

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

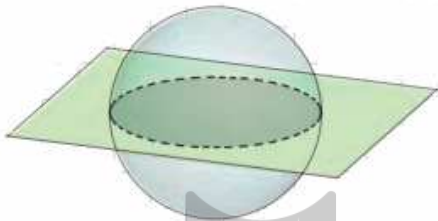
Konkur
.info

<https://konkur.info>

درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

در این فصل ابتدا به معرفی مفهوم مقطع مخروطی پرداخته و در ادامه مکان هندسی را تعریف می کنیم. در انتها کاربردهایی برای مکان هندسی بیان می کنیم.

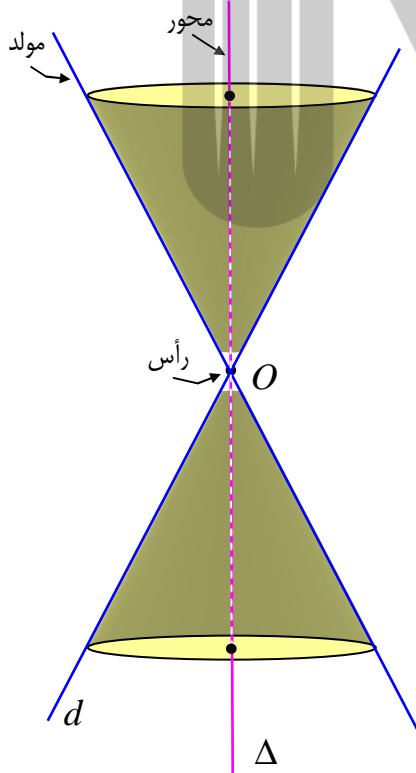
مقاطع مخروطی



در پایه های قبل با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شده اید. بیاد دارید که سطح مقطع حاصل از برش یک صفحه و یک کره، می تواند یک نقطه یا یک دایره است. منظور از فصل مشترک صفحه و کره، مجموعه ی نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند.

تمرین ۱: فصل مشترک یک صفحه و یک کره چیست؟ حالتی را بیان کنید که دایره ی حاصل از فصل مشترک صفحه و کره، بزرگترین دایره ی ممکن باشد.

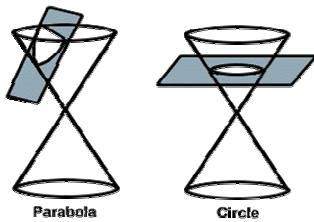
رویه ی مخروطی



فرض کنید که دو خط d و Δ در نقطه ی O مانند شکل مقابل، متقاطع و غیر متعامد باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط Δ را یک **رویه ی مخروطی** (سطح مخروطی) می نامند. در این حالت خط Δ را **محور**، نقطه ی O را رأس و خط d را **مولد** این سطح مخروطی می گویند.

فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی با توجه به حالت های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، یک **مقطع مخروطی** گفته می شود. در ادامه تعدادی از این مقاطع مخروطی را مشاهده می کنید.

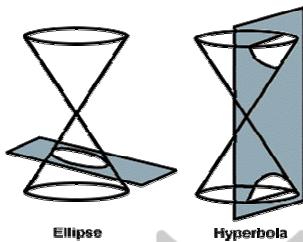
۱: اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس نگذرد، مقطع ایجاد شده یک **دایره** است.



توجه داشته باشید که اگر صفحه، از رأس بگذرد، مقطع مخروطی تنها یک **نقطه** خواهد بود.

۲: اگر صفحه بر محور سطح عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و

صفحه در یک طرف سطح مخروطی قرار گیرد، مقطع ایجاد شده یک **بیضی** است.



۳: اگر صفحه از رأس مخروطی نگذرد و هر دو طرف سطح مخروطی

را قطع نماید، مقطع ایجاد شده یک **هذلولی** است.

۴: اگر صفحه با یکی از مولد های سطح مخروطی موازی بوده و سطح مخروطی را در یک طرف رأس قطع

کند، مقطع ایجاد شده یک **سپهری** است.

در اینجا به طور شهودی با مقاطع مخروطی، آشنا شده اید. در دروس بعدی تعریف دقیقی برای هر یک از مقاطع مخروطی^۱ ارائه خواهیم داد.

تمرین برای حل:

۲: هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، مقطع حاصل چه شکلی است؟

۳: هر دو خط Δ و d موازی باشند. از دوران خط d حول Δ سطحی ایجاد می شود که آن را **سطح**

استوانه ای می نامند. حال فرض کنید، صفحه P ، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های

مختلف درباره ی سطح مقطع حاصل بحث کنید. (توجه داشته باشد که مسئله چهار حالت دارد.)

¹. بررسی هذلولی جزء اهداف کتاب درسی نمی باشد.

مکان هندسی

مکان هندسی به مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا گفته می‌شود که همه‌ی آنها دارای یک ویژگی مشترک

باشند و اگر نقطه‌ای یافت شود که دارای این ویژگی باشد، عضو این مجموعه باشد.

به عبارتی دیگر هر مجموعه از نقاط با ویژگی معین را **مکان هندسی** گویند، هرگاه:

الف: هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است.

ب: هر نقطه‌ی دیگر که این ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه است.

مثال: دایره به شعاع ۵ سانتی متر به مرکز O یک مکان هندسی است. زیرا:

الف: فاصله‌ی هر نقطه‌ی روی دایره تا مرکز دایره برابر ۵ سانتی متر است.

ب: اگر نقطه‌ای پیدا شود که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره برابر ۵ سانتی متر باشد، آن نقطه روی دایره است.

در شکل مقابل واضح است که

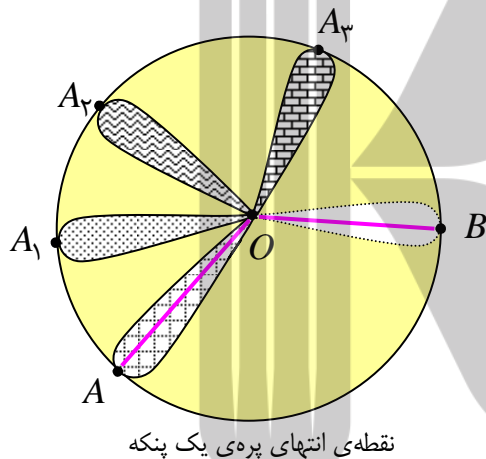
الف: فاصله‌ی هر نقطه مانند A روی دایره تا نقطه‌ی

ثابت O مقداری ثابت و برابر شعاع است.

ب: هر نقطه مانند B که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی ثابت O

همان فاصله را داشته باشد، روی دایره است.

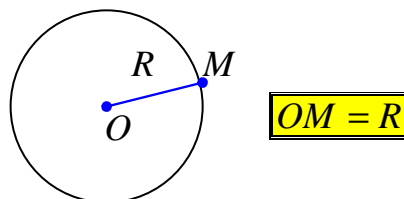
بنابراین دایره‌ی شکل مقابل یک مکان هندسی است.



