = \frac{|\dots\dots\dots|}{\sqrt{\dots + \dots}}$

(۴) معادله‌ی دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم.  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \dots \Rightarrow \dots$



نکته: معادله دایره ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر خط  $ax + by + c = 0$  مماس گردد به صورت زیر است.

$$R = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس)$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad \text{که در آن}$$

س ۳۹) شعاع دایره ای را بیابید که مرکز آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع شده و از نقطه‌ی  $A(-2, 3)$  گذشته و بر خط به معادله‌ی  $y = 4x$  مماس شود.

(مثال) معادله دایره به شعاع  $3\sqrt{2}$  و مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اول و نیمساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 12x = 18 \quad (1) \quad x^2 + y^2 - 12y = 18 \quad (2)$$

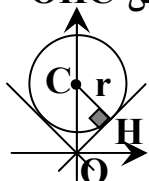
$$x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0 \quad (3) \quad x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0 \quad (4)$$

(کنکور سراسری تجربی ۷۲) جواب: گزینه ۳ درست است.

روش اول:  $x^2 + (y - r\sqrt{2})^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y - 3\sqrt{2} \times \sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$

روش دوم: چون دایره مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اول و نیمساز ناحیه‌ی دوم است پس مرکز آن روی محور عرض‌ها با عرض مثبت است.

لذا مرکز این دایره را به صورت  $C(0, \beta)$  در نظر می‌گیریم: بنا به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین OHC



$$OC^2 = OH^2 + CH^2 \Rightarrow \beta^2 = r^2 + r^2 = 18 + 18 = 36 \Rightarrow \beta = 6 \Rightarrow C(0, 6)$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 6)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$$

روش سوم: چون دایره مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اول و نیمساز ناحیه‌ی دوم است پس مرکز آن روی محور عرض‌ها با عرض مثبت است. لذا مرکز این دایره را به صورت  $C(0, \beta)$  و نیمساز ناحیه اول را به صورت  $x - y = 0$  در نظر می‌گیریم. می‌دانیم شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس می‌باشد در نتیجه می‌توان نوشت:

$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|0 - \beta|}{\sqrt{1 + 1}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |\beta| = 6 \xrightarrow{\beta > 0} \beta = 6 \Rightarrow C(0, 6)$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 6)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12y + 18 = 0$$

(مثال) مرکز دایره ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی  $A(6, 3)$  گذشته و بر خط به معادله‌ی  $y = 2x$  مماس شود. شعاع آن کدام است؟

$$\sqrt{5} \quad (1) \quad \sqrt{6} \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (3) \quad \sqrt{10} \quad (4) \quad \text{(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)}$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است. چون مرکز دایره بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول یعنی خط  $y = x$  واقع است پس مختصات مرکز این دایره به صورت  $O(\alpha, \alpha)$  و  $\alpha > 0$  می‌باشد. بدیهی است که شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ی  $A(6, 3)$  و همچنین برابر فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس  $y = 2x$  می‌باشد.

$$\sqrt{(\alpha - 6)^2 + (\alpha - 3)^2} = \frac{|2\alpha - \alpha|}{\sqrt{4 + 1}} \Rightarrow 2\alpha^2 - 18\alpha + 45 = \frac{\alpha^2}{5} \Rightarrow 10\alpha^2 - 90\alpha + 225 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 90\alpha + 225 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 10\alpha + 25 = 0 \Rightarrow \alpha = 5 \Rightarrow R = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

مثال) دایره ای بر محور X ها و خط به معادله  $3x + 4y = 0$  مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع 3 واحد باشد، نقطه‌ی مشترک آن با محور X ها با کدام طول است؟

۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۵ (۴) (کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: چون این دایره بر محور X ها مماس و مرکزش در ناحیه اول و شعاعش 3 واحد است، پس مختصات مرکز آن به صورت  $(\alpha, 3)$  می باشد. از طرفی فاصله‌ی مرکز این دایره از خط  $3x + 4y = 0$  برابر شعاع دایره است. پس:

$$R = \frac{|3\alpha + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = 3 \Rightarrow 3\alpha + 12 = 15 \Rightarrow \alpha = 1$$

روش دوم: ابتدا معادلات خطوط نیمساز دو خط  $y = 0$  و  $3x + 4y = 0$  را به دست می آوریم.

$$\frac{|3x + 4y|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|y|}{\sqrt{0 + 1}} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 5y \Rightarrow y = 3x \\ 3x + 4y = -5y \Rightarrow x = -3y \otimes \end{cases}$$

مرکز دایره‌ی مورد نظر روی این نیمساز است پس مختصات مرکز به صورت  $(\alpha, 3\alpha)$  است و مختصات نقطه‌ی تماس با محور X ها به

$$(x - \alpha)^2 + (y - 3\alpha)^2 = 9 \quad \text{صورت } (\alpha, 0) \text{ است بنابراین معادله‌ی دایره به صورت مقابل است.}$$

$$(\alpha - \alpha)^2 + (0 - 3\alpha)^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{و نقطه‌ی } (\alpha, 0) \text{ در این معادله صدق می کند در نتیجه:}$$

و یا اینکه می تون گفت: مرکز دایره‌ی مورد نظر روی این نیمساز است پس مختصات مرکز به صورت  $(\alpha, 3\alpha)$  است و چون بر محور

$$R = 3 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{طول ها مماس است پس:}$$

۱۷) شعاع دایره به مرکز  $O(1, -2)$  و مماس بر خط  $x + 5 = 2y$  کدام است؟

۱ (۱)  $\sqrt{5}$  (۲)  $2\sqrt{5}$  (۳) ۵ (۴) ۱۰

مثال) شعاع دایره ای که بر محورهای مختصات و خط  $3x + 4y = 12$  مماس شود کدام است؟

۱ فقط ۱ (۲) فقط ۲ (۳) فقط ۳ (۴) ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۶

جواب: گزینه ۴ صحیح است. بدیهی است که مرکز این دایره در ناحیه اول و بر روی نیمساز ناحیه اول و یا در ناحیه دوم یا چهارم

و بر روی نیمساز ناحیه دوم و یا چهارم واقع است. پس:

$$C(\alpha, \alpha) \Rightarrow r = \frac{|3\alpha + 4\alpha - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = |\alpha| \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha - 12 = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 6 \\ 7\alpha - 12 = -5\alpha \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

$$C(-\alpha, \alpha) \Rightarrow r = \frac{|-3\alpha + 4\alpha - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = |\alpha| \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 12 = 5\alpha \Rightarrow \alpha = -3 \\ \alpha - 12 = -5\alpha \Rightarrow \alpha = 2 \end{cases} \quad \text{و یا}$$

۱۸) دایره‌ی  $x^2 + y^2 + kx - 2y = 0$  در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع اول و سوم مماس است. شعاع دایره چقدر است؟

۱ (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{2}$  (۴) (کنکور آزاد ریاضی ۷۱)

مثال) دایره ای به مرکز  $(-1, 2)$  و مماس بر خط به معادله  $x - y = 1$ ، محور  $X$  ها را با کدام طول، قطع می کند؟  
 (۱) ۳ و ۱ (۲) ۴ و ۱ (۳) ۳ و ۲ (۴) ۴ و ۱/۵ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۵)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: چون خط فوق بر دایره مماس است، بنابراین فاصله مرکز دایره از این خط، برابر شعاع دایره است. لذا:

$$x - y - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{2}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

روش دوم: نقطه تلاقی خط مماس را با خطی که از نقطه  $C$  بر خط مماس عمود باشد را بدست می آوریم

$$x - y = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -1 \Rightarrow y + 1 = -(x - 2) \Rightarrow x + y = 1$$

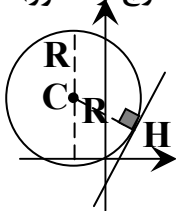
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$\xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

**نکته:** خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد.

مثال) دایره ای بر خط به معادله  $y = 2x - 1$  مماس است و تمام قائم‌های آن دایره از نقطه‌ی  $(2, -1)$  می گذرند. بیشترین فاصله نقاط این دایره از محور  $X$  ها کدام است؟

(۱)  $2 + \sqrt{5}$  (۲)  $3 + \sqrt{2}$  (۳) ۵ (۴) ۶ (کنکور سراسری ریاضی ۸۹ خارج از کشور)



$$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow R = CH = \frac{|-2 - 2 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{Max} = y_C + R = -1 + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5}$$

(۱۹) به ازای کدام مقدار  $m$  خط به معادله  $y = mx + 2$  بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x = 3$  مماس است؟

(۱)  $-\frac{4}{3}$  و ۰ (۲)  $\frac{4}{3}$  و ۰ (۳)  $-\frac{2}{3}$  و ۱ (۴)  $\frac{2}{3}$  و ۱ (کنکور سراسری تجربی ۹۱ خارج از کشور)

مثال) به ازای کدام مقدار  $a$  دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$  بر خط به معادله  $x + 3y = 0$  مماس است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{5}{2}$  (۳) ۳ (۴) ۵ (کنکور سراسری تجربی ۸۵)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: فاصله مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره است.

$$O(1, -2) \text{ و } R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4a} = \sqrt{5 - a} \text{ و } OH = \frac{|1 - 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$R = OH \Rightarrow \sqrt{5 - a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \Rightarrow 5 - a = \frac{25}{10} \Rightarrow a = 5 - \frac{25}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

روش دوم: معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و دایره دارای ریشه مضاعف است.

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \Rightarrow (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0$$

$$\Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \text{ و } \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow a = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$$

(۲۰) معادله کلی اقطار دایره‌ای به فرم  $(m - 2)x + 3y = 6$  است و خط  $4x - 3y + 2 = 0$  بر این دایره مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

$\frac{1}{5}$  (۱)       $\frac{2}{5}$  (۲)       $\frac{3}{5}$  (۳)       $\frac{4}{5}$  (۴)

**نکته:** دایره‌ای که بر دو خط موازی مماس است، مرکزش روی محور تقارن آن دو خط و شعاعش نصف فاصله‌ی بین دو خط موازی است. به طوری که اگر دایره‌ای که بر دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  مماس باشد، آنگاه مرکزش روی

خط  $ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$  واقع و شعاعش  $R = \frac{|c - c'|}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$  است.

مثال) شعاع‌های دایره‌هایی که بر دو خط  $3x + 4y = 10$  و  $6x + 8y = 15$  مماس می‌شوند کدام است؟

$1$  (۱)       $0.5$  (۲)       $1/75$  (۳)       $0.25$  (۴)

جواب: گزینه ۴ صحیح است.

$$3x + 4y - 10 = 0 \text{ و } 3x + 4y - \frac{15}{2} = 0 \text{ و } 2R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-10 + \frac{15}{2}|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 0.25$$

مثال) معادله‌ی دایره‌ای که بر دو خط  $y = x + 3$  و  $y = x - 1$  مماس و طول مرکز آن برابر ۱ است، کدام است؟

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$  (۱)       $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$  (۲)

(کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  (۳)       $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$  (۴)

مرکز دایره  $C(1, 2) \Rightarrow$  معادله‌ی محور تقارن دو خط موازی  $y = x + 1$

جواب: گزینه ۱ صحیح است.

$$2R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

(۲۱) دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات  $y = 2x$  و  $y = 2x + 10$  مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

$(-3, 2)$  (۱)       $(-3, 1)$  (۲)       $(-2, 1)$  (۳)       $(-1, 2)$  (۴)

(کنکور سراسری ریاضی ۹۵ خارج از کشور)

مثال) نقطه‌ی  $M(2\sqrt{5}, b)$  مرکز دایره‌ی ای است که بر دو خط به معادلات  $y = 2x$  و  $x = 2y$  مماس است. شعاع دایره کوچک تر، کدام است؟

۱ (۱)  $1/5$  (۲)  $2$  (۳)  $2/5$  (۴) (کنکور سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)  
 جواب: گزینه ۳ صحیح است.

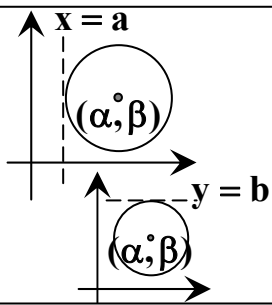
$y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$  و  $x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0$  و  $R = OH = OH'$

$$\Rightarrow \frac{|4\sqrt{5} - b|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2\sqrt{5} - 2b|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{5} - b = 2\sqrt{5} - 2b \Rightarrow b = -2\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{|4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 6 \\ 4\sqrt{5} - b = 2b - 2\sqrt{5} \Rightarrow b = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{|4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{5}} = 2 \end{cases}$$

(۲۲) معادله دسته خط قائم بر دایره‌ی ای به صورت  $(1+m)x + (m-2)y = 3$  است. و خط  $4x - 3y + 8 = 0$  بر این دایره مماس می باشد، معادله‌ی این دایره کدام است؟

(۱)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$  (۲)  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$

(۳)  $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 7 = 0$  (۴)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

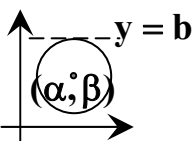


نکته: معادله دایره‌ی ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر خط  $x = a$  مماس است به صورت زیر است.

$$r = |\alpha - a| \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (\alpha - a)^2$$

نکته: معادله دایره‌ی ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر خط  $y = b$  مماس است به صورت زیر است.

$$r = |b - \beta| \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (b - \beta)^2$$



نکته: معادله دایره‌ی ای که مرکز آن  $C(\alpha, \beta)$  بوده و بر خط  $y = b$  مماس است به صورت زیر است.

$$r = |b - \beta| \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (b - \beta)^2$$

نکته: الف: مکان هندسی نقطه‌ی ای از صفحه‌ی دایره‌ی  $C(O, R)$  که از آن نقطه می توان مماس‌های به طول  $d$  بر این دایره رسم کرد دایره‌ی ای است به مرکز  $O$  و به شعاع  $\sqrt{R^2 + d^2}$ .



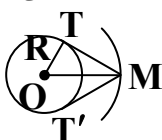
$$\sqrt{R^2 + d^2}$$

ب: مکان هندسی نقطه‌ی ای در صفحه‌ی دایره  $C(O, R)$  که از آن به توان وترهای به طول  $K$  در این دایره رسم نمود، دایره‌ی ای به مرکز  $O$  و به شعاع  $\sqrt{R^2 - (\frac{K}{2})^2}$  است.



$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2}$$

ج: مکان هندسی نقطه‌ی ای از صفحه‌ی دایره  $C(O, R)$  که از آن ها می توان دو مماس با زاویه‌ی  $\alpha$  بر این دایره رسم کرد (که از آن نقطه به توان دایره فوق را با زاویه  $\alpha$  رثویت کرد)، دایره‌ی ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R' = OM = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  است.



$$R' = OM = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه دایره که به توان از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم نمود



(دایره را به زاویه‌ی قائمه رویت نمود) دایره‌ی ای است هم مرکز با آن و به شعاع  $R\sqrt{2}$



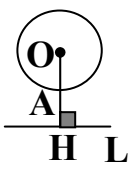
مثال) چند نقطه روی خط  $x = 4$  یافت می شود که از آنها دایره‌ی  $(x-1)^2 + y^2 = 4$  به زاویه‌ی قائمه رویت شود؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی شمار (۴) صفر (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۴)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که به توان از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم نمود (دایره را به زاویه‌ی قائمه رویت نمود) دایره‌ی ای است هم مرکز با آن و به شعاع  $R\sqrt{2}$  پس،

$$O(1,0) \text{ و } R=2 \text{ و } R' = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ و } (x-1)^2 + y^2 = 8$$

تعداد ریشه‌های معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و دایره جواب مسئله است.  $\xrightarrow{x=4} (4-1)^2 + y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = -1$  این معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

نکته: نقطه‌ی متغیر  $A$  را روی دایره‌ی  $C(O, R): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  و نقطه‌ی متغیر  $H$  را روی خط  $L$  به



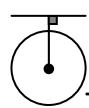
معادله‌ی  $ax + by + c = 0$  در نظر می‌گیریم. در صورتی که خط  $AH$  از مرکز این دایره بگذرد و بر خط  $L$  عمود باشد، نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه  $H$  از نقطه‌ی  $A$  متمایز با آن از رابطه‌های  $AH = |OH \pm R|$  بدست می‌آیند.