معرفی چند مکان هندسی مهم

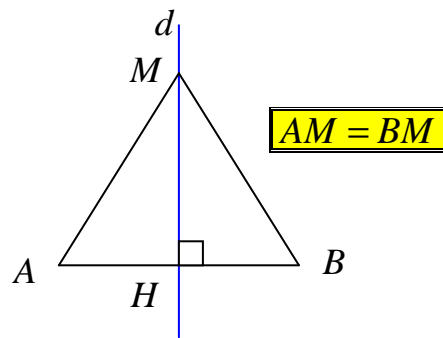
۱: دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت (مرکز) به یک فاصله‌ی ثابت (شعاع)

باشند.



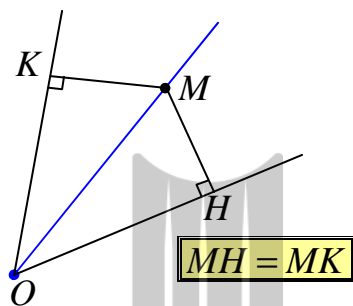
۲: عمود منصف پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه

است که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشند.



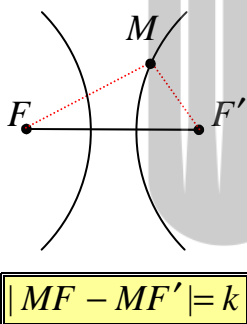
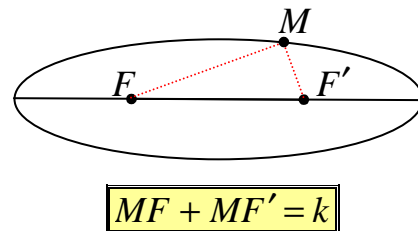
۳: نیمساز زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو

ضلع زاویه به یک فاصله باشند.



۴: بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع

فاصله های آنها از دو نقطه ی ثابت (کانون) به یک اندازه باشد.



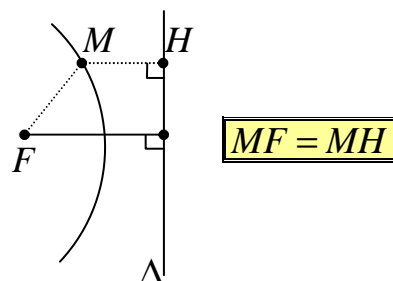
۵: هذلولی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق تفاضل

فاصله های آنها از دو نقطه ی ثابت (کانون) به یک اندازه باشد.

۶: سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک

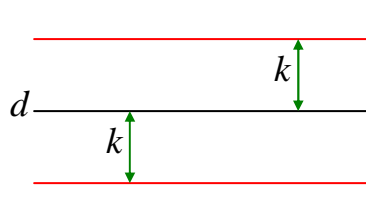
نقطه ی ثابت (کانون) و از یک خط ثابت (خط هادی) به یک

فاصله باشند.



مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه را بنویسید که از خط d به فاصله‌ی ثابت k باشند.

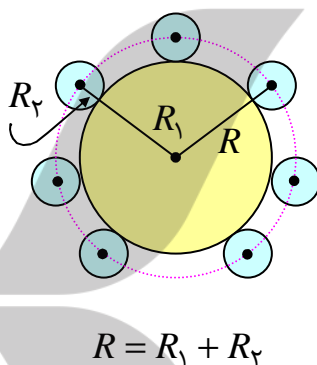
حل: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ثابت k باشند. دو خط موازی d به فاصله‌ی k از آن و در دو طرف آن است.



مثال: در هر مورد مکان هندسی مورد نظر را حدس زده^۲ و در صورت لزوم شکل مربوطه را رسم کنید.

۱: مکان هندسی مرکز های دایره هایی به شعاع مساوی را پیدا کنید که در خارج یک دایره مماس بر آن باشند.

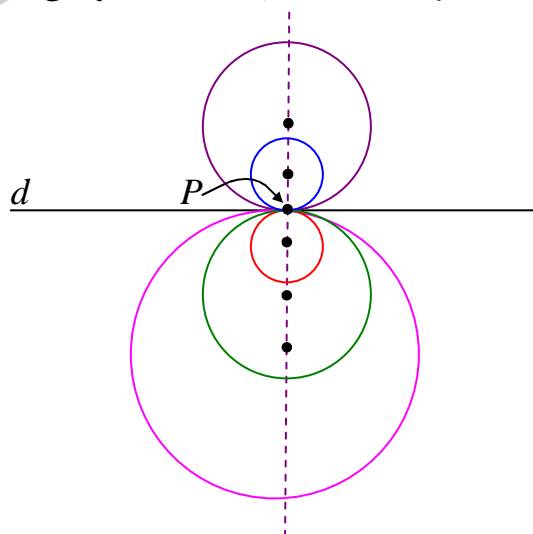
حل: مکان هندسی دایره ای هم مرکز با دایره‌ی ثابت و به شعاع مجموع شعاع های دو دایره است.



۲: مکان هندسی مرکز دایره هایی از صفحه را پیدا کنید که در یک نقطه‌ی مشخص مانند P بر یک خط

داده شده مانند d مماس باشند.

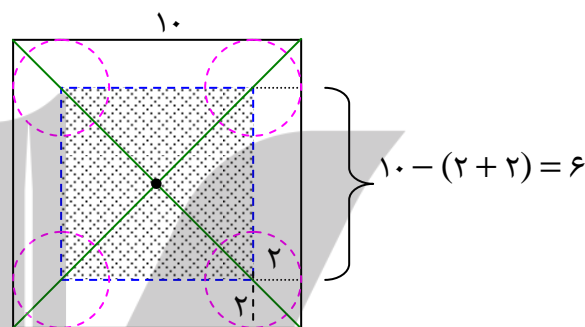
حل: مکان هندسی خطی است که بر خط داده شده در نقطه‌ی P عمود می باشد.



^۲. اثبات لازم نیست.

مثال: سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را بر روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتی متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود.

حل: واضح است که کناری ترین سکه‌هایی که کاملاً درون مربع قرار می‌گیرند، بر اضلاع آن مماس می‌باشند، لذا مکان هندسی مربعی به ضلع $6 = 10 - 2(2)$ سانتی متر به شرط اینکه محل تقاطع قطرهای هر دو مربع (مرکز) منطبق باشند.



تمرین برای حل:

۴: مکان هندسی هر یک از نقاط زیر را مشخص کنید.

الف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع a و b به یک فاصله باشد.

ب: مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۳ سانتی متر از صفحه که فاصله‌ی مرکز هر یک آنها تا خط d برابر ۵ سانتی متر باشند.

ج: مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک نقطه‌ی ثابت P به فاصله‌ی R باشد.

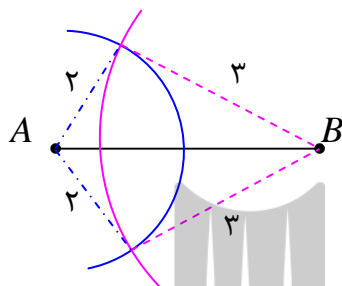
۵: دایره ای طوری رسم شده است که هر ضلع زاویه ای را در دو نقطه قطع کرده است. تعیین کنید که چند

نقطه از دایره وجود دارد که فاصله‌ی هر یک تا دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد. چرا؟

کاربرد مکان هندسی

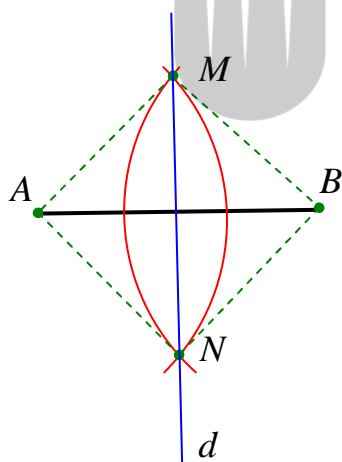
یکی از مهمترین کاربردهای مفهوم مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه یا نقاطی است که دارای ویژگی معینی باشند.

مثال: پاره خط AB به طول ۴ سانتی متر داده شده است. روی صفحه نقطه یا نقاطی را پیدا کنید که از A به فاصله‌ی ۲ و از B به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.



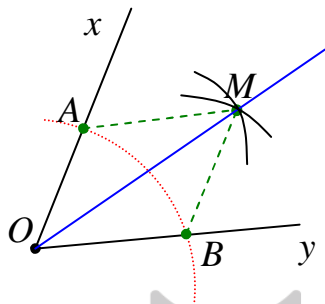
حل: مرکز A کمانی به شعاع ۲ و از B کمانی به شعاع ۳ سانتی متر رسم می کنیم. نقاط واقع روی کمان اول دارای یک ویژگی است و آن هم اینکه فاصله‌ی هر یک تا نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر می باشند. نقاط واقع روی کمان دوم دارای یک ویژگی است و آن هم اینکه فاصله‌ی هر یک تا نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۳ سانتی متر می باشند. نقاط مشترک واقع بر هر دو کمان دارای هر دو ویژگی می باشند و لذا جواب مسئله هستند.

مثال: برای رسم عمود منصف یک پاره خط از این ویژگی استفاده می کنیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است و برعکس. لذا برای رسم عمود منصف پاره خط AB به شکل زیر عمل می کنیم.



ابتدا پرگار را به اندازه‌ی باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد، سپس از دو سر پاره خط AB دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند. چون دو نقطه‌ی M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند. پس روی عمود منصف AB قرار دارند. و چون از هر دو نقطه‌ی متمایز فقط یک خط راست می گذرد، لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی d عمود منصف AB است.

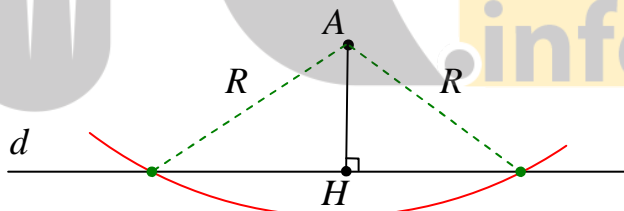
مثال: برای رسم نیمساز زاویه از این ویژگی استفاده می کنیم که هر نقطه روی نیمساز یک پاره خط از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و برعکس. لذا برای رسم نیمساز زاویه xOy به شکل زیر عمل می کنیم.



از رأس زاویه xOy یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. اکنون از نقاط A و B دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند. چون دو مثلث OAM و OBM به حالت (ض ض ض) همبزهت هستند. لذا $\angle AOM = \angle BOM$ یعنی OM نیمساز زاویه xOy می باشد و جواب مسئله است.

مثال: خط d و نقطه A غیر واقع بر آن داده شده اند. نقطه ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه A به یک فاصله R باشد. با توجه به اندازه R روی تعداد جواب مسئله بحث کنید.

حل: به مرکز A کمانی به شعاع R رسم می کنیم. نقاط برخورد این کمان و خط d جواب مسئله است.



اگر فاصله A تا خط d برابر AH باشد. در این صورت

الف: اگر $AH < R$ مسئله دو جواب دارد. **ب:** اگر $AH = R$ مسئله یک جواب دارد.

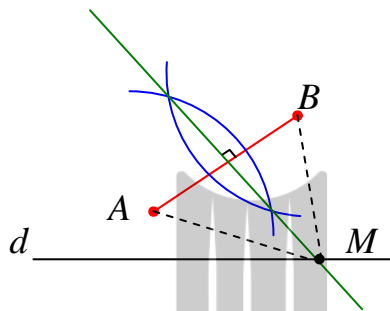
ج: اگر $AH > R$ مسئله جواب ندارد.

توجه: اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشند. در این صورت مجموعه $S_1 \cap S_2$ نقاط S_1 و S_2 مجموعه $S_1 \cap S_2$ است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای

یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه یا نقاط برخورد آنها را به دست آورد.

مثال: دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست، در یک صفحه واقعند. نقطه‌ی روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید.

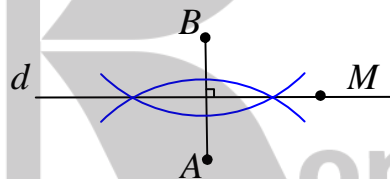
حل: عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این عمود منصف با خط d جواب مسئله است.



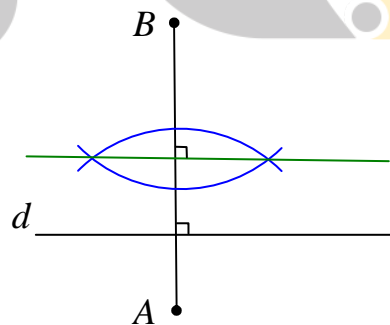
حال حالت‌های زیر وجود دارد.

الف: اگر $AB \perp d$ نباشد. مسئله یک جواب دارد.

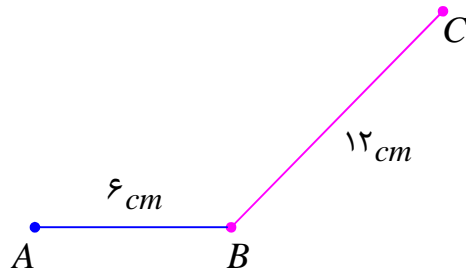
ب: اگر $AB \perp d$ باشد و d از نقطه‌ی وسط AB بگذرد، مسئله بیشمار جواب دارد.