$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

باید توجه داشت که اگر  $C(\alpha, \beta)$  مرکز دایره باشد آنگاه

مثال) فاصله‌ی نزدیکترین نقاط دایره به معادله‌ی  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$  از خط به معادله‌ی  $3x + 4y = 15$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲ (کنکور سراسری ریاضی ۹۰ خارج از کشور)

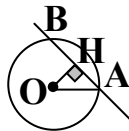


جواب: گزینه ۲ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره را از خط تعیین و طول شعاع را از آن کم می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, -2) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3$$

$$CH = \frac{|3\alpha + 4\beta - 15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 - 8 - 15|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \min = 4 - 3 = 1$$

کار در کلاس: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که مرکز آن  $O(0,1)$  بوده و روی خط به معادله‌ی  $x + y = 2$  و تری به طول  $2\sqrt{2}$  جدا کند. (راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم شود آن وتر را نصف می‌کند.)



(ص ۴۳ کتاب جدید)  $x + y = 2$

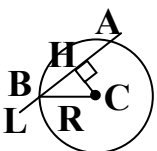
مثال) معادله‌ی دایره‌ی ای که نقطه‌ی  $C(1,2)$  مرکز آن باشد و از خط  $L: 3x + 4y - 1 = 0$  و تری به طول ۴ جدا کند، کدام است؟

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad (2) \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad (1)$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8 \quad (4) \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \quad (3)$$

جواب: گزینه ۳ درست است.  $AB = 4 \Rightarrow BH = 2$  و  $CH = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow$

$$R^2 = CH^2 + BH^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$$



۲۳) اگر خط  $D$  به معادله  $y - 2x + m = 0$  و دایره  $C$  به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ ، متقاطع (غیر مماس) باشند، آنگاه حدود  $m$  کدام است؟

$$-5\sqrt{5} + 4 < m < 5\sqrt{5} + 4 \quad (4 \quad m < -9 \text{ یا } m > 9) \quad (3) \quad m < 9 \quad (2) \quad -1 < m < 9 \quad (1)$$

مثال) خط  $3x - 4y - 6 = 0$  دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$  را در دو نقطه قطع می کند، فاصله  $O$  این دو نقطه چقدر است؟

$$9 \quad (4) \quad 6 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10 \Rightarrow O(1, -2) \text{ و } R^2 = 10$$

$$OH = \frac{|3 + 8 - 6|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$$

فاصله  $O$  مرکز دایره از این خط را محاسبه می کنیم:

$$AH^2 = R^2 - OH^2 = 10 - 1 = 9 \Rightarrow AH = 3 \Rightarrow AB = 2AH = 6$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10 \text{ و } y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \Rightarrow (x-1)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} + 2\right)^2 = 10$$

روش دوم:

$$\Rightarrow 25x^2 - 20x - 140 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = \frac{14}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{14}{5} + 2\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + 3\right)^2} = 6$$

مثال) خط  $mx - y + 1 = 0$  دایره  $x^2 + y^2 - 2y = 3$  را در دو نقطه قطع می کند، فاصله  $O$  این دو نقطه چقدر است؟

$$6 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

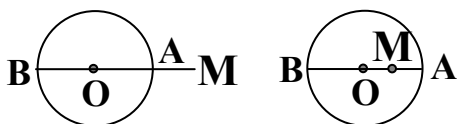
جواب: گزینه ۲ صحیح است.  $R = 2$  و  $O(0, 1)$  فاصله  $O$  مرکز دایره از این خط را محاسبه می کنیم:

$$OH = \frac{|0 - 1 + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 0 \Rightarrow$$

یعنی خط از مرکز دایره می گذرد.

$AB = 2R = 4$  پس نقاط تقاطع خط با دایره،  $A$  و  $B$  دو سر قطر دایره هستند، پس:

نکته: نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه از یک دایره: هرگاه از نقطه  $M$  در صفحه یک دایره، به نقطه  $O$  مرکز آن دایره خطی وصل کنیم تا محیط دایره را به ترتیب در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند،  $MA$  و  $MB$  را به ترتیب نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه  $M$  تا دایره گوئیم و به صورت زیر محاسبه می کنیم.



$$\min = MA = |OM - R| \text{ و } \max = MB = OM + R$$

نکته: الف: شعاع دایره برابر است با نصف مجموع نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه  $M$  (داخل دایره) از این دایره

ب: شعاع دایره برابر است با نصف تفاضل نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه  $M$  (خارج دایره) از این دایره

مثال) کمترین فاصله نقطه روی دایره  $(x-8)^2 + (y+15)^2 = 4$  از مبدأ مختصات کدام است؟

$$13 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 17 \quad (3) \quad 11 \quad (4) \quad (\text{کنکور آزاد تجربی } 86)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.  $O(0, 0)$  و  $O'(8, -15) \Rightarrow$

$$OO' = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ و } R = 2 \Rightarrow |OO' - R| = |17 - 2| = 15$$

کمترین فاصله مبدأ از نقاط روی دایره

۲۴ شعاع دایره به مرکز  $(-2, 2)$  و مماس خارج بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲) ۳ (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴) ۴ (کنکور سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

نکته : وضعیت نسبی دو دایره :

دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  را در نظر می گیریم. در این صورت داریم :

(۱) دو دایره متخارج  $OO' > R + R'$

(۲) دو دایره مماس خارج  $OO' = R + R'$

(۳) دو دایره متقاطع  $|R - R'| < OO' < R + R'$

(۴) دو دایره مماس داخل  $OO' = |R - R'|$

(۵) دو دایره متداخل  $OO' < |R - R'|$

(۶) دو دایره متحدالمرکز  $O = O'$  یا  $OO' = 0$

نکته : اگر دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  بر هم عمود باشند آنگاه

$$OO'^2 = R^2 + R'^2$$

نکته : شرط لازم و کافی برای آنکه دو دایره به معادله های  $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

و  $C'(x, y) = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$  بر هم عمود باشند آنستکه  $aa' + bb' = 2(c + c')$

مثال معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه  $O(-1, 1)$  بوده و بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  مماس بیرونی باشد.

حل : مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم :

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \Rightarrow O'(1, -1) \text{ و } r' = \sqrt{2}$$

و چنانچه از هندسه  $d = OO'$  طول خط الممرکزین دو دایره مماس خارج باشد،  $d = r + r'$

$$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

بنابراین داریم :

$$d = r + r' = 2\sqrt{2} \Rightarrow r + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره  $(C)$  را می نویسیم :

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

مثال) معادله دایره ای که مرکزش نقطه  $O(2, -2)$  و بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$  مماس خارج است، کدام است؟

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad (2) \quad (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16 \quad (4) \quad (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (3)$$

جواب: گزینه ۲ درست است. مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \Rightarrow O'(-1, 2) \text{ و } r' = 3$$

می دانیم اگر  $d = OO'$  طول خط المرکزین دو دایره می مماس خارج باشد،  $d = r + r'$

$$d = OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

بنابراین داریم:

$$d = r + r' = 5 \Rightarrow r + 3 = 5 \Rightarrow r = 2$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره  $(C)$  را می نویسیم:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$


مثال) دو دایره  $C$  و  $C'$  در نقطه  $(0, 1)$  مماس برون می هستند، اگر قائم‌های بر دایره  $C$  همواره از نقطه  $(2, -3)$  بگذرد، مرکز

دایره  $C'$  با شعاع  $\sqrt{5}$  کدام است؟

$$(1) \quad (-1, 3) \quad (2) \quad (-1, 2) \quad (3) \quad (1, -2) \quad (4) \quad (1, -1) \quad (\text{کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۴})$$

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از

مرکز دایره می گذرد. و در نتیجه نقطه  $O(2, -3)$  مرکز دایره  $C$  است. شیب خط  $OA$  برابر  $-2$   $m = \frac{1+3}{0-2} = -2$

و معادله آن به صورت  $y = -2x + 1$  است. بنابراین مختصات نقطه  $O'(\alpha, -2\alpha + 1)$  است. 

$$O'A = \sqrt{5} \Rightarrow (0 - \alpha)^2 + (1 + 2\alpha - 1)^2 = 5 \Rightarrow 5\alpha^2 = 5 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

اگر  $\alpha = 1$  آنگاه  $O'(1, -1)$  که در این صورت دو دایره مماس برون می شوند. بنابراین مقدار  $\alpha = 1$  قابل قبول نیست.

اگر  $\alpha = -1$  آنگاه  $O'(-1, 3)$  که در این صورت دو دایره مماس برون می شوند. بنابراین مقدار  $\alpha = -1$  قابل قبول نیست.

روش دوم: خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد. و

در نتیجه نقطه  $O(2, -3)$  مرکز دایره  $C$  است. نقطه  $O'$  مرکز دایره  $C'$  بر روی خطی که از دو نقطه  $A(0, 1)$  و  $O(2, -3)$

$$OA: y - 1 = \frac{-3-1}{2-0}(x-0) \Rightarrow y = -2x + 1 \text{ می گذرد واقع است.}$$

از طرفی تنها مختصات گزینه های ۱ و ۴ در این معادله صدق می کنند. حال به بررسی گزینه ها می پردازیم. اگر  $O'(-1, 3)$  باشد

$$R = OA = \sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5} \text{ و } OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ داریم:}$$

و در نتیجه  $OO' = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = R + R'$  بنابراین در این حالت دو دایره مماس برون می اند.

روش سوم: خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد.

$$R = OA = \sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5} \text{ و در نتیجه نقطه } O(2, -3) \text{ مرکز دایره } C \text{ است.}$$

نقطه  $M$  را وسط  $OA$  اختیار می کنیم بدیهی است که نقطه  $A$  وسط  $O'A$  قرار دارد.

$$A(0, 1) \Rightarrow M = \frac{O+A}{2} = (1, -1) \text{ و } A = \frac{O'+M}{2} \Rightarrow O' = 2A - M = (-1, 3)$$

مثال) دایره  $C$  بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$  مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره  $C$  از نقطه  $(8, 7)$  می گذرد. شعاع دایره  $C$  کدام است؟

جواب: گزینه ۲ صحیح است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی O(۸,۷) که همان مرکز دایره است می‌گذرد.  
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹ (کنکور سراسری ریاضی ۹۶ خارج از کشور)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \Rightarrow O'(2, -1) \text{ و } R' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 16} = 3$$

$$d = OO' = \sqrt{(2-8)^2 + (-1-7)^2} = 10 \xrightarrow{\text{مماس خارج}} OO' = R + R' \Rightarrow 10 = R + 3 \Rightarrow R = 7$$

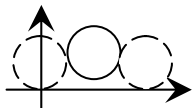
(۲۵) دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 12 = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$  نسبت به هم کدام وضع را دارند؟  
 (۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج (کنکور سراسری تجربی ۸۷)

مثال) به ازای کدام مقدار a، دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 4x = 0$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$  مماس خارج یکدیگرند؟  
 (کنکور سراسری ریاضی ۹۰)

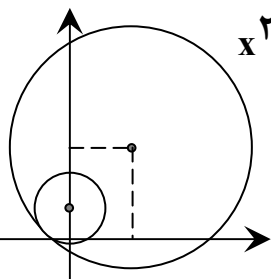
جواب: گزینه ۴ صحیح است.  
 $O(-2, 0)$  و  $R = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$  و  $O'(1, -4)$  و  $R' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 64 - 4a} = \sqrt{17 - a}$

$$OO' = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (دو دایره مماس خارج اند.)} \Rightarrow OO' = R + R' \Rightarrow 5 = 2 + \sqrt{17 - a} \Rightarrow 9 = 17 - a \Rightarrow a = 8$$

مثال) چند دایره به شعاع ۲ وجود دارد که بر محور طول ها و دایره‌ی  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$  مماس باشد؟  
 (کنکور آزاد ریاضی ۸۷ خارج از کشور)



جواب: گزینه ۲ صحیح است. با توجه به آنکه پایین ترین نقطه‌ی  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$  کمتر از ۲ واحد با محور طول ها فاصله دارد، اگر دایره به شعاع ۲ را بر روی محور طول ها بغلتانیم، در دو مکان بر دایره فوق مماس می‌شود. پس دو دایره با شرایط مذکور وجود دارد.



فعالیت ۳: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که مرکز آن O(۰,۱) بوده و با دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$  مماس داخل باشد.

(۱) معادله‌ی دایره‌ی فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 = \dots \Rightarrow O'(\dots, \dots) \text{ و } r' = \dots$$

$$d = OO' = \sqrt{(0 - \dots)^2 + (1 - \dots)^2} = \dots \text{ طول خط المرکزین دو دایره را به دست آورید.}$$

$$d = |r - r'| \Rightarrow |r - \dots| = 2\sqrt{2} \Rightarrow r - \dots = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \dots \text{ با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم:}$$

$$(x - \dots)^2 + (y - 1)^2 = (\dots \pm 2\sqrt{2})^2 \text{ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم:}$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟ (ص ۴۴ کتاب جدید)

(ص ۴۴ کتاب جدید)

کار در کلاس : وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$  و  $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

ب)  $x^2 + y^2 - 2x = 1$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

ج)  $x^2 + y^2 = 9$  و  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

د)  $x^2 + y^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$



مثال) دو دایره  $x^2 + 2x + y^2 = 0$  و  $x^2 - 2x + y^2 = 8$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) مماس داخل ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) متخارج (کنکور آزاد تجربی ۸۲)

جواب: گزینه ۱ درست است.  $OO' = R' - R = 3 - 1 = 2$  و  $OO' = 2$  و  $R' = 3$  و  $O'(1,0)$  و  $R = 1$  و  $O(-1,0)$

مثال) به ازای کدام مقدار  $b$  دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  و  $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$  مماس داخل اند؟

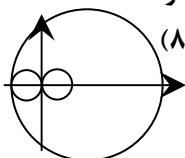
۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۲ (کنکور سراسری ریاضی ۸۶-۱۳۸۵)

جواب: گزینه ۲ درست است.  $R' = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 4b} = \sqrt{4 - b}$  و  $O'(0,2)$  و  $R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4} = \sqrt{2}$  و  $O(-1,1)$

$$OO' = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ و } OO' = |R' - R| \Rightarrow \sqrt{2} = |\sqrt{4-b} - \sqrt{2}| \Rightarrow \sqrt{4-b} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow b = -4$$

مثال) شعاع کوچکترین دایره ای که بر دو دایره  $(x-3)^2 + y^2 = 25$  و  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  مماس است چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۱/۵ (کنکور آزاد ریاضی ۸۴)



جواب: گزینه ۱ صحیح است. چون  $R' = 5$  و  $O'(3,0)$  و  $R = 1$  و  $O(1,0)$  پس دو دایره متداخلند.

در نتیجه دایره مطلوب دایره ای به مرکز  $(-1,0)$  و به شعاع ۱ است.