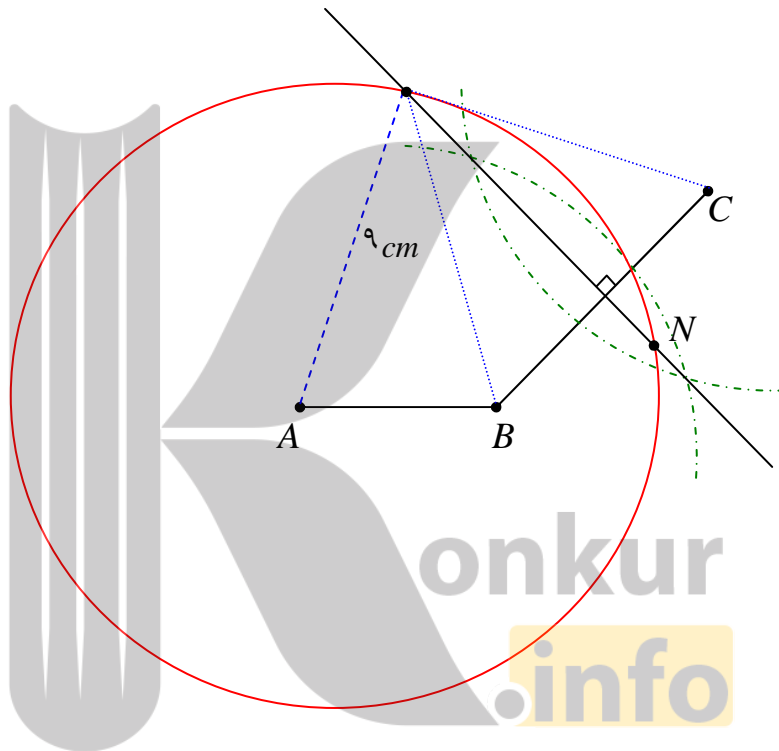
ج: اگر $AB \perp d$ باشد و d از نقطه‌ی وسط AB نگذرد، مسئله جواب ندارد.



مثال: با توجه به شکل زیر نقطه‌ی در صفحه بیابید که از نقاط B و C به یک فاصله بوده و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۹ سانتی متر باشد. (در مورد تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید).



حل: ابتدا عمود منصف پاره خط BC را رسم کرده و سپس به مرکز نقطه‌ی A دایره‌ای به شعاع ۹ سانتی متر ترسیم می‌کنیم. محل برخورد عمود منصف پاره خط BC با دایره جواب مسئله است.



در صورتی که اندازه‌های داده شده در این مسئله متغیر باشند. یکی از حالت‌های زیر ممکن است پیش بیاید.

اگر دایره، عمود منصف پاره خط BC را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد.

اگر دایره بر عمود منصف پاره خط BC مماس باشد، مسئله یک جواب دارد.

اگر دایره، عمود منصف پاره خط BC را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

تمرین برای حل :

۶: دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست، در صفحه داده شده اند. نقطه‌ی A را پیدا کنید که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشند.

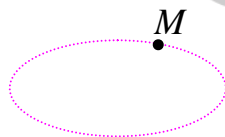
۷: چهار نقطه‌ی A و B و C و D روی صفحه داده شده اند. نقطه‌ی A را پیدا کنید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و از دو نقطه‌ی C و D نیز به یک فاصله باشند. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ روی حالت‌های مختلف پاره خط‌های AB و CD بحث کنید.

۸: نقاط A و B و C روی صفحه داده شده اند. نقطه‌ی A را پیدا کنید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و از نقطه‌ی C به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ روی حالت‌های مختلف آن بحث کنید.

۹: نقطه‌ی A و خط d در صفحه داده شده اند. نقطه‌ی A را پیدا کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ روی حالت‌های مختلف آن بحث کنید.

بررسی تحلیلی مکان هندسی

هرگاه مختصات نقطه‌ی A به یک پارامتر بستگی داشته باشد، با تغییر این پارامتر، جای نقطه در صفحه تغییر می‌کند و بدین شکل مجموعه‌ی آن نقاط در صفحه، بدست می‌آید. اگر این نقاط را در صفحه مختصات، مشخص کنیم، شکل حاصل را **مکان هندسی** آن نقطه می‌نامند.



به طور کلی می‌توان مکان هندسی را به صورت زیر تعریف کرد.

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که دارای خاصیت یکسانی باشند.

نتیجه: دایره، بیضی، هذلولی و سهمی نمونه‌هایی از مکان هندسی در صفحه هستند.

معادله‌ی مکان هندسی

منظور از معادله‌ی مکان هندسی یک نقطه، رابطه‌ی A بین طول و عرض آن نقطه است که به پارامتر بستگی نداشته باشد.

مثال: مکان هندسی نقطه‌ی $A(m+1, 2m-5)$ وقتی که m تغییر می‌کند را بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} x = m + 1 \rightarrow m = x - 1 \\ y = 2m - 5 \rightarrow m = \frac{y + 5}{2} \rightarrow \frac{y + 5}{2} = x - 1 \rightarrow y = 2x - 7 \end{cases}$$

لذا مکان هندسی ، یک خط راست است.

مثال : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $B(1 + \sin \alpha, 2 + \cos \alpha)$ وقتی که α تغییر می کند را

بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} x = 1 + \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = x - 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = (x - 1)^2 \\ y = 2 + \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = y - 2 \rightarrow \cos^2 \alpha = (y - 2)^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

مثال : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $C(1 + 4 \sin \theta, -2 + 3 \cos \theta)$ وقتی که θ تغییر می کند را

بنویسید.

حل : کافی است پارامتر را حذف کنیم. برای این کار به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{cases} x = 1 + 4 \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{x - 1}{4} \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{(x - 1)^2}{16} \\ y = -2 + 3 \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{y + 2}{3} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{(y + 2)^2}{9} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{9} \rightarrow \frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

تمرین برای حل :

۱۰ : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $A(m + 1, 2m - 5)$ وقتی که m تغییر می کند را بنویسید.

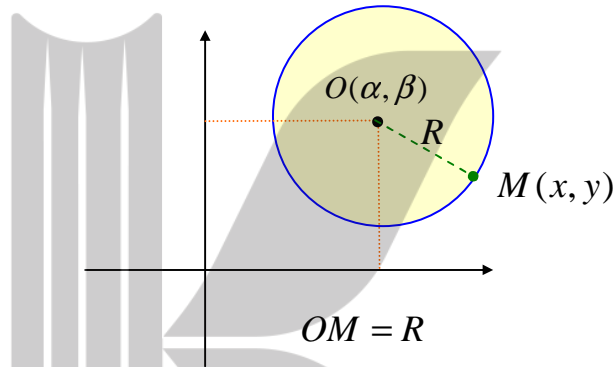
۱۱ : معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ی $B(2 \sin t, 3 \cos t)$ وقتی که t تغییر می کند را بنویسید.

درس دوم : دایره

در این درس معروف ترین مقاطع مخروطی ، یعنی دایره را تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت تحلیلی بررسی می کنیم.

معادله‌ی دایره

دایره مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله‌ی ثابتی باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می گویند.



اگر $M(x, y)$ نقطه‌ی دلخواهی از دایره باشد در این صورت:

$$OM = R \rightarrow OM^2 = R^2$$

$$\rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

که در آن $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز و R اندازه‌ی شعاع دایره است.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad \text{معادله‌ی استاندارد دایره}$$

نتیجه : در حالت خاص اگر مرکز دایره روی مبدأ مختصات باشد، معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد آمد.

$$x^2 + y^2 = R^2$$

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $(3, -2)$ مرکز و اندازه‌ی شعاع آن ۴ باشد.

حل :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = (4)^2$$

$$\rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

مثال: مختصات نقاط برخورد دایره‌ی مثال قبل را محورهای مختصات را به دست آورید.

حل: برای تعیین نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات، کافی است، در معادله‌ی دایره، یک بار مقدار x و یک بار مقدار y را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} x=0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16 \end{cases} \rightarrow (0-3)^2 + (y+2)^2 = 16 \rightarrow (y+2)^2 = 7$$

$$\rightarrow y+2 = \pm\sqrt{7} \rightarrow y = -2 \pm \sqrt{7}$$

پس نقاط برخورد نمودار تابع با محور عرضها به شکل زیر است.

$$A(0, -2 + \sqrt{7}) \text{ و } B(0, -2 - \sqrt{7})$$

$$\begin{cases} y=0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16 \end{cases} \rightarrow (x-3)^2 + (0+2)^2 = 16 \rightarrow (x-3)^2 = 12$$

$$\rightarrow x-3 = \pm 2\sqrt{3} \rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

پس نقاط برخورد نمودار تابع با محور طولها به شکل زیر است.

$$C(3 + 2\sqrt{3}, 0) \text{ و } D(3 - 2\sqrt{3}, 0)$$

توجه:

۱: اگر معادله‌ی بدست آمده از جایگزینی صفر به جای x در معادله‌ی دایره، دارای یک ریشه باشد، دایره بر محور عرضها مماس است و اگر ریشه نداشته باشد، دایره محور عرضها را قطع نمی‌کند.

۲: اگر معادله‌ی بدست آمده از جایگزینی صفر به جای y در معادله‌ی دایره، دارای یک ریشه باشد، دایره بر محور طولها مماس است و اگر ریشه نداشته باشد، دایره محور طولها را قطع نمی‌کند.

تمرین برای حل:

۱: معادله‌ی دایره‌ی $(-1, -2)$ را بنویسید که مرکز و اندازه‌ی شعاع آن ۳ باشد.

۲: در تمرین قبل مختصات نقطه‌ی برخورد نمودار دایره با محورهای مختصات را به دست آورید.

۳: معادله‌ی دایره‌ی $(-1, -2)$ را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات باشد و شعاع آن برابر $\sqrt{3}$ باشد.

۴: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, 0)$ و از نقطه‌ی $(-2, 1)$ بگذرد.

۵: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که مرکز آن $(-2, -1)$ و بر خط $3x - 4y - 3 = 0$ مماس باشد.

۶: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که نقاط $A(-6, 3)$ و $B(2, 5)$ دو سر قطری از آن باشند.

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

معادله‌ی دایره را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

این صورت از معادله‌ی دایره را **معادله‌ی گسترده** یا **معادله‌ی ضمنی** دایره می‌نامند.

توجه داشته باشید که اگر معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ به شکل معلوم باشد. این معادله به

شرطی معادله‌ی دایره است که

الف) ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشند. (یا مساوی باشند).

ب) معادله شامل جمله‌ی xy نباشد.

ج) مقدار $\Delta = a^2 + b^2 - 4c$ مثبت باشد.

با این شرایط معادله‌ی گسترده‌ی دایره به معادله‌ی استاندارد تبدیل می‌شود.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

$$\rightarrow \left(x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

با توجه به معادله‌ی بدست آمده داریم:

مختصات مرکز دایره $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

اندازه‌ی شعاع دایره $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

مثال: معادله‌ی زیر داده شده است.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

الف) نشان دهید که این معادله، معادله‌ی یک دایره است.

ب) مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع آن را بدست آورید. (به دو روش حل کنید).

ج) نمودار دایره را رسم کنید.

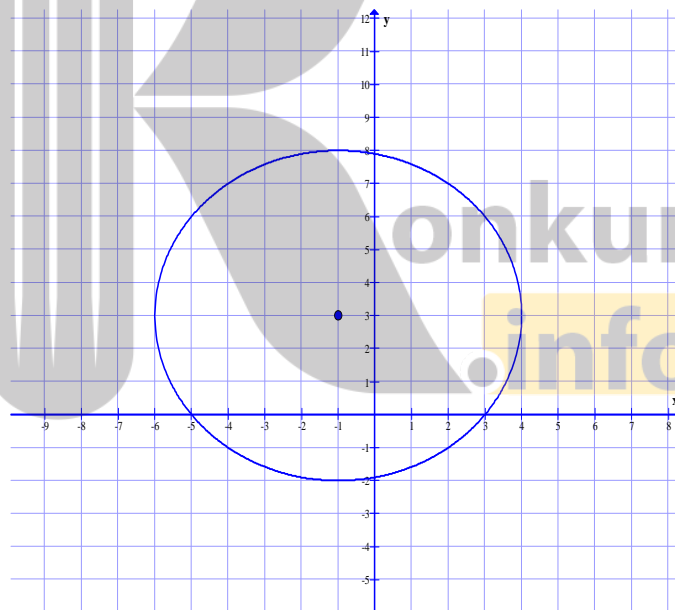
حل:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 15 + 1 + 9 \rightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

و این معادله‌ی یک دایره است و $O(-1, 3)$ مختصات مرکز و $R = \sqrt{25} = 5$ اندازه‌ی شعاع آن است.

برای رسم نمودار دایره کافی است به مرکز $O(-1, 3)$ دایره‌ای به شعاع $R = 5$ را رسم شود.



توجه داشته باشید که می‌توان مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را به کمک فرمول‌های زیر نیز تعیین کرد.

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \rightarrow O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{-6}{2}\right) \rightarrow O(-1, 3)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(2)^2 + (-6)^2 - 4(-15)} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 36 + 60} = 5$$

مثال: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که از نقاط $A(1,0)$ و $B(3,-2)$ و $C(-1,-2)$ بگذرد.

حل: روش اول: فرض می‌کنیم که مختصات مرکز دایره به صورت (α, β) باشد.