مثال) دو دایره  $x^2 - 4x + y^2 = 0$  و  $x^2 + 4x + y^2 = 5$  نسبت به هم چه وضعی دارد؟

(۱) مماس داخلند. (۲) مماس خارجند. (۳) متخارج اند. (۴) متقاطعند. (کنکور آزاد تجربی ۸۶)

جواب: گزینه ۴ درست است.  $C: (x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O(2,0)$  و  $R=2$

$C': (x+2)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O'(-2,0)$  و  $R'=3$  و  $OO' = |2 - (-2)| = 4$  و  $|R - R'| < OO' < R + R'$

مثال) دو دایره به معادلات  $x^2 + y^2 - 2x = 1$  و  $x^2 + y^2 = 9$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(۱) متخارجند. (۲) متداخلند. (۳) متقاطعند. (۴) مماس خارج اند. (کنکور سراسری تجربی ۶۴)

جواب: گزینه ۲ صحیح است.  $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O'(0,0)$  و  $r'=3$  و  $x^2 + y^2 - 2x = 1 \Rightarrow O(1,0)$  و  $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2}$

پس  $OO' = 1$  در نتیجه  $OO' < r' - r$

نکته: الف: اندازه‌ی مماس مشترک های خارجی دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

حالت خاص: اندازه‌ی مماس مشترک های خارجی دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  که مماس برونی نیز باشند برابر

$$2\sqrt{RR'}$$

است با:

نکته: الف: اندازه‌ی مماس مشترک های داخلی دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  برابر است با:

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

مثال) طول مماس مشترک دو دایره  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  و  $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $\sqrt{10}$  (۴)  $2\sqrt{2}$  (کنکور آزاد تجربی ۷۸)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. نقاط  $O(2,0)$  و  $O'(5,0)$  مراکز دو دایره و  $R = \frac{1}{2}\sqrt{16-12} = 1$  و  $R' = \frac{1}{2}\sqrt{100-84} = 2$

شعاع های دو دایره و  $OO' = 3$  خط مرکزین این دو دایره می باشند و چون  $OO' = R + R' = 3$  پس دو دایره مماس برونی

اند. لذا فقط مماس مشترک خارجی آن دو قابل محاسبه است.  $TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$

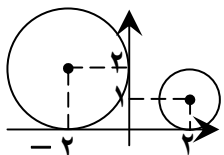
مثال) مماس مشترک های خارجی دو دایره  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$  و  $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$  در کدام نقطه متقاطع اند؟

(۱)  $(0,6)$  (۲)  $(6,0)$  (۳)  $(3,0)$  (۴)  $(0,3)$  (کنکور آزاد ریاضی ۷۵)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. مماس مشترک های خارجی دو دایره با خط مرکزین هم‌رسند.

مطابق شکل محور طول ها یکی از مماس مشترک های خارجی دو دایره است.

محل تقاطع محور طول ها به خط  $O_1O_2$  جواب مسأله است.



$$O_1O_2: y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \frac{1}{-4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow (6, 0)$$

فعالیت ۴: می خواهیم وضعیت خط به معادله  $x + y = 4$  و دایره  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$  را تعیین کنیم.

روش اول: از معادله  $y = 4 - x$  را در معادله دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات

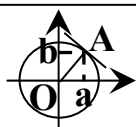
نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید. :  
 $x^2 + (4-x)^2 - 2(4-x) - 3 = 0 \Rightarrow \dots$   
 با ساده کردن معادله حاصل و تعیین علامت  $\Delta$ ، نشان دهید معادله ی فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم: معادله ی دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله ی مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (ص ۴۵ کتاب جدید)

سؤال: اگر در معادله ی حاصل از برخورد خط و دایره،  $\Delta > 0$  یا  $\Delta = 0$  شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت ها فاصله ی مرکز دایره از خط چگونه است؟ (ص ۴۵ کتاب جدید)

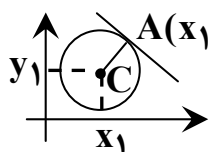
مثال) خط  $4x + 3y + 6 = 0$  نسبت به دایره به معادله  $4x^2 + 4y^2 - 8x - 12 = 0$  چه وضعی دارد؟  
 (۱) قائم بر دایره است.  
 (۲) مماس بر این دایره است.  
 (۳) دایره را قطع می کند.  
 (۴) دایره را قطع نمی کند.

جواب: گزینه ۲ درست است.  
 $R = \frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$  و  $C(1,0) \Rightarrow OH = \frac{|4+0+6|}{\sqrt{16+9}} = 2 \Rightarrow OH = R$



نکته: معادله خطی که در نقطه  $A(a, b)$  واقع بر دایره  $x^2 + y^2 = R^2$  بر این دایره مماس باشد، به صورت  $ax + by = R^2$  می باشد.

نکته الف: معادله خط مماس بر دایره به معادله  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$  در نقطه  $(x_1, y_1)$  واقع بر آن به صورت زیر است.  
 $(x - \alpha)(x_1 - \alpha) + (y - \beta)(y_1 - \beta) = R^2$



ب: معادله خطی که در نقطه  $A(x_1, y_1)$  واقع بر دایره  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  بر این دایره مماس باشد، به صورت  $x_1x + y_1y + \frac{a}{2}(x + x_1) + \frac{b}{2}(y + y_1) + c = 0$  می باشد.

مثال) در نقطه ی  $A(2, 3)$  روی دایره ی  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله ی این خط مماس را به دست آورید. (ص ۴۵ کتاب جدید)



مثال) معادله خط مماس بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$  در نقطه  $M(4,1)$  واقع بر دایره کدام است؟

$$3x + 3y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$3x - 3y + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x + y - 5 = 0 \quad (4)$$

$$x - y + 1 = 0 \quad (3)$$

جواب: گزینه ۴ درست است. روش اول: با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است. با تعیین مختصات مرکز دایره شیب  $OA$  را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8 \Rightarrow O(2, -1)$$

$$m_{OM} = \frac{1 - (-1)}{4 - 2} = 1 \Rightarrow m_d = -1 \Rightarrow y - 1 = -(x - 4) \Rightarrow d \text{ معادله مماس: } x + y - 5 = 0$$

$$xx_1 + yy_1 + \frac{a}{2}(x + x_1) + \frac{b}{2}(y + y_1) + c = 0$$

روش دوم:

$$M(4,1) \Rightarrow 4x + y + \frac{(-4)}{2}(x + 4) + \frac{2}{2}(y + 1) - 3 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

و

تمرین ۱) معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که:

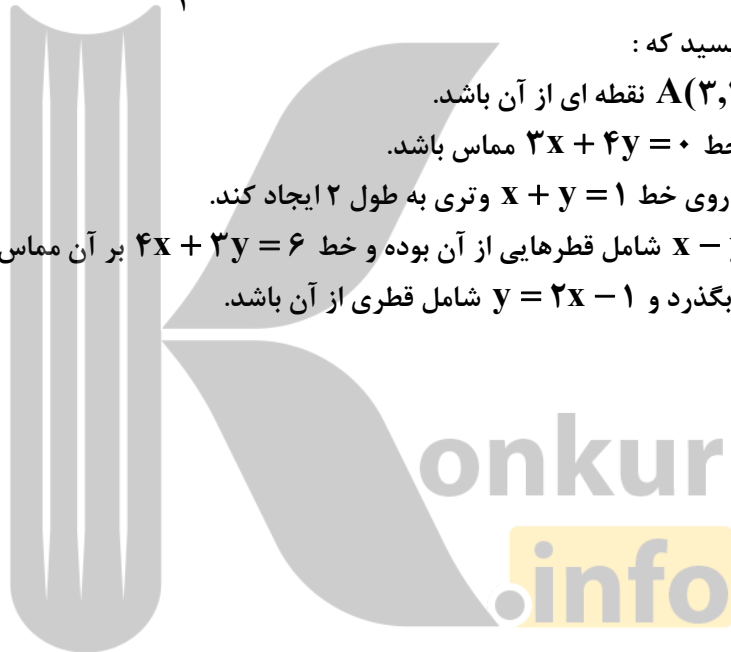
الف)  $O(1,1)$  مرکز آن بوده و  $A(3,2)$  نقطه‌ی ای از آن باشد.

ب)  $O(2,1)$  مرکز آن بوده و بر خط  $3x + 4y = 0$  مماس باشد.

پ)  $O(-1,-1)$  مرکز آن بوده و روی خط  $x + y = 1$  و تری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x + 3y = 6$  بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط  $A(1,2)$  و  $B(3,0)$  بگذرد و  $y = 2x - 1$  شامل قطری از آن باشد.



مثال) دایره ای، محور X هارادردونقطه به طول های ۳ و ۱ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{3}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۳ (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اول: مرکز این دایره روی خط به معادله  $y = x$  و  $x > 0$  قرار دارد. در نتیجه می توانیم مختصات مرکز آن را به صورت  $C(\alpha, \alpha)$  در نظر می گیریم. فاصله ی مرکز دایره از هر نقطه ی دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است. چون دو نقطه ی  $A(1, 0)$  و  $B(3, 0)$  بر این دایره واقع اند. پس:

$$R = CA = CB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\Rightarrow R = CA = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

روش دوم: معادله ی گسترده ی دایره را می نویسیم:

مرکز این دایره روی خط به معادله  $y = x$  و  $x > 0$  قرار دارد.

$$C(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2}) \text{ و } y = x \Rightarrow -\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} \Rightarrow a = b \quad (1)$$

چون دو نقطه ی  $A(1, 0)$  و  $B(3, 0)$  بر این دایره واقع اند. پس:

$$\begin{cases} 1 + 0 + a + 0 + c = 0 \quad (2) \\ 9 + 0 + 3a + 0 + c = 0 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(3)-(2)} 2a + 8 = 0 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow c = 3 \quad (4)$$

$$(1), (4) \Rightarrow b = a = -4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 12} = \sqrt{5}$$

روش سوم: چون دو نقطه ی  $A(1, 0)$  و  $B(3, 0)$  بر این دایره واقع اند. پس عمودمنصف پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند، از مرکز دایره عبور می کند. لذا کافی است عمودمنصف پاره خط  $AB$  را نوشته با خط داده شده، یعنی  $y = x$  قطع دهیم.

مرکز دایره حاصل می گردد.  $m_{AB} = 0$  و  $m' = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{0}$  و  $M(2, 0)$  و  $\Rightarrow x = 2$

$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow C \begin{cases} \alpha = x = 2 \\ \beta = y = 2 \end{cases} \Rightarrow R = CA = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5}$$

مثال) دایره ای از دو نقطه ی  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله ی یک قطر آن به صورت  $x - y = 2$  است. شعاع این دایره کدام است؟

(۱)  $\sqrt{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴) ۳ (کنکور سراسری تجربی ۹۰ خارج از کشور)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله  $x - y = 2$  قرار دارد. در نتیجه می توانیم مختصات مرکز آن را به صورت  $C(\alpha + 2, \alpha)$  در نظر می گیریم. فاصله ی مرکز دایره از هر نقطه ی دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است. چون دو نقطه ی  $A(0, 1)$  و  $B(3, 0)$  بر این دایره واقع اند. پس:

$$R = CA = CB \Rightarrow \sqrt{(\alpha + 2 - 0)^2 + (\alpha - 1)^2} = \sqrt{(\alpha + 2 - 3)^2 + (\alpha - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 \Rightarrow 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow R = CA = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

روش دوم: معادله ی گسترده ی دایره را می نویسیم:

از طرفی قطر هر دایره از مرکز آن می گذرد، پس مختصات مرکز دایره در معادله ی قطر دایره صدق می کند. لذا داریم:

$$C(\alpha = -\frac{a}{\gamma}, \beta = -\frac{b}{\gamma}) \text{ و } x - y = 2 \Rightarrow -\frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma} = 2 \Rightarrow a - b = -4 \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 + 1 + 0 + b + c = 0 \quad (2) \\ 9 + 0 + 3a + 0 + c = 0 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(3)-(2)} 3a - b + 8 = 0 \Rightarrow 3a - b = -8 \quad (4)$$

$$(1), (4) \Rightarrow a = -2 \text{ و } b = 2 \xrightarrow{(1)} c = -3$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\gamma} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{4 + 4 + 12} = \sqrt{5}$$

روش سوم: اگر دایره از دو نقطه‌ی  $A(0,1)$  و  $B(3,0)$  عبور کند، عمودمنصف پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، از مرکز دایره عبور می‌کند. لذا کافی است عمودمنصف پاره خط  $AB$  را نوشته با خط داده شده، یعنی  $y = x - 2$  قطع دهیم. مرکز

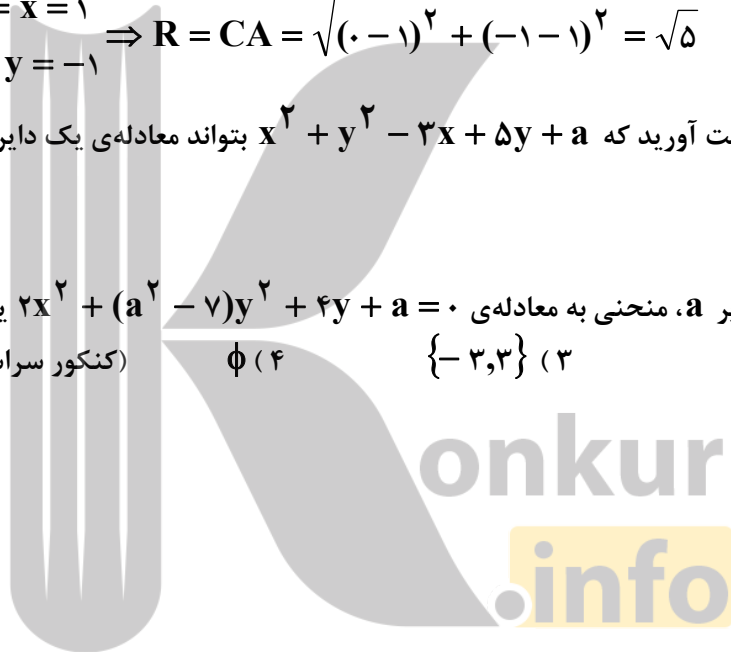
دایره حاصل می‌گردد.  $m_{AB} = -\frac{1}{3}$  و  $m' = -\frac{1}{m_{AB}} = 3$  و  $M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  و  $y - \frac{1}{2} = 3(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y = 3x - 4$

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3x - 4 \end{cases} \Rightarrow C \begin{cases} \alpha = x = 1 \\ \beta = y = -1 \end{cases} \Rightarrow R = CA = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$$

تمرین ۲) حدود  $a$  را طوری به دست آورید که  $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$  بتواند معادله‌ی یک دایره باشد. (ص ۴۵ کتاب جدید)

۲۶) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر  $a$ ، منحنی به معادله‌ی  $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$  یک دایره است؟

(۱)  $\{-3\}$  (۲)  $\{3\}$  (۳)  $\{-3, 3\}$  (۴)  $\emptyset$  (کنکور سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور)



نکته (وضعیت نقطه نسبت به دایره): هر دایره به مرکز  $O(\alpha, \beta)$  و شعاع  $R$  و با معادله‌ی  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

صفحه رابه سه بخش درون، رو و برون افرازی می‌کند. معادله‌ی  $C(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2$  را در نظر می‌گیریم:

الف: داخل دایره، مجموعه‌ی نقطه‌هایی مانند  $M(x_1, y_1)$  می‌باشند که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره

است. در نتیجه:  $OM < R \Leftrightarrow OM^2 < R^2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 < R^2 \Leftrightarrow C(x_1, y_1) < 0$   
در این حالت که نقطه‌ی  $M$  درون دایره قرار دارد نمی‌توان مماس بر دایره رسم کرد. اندازه کوتاهترین وتر

از دایره مانند  $AB$  که از نقطه  $M$  می‌گذرد در رابطه زیر صدق می‌کند.  $AB = 2\sqrt{-C(x_1, y_1)}$

زیرا:  $(\frac{AB}{2})^2 = R^2 - OM^2 = R^2 - (x_1 - \alpha)^2 - (y_1 - \beta)^2 = -C(x_1, y_1) \Rightarrow AB = 2\sqrt{-C(x_1, y_1)}$

ب: روی دایره، مجموعه‌ی نقطه‌هایی مانند  $M(x_1, y_1)$  هستند که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

در نتیجه:  $OM = R \Leftrightarrow OM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow C(x_1, y_1) = 0$

در این حالت که نقطه‌ی  $M$  روی دایره قرار دارد از این نقطه فقط می‌توان یک مماس بر دایره رسم کرد.

ج: خارج دایره، مجموعه‌ی نقطه‌هایی مانند  $M(x_1, y_1)$  هستند که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است.

در نتیجه:  $OM > R \Leftrightarrow OM^2 > R^2 \Leftrightarrow (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 > R^2 \Leftrightarrow C(x_1, y_1) > 0$

در این حالت که نقطه‌ی  $M$  برون دایره قرار دارد می‌توان دو مماس مساوی بردایره رسم کرد که اندازه مماس  $MT$  بر این دایره در

رابطه زیر صدق می‌کند.  $MT = \sqrt{C(x_1, y_1)}$

زیرا:  $MT^2 = OM^2 - R^2 = (x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 - R^2 = C(x_1, y_1) \Rightarrow MT = \sqrt{C(x_1, y_1)}$

تمرین ۳) وضعیت هر یک از نقاط  $A(-1, -1)$  و  $B(1, -2)$  و  $C(2, 2)$  و  $D(4, -1)$  را نسبت به دایره

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$  تعیین کنید. (ص ۴۵ کتاب جدید)

مثال) حدود  $k$  برای آن که نقطه  $M(-2, 3)$  داخل دایره به معادله  $x^2 + y^2 + ky = 9$  باشد، کدام است؟

(۱)  $k > -\frac{3}{4}$  (۲)  $k < -\frac{4}{3}$  (۳)  $k < -\frac{3}{4}$  (۴)  $k > -\frac{4}{3}$

جواب: گزینه ۲ درست است.  $M(-2, 3) \Rightarrow 4 + 9 + 3k - 9 < 0 \Rightarrow k < -\frac{4}{3}$

۲۷) اگر از نقطه  $A(2, m)$  بتوانیم دو مماس بر دایره به معادله  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  رسم کنیم حدود  $m$  کدام است؟

(۱)  $m > -3$  (۲)  $m < 1$  (۳)  $-3 < m < 1$  (۴)  $m < -3$  یا  $m > 1$

۲۸) طول قطعه مماسی که از نقطه  $A(4, 1)$  بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  رسم شود برابر کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)  $2\sqrt{3}$  (کنکور سراسری ریاضی ۸۴ - ۱۳۸۳)

نکته : کوچکترین وترى که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می توان رسم کرد، وترى است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

مثال) طول کوتاهترین وترى از دایره  $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$  که از نقطه  $A(1,1)$  می گذرد، چقدر است؟

(۱) ۲ (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴) ۱ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۳)

جواب : گزینه ۳ درست است. روش اول :  $CA = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2} = 1$  و  $R = \frac{1}{2}\sqrt{16+4+16} = 3$  و  $C(2,0)$

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R^2 - CA^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow BC^2 = 32 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 \Rightarrow -\frac{BC^2}{4} = 1 - 4 + 1 - 2 - 4 = -8 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2} \quad \text{روش دوم :}$$

مثال) چند وتر به طول ۳ در دایره  $x^2 + (y-1)^2 = 25$  می توان رسم کرد که از نقطه  $(2,3)$  بگذرد؟

(۱) ۱ (۲) بی شمار (۳) صفر (۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۵)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. فرض کنیم  $AB$  طول کوتاهترین وتر ممکن و گذرنده از نقطه  $(2,3)$  باشد.

$$AB = 2\sqrt{-C(x_0, y_0)} = 2\sqrt{-(2^2 + (3-1)^2 - 25)} = 2\sqrt{17} > 8 \quad \text{داریم :}$$

چون وتر داده شده از کوتاهترین وتر، کوچکتر است، پس هیچ وترى نمی توان رسم کرد. (هندسه ۳ دوازدهم ۹۸-۹۷)

تمرین ۴) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.  $x^2 + y^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 - 2x = 4$  (الف)

ب)  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  و  $(x-1)^2 + y^2 = 1$

ج)  $x^2 + y^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$

د)  $x^2 + y^2 = 1$  و  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

(ص ۴۵ کتاب جدید)

تمرین ۵) نقاط  $A(-1,-1)$  و  $B(1,1)$  و  $C(1,-3)$  رئوس مثلث  $ABC$  هستند. معادله‌ی دایره محیطی مثلث  $ABC$  را بنویسید. سپس معادله‌ی مماس بر این دایره را در رأس  $B$  به دست آورید. (ص ۴۵ کتاب جدید)

مثال) شعاع دایره گذرا بر سه نقطه‌ی  $(0,0)$  و  $(2,1)$  و  $(1,-2)$ ، برابر کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}\sqrt{10}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$  (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۳)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: برای بدست آوردن دایره محیطی مثلث بهتر است از معادله گسترده دایره استفاده کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (0,0) \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \\ (2,1) \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ (1,-2) \Rightarrow 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x + y = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

روش دوم: به سادگی دیده می شود مثلث فوق قائم الزاویه است. بنابراین شعاع آن نصف اندازه وتر است. در نتیجه:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(ص ۴۵ کتاب جدید)

تمرین ۶) وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

الف)  $3x + 4y = 0$  و  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

ب)  $x + y = 2$  و  $x^2 + y^2 = 2$

ج)  $x + y = 1$  و  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

مثال) معادله قطری از دایره  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  عمود بر خط  $y = x$ ، کدام است؟

(کنکور سراسری تجربی ۷۶)  $y + x = 2$  (۱)  $y + 2x = 2$  (۲)  $2y + x = 1$  (۳)  $y + x = 1$  (۴)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. می دانیم حاصل ضرب شیب های دو خط عمود بر هم  $-1$  می باشد. مرکز این دایره نقطه  $C(1,0)$

است. از طرفی شیب خط  $y = x$  به صورت  $m = 1$  می باشد و چون قطر باید بر خط  $y = x$  عمود باشد پس شیب آن  $m' = -1$  خواهد بود در نتیجه معادله ی قطر به صورت زیر محاسبه می شود.

مثال) به ازای کدام مقدار  $a$  زاویه ی بین خط مماس بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادله  $3x + 2y = a$  در نقطه ی تلاقی آن ها،  $90^\circ$  درجه است؟

(کنکور سراسری ریاضی ۹۶)  $2$  (۱)  $3$  (۲)  $4$  (۳)  $5$  (۴)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: شیب خط مماس بر دایره در نقطه تماس با آن برابر است با مشتق به ازای مختصات نقطه

تماس پس  $m = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x-2}{2y+1}$  از طرفی شیب خط  $3x + 2y = a$  برابر است با  $m' = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$  و چون خط مماس

و این خط بر هم عمودند پس:  $mm' = -1 \Rightarrow -\frac{2x-2}{2y+1} \times (-\frac{3}{2}) = -1$

$$\frac{3x+2y=a}{2} \rightarrow 6x-6 = -4\left(\frac{a-3x}{2}\right) - 2 \Rightarrow 6x-6 = -2a+6x-2 \Rightarrow a=2$$

روش دوم: با توجه به اینکه خط مماس بر شعاع دایره در نقطه ی تماس با آن عمود است پس خط به معادله  $3x + 2y = a$  قائم بردایره است به عبارت دیگر مرکز دایره روی این خط واقع است.

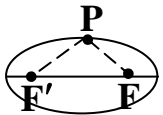
$$C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3 \times 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = a \Rightarrow a = 2$$

(۲۹) هر خط قائم بر دایره، از نقطه  $(-2,1)$  می گذرد. این دایره بر خط به معادله  $y = x - 1$  مماس است. شعاع دایره کدام است؟

(کنکور سراسری تجربی ۸۸)  $2$  (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $3$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴)

۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۴	۲	۴	۲	۴	۳	۴	۳	۳	۲	۴	۱	۴	۴	۳	۲	۳	۴	۳	۱
											۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
											۴	۲	۴	۱	۱	۲	۱	۴	۳

فعالیت ۱: یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطه‌ی  $F$  و  $F'$  ثابت کنید. فرض کنید طول نخ  $L$  باشد و



$L > FF'$  یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

(۱) یک نقطه‌ی دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه‌ی ثابت  $F$  و  $F'$  برابر چیست؟

(۲) یک نقطه‌ی دلخواه مانند  $A$  در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی ثابت  $F$  و  $F'$  وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از  $F$  و  $F'$  کوچکتر از  $L$  است.

(راهنمایی: پاره خط  $FA$  را از سمت  $A$  امتداد دهید تا بیضی را قطع کند سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

(۳) یک نقطه‌ی دلخواه مانند  $D$  بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی  $F$  و  $F'$  وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از  $F$  و  $F'$  بزرگتر از  $L$  است.

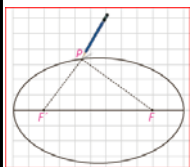
(راهنمایی: اگر نقطه‌ی  $D$  محل برخورد  $FB$  با بیضی باشد،  $F'D$  را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده کنید.)

(۴) از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه‌ی نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه‌ی دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

(۵) با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو ..... یک مقدار ..... است.

دو نقطه‌ی ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوردیم و آنها  $F$  و  $F'$  را نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند. (ص ۴۷ کتاب جدید)

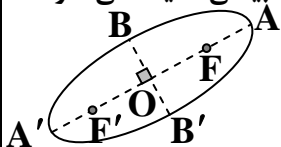


طریقه رسم بیضی: برای رسم بیضی دو نقطه‌ی ثابت  $F$  و  $F'$  (به نام کانون) را در یک صفحه در نظر می‌گیریم.

یک تکه نخ را به طول ثابت  $FF' < L$  در نظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون  $F$  و  $F'$  ثابت می‌کنیم.

سپس یک مداد را داخل این نخ قرار داده و با گرداندن مداد داخل نخ، بیضی را رسم می‌کنیم.

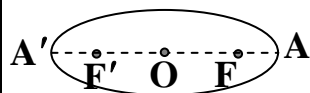
فعالیت ۲: بیضی مقابل را در نظر بگیرید.  $AA'$  قطر بزرگ (قطر کانونی) و  $BB'$  قطر کوچک (قطر ناکانونی) بیضی نامیده می‌شود.



$F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی هستند و نقطه‌ی  $O$ ، وسط پاره خط  $FF'$ ، مرکز بیضی است.

فرض کنید اندازه‌ی پاره خط‌های  $OA$ ،  $OB$  و  $OC$  را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایش دهیم.

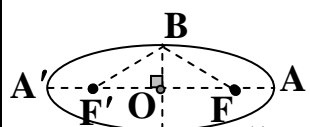
بنابراین فاصله‌ی دو کانون بیضی برابر  $2c$  است.



(۱) در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیت را که مداد در نقاط  $A$  و  $A'$  قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که  $FA = F'A'$  و از آنجا نتیجه بگیرید  $OA' = OA$  و لذا اندازه‌ی قطر بزرگ

بیضی برابر  $2a$  است.



ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

(۲) الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطه‌ی  $B$  قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید  $a^2 = b^2 + c^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه‌ی  $B'$  نتیجه بگیرید  $a^2 = b^2 + c^2$  و با توجه به آن نتیجه بگیرید  $OB' = OB = b$  و

(ص ۴۸ کتاب جدید)

لذا اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر  $2b$  است.



بیضی: مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز  $F$  و  $F'$  (به نام کانون) در آن صفحه مقدار مثبت و ثابت  $2a$  باشد. ( $F'F < 2a$ )

نکته: اگر نقطه‌ی  $M$  بر روی بیضی به کانون‌های  $F$  و  $F'$  باشد آنگاه:  $MF + MF' = 2a$  و بعکس

نتیجه: الف: اگر نقطه‌ی  $M$  درون بیضی به کانون‌های  $F$  و  $F'$  باشد آنگاه:  $MF + MF' < 2a$

ب: اگر نقطه‌ی  $M$  برون بیضی به کانون‌های  $F$  و  $F'$  باشد آنگاه:  $MF + MF' > 2a$

فاصله‌ی کانونی: طول پاره خط  $F'F$  را فاصله‌ی کانونی بیضی می‌نامند.

محورهای کانونی و ناکانونی بیضی و مرکز بیضی: خطی را که از کانون‌های بیضی می‌گذرد

محور کانونی و خط عمود منصف پاره خط  $F'F$  را محور ناکانونی بیضی می‌نامند. محل برخورد دو محور

کانونی و ناکانونی بیضی را مرکز بیضی می‌نامند و با  $C$  نامگذاری می‌نمایند. می‌توان ثابت کرد

که محورهای کانونی و ناکانونی بیضی محورهای تقارن بیضی و مرکز بیضی مرکز تقارن آن می‌باشند.

رئوس بیضی: محل برخورد محورهای کانونی و ناکانونی بیضی با نمودار آن را بترتیب رأس‌های کانونی و ناکانونی بیضی می‌نامند.

و آنها را معمولاً با  $A$  و  $A'$  و  $B$  و  $B'$  نامگذاری می‌کنند.

بیضی افقی و قائم: هرگاه محور کانونی بیضی موازی محور طول‌ها باشد بیضی را افقی و هرگاه محور کانونی بیضی موازی محور

عرض‌ها باشد بیضی را قائم می‌نامند.

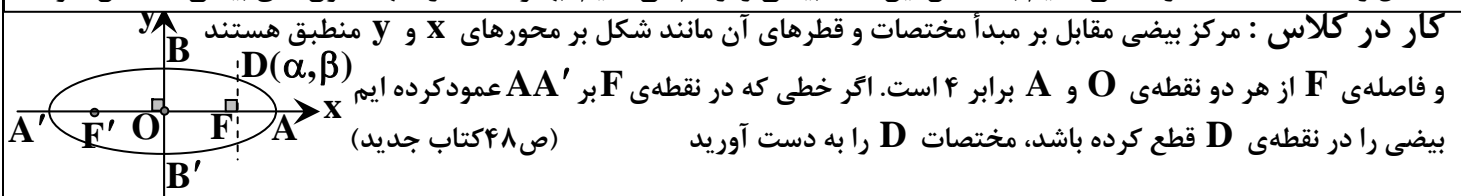
بیضی: می‌توان ثابت کرد که مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از یک دایره واقع در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت واقع در درون

آن دایره به یک فاصله باشد بیضی است.

طریقه رسم بیضی با معلوم بودن مرکز و  $a$  و  $b$  و نوع آن: ابتدا نقطه‌ی  $C(\alpha, \beta)$  (مرکز بیضی) را مشخص می‌کنیم،

سپس به اندازه‌ی  $a$  در طرفین مرکز روی محور کانونی و به اندازه‌ی  $b$  در طرفین مرکز روی محور ناکانونی حرکت می‌کنیم و نقاط

حاصل را  $A$ ،  $A'$ ،  $B$  و  $B'$  می‌نامیم با داشتن این نقاط بیضی را رسم می‌کنیم. بهتر است در انتها کانون‌های بیضی مشخص شوند.



مثال : طول وتری که از یک کانون بیضی (یا هذلولی) می گذرد و بر محور کانونی عمود است از رابطه  $MN = \frac{2b^2}{a}$  محاسبه می

شود، که در آن  $a$  و  $b$  به ترتیب نصف قطر کانونی و ناکانونی بیضی (یا هذلولی) می باشند.

اثبات : روش اول : بدون آنکه از کلیت مسأله کاسته شود فرض کنیم مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای  $x$  و  $y$  منطبق هستند و  $OF = c$  و  $OA = a$  است. اگر خطی که در نقطه  $F$  بر  $AA'$  عمود کرده ایم بیضی را در دو نقطه  $D$  و  $D'$  قطع کرده باشد، مختصات  $D$  و  $D'$  را به دست می آوریم.

جواب :  $D(c, \beta)$  و  $D(c, -\beta)$  و  $A(a, 0)$  و  $A'(-a, 0)$  و  $F(c, 0)$  و  $F'(-c, 0)$

$$DF + DF' = 2a \Rightarrow \sqrt{(c-c)^2 + (\beta-0)^2} + \sqrt{(c+c)^2 + (\beta-0)^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2 + \beta^2} = 2a - \sqrt{(c+c)^2 + \beta^2} \Rightarrow \sqrt{c^2 + \beta^2} = 2a - \sqrt{4c^2 + \beta^2} \Rightarrow \sqrt{c^2 + \beta^2} = 2a - \sqrt{4c^2 + \beta^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c^2 + \beta^2} = 2a - \sqrt{4c^2 + \beta^2} \Rightarrow \sqrt{c^2 + \beta^2} = 2a - \sqrt{4c^2 + \beta^2} \Rightarrow a|\beta| = a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow |\beta| = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \Rightarrow \beta = \pm \frac{b^2}{a} \Rightarrow D(c, \frac{b^2}{a}) \text{ و } D'(c, -\frac{b^2}{a})$$

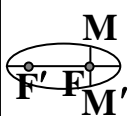
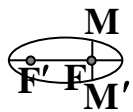
$$DD' = \sqrt{(c-c)^2 + (\frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a})^2} = \frac{2b^2}{a}$$

روش دوم : در بیضی داریم :

$$MF' + MF = 2a \text{ و } MF'^2 = MF^2 + F'F^2 \Rightarrow MF'^2 - MF^2 = F'F^2$$

$$\Rightarrow (MF' - MF)(MF' + MF) = (2c)^2 \Rightarrow MF' - MF = \frac{4c^2}{2a} = \frac{2c^2}{a}$$

$$\Rightarrow MM' = 2MF = \frac{2b^2}{a}$$



نکته : طول وتری که از یک کانون بیضی (یا هذلولی) می گذرد و بر محور کانونی عمود است از رابطه  $MN = \frac{2b^2}{a}$  محاسبه می شود، که در آن  $a$  و  $b$  به ترتیب نصف قطر کانونی و ناکانونی بیضی (یا هذلولی) می باشند.