در این صورت واضح است که $OA = OB = OC = R$. لذا می‌توان نوشت:

$$OA = OB \rightarrow OA^2 = OB^2 \rightarrow (1 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = (3 - \alpha)^2 + (-2 - \beta)^2$$

$$\rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 9 - 6\alpha + \alpha^2 + 4 + 4\beta + \beta^2 \rightarrow \alpha - \beta = 3 \quad (1)$$

$$OA = OC \rightarrow OA^2 = OC^2 \rightarrow (1 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = (-1 - \alpha)^2 + (-2 - \beta)^2$$

$$\rightarrow 1 - 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 + 4 + 4\beta + \beta^2 \rightarrow \alpha + \beta = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 3 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases} \rightarrow \alpha = 1, \beta = -2$$

با این اطلاعات می‌توان شعاع دایره را نیز به دست آورد.

$$R = OA \rightarrow R = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$$

اکنون معادله‌ی دایره را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

روش دوم: فرض کنیم که معادله‌ی دایره بصورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. پس:

$$A(1,0) \xrightarrow{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} 1 + 0 + a + 0 + c = 0 \rightarrow a + c = -1$$

$$B(3,-2) \xrightarrow{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} 9 + 4 + 3a - 2b + c = 0 \rightarrow 3a - 2b + c = -13$$

$$C(-1,-2) \xrightarrow{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} 1 + 4 - a - 2b + c = 0 \rightarrow -a - 2b + c = -5$$

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = -13 \\ -a - 2b + c = -5 \end{cases} \xrightarrow{a+c=-1} \begin{cases} 3a - 2b + (-1 - a) = -13 \\ -a - 2b + (-1 - a) = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = -6 \\ -a - b = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = -2, b = 4, c = 1$$

لذا:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \quad \text{معادله‌ی دایره}$$

روش سوم: ابتدا معادلات عمود منصف های دو پاره خط AB و BC را تعیین کرده و محل تلاقی آنها را بدست آوریم. بدین ترتیب مختصات مرکز دایره بدست می آید. با تعیین فاصله‌ی مرکز تا هر یک از نقاط داده شده، اندازه‌ی شعاع معلوم می شود. با معلوم بودن مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع به راحتی معادله‌ی دایره را می توان نوشت.

$$B(3, -2) \text{ و } A(1, 0) \xrightarrow{M(2, -1), m = \frac{0+2}{1-3} = -1} y = 1(x - 2) + (-1) \rightarrow y = x - 3$$

$$C(-1, -2) \text{ و } B(3, -2) \xrightarrow{N(1, -2), m = \frac{-2+2}{-1-3} = 0} y = -2$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow O(1, -2) \quad \text{مختصات مرکز}$$

$$OA = \sqrt{(1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{0+4} = 2 \quad \text{اندازه‌ی شعاع}$$

$$(x-1)^2 + (x+2)^2 = (2)^2 \rightarrow (x-1)^2 + (x+2)^2 = 4 \quad \text{معادله‌ی دایره}$$

تمرین برای حل:

۷: مختصات مرکز و طول شعاع دایره ای به معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

۸: کدام یک از روابط زیر معادله‌ی یک دایره است؟

الف) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

ج) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$

۹: با توجه به تمرین قبل مختصات مرکز طول شعاع دایره ها را بدست آورید و سپس نمودار دایره را رسم

کنید.

۱۰: حدود m را طوری به دست آورید که معادله‌ی $x^2 + y^2 - 3x + 5y + m = 0$ بتواند یک دایره باشد.

۱۱: معادله‌ی $x^2 + y^2 + 2x + 2y = k$ در صورتی می‌تواند معادله‌ی یک دایره باشد که:

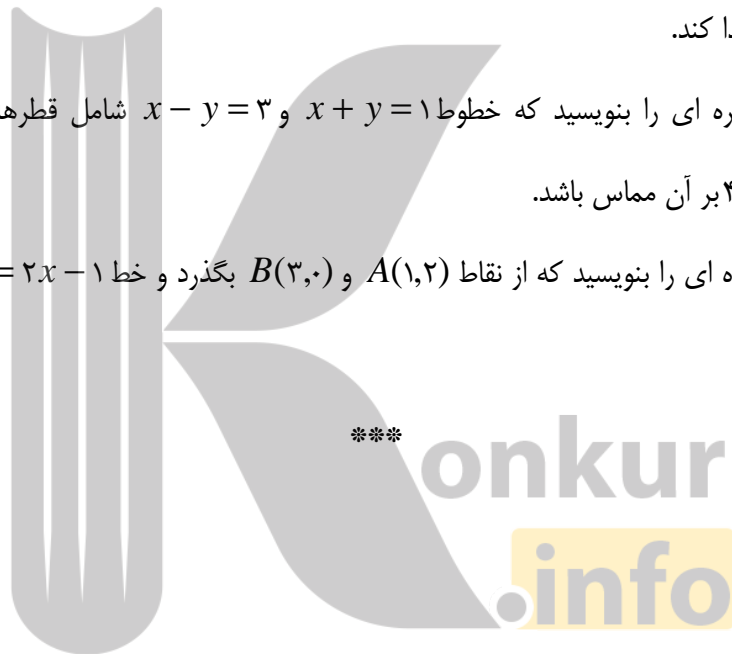
$$k > -2 \quad (1) \quad k = -2 \quad (2) \quad k < -2 \quad (3) \quad k \geq -2 \quad (4)$$

۱۲: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x + y = 2$ وترى به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

۱۳: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x + y = 1$ وترى به طول ۲ جدا کند.

۱۴: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = 6$ بر آن مماس باشد.

۱۵: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و خط $y = 2x - 1$ شامل قطری از آن باشد.

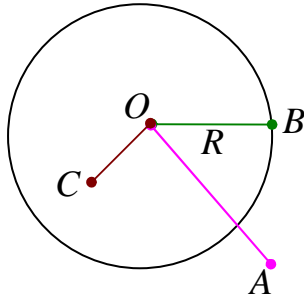


روش تعیین وضعیت یک نقطه و یک دایره

می دانیم که وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره می تواند یکی از حالت های زیر باشد.

الف : نقاط خارج دایره : فاصله ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع

بزرگتر است و برعکس. $(OA > R)$



ب : نقاط روی دایره : فاصله ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است

و برعکس. $(OB = R)$

ج : نقاط داخل دایره : فاصله ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع

کوچکتر است و برعکس. $(OC < R)$

برای تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره، ابتدا مختصات مرکز و اندازه ی شعاع دایره را تعیین نموده و به دنبال آن فاصله این نقطه تا مرکز دایره را بدست آورده و با شعاع دایره مقایسه می کنیم.

تمرین ۱۶ : وضعیت هر یک از نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, -2)$ و $C(2, 3)$ و $D(4, -1)$ را نسبت به دایره ی

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

حل :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} O(1, -2) \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 - 4(-5)} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 20} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} = \sqrt{10} \end{cases}$$

$$AO = \sqrt{(1+1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

و چون $AO < R$ پس نقطه ی A داخل دایره است. سایر نقاط را بررسی کنید.