۱) در بیضی به مرکز مبدأ مختصات و رأس  $A(2, 0)$  و کانون  $F(1, 0)$ ، یک خط از این کانون بر قطر بزرگ آن عمود می کنیم، تا بیضی را در  $M$  و  $N$  قطع کند اندازه وتر  $MN$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$  (۲)

$\frac{3}{2}$  (۱)

فعالیت ۳: در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای  $a$  و  $c$  بیضی مورد نظر را رسم می کنیم. می دانیم که  $0 < c < a$  و لذا

$0 < \frac{c}{a} < 1$  دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر  $\frac{c}{a}$  دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا

دو کانون  $F$  و  $F'$  را به فاصله  $c$  از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط  $A$  و  $A'$  را بر خط  $FF'$  به گونه ای انتخاب کنید که فاصله  $A$  تا  $F$  و فاصله  $A'$  تا  $F'$  برابر  $a - c$  و اندازه  $AA'$  برابر  $2a$  باشد، سپس با استفاده از رابطه

$b^2 = a^2 - c^2$  نقاط  $B$  و  $B'$  را مشخص کنید و بیضی را بطور تقریبی رسم کنید:

$$(1) \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{4} : a = 4 \text{ و } c = 1$$

$$(2) \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{4} : a = 8 \text{ و } c = 2$$

$$(3) \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} : a = 2 \text{ و } c = 1$$

$$(4) \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} : a = 4 \text{ و } c = 2$$

$$(5) \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4} : a = 4 \text{ و } c = 3$$

$$(6) \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{4} : a = 8 \text{ و } c = 6$$

(ص ۴۹ کتاب جدید)



با توجه به آنچه دیدید هر چه مقدار  $\frac{c}{a}$  به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده تر شده و شکل بیضی به پاره خط نزدیکتر می شود و

هر چه مقدار  $\frac{c}{a}$  به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می شود. به این سبب مقدار  $\frac{c}{a}$

را خروج از مرکز بیضی می نامیم.

در حالتی که  $\frac{c}{a} = 1$  بیضی تبدیل به یک پاره خط و در حالتی که  $\frac{c}{a} = 0$  بیضی تبدیل به یک دایره می شود. چرا؟

مثال) ثابت کنید  $A'A = 2a$  قطر بزرگ بیضی و  $B'B = 2b$  قطر کوچک بیضی است.

جواب:  $a, b, c > 0, c^2 = a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) > 0 \Rightarrow a-b > 0 \Rightarrow a > b \Rightarrow 2a > 2b$

نکته: خروج از مرکز بیضی (کشیدگی بیضی): کسر  $e = \frac{c}{a}$  را خروج از مرکز بیضی می نامند. باید توجه داشت که در بیضی همواره  $0 < e < 1$  است.

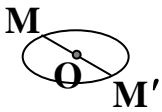
نکته: رابطه‌ی عمومی بیضی:  $a^2 = b^2 + c^2$

نتیجه الف:  $c^2 = a^2 - b^2$  و  $b^2 = a^2 - c^2$

ب: اگر  $e \rightarrow 0$  آنگاه  $c \rightarrow 0$  در نتیجه  $a \rightarrow b$  بنابراین شکل بیضی به یک دایره میل می کند. و اگر  $e \rightarrow 1$  آنگاه  $c \rightarrow a$  در نتیجه  $b \rightarrow 0$  بنابراین شکل بیضی به یک پاره خط میل می کند.

نکته: خروج از مرکز بیضی:  $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$  یا  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

نکته: قطرهای بیضی وترهای از بیضی هستند که از مرکز بیضی می گذرند.



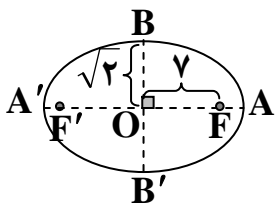
اگر  $MM'$  وتر دلخواهی از بیضی باشد همواره داریم:  $2b = B'B \leq M'M \leq A'A = 2a$

۲) نقاط  $F(1,1)$  و  $F'(-3,1)$  کانون های یک بیضی می باشند که بر محور X ها مماس است. طول قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

۳) در بیضی به کانون های  $F'$  و  $F$  (شکل مقابل) چند قطر وجود دارد که طول آن ها عدد طبیعی باشد؟

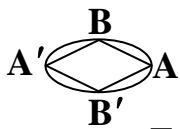
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸



۴) در بیضی شکل مقابل مساحت مثلث  $OAB$  سه برابر مساحت مثلث  $FBF'$  است، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$  (کنکور آزاد ریاضی ۷۵)

مثال) در شکل زیر، مساحت لوزی  $۱۶\sqrt{۶}$  و طول قطر کوچک بیضی  $۴\sqrt{۳}$  است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



$\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$  (۴)

$\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$  (۳)

$\frac{\sqrt{۱۰}}{۸}$  (۲)

$\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$  (۱)

جواب: گزینه ۴ درست است.  $۲b = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۳}$  و  $\frac{۱}{۲}(۲a)(۲b) = ۱۶\sqrt{۶} \Rightarrow ۲a \times ۲\sqrt{۳} = ۱۶\sqrt{۶} \Rightarrow a = ۴\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{۱۲}{۳۲}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۳۲}} = \sqrt{\frac{۱۰}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = ۳۲ - ۱۲ = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

و یا

(۵) قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

(کنکور سراسری تجربی ۷۵)

$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$  (۴)

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$  (۳)

$\frac{\sqrt{۲}}{۳}$  (۲)

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$  (۱)

مثال) اگر فاصله کانونی یک بیضی و قطر کوچک آن را نصف کنیم خروج از مرکز بیضی جدید چند برابر می شود؟

۴ برابر (۴)

۲ برابر (۳)

۱ برابر (۲)

۵/۱ برابر (۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. اگر خروج از مرکز بیضی  $e = \frac{c}{a}$  باشد.

$$e' = \frac{c'}{a'} = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2}} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c}{a} = e$$

مثال) خروج از مرکز بیضی که رأس های کانونی آن  $A(۲/۵, ۰)$  و  $A'(-۲/۵, ۰)$  و یک کانون آن باشد، کدام است؟

$\frac{۴}{۵}$  (۴)

$\frac{۱}{۵}$  (۳)

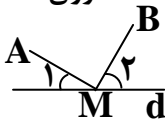
$\frac{۳}{۵}$  (۲)

$\frac{۲}{۵}$  (۱)

$$a = ۲/۵ \text{ و } c = ۱/۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱/۵}{۲/۵} = \frac{۱}{۲}$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

یادآوری: در پایه یازدهم دیدیم که کوتاه ترین مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و با عبور از خط d، از نقطه‌ی ای مانند M روی



خط d می گذرد، به گونه ای که دو زاویه‌ی ایجاد شده  $M_۱$  و  $M_۲$  با هم برابرند.

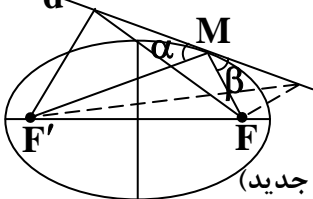
فعالیت ۴: فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد.

(۱) مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

(۲) دو زاویه‌ی  $\alpha$  و  $\beta$  نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

(۳) با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه‌ی داخلی یک بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی

اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور ز کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟ (ص ۴۷ کتاب جدید)



مثال) مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت  $F$  و  $F'$  در آن صفحه برابر مقدار معین ۲ باشند کدام است؟

- (۱) بیضی (۲) یک پاره خط  
 (۳) هیچ شکل حقیقی نیست (۴) بسته به طول  $F'F$  می تواند هر کدام از گزینه های ۱ و ۲ و ۳ باشد.  
 جواب: گزینه ۴ صحیح است. اگر  $F'F < ۲$  باشد مکان بیضی است. اگر  $F'F = ۲$  باشد مکان یک پاره خط است.  
 اگر  $F'F > ۲$  هیچ شکل حقیقی حاصل نمی گردد.  
 (۶) مکان هندسی مرکز دایره هایی که بر دو دایره ی متداخل مفروض با مراکز متمایز  $O$  و  $O'$  و شعاع های  $R$  و  $R'$  مماس داخل باشد کدام است؟

- (۱) بیضی به کانون های  $O$  و  $O'$  (۲) بیضی به رأس های  $O$  و  $O'$   
 (۳) دایره (۴) دایره ای به قطر  $OO'$  (کنکور آزاد ریاضی ۶۷)

مثال) نقاط  $F(۴,۰)$  و  $F'(-۴,۰)$  کانون ها و  $M(۰,-۳)$  نقطه ای از یک بیضی می باشند طول کوچکترین قطر این بیضی کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

جواب: روش اول:  $۲a = MF' + MF = ۲a = \sqrt{(-۴-۰)^2 + (۰+۳)^2} + \sqrt{(۴-۰)^2 + (۰+۳)^2} = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$

روش دوم: گزینه ۲ صحیح است.  $۲c = F'F = ۸ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow ۲b = B'B = ۶$   
 $C(۰,۰)$  مرکز بیضی  $\Rightarrow B = M(۰,-۳) \Rightarrow b = CB = ۳ \Rightarrow ۲b = B'B = ۶$

مثال) اگر مجموع فاصله های نقطه  $M$  از دو نقطه ثابت  $F(۲,۰)$  و  $F'(-۲,۰)$  برابر ۶ باشد، مختصات یکی از رأس های کانونی شکل حاصل برابر است با:

- (۱)  $(۲,-۳)$  (۲)  $(-۳,۰)$  (۳)  $(۴,۰)$  (۴)  $(۲,۳)$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.  $۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$  و  $C(\alpha, \beta) = (-۲ + ۲, ۰) = (۰, ۰)$  و  $A'(\alpha - a, \beta) = (-۳, ۰)$

نکته: کمترین و بیشترین فاصله ی یک نقطه از بیضی تا کانون ها (قانون اول کپلر): مسیر حرکت سیاره ها به دور خورشید یک بیضی است که خورشید در یکی از کانون های این بیضی قرار دارد کمترین و بیشترین فاصله ی سیاره ها از خورشید همان فاصله ی رئوس کانونی تا کانون ها می باشد که به ترتیب عبارتند از:  $a - c$  و  $a + c$

مثال) حاصل ضرب فاصله ی رأس کانونی یک بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{۲}b$  (۲)  $۲b$  (۳)  $۲b^2$  (۴)  $b^2$

جواب: گزینه ۴ صحیح است. فاصله ی یک رأس بیضی از دو کانون  $a - c$  و  $a + c$  می باشد.

$$۲b^2 = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2 = b^2$$

مثال) اگر فاصله ی یک کانون تا نزدیکترین رأس به آن برابر ۲ باشد و فاصله ی کانون تا رأس ناکانونی برابر ۵ باشد، وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر قطر کانونی آن عمود است، بیضی را در دو نقطه قطع می کند فاصله ی بین این دو نقطه کدام است؟

- (۱)  $۳/۲$  (۲)  $۴/۸$  (۳)  $۶/۴$  (۴)  $۹/۶$

جواب: گزینه ۳ صحیح است.  $a - c = ۲ =$  فاصله ی کانون تا نزدیکترین رأس به آن

$$\text{فاصله‌ی کانون تا رأس ناکانونی} = |\mathbf{BF}| = \mathbf{a} = 5 \Rightarrow 5 - c = 2 \Rightarrow c = 3$$

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{c}^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \text{طول وتر کانونی} = \frac{2\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}} = \frac{2 \times 16}{5} \times \frac{2}{2} = 6/4$$

۷) اگر  $\mathbf{B}(1,6)$  و  $\mathbf{F}(4,2)$  به ترتیب یک رأس ناکانونی و کانون یک بیضی افقی باشند، وتری که از کانون بیضی می‌گذرد و بر قطر کانونی آن عمود است، بیضی را در دو نقطه قطع می‌کند فاصله‌ی بین این دو نقطه کدام است؟

- (۱)  $1/6$       (۲)  $3/2$       (۳)  $4/8$       (۴)  $6/4$

مثال) اگر فاصله‌ی یک رأس کانونی بیضی از دو کانون آن به ترتیب ۴ و ۱۴ باشند خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{c} = 14 \\ \mathbf{a} - \mathbf{c} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = 9 \\ \mathbf{c} = 5 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{e} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{5}{9}$$

جواب: گزینه ۳ درست است.

۸) طول قطر کوچک بیضی  $4\sqrt{2}$  و فاصله‌ی کانون تا نزدیکترین رأس، ۲ واحد است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱)  $1/3$       (۲)  $1/2$       (۳)  $1/4$       (۴)  $2/3$
- (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

مثال) در یک بیضی، فاصله‌ی یک کانون از دورترین نقطه‌ی بیضی، سه برابر فاصله‌ی همان کانون از نزدیکترین نقطه‌ی بیضی است.

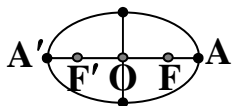
خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱)  $1/3$       (۲)  $2/3$       (۳)  $1/2$       (۴)  $3/4$
- (کنکور سراسری ریاضی ۷۹)

$$\mathbf{a} + \mathbf{c} = 3(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \Rightarrow 4\mathbf{c} = 2\mathbf{a} \Rightarrow \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{2}{4} \Rightarrow \mathbf{e} = \frac{1}{2}$$

جواب: گزینه ۳ درست است.

مثال) در بیضی شکل مقابل،  $\mathbf{OF} = 4$  و  $\mathbf{F'A} = 8$  خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



- (۱)  $1/2$       (۲)  $3/5$       (۳)  $4/5$       (۴)  $1/3$

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \mathbf{OF} = 4 \\ \mathbf{F'A} = 8 \Rightarrow \mathbf{F'O} + \mathbf{OA} = \mathbf{c} + \mathbf{a} = 8 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = 5 \Rightarrow \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{4}{5}$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

۹) نقاط  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{F}'$ ، کانون‌های یک بیضی و  $\mathbf{M}$  نقطه‌ای روی آن بیضی است. اگر  $\mathbf{MF} = 8$ ،  $\mathbf{MF}' = 6$  و  $\mathbf{MF}$  بر  $\mathbf{MF}'$  عمود باشد، خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{6}{7} \quad (2)$$

$$\frac{5}{7} \quad (1)$$

مثال) چند نقطه روی محیط دایره  $x^2 + y^2 = 16$  وجود دارد که مجموع فواصل آنها از دو نقطه  $A(3,0)$  و  $B(-3,0)$  برابر 10 باشد.  
 (کنکور آزاد ریاضی صبح 90) ۲ (۱)    ۴ (۲)    ۳ (۳)    ۱ (۴)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. روش اول: مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت  $A(3,0)$  و  $B(-3,0)$  در آن صفحه مقدار مثبت و ثابت 10 باشد بیضی به مرکز مبدأ مختصات و به معادله  $y$  زیر است.

$$2c = FF = AB = 6 \Rightarrow c = 3 \text{ و } 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{16 - x^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4 \end{cases} \Rightarrow E(0,4) \text{ و } E'(0,-4)$$

روش دوم: مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت  $A(3,0)$  و  $B(-3,0)$  در آن صفحه مقدار مثبت و ثابت 10 باشد بیضی به مرکز مبدأ مختصات است.