توجه : اگر معادله ی دایره ای به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معلوم باشد. برای تعیین وضعیت

یک نقطه نسبت به این دایره، می توانید مختصات نقطه را در عبارت $x^2 + y^2 + ax + by + c$ جایگزین کنید. با این اقدام سه حالت پیش می آید.

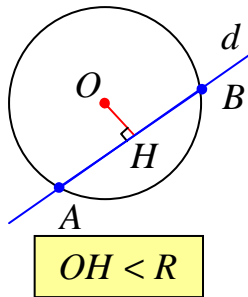
الف : عدد حاصل مثبت شود. این یعنی نقطه بیرون دایره است.

ب : عدد حاصل منفی شود. این یعنی نقطه داخل دایره است.

ج : عدد حاصل صفر شود. این یعنی نقطه روی دایره است.

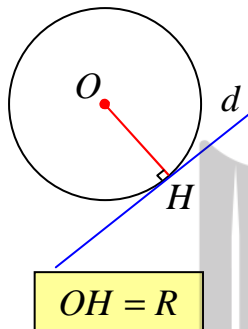
روش تعیین وضع نسبی یک خط و یک دایره

خط و دایره نسبت به هم دارای سه حالت زیر هستند.



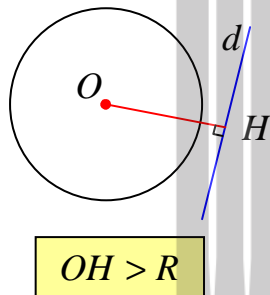
۱. خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند. (مقاطع)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است و برعکس



۲. خط و دایره یک نقطه‌ی مشترک دارند. (مماس)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است و برعکس
نتیجه: شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر آن دایره عمود است.



۳. خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند.

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است و برعکس

برای تعیین وضعیت نسبی یک خط و یک دایره با معادلات معلوم، دو روش وجود دارد.

روش اول: معادله‌ی خط را بر حسب یک متغیر مانند x نوشته و در معادله‌ی دایره جایگزین می‌کنیم.

سپس معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده را حل می‌کنیم. در انتها یا ریشه‌های بدست آمده را در معادله‌ی

خط جایگزین کرده تا مختصات نقاط تقاطع خط و دایره بدست آید.

توجه کنید که تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم تشکیل شده برابر تعداد نقاط تقاطع خط و دایره است.

روش دوم: معادله‌ی دایره را به صورت استاندارد نوشته و مختصات مرکز و طول شعاع آن را تعیین می‌کنیم.

سپس فاصله‌ی مرکز را تا خط داده شده بدست می‌آوریم. با توجه به این فاصله و اندازه‌ی شعاع،

وضعیت خط و دایره مشخص می‌شود.

توجه: اگر $O(\alpha, \beta)$ مختصات مرکز دایره باشد. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط به معادله‌ی

$$ax + by + c = 0 \text{ بدین شکل بدست می آید.}$$

$$d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: وضعیت خط به معادله‌ی $x + y = 4$ و دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0$ را تعیین کنید.

حل:

روش اول:

$$x + y = 4 \rightarrow y = 4 - x$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0 \rightarrow x^2 + (4 - x)^2 - 2x - 3(4 - x) - 3 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + 16 - 8x + x^2 - 2x - 12 + 3x - 3 = 0 \rightarrow 2x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(2)(1) = 41 \rightarrow \text{خط و دایره دو نقطه‌ی برخورد دارند.}$$

روش دوم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} O(1, \frac{3}{2}) \\ R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 - 4(-3)} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $x + y = 4$ را تعیین می کنیم.

$$d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + 1(\frac{3}{2}) - 4|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

و چون $R > d$ پس خط و دایره، دو نقطه‌ی تقاطع دارند.

تمرین برای حل:

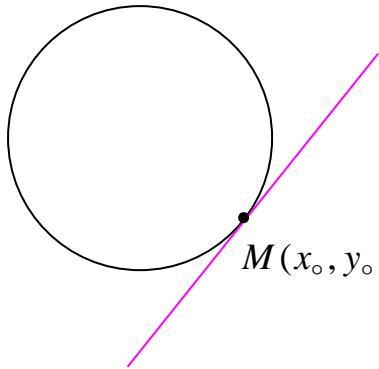
۱۷: وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $3x + 4y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

ب) $x + y = 2$ و $x^2 + y^2 = 2$

ج) $x + y = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

روش تعیین معادله‌ی خط مماس بر دایره از یک نقطه‌ی روی آن



برای تعیین معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

در نقطه‌ی $M(x_0, y_0)$ واقع بر روی دایره از فرمول زیر استفاده

می‌کنیم. بدیهی است که این فرمول از معادله‌ی استاندارد دایره و

شیب شعاع گذرا از نقطه‌ی تماس بدست می‌آید^۱.

$$(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) = R^2$$

مثال: معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی زیر از نقطه‌ی $A(6, 1)$ را بنویسید.

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 9$$

حل: ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 9 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9 + 9 + 16$$

$$\rightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 34$$

مرکز دایره $O(3, -4)$

$$R = \sqrt{34} \text{ اندازه‌ی شعاع دایره}$$

از طرفی چون مختصات نقطه در دایره صدق می‌کند، پس نقطه روی دایره است.

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 34 \xrightarrow{A(6,1)} (6 - 3)^2 + (1 + 4)^2 = 34 \rightarrow 9 + 25 = 34$$

با این وضعیت، معادله‌ی خط مماس را می‌توان به یکی از روش‌های زیر به دست آورد.

روش اول: شیب خط گذرا (قطر) از نقاط A و O (مرکز دایره) را تعیین و عکس و قرینه می‌کنیم تا

شیب خط مماس بدست آید (چرا؟). سپس معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم.

$$m_{AO} = \frac{-4 - 1}{3 - 6} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

معادله‌ی خط مماس

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

^۱ . شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. پس شیب‌های آنها عکس و قرینه‌ی یکدیگرند.

$$y = \left(\frac{-3}{5}\right)(x - 6) + 1 \rightarrow y = \frac{-3}{5}x + \frac{18}{5} + 1 \rightarrow y = \frac{-3}{5}x + \frac{23}{5} \rightarrow 3x + 5y = 23$$

روش دوم: می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد. این فرمول به همان روش قبل قابل اثبات است.

$$(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) = R^2$$

$$\rightarrow (6 - 3)(x - 3) + (1 + 4)(y + 4) = 34$$

$$\rightarrow 3x - 9 + 5y + 20 = 34 \rightarrow 3x + 5y = 23$$

تمرین برای حل:

۱۸: نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(1, 3)$ رئوس مثلث ABC هستند.