$2c = FF = AB = 6 \Rightarrow c = 3$  و  $2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$   
 چون  $b = 4 = R$  پس دایره و بیضی در دو نقطه بر هم مماس اند. (هندسه 3 دوازدهم 98-97)  
 10) چند نقطه روی محورهای مختصات وجود دارد که مجموع فواصلشان از دو نقطه  $F(1,2)$  و  $F'(-4,2)$  برابر 6 باشد؟  
 (کنکور آزاد تجربی 86) ۱ (۲)    ۲ (۳)    ۴ (۴)    ۱ (۲)    ۱ (۲)    ۲ (۳)    ۴ (۴)

11) مختصات کانون  $F$  یک بیضی با عرض مثبت که بر چهار خط  $x = -1$ ,  $x = 5$ ,  $y = -4$  و  $y = 6$  مماس باشد، کدام است؟  
 (کنکور سراسری تجربی 75) (۲,۵) (۱)    (۲,۳) (۲)    (۱,۵) (۳)    (۱,۳) (۴)    (۲,۳) (۲)    (۲,۵) (۱)

مثال) یک بیضی افقی ( $F'F$  موازی محور  $x$  ها است) در نقاط  $(4,0)$  و  $(0,2)$  بر محورهای مختصات مماس است. فاصله کانونی بیضی چقدر است؟

$$8\sqrt{3} \quad (4)$$

$$6\sqrt{3} \quad (3)$$

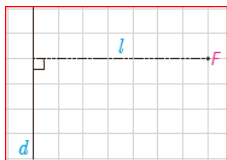
$$4\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.  
 $a = 4$  و  $b = 2$  و  $2c = F'F = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{16 - 4} = 4\sqrt{3}$

۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
									۱	۳	۱	۱	۴	۱	۳	۱	۳	۱	۳

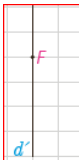




**فعالیت ۵:** یک خط  $d$  ثابت مانند و یک نقطه‌ی ثابت مانند  $F$  خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی  $F$  از خط  $d$  برابر  $l$  باشد.

یک نقطه بیابید که فاصله‌ی آن از خط  $d$  و نقطه‌ی  $F$  یکسان باشد.

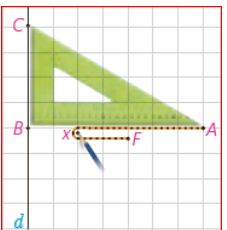
آیا می‌توانید نقطه‌ی دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطه‌ی  $F$  خطی موازی خط  $d$  رسم کنید و آن را  $d'$  بنامید.



تمام نقاط واقع بر خط  $d'$  فاصله‌شان از خط  $d$  برابر  $l$  است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط  $d'$  بیابید که از نقطه‌ی  $F$  و خط  $d$  به یک فاصله باشند.

اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه‌ی  $d$  فاصله‌ی یکسانی از خط  $d$  و نقطه‌ی  $F$  قرار دارند،

آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می‌گردد.



فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشند. یک سر تکه نخ به طول  $AB$

را در رأس  $A$  از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه‌ی  $F$  ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع  $BC$

بر خط  $d$  واقع باشد و نقطه‌ی  $F$  بر ضلع  $AB$  قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه‌ای به نخ گیر

دهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصله‌ی نقطه‌ی  $F$  که نوک قلم در آن قرار دارد از خط

$d$  و از نقطه‌ی  $F$  نسبت به هم چگونه است؟

حال در حالتی که ضلع  $BC$  کماکان بر خط  $d$  واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به

ضلع  $BC$  چسبیده باشد و هر دو تکه‌ی نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه‌ی در حال

حرکت نوک مداد را در هر حالت با  $X$  نمایش دهیم. پاره‌های  $FX$  و  $BX$  هر کدام نمایانگر چه

خصوصیتی از نقطه‌ی  $X$  هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

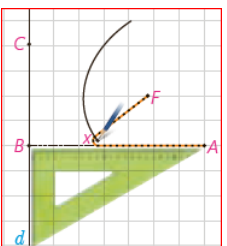
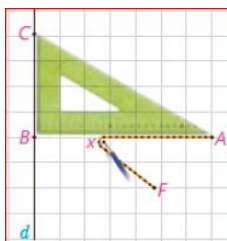
توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟

(دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع  $BC$  بر خط  $d$  در هر دو طرف نقطه‌ی  $F$  می‌توان حرکت داد.)

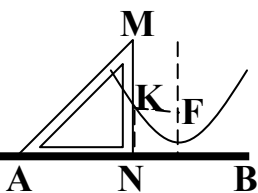
شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطه‌ی  $F$  را کانون سهمی و خط  $d$  را خط هادی

سهمی می‌نامیم و اگر از  $F$  بر  $d$  خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ی  $X$  قطع می‌کند که به آن رأس

سهمی می‌گوییم. (ص ۵۰ کتاب جدید)



**سهمی:** مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.



**طریقه‌ی رسم سهمی یک تکه نخ و گونیا:** خط کشی مانند  $AB$  به عنوان هادی در نظر

گرفته و یک تکه نخ به اندازه‌ی طول ضلع  $MN$  از یک گونیا را نیز انتخاب می‌کنیم یک سر نخ را

در نقطه‌ی  $M$  ثابت می‌کنیم و سر دیگر را در نقطه‌ی  $F$ ، یعنی کانون سهمی، مداد را مطابق شکل در

یک نقطه‌ی  $K$  قرار داده به طوری که تکه نخ بین نقاط  $F$ ،  $K$  و  $M$  محکم قرار گرفته باشد. با لغزاندن گونیا در امتداد  $AB$  نوک

مداد یک سهمی را رسم می‌کند.

**فعالیت ۶:** (۱) فرض کنید نقطه‌ی  $F(a, 0)$ ، که در آن  $a$  مثبت است، کانون سهمی و خط هادی  $d$  موازی محور  $y$  ها به معادله‌ی

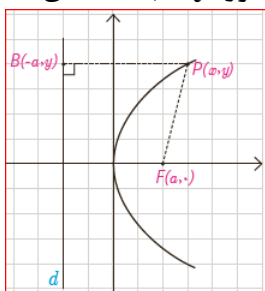
$x = -a$  باشد و نقطه‌ی  $P(x, y)$  نقطه‌ی دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم:  $|PF| = |PB|$ . چرا؟

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-y)^2}$$

با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارت خواهیم داشت:  $y^2 = 4ax$

دقت کنید که  $a$  برابر با فاصله‌ی کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصله‌ی رأس سهمی تا خط هادی است

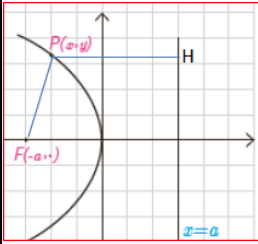
و فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر  $2a$  است. در این حالت عدد مثبت  $a$  را فاصله‌ی کانونی سهمی می‌نامند



و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می شود که در اینجا محور  $x$  هاست محور تقارن سهمی است که به آن محور کانونی سهمی یا محور سهمی هم می گوئیم.

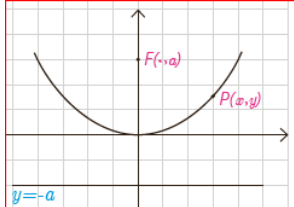
(۲) در حالتی که خط هادی موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = a$  باشد ولی کانون  $F(-a, 0)$  در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت

معادله سهمی به صورت  $y^2 = -4ax$  است. در این حالت محور  $x$  ها محور سهمی است.



(۳) در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $x$  ها به معادله  $y = -a$  و کانون  $F(0, a)$  در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل

قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت  $x^2 = 4ay$  است. در این حالت محور  $y$  ها محور سهمی است.



(در واقع این معادله همان  $y = \frac{1}{4a}x^2$  که در پایه ی دهم به عنوان معادله سهمی با آن آشنا شدید.)

(۴) در حالتی که خط هادی  $d$  موازی محور  $x$  ها به معادله  $y = a$  و کانون  $F(0, -a)$  در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت

(۱) نشان دهید در این حالت معادله سهمی به صورت  $x^2 = -4ay$  است.

(ص ۵۱ و ۵۲ کتاب جدید)

در این حالت محور ها محور سهمی است.



مطالب فوق در باره ی سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می توان در جدول زیر خلاصه کرد.

معادله سهمی ( $a > 0$ )	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور $x$	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور $x$	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور $y$	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور $y$	رو به پایین

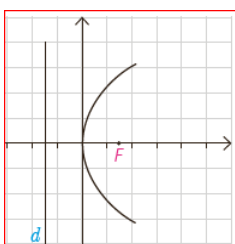
(ص ۵۲ کتاب جدید)

مثال: معادله  $y^2 = 6x$  مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص کنید؟

حل: این معادله ی یک سهمی است که دهانه ی آن رو به راست است و محور آن محور  $x$  هاست.

با قرار دادن  $6 = 4a$  داریم  $a = \frac{3}{4}$ . لذا کانون آن  $F(\frac{3}{4}, 0)$  و خط هادی آن موازی محور  $y$  ها

و به معادله  $x = -\frac{3}{4}$  است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.



**انتقال (محورها):** دیدیم که معادله  $y^2 = 4ax$  یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن  $F(a, 0)$ ، خط هادی آن موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a$ ، محور آن محور  $x$  ها (خط  $y = 0$ ) و دهانه‌ی آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه در باره‌ی انتقال می‌دانیم می‌توان گفت معادله‌ی  $(y - k)^2 = 4a(x - h)$  معادله‌ی همان سهمی است که به

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$	$(a + h, k)$	$x = -a + h$	خط $y = k$	رو به راست
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	$(-a + h, k)$	$x = a + h$	خط $y = k$	رو به چپ
$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	$(h, a + k)$	$y = -a + k$	خط $x = h$	رو به بالا
$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	$(h, -a + k)$	$y = a + k$	خط $x = h$	رو به پایین

اندازه‌ی  $h$  به سمت راست (در صورت منفی بودن  $h$  به سمت چپ) و به اندازه‌ی  $k$  به سمت بالا (در صورت منفی بودن  $k$  به سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات  $(h, k)$ ، کانون آن  $F(a + h, k)$ ، خط هادی آن موازی محور  $y$  ها به معادله  $x = -a + h$ ، محور آن خط  $y = k$  و دهانه‌ی آن کماکان رو به راست است. (ص ۵۳ کتاب جدید)

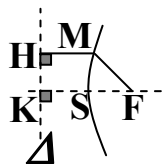
(۱) چند نقطه روی سهمی وجود دارد که از رأس و کانون به یک فاصله باشد؟

(۴) بیشمار

(۲) ۲

(۱) ۱

(۱) هیچ



**سهمی:** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت  $\Delta$  در آن صفحه و یک نقطه ثابت  $F$  خارج از  $\Delta$  و در آن صفحه به یک فاصله باشند، نقطه ثابت  $F$  را کانون و خط ثابت  $\Delta$  را خط هادی سهمی می‌نامیم.

**نکته:** اگر از نقطه‌ی  $M$  روی سهمی عمود  $MH$  را بر خط هادی رسم کنیم داریم:  $MF = MH$

**محور کانونی سهمی:** خطی که از کانون سهمی می‌گذرد و بر خط هادی آن عمود است را محور کانونی سهمی می‌نامیم. می‌توان ثابت کرد که محور سهمی، محور تقارن آن می‌باشد.

**رأس سهمی:** محور سهمی شاخه‌ی سهمی را در نقطه‌ی  $S$  مانند  $S$  قطع می‌کند که به آن رأس سهمی می‌گویند.

اگر محور کانونی سهمی خط هادی را در نقطه‌ی  $K$  قطع کند، نقطه‌ی  $S$  رأس سهمی وسط پاره خط  $FK$  قرار دارد.

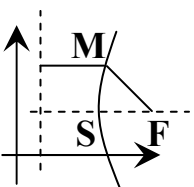
**نکته:** هر چه دهانه‌ی سهمی بازتر شود کانون دورتر از رأس سهمی است.

**نوع سهمی:**

**الف:** هرگاه محور سهمی موازی محور طول‌ها باشد (یا خط هادی سهمی موازی محور عرض‌ها باشد) سهمی را افقی می‌نامیم.

**ب:** هرگاه محور سهمی موازی محور عرض‌ها باشد (یا خط هادی سهمی موازی محور طول‌ها باشد) سهمی را قائم می‌نامیم.

**مختصات کانون و خط هادی و معادله‌ی محور تقارن و معادله سهمی:**



**الف:** هرگاه  $S(\alpha, \beta)$  رأس سهمی افقی باشد آنگاه  $F \left( \begin{matrix} \alpha + a \\ \beta \end{matrix} \right)$  (کانون) و  $x = \alpha - a$  (خط هادی)

و  $y = \beta$  (محور تقارن) و  $(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$  (معادله سهمی) و  $a$  پارامتر سهمی می‌باشد.

تذکر : اگر  $a > 0$  باشد دهانه‌ی سهمی به طرف راست و اگر  $a < 0$  باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف چپ خواهد بود.

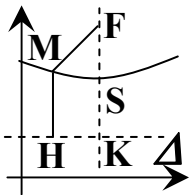
تذکر : در سهمی افقی متغیر  $x$  از درجه‌ی یک و متغیر  $y$  از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه  $S(0,0)$  رأس سهمی افقی باشد آنگاه  $F \begin{cases} a \\ \cdot \end{cases}$  (کانون) و  $x = -a$  (خط هادی) و  $y = 0$  (محور تقارن) و

$$y^2 = 4ax \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$

ب : هرگاه  $S(\alpha, \beta)$  رأس سهمی قائم باشد آنگاه  $F \begin{cases} \alpha \\ \beta + a \end{cases}$  (کانون) و  $y = \beta - a$  (خط هادی) و  $x = \alpha$  (محور تقارن) و

$$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$



تذکر : اگر  $a > 0$  باشد دهانه‌ی سهمی به طرف بالا و اگر  $a < 0$  باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف پایین خواهد بود.

تذکر : در سهمی قائم متغیر  $y$  از درجه‌ی یک و متغیر  $x$  از درجه‌ی دو می باشد.

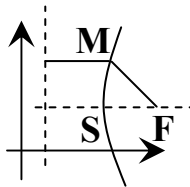
حالت خاص : هرگاه  $S(0,0)$  رأس سهمی قائم باشد آنگاه  $F \begin{cases} \cdot \\ a \end{cases}$  (کانون) و  $y = -a$  (خط هادی) و  $x = 0$  (محور تقارن) و

$$x^2 = 4ay \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$

مختصات کانون و خط هادی و معادله‌ی محور تقارن و معادله سهمی :

الف : هرگاه  $S(h,k)$  رأس سهمی افقی باشد آنگاه  $F \begin{cases} h + a \\ \beta \end{cases}$  (کانون) و  $x = h - a$  (خط هادی)

$$\text{و } y = k \text{ (محور تقارن) و } (y - k)^2 = 4a(x - h) \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$



تذکر : اگر  $a > 0$  باشد دهانه‌ی سهمی به طرف راست و اگر  $a < 0$  باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف چپ خواهد بود.

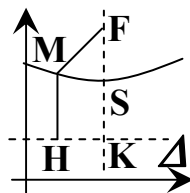
تذکر : در سهمی افقی متغیر  $x$  از درجه‌ی یک و متغیر  $y$  از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه  $S(0,0)$  رأس سهمی افقی باشد آنگاه  $F \begin{cases} a \\ \cdot \end{cases}$  (کانون) و  $x = -a$  (خط هادی) و  $y = 0$  (محور تقارن) و

$$y^2 = 4ax \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$

ب : هرگاه  $S(h,k)$  رأس سهمی قائم باشد آنگاه  $F \begin{cases} h \\ k + a \end{cases}$  (کانون) و  $y = k - a$  (خط هادی)

$$\text{و } x = h \text{ (محور تقارن) و } (x - h)^2 = 4a(y - k) \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$



تذکر : اگر  $a > 0$  باشد دهانه‌ی سهمی به طرف بالا و اگر  $a < 0$  باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف پایین خواهد بود.

تذکر : در سهمی قائم متغیر  $y$  از درجه‌ی یک و متغیر  $x$  از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه  $S(0,0)$  رأس سهمی قائم باشد آنگاه  $F \begin{cases} \cdot \\ a \end{cases}$  (کانون) و  $y = -a$  (خط هادی) و  $x = 0$  (محور تقارن) و

$$x^2 = 4ay \text{ (معادله‌ی سهمی) و } a \text{ پارامتر سهمی می باشد.}$$

مثال) در سهمی گذرا از نقطه‌ی  $M(4,4)$  که خطوط  $y = 2$  و  $x = 2$  به ترتیب محور کانونی و خط هادی سهمی می باشند، کوتاه ترین فاصله بین نقاط سهمی و خط هادی آن چقدر است؟

$$1(4) \quad 1/5(3) \quad 2(2) \quad 0/5(1)$$

جواب: گزینه ۴ صحیح است. چون محور کانونی بر حسب  $y$  می باشد پس سهمی افقی است در نتیجه:

$$y = \beta = 2 \text{ و محور کانونی } x = \alpha - a = 2 \Rightarrow \alpha = a + 2 \text{ و خط هادی } F \begin{cases} \alpha + a = a + 2 + a = 2a + 2 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(2a + 2 - 4)^2 + (2 - 4)^2} = |4 - 2| \Rightarrow (2a - 2)^2 + 4 = 4 \Rightarrow a = 1$$

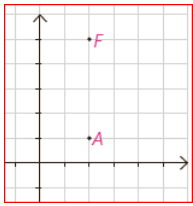
مثال: معادله‌ی سهمی به رأس  $A(2,1)$  و کانون  $F(2,5)$  را بیابید و معادله‌ی خط هادی آن را بنویسید.

حل: با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

$$1) \quad a = 4 \text{ (چرا؟)}$$

۲) معادله خط هادی آن  $y = -3$  است. چرا؟

۳) دهانه سهمی رو به بالاست. چرا؟



لذا معادله آن به صورت  $(x - h)^2 = 4a(y - k)$  است و خواهیم داشت:  $(x - 2)^2 = 16(y - 1)$  (ص ۵۳ کتاب جدید)

۲) نقطه‌ی  $S(-1/6, -1)$  رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور  $x$  ها بر این سهمی بتابد، به نقطه‌ی  $(0/9, -1)$  باز می تابد.

این سهمی محور  $y$  ها را با کدام عرض، قطع می کند؟

$$1) \quad -6, 4 \quad 2) \quad -5, 3 \quad 3) \quad -4, 2 \quad 4) \quad -2, 0$$

۳) اگر مرکز دایره  $x^2 + y^2 = 1$  کانون یک سهمی قائم رو به بالا باشد و دایره در رأس سهمی به آن مماس باشد معادله سهمی کدام است؟

$$1) \quad x^2 = 4(y - 1) \quad 2) \quad x^2 = 4y \quad 3) \quad (x - 1)^2 = 4y \quad 4) \quad (x + 1)^2 = 4y$$

مثال) سهمی به مختصات رأس  $(۴, ۱)$  و مختصات کانون  $(۴, ۰)$ ، محور  $x$  ها را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع می کند، طول پاره خط  $AB$  کدام است؟

- ۱ (۴)      ۲ (۳)      ۳ (۲)      ۴ (۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. نوع سهمی قائم و تقعر آن رو به پایین است.

$$a = y_F - y_S = 0 - 1 = -1 \Rightarrow (x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \Rightarrow (x - 4)^2 = 4(-1)(y - 1) \Rightarrow$$

$$x^2 - 8x + 4y + 12 = 0 \xrightarrow{y=0} (x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ یا } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A(6, 0) \text{ یا } B(2, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 0)^2} = 4 \quad (|x_2 - x_1| = |6 - 2| = 4 \text{ ویا})$$

مثال: مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس  $A(4, 6)$  و خط هادی  $x = 9$  بنویسید.

حل: با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

۱)  $a = 5$  چرا؟

۲) کانون آن به مختصات  $F(-1, 6)$  است، چرا؟

۳) دهانه سهمی رو به چپ است، چرا؟



لذا معادله آن به صورت است  $(y - k)^2 = -4a(x - h)$  و خواهیم داشت:  $(y - 6)^2 = -20(x - 4)$  (ص ۵۴ کتاب جدید)

مثال) سهمی که رأس آن  $(1, 1)$  و خط هادی  $y = 5$  است. محور  $x$  ها را در دو نقطه قطع می کند فاصله این دو نقطه کدام است؟

- ۱)  $2\sqrt{2}$       ۲)  $4\sqrt{2}$       ۳)  $8\sqrt{2}$       ۴)  $\sqrt{2}$       (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۰)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: طبق تعریف، سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت

(کانون سهمی)، برابر با فاصله آن ها از یک خط ثابت (خط هادی سهمی) باشد، پس:  $\beta < 1$  و  $F(1, \beta)$  و  $S(1, 1)$

$$M(x, y) \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = ML \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - \beta)^2} = |y - 5| \xrightarrow{(1, 1)} 1 - \beta = \pm 4$$

$$\Rightarrow \beta = 5 \text{ و } \beta = -3 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 3)^2} = |y - 5| \Rightarrow (x - 1)^2 = -16(y - 1)$$

$$\xrightarrow{y=0} x - 1 = \pm 4 \Rightarrow A(-3, 0) \text{ و } B(5, 0) \Rightarrow AB = |x_2 - x_1| = |5 - (-3)| = 8$$

روش دوم:  $S(\alpha = 1, \beta = 1), y = 5 \Rightarrow \beta - a = 5 \Rightarrow 1 - a = 5 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4(-4)(y - 1)$

بنابراین هر ۴ گزینه غلط است.  $\xrightarrow{y=0} x - 1 = \pm 4 \Rightarrow A(-3, 0) \text{ و } B(5, 0) \Rightarrow AB = |x_2 - x_1| = |5 - (-3)| = 8$

مثال) مختصات کانون سهمی به معادله  $y^2 - 4y + 4x = 0$  کدام است؟

- ۱)  $(۱, ۵)$       ۲)  $(۱, ۳)$       ۳)  $(۰, ۲)$       ۴)  $(۰, ۴)$       (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. رأس سهمی افقی  $S(\alpha = 1, \beta = 2)$   $y^2 - 4y + 4x = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = -4(x - 1) \Rightarrow$

$$4a = -4 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow F(\alpha + a, \beta) = (0, 2)$$

۴) مختصات رأس سهمی که کانون آن  $F(3, 5)$  و معادله خط هادی آن  $x = -3$  باشد، کدام است؟

- ۱)  $(-3, 3)$       ۲)  $(-3, 5)$       ۳)  $(0, 5)$       ۴)  $(3, 0)$       (کنکور سراسری تجربی ۸۰)

مثال) تمام دایره های به مرکز  $M(x, y)$  واقع بر سهمی به معادله  $y^2 + 8y - 8x = 0$  گذرنده بر کانون آن، بر کدام خط ثابت همواره مماس هستند؟

$$(1) \quad y = -6 \quad (2) \quad y = -2 \quad (3) \quad x = -4 \quad (4) \quad x = 0$$

جواب: گزینه ۳ درست است. چون مکان هندسی مرکز دایره هایی که از نقطه ی ثابت  $F$  غیر واقع بر خط  $\delta$  گذشته و بر خط  $\delta$

مماس باشد یک سهمی است پس باید معادله ی خط هادی سهمی را به دست آوریم.

$$\Rightarrow y^2 + 8y + 16 - 8(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (y + 4)^2 = 8(x + 2) \Rightarrow S(\alpha = -2, \beta = -4) \text{ و } 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x = \alpha - a = -2 - 2 = -4$$

(۵) سهمی با کانون  $F(2, 3)$  و خط هادی به معادله  $x = -4$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول، قطع می کند؟

$$(1) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{4} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (\text{کنکور سراسری تجربی ۹۶ خارج از کشور})$$

مثال) سهمی با کانون  $F(1, 1)$  و خط هادی به معادله  $x = 3$ ، محور  $y$  ها را در دو نقطه ی  $A$  و  $B$  قطع می کند، طول پاره خط  $AB$ ، چه قدر است؟

$$(1) \quad 2\sqrt{2} \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 4\sqrt{2} \quad (4) \quad 5 \quad (\text{کنکور سراسری ریاضی ۸۳})$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است. چون معادله ی خط هادی  $x = 3$  است پس سهمی افقی می باشد.

روش اول: طبق تعریف، سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله ی آنها از یک نقطه ی ثابت (کانون سهمی)، برابر با فاصله ی آنها از یک خط ثابت (خط هادی سهمی) باشد، پس:

$$M(x, y) \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = ML \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = |x-3| \Rightarrow (y-1)^2 = -4(x-2)$$

$$\xrightarrow{x=0} (y-1)^2 = 8 \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow A(0, 1 - 2\sqrt{2}) \text{ و } B(0, 1 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow AB = \sqrt{0 + 32} = 4\sqrt{2}$$

روش دوم: رأس سهمی وسط فاصله ی کانون از خط هادی سهمی است پس:  $S(\alpha = 2, \beta = 1)$  از طرفی کانون سمت چپ خط

$$\text{هادی واقع است پس سهمی افقی و } a < 0 \text{ است. } |2a| = FH = 4 \Rightarrow a = -1$$

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 1)^2 = -4(x - 2) \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$\xrightarrow{x=0} (y - 1)^2 = 8 \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow A(0, 1 - 2\sqrt{2}) \text{ و } B(0, 1 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow AB = \sqrt{0 + 32} = 4\sqrt{2}$$

$$a = \frac{x_F - x_L}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \text{ و } S\left(\frac{x_F + x_L}{2}, y_F\right) = \left(\frac{1 + 3}{2}, 1\right) = (2, 1) \quad \text{روش سوم:}$$

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 1)^2 = -4(x - 2) \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$\xrightarrow{x=0} (y - 1)^2 = 8 \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow A(0, 1 - 2\sqrt{2}) \text{ و } B(0, 1 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow AB = \sqrt{0 + 32} = 4\sqrt{2}$$

$$F \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \text{ و } x = \alpha - a = 3 \text{ و } \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \alpha - a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow (y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow \text{روش چهارم:}$$

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 1)^2 = -4(x - 2) \quad \text{و در نتیجه:}$$

$$\xrightarrow{x=0} (y - 1)^2 = 8 \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow A(0, 1 - 2\sqrt{2}) \text{ و } B(0, 1 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow AB = \sqrt{0 + 32} = 4\sqrt{2}$$

نکته : فاصله‌ی کانون سهمی از خط هادی آن برابر است با :  $|2a|$

مثال) دهانه سهمی به معادله  $y^2 + a(x - y) = 0$  رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات رأس این سهمی کدام است؟

- (۱)  $(-۱, -۲)$  (۲)  $(۰, -۲)$  (۳)  $(۰, -۱)$  (۴)  $(۱, ۲)$

جواب: گزینه ۱ درست. روش اول: فاصله کانون تا خط هادی آن را  $2A$  می‌نامیم.  $y^2 + 4y - 4x = 0 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y^2 + 4y - 4x = 0$   
 $f'_y = 0 \Rightarrow 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$  و  $4 - 8 - 4x = 0 \Rightarrow x = -1$  و  $S(-1, -2)$

روش دوم:  $2A = 2 \Rightarrow A = 1$  و  $(y - \frac{a}{2})^2 = -a(x - \frac{a}{2}) \Rightarrow a = -4$  و  $S(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}) = (-1, -2)$

۶) دهانه سهمی به معادله  $y^2 + a(x - y) = 0$  رو به راست باز می‌شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات کانون این سهمی کدام است؟

- (۱)  $(-۱, -۲)$  (۲)  $(۰, -۲)$  (۳)  $(۰, -۱)$  (۴)  $(۱, ۲)$  (کنکور سراسری تجربی ۸۲)

۷) فاصله کانون از خط هادی سهمی  $(x + 1)^2 = y + x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۶)

مثال) محور تقارن یک سهمی با رأس  $(-1, 3)$  موازی محور  $x$  ها است. اگر این سهمی از نقطه‌ی  $(5, 9)$  بگذرد، فاصله‌ی کانون تا خط هادی آن، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲) ۳ (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴) ۴ (کنکور سراسری تجربی ۹۶)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. چون طول رأس سهمی از طول نقطه روی سهمی کوچکتر و محور تقارن سهمی موازی محور طول هاست پس سهمی افقی و دهانه آن به راست باز می‌شود.

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 3)^2 = 4a(x + 1) \xrightarrow{(5, 9)} (9 - 3)^2 = 4a(5 + 1) \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow |2a| = 3$$

مثال) خط به معادله‌ی  $y = 1$  محور تقارن و خط  $x = 2$  خط هادی در یک سهمی اند. اگر این سهمی از نقطه‌ی  $(3, 2)$  بگذرد، فاصله‌ی کانون تا خط هادی آن کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{5}{4}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲ (کنکور سراسری تجربی ۸۳)

جواب: گزینه ۱ صحیح است. خط  $y = 1$  محور تقارن (کانونی) و سهمی از نقطه‌ی  $M(3, 2)$  در سمت راست خط هادی می‌گذرد. پس سهمی افقی و دهانه‌ی آن به راست باز می‌شود یعنی  $a > 0$  است.

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 1) = 4a(x - \alpha) \xrightarrow{M} (2 - 1)^2 = 4a(3 - \alpha) \Rightarrow 1 = 4a(3 - \alpha) \quad (1)$$

$$x = \alpha - a = 2 \Rightarrow \alpha = a + 2 \xrightarrow{(1)} 1 = 4a(3 - a - 2) \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow |2a| = 1$$

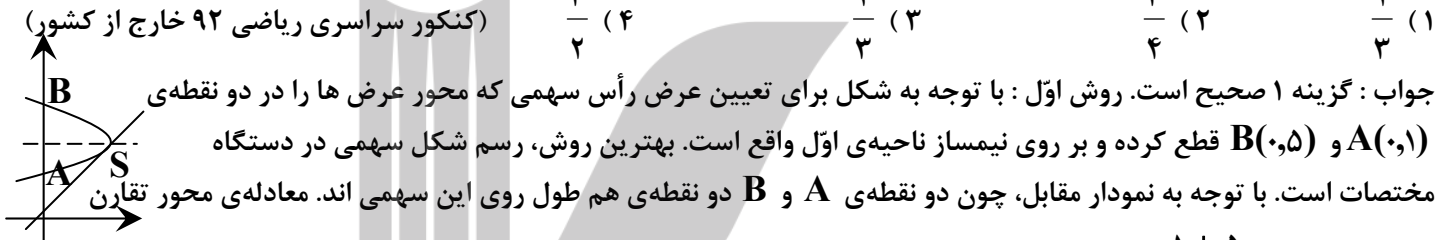


۸) فاصله‌ی کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور  $y$  ها را در دو نقطه به عرض های ۱ و ۵- قطع می کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{4}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{5}{2}$  (کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

مثال) یک سهمی محور که محور تقارن آن موازی محورهای مختصات است، محور  $y$  ها را در دو نقطه‌ی به عرض های ۱ و ۵ قطع می کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$  (کنکور سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)



سهمی برابر  $y = \frac{1+5}{2} = 3$  می باشد. در نتیجه مختصات رأس سهمی  $S(3,3)$  است و با توجه به معادله‌ی سهمی افقی داریم:

$$(y - 3)^2 = 4a(x - 3) \Rightarrow (5 - 3)^2 = 4a(0 - 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow |2a| = \frac{2}{3}$$

(فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی)

روش دوم: رأس سهمی بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول واقع است پس  $\alpha > 0$  و  $S(\alpha, \alpha)$  با توجه به معادله‌ی سهمی افقی داریم:

$$(y - \alpha)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow \begin{cases} A(0,1) \Rightarrow (1 - \alpha)^2 = 4a(0 - \alpha) \\ B(0,5) \Rightarrow (5 - \alpha)^2 = 4a(0 - \alpha) \end{cases} \Rightarrow (1 - \alpha)^2 = (5 - \alpha)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 - \alpha = 5 - \alpha \Rightarrow 1 = 5 \otimes \\ 1 - \alpha = \alpha - 5 \Rightarrow \alpha = 3 \end{cases} \Rightarrow (1 - 3)^2 = 4a(0 - 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow |2a| = \frac{2}{3}$$

(فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی)

۹) معادله‌ی دایره‌ی ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله‌ی  $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 2$  و مماس بر خط هادی این سهمی باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 9 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0 \quad (3)$$

(کنکور سراسری ریاضی ۸۴ خارج از کشور)

مثال: معادله یک سهمی به صورت  $y = x^2 + 3x + 5$  داده شده است. آن را به یکی از حالت های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

حل: داریم:  $y = x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = y - 5 + \frac{9}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y - \frac{11}{4}$

لذا معادله ی یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$  و  $4a = 1$  و در نتیجه  $a = \frac{1}{4}$  است.

بنابراین  $F = (h, a + k) = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$  کانون آن و خط هادی آن به معادله  $y = -a + k = \frac{5}{2}$  است.

معادله محور سهمی به صورت  $x = h = -\frac{3}{2}$  است.

**نکته:** معادله ی گسترده (کلی) سهمی:  $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$  و  $Ay^2 + Bx + Cx + D = 0$

با شرط  $AC \neq 0$  معادله ی یک سهمی می باشد که به آن معادله ی گسترده ی (کلی) سهمی می گویند. برای استاندارد کردن معادله ی

یک سهمی: مراحل زیر را انجام می دهیم: (۱) دسته بندی و فاکتورگیری از ضریب متغیر درجه ۲ (۲) تبدیل به مربع کامل

**نکته:** اگر در معادله سهمی مشتق جزئی نسبت به متغیر درجه دوم بگیریم معادله ی محور تقارن سهمی حاصل می شود.

**نکته:** سهمی با هر کدام از اطلاعات زیر مشخص می شود:

الف: معلوم بودن حداقل دو تا از سه مورد کانون و رأس و خط هادی. ب: معلوم بودن سه نقطه ی متمایز روی سهمی

**نکته:** روش سریعتر برای تعیین رأس و پارامتر سهمی: وقتی معادله به صورت ضمنی باشد،  $a$  پارامتر سهمی برابر

منهای ضریب جمله ای که معادله نسبت به آن درجه ی اول است تقسیم بر چهار برابر ضریب جمله ی درجه ی دوم است. به عبارت

دیگر در سهمی های  $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$  و  $Ay^2 + Bx + Cx + D = 0$  داریم:  $a = -\frac{C}{4A}$  یا  $4a = -\frac{C}{A}$

همچنین برای پیدا کردن رأس، نسبت به متغیری که از درجه ی دوم است مشتق گرفته مساوی صفر قرار می دهیم طول یا عرض

رأس سهمی مشخص می شود، سپس آن را در معادله ی سهمی قرار می دهیم عرض یا طول رأس نیز به دست می آید.

مثال: در سهمی  $2x^2 - 8x + 4y - 7 = 0$  داریم:

$$f'_x = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 4y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{4} \Rightarrow S\left(2, \frac{15}{4}\right) \text{ و } a = \frac{-4}{4 \times 2} = \frac{-1}{2}$$

مثال) نمودار منحنی  $x^2 + y^2 = (x+1)^2 + (2y+1)^2$  چه شکلی است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) سهمی (کنکور آزاد تجربی ۹۰) جواب: گزینه ۴ صحیح است.

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 \Rightarrow 3y^2 + 4y + 2x + 2 = 0 \Rightarrow$$

مثال) مکان هندسی نقطه  $M(\sin^2 \alpha, \cos \alpha - 1)$ ، کدام مقطع مخروطی است؟

- (۱) بیضی (۲) دایره (۳) سهمی (۴) هذلولی (کنکور سراسری ریاضی ۶۵)

جواب: گزینه ۳ درست است.  $x = \sin^2 \alpha$  و  $y = \cos \alpha - 1 \Rightarrow (y+1)^2 = \cos^2 \alpha \Rightarrow x + (y+1)^2 = 1$

(۱۰) نقطه ی  $S(2, 1)$  رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور  $y$  ها است. و از نقطه ی  $(0, 5)$  می گذرد. معادله ی خط هادی آن، کدام است؟

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)  $y = \frac{3}{2}$  (۴)  $y = \frac{3}{4}$  (۳)  $y = \frac{1}{2}$  (۲)  $y = \frac{1}{4}$  (۱)

(۱۱) در سهمی به معادله  $3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0$ ، معادله خط هادی، کدام است؟

(کنکور سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)  $y = -\frac{1}{3}$  (۴)  $y = -\frac{2}{3}$  (۳)  $y = -\frac{4}{3}$  (۲)  $y = -\frac{5}{3}$  (۱)

(مثال) به ازای کدام مقادیر  $a$ ، خط هادی سهمی  $2y^2 - 12y + ax + 8 = 0$ ، به معادله  $x = \frac{21}{8}$  است؟

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)  $5$  و  $16$  (۴)  $5$  و  $12$  (۳)  $3$  و  $16$  (۲)  $3$  و  $12$  (۱)

جواب: گزینه ۴ صحیح است. روش اول:  $\Rightarrow 2(y^2 - 6y + 9 - 9) = -ax - 8 \Rightarrow (y - 3)^2 = -\frac{a}{2}(x - \frac{10}{a})$

$\Rightarrow \alpha = \frac{10}{a}$  و  $4a' = -\frac{a}{2} \Rightarrow a' = -\frac{a}{4} \Rightarrow x = \alpha - a' \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{10}{a} + \frac{a}{4} \Rightarrow a^2 - 21a + 80 = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 5)(\alpha - 16) = 0 \Rightarrow \alpha = 5$  یا  $\alpha = 16$

$a' = -\frac{C}{4A} = -\frac{-a}{4(2)} = \frac{a}{8}$  و  $f'_y = 4y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3$

روش دوم:

$2 \times 9 - 36 + ax + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{a} = \alpha \Rightarrow x = \alpha - a' \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{10}{a} + \frac{a}{4}$

$a^2 - 21a + 80 = 0 \Rightarrow (\alpha - 5)(\alpha - 16) = 0 \Rightarrow \alpha = 5$  یا  $\alpha = 16$

(۱۲) اگر خط به معادله  $x = -1$  خط هادی سهمی  $2y^2 - 4y = ax$  باشد، فاصله نقطه  $A(3, 4)$  از کانون سهمی کدام است؟

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)  $6$  (۴)  $5$  (۳)  $2\sqrt{6}$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۱)

مثال) به ازای کدام مقدار  $a$  کانون سهمی به معادله  $2y^2 + ay - 3x = 0$  بر روی محور  $y$  ها است؟  
 (۱)  $\pm 2$  (۲)  $\pm 3$  (۳)  $\pm 4$  (۴)  $\pm 6$  (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. روش اول: چون  $y$  از درجه ۲ و کانون آن بر روی محور  $y$  ها است در نتیجه سهمی افقی و

$$2y^2 + ay - 3x = 0 \Rightarrow y^2 + \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{16} = \frac{3}{2}x + \frac{a^2}{16}$$

$F(\alpha + A, \beta) = (\alpha, \beta)$  کانون آن می باشد.

$$\Rightarrow (y + \frac{a}{4})^2 = \frac{3}{2}(x + \frac{a^2}{24}) \Rightarrow \alpha = -\frac{a^2}{24} \text{ و } 4A = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{8}$$

$$\alpha + A = 0 \Rightarrow -\frac{a^2}{24} + \frac{3}{8} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

روش دوم:  $f'_y = 0 \Rightarrow 4y + a = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{4} \Rightarrow 2(-\frac{a}{4})^2 + a(-\frac{a}{4}) - 3x = 0 \Rightarrow 3x = -\frac{a^2}{8} \Rightarrow x = -\frac{a^2}{24}$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{a^2}{24} \text{ و } A = -\frac{C}{4A'} = \frac{3}{8} \text{ و } \alpha + A = 0 \Rightarrow -\frac{a^2}{24} + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

(۱۳) فاصله‌ی رأس سهمی تا خط هادی در سهمی  $y^2 - y + x = -2$  چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{8}$  (کنکور آزاد تجربی ۸۸ یزشکی صبح)

رسم سهمی: (۱) نوشتن صورت استاندارد سهمی

(۲) یافتن مختصات رأس سهمی، مقدار  $a$  (فاصله کانونی)، مختصات  $F$  (کانون) و معادله‌ی خط هادی آن

(۳) رسم خط هادی و محور تقارن سهمی

(۴) در کانون سهمی خطی بر محور تقارن آن عمود می‌کنیم و دو نقطه به فاصله  $|2a|$  از کانون (در دو طرف کانون) روی آن جدا می‌کنیم.

(۵) رسم نمودار با در نظر گرفتن اینکه شاخه‌ی سهمی همواره از رأس می‌گذرد و کانون داخل شاخه‌ی سهمی قرار می‌گیرد و خط هادی شاخه‌ی سهمی را قطع نمی‌کند صورت می‌پذیرد.

مثال: نمودار معادله  $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$  را رسم کنید.

حل: ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم  $(y - 1)^2 = -8(x + 1)$   $y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = -8(x + 1)$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس  $A(h, k) = (-1, 1)$  است که دهانه آن رو به چپ است. داریم:  $-4a = -8 \Rightarrow a = 2$

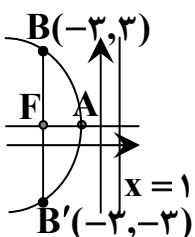
و بنابراین  $F(-a + h, k) = (-3, 1)$  و معادله خط هادی آن به صورت  $x = a + h = 1$  است.

در این صورت نقاط  $B$  و  $B'$  که هم طول با  $F$  و به فاصله  $2a = 4$  از  $F$  باشند

یعنی  $B(-3, 5)$  و  $B'(-3, -3)$  نیز بر سهمی واقع اند.

فاصله هر یک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید حال با وصل کردن نقاط  $B$  و  $A$  و  $B'$  به صورت یک

منحنی و ادامه آن شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید. (ص ۵۵ کتاب جدید)



وتر کانونی: وتر است که از کانون سهمی عمود بر محور سهمی رسم شود و به آن محدود باشد. طول وتر کانونی سهمی برابر  $|4a|$  است.

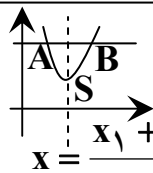
۱۴) وترى از سهمى به معادله  $y^2 = 4(x + y)$  از كانون بر محور آن عمود باشد، قطرى از يك دايره است. معادله اين دايره کدام است؟

$$x^2 + y^2 + 4y = 0 \quad (2) \qquad x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad (1)$$

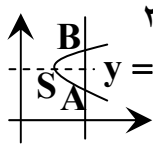
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2 \quad (4) \qquad x^2 + y^2 - 2y = 2 \quad (3)$$

(کنکور سراسرى تجربى ۸۷ خارج از کشور)

نکته: الف: اگر دو نقطه  $A(x_1, \beta)$  و  $B(x_2, \beta)$  (با عرض هاى برابر) روى يك سهمى باشند معادله محور تقارن (میانگین طول ها) به صورت  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  و رأس سهمى  $S(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0, 0)$  و نوع سهمى قائم است.



ب: اگر دو نقطه  $A(\alpha, y_1)$  و  $B(\alpha, y_2)$  (با طول هاى برابر) روى يك سهمى باشند معادله محور تقارن (میانگین عرض ها) به صورت  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$  و رأس سهمى  $S(0, 0, \frac{y_1 + y_2}{2})$  و نوع سهمى افقى است.



مثال) نقاط  $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  و  $B(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$  متعلق به يك سهمى هستند كه خط  $x = -\frac{1}{4}$  خط هادى آن است. مختصات رأس سهمى کدام است؟

(۱)  $(\frac{1}{4}, 0)$  (۲)  $(\frac{1}{4}, 0)$  (۳)  $(0, 0)$  (۴)  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  (کنکور آزاد تجربى ۸۱ پزشکی)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. چون وتر کانونى  $AB$  عمود بر محور کانونى و  $M(\frac{1}{4}, 0)$  وسط  $AB$  است، پس محور کانونى  $y = 0$  در نتیجه رأس سهمى است.

۱۵) يك سهمى محور  $x$  ها را در دو نقطه به طول هاى ۱ و ۵ قطع کرده و خط هادى آن به معادله  $y = -2$  است. عرض رأس اين سهمى کدام است؟

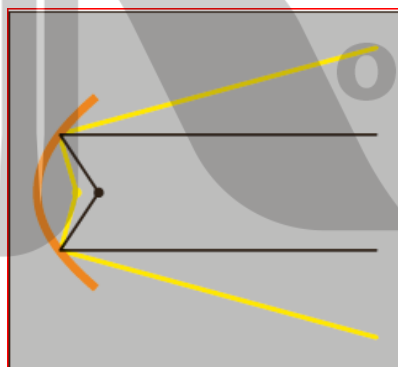
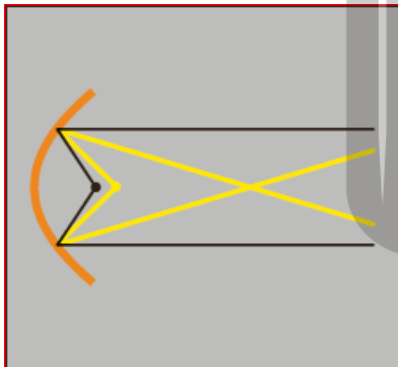
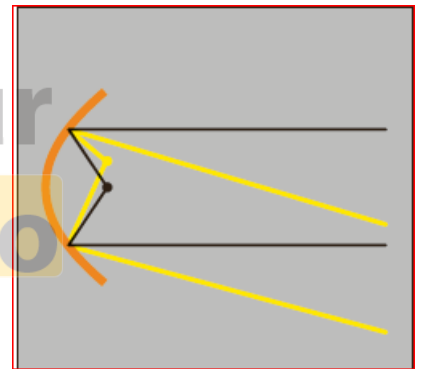
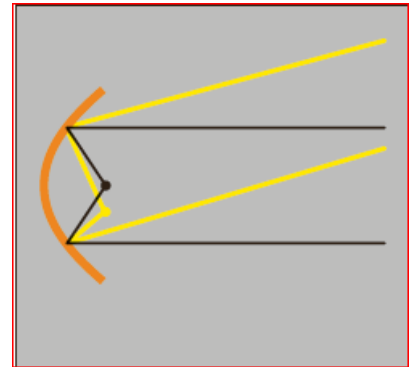
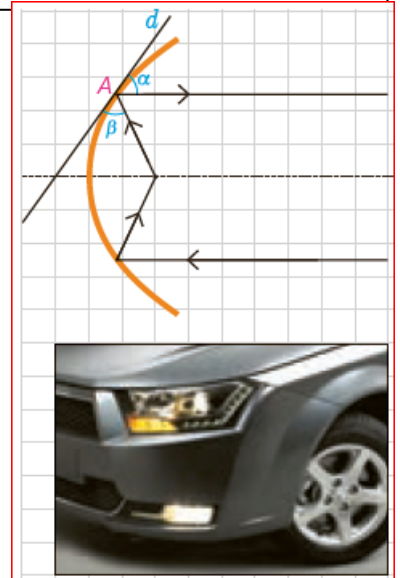
(۱) -1 (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$  (کنکور سراسرى تجربى ۸۴ خارج از کشور)

## ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. در واقع اگر خط  $d$  بر سهمی مماس و نقطه  $A$  نقطه تماس آن باشد زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  برابرند. از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به وجود می‌آورند.

با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.

اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.



۱۶) خط هادی یک سهمی به معادله  $x = \frac{13}{4}$  است. هر پرتوی که از نقطه‌ی  $(-2, -\frac{5}{4})$  بر این سهمی بتابد، در امتداد محور  $x$  ها

باز می‌تابد. این سهمی محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{3}{4}$       (۳)  $\frac{5}{9}$       (۴)  $\frac{5}{4}$       (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۴)

بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**.info**

<https://konkur.info>