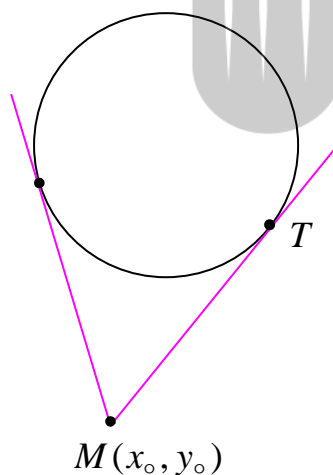
الف: معادله دایره‌ی محیطی مثلث را بنویسید.

ب: معادله‌ی خط مماس بر این دایره را در رأس به دست آورید.

۱۹: از نقطه‌ی $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی

این خط مماس را به دست آورید.

روش تعیین اندازه‌ی پاره خط محصور بین یک نقطه‌ی بیرون دایره و نقطه‌ی تماس



از یک نقطه‌ی بیرون دایره دو خط مماس بر دایره رسم می شود. اندازه‌ی

پاره خط هایی از این دو خط مماس محصور بین این نقطه و نقطه‌ی

تماس با یکدیگر برابر است. این اندازه به شکل زیر بدست می آید.

$$MT = \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2}$$

تمرین ۲۰: اندازه‌ی خط مماسی که از نقطه‌ی $A(2, 3)$ بر دایره به معادله‌ی زیر رسم می شود را بیابید.

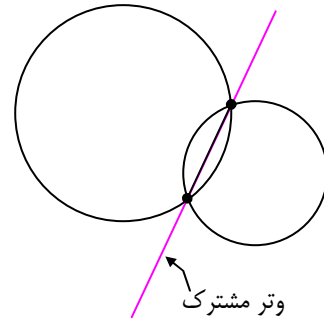
$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

روش تعیین وتر مشترک دو دایره ی متقاطع

وتر مشترک دو دایره خطی است که از محل تقاطع دو دایره بگذرد. برای تعیین معادله‌ی این خط، معادلات دو دایره در حالت گسترده را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم^۲. در این صورت داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{معادله‌ی دایره‌ی اول}$$

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \quad \text{معادله‌ی دایره‌ی دوم}$$



$$\rightarrow (x^2 + y^2 + ax + by + c) - (x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

$$\Rightarrow (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

لذا معادله‌ی وتر مشترک به شکل زیر در خواهد آمد.

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

مثال: معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادلات زیر را بدست آورید.

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y = 14$$

حل:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y = 14 \end{cases} \rightarrow (6 + 4)x + (8 + 6)y = (0 - 14) \rightarrow 10x + 14y = -14$$

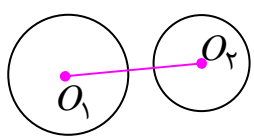
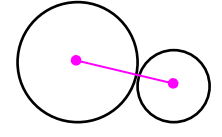
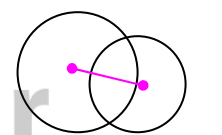
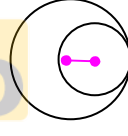
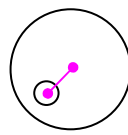
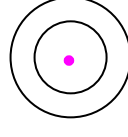
$$\xrightarrow{\div 2} 5x + 7y = -7 \quad \text{معادله‌ی وتر مشترک}$$

^۲. دلیل این کار این است که پس از تشکیل دستگاه و تعیین نقاط تقاطع دو دایره، معادله‌ی خط گذرا از نقاط تقاطع را می‌نویسیم.

روش تعیین وضع دو دایره نسبت به هم

دو دایره نسبت به هم حالت های متفاوتی دارند. برای تعیین وضع نسبی دو دایره، اندازه‌ی شعاع های آنها را با اندازه‌ی خط المکزین مقایسه کنید. خط المکزین پاره خطی است که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند.

اگر دایره‌ی C_1 به مرکز O_1 و شعاع R_1 و دایره‌ی C_2 به مرکز O_2 و شعاع R_2 و طول خط المکزین دو دایره $d = O_1O_2$ باشد. با فرض اینکه $R_1 > R_2$ به کمک جدول زیر می توان حالت های مختلف دو دایره را تعیین کرد.

ردیف	حالت	رابطه	شکل نمونه
۱	دو دایره بیرون یکدیگرند. (متخارج)	$d > R_1 + R_2$	
۲	دو دایره مماس بیرونی اند.	$d = R_1 + R_2$	
۳	دو دایره متقاطع اند.	$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	
۴	دو دایره مماس درونی اند.	$d = R_1 - R_2$	
۵	دو دایره درون یکدیگرند. (متداخل)	$d < R_1 - R_2$	
۶	دو دایره هم مرکزند.	$d = 0$	

مجدداً تأکید می شود که برای تشخیص وضعیت دو دایره، ابتدا مختصات مرکز و شعاع های دو دایره‌ی داده شده را بدست می آوریم. در ادامه طول خط المکزین را تعیین و با مجموع اندازه های دو شعاع مقایسه می کنیم.

مثال: وضع نسبی دو دایره به معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$$

حل: ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع‌های دو دایره را تعیین می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \rightarrow O_1(-3, 1), R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 20} = \sqrt{5}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \rightarrow O_2(1, -2), R_2 = 2$$

اکنون اندازه‌ی خط‌المركزین را بدست آورده و با اندازه‌ی شعاع‌ها (مجموع یا تفاضل) مقایسه می‌کنیم.

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

و چون $R_1 + R_2 < d$ پس دو دایره متخارج هستند.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-1, 1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$$

مماس بیرونی باشد.

حل: ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را تعیین و سپس اندازه‌ی خط‌المركزین را محاسبه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} O_2(1, -1) \\ R_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \text{اندازه‌ی خط‌المركزین}$$

اکنون چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس طول خط‌المركزین برابر مجموع دو شعاع است. یعنی

$$d = R_1 + R_2 \rightarrow 2\sqrt{2} = R_1 + \sqrt{2} \rightarrow R_1 = \sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر به دست می‌آید.

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

تمرین برای حل :

۲۱: در هر مورد وضع نسبی دو دایره به معادلات داده شده را تعیین کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} (x-5)^2 + (y-7)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0 \end{cases}$$

$$\text{پ) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ت) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ث) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0 \end{cases}$$

۲۲: معادله‌ی دایره‌ی ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(0,1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی

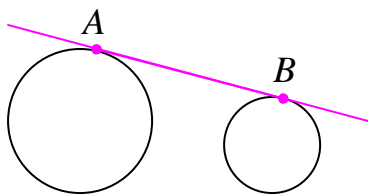
$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$$

مماس داخلی باشد.

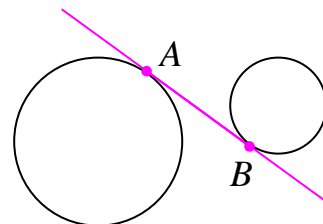
روش تعیین اندازه‌ی مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس است. با توجه به اینکه دایره‌ها در یک طرف یا

هر دو طرف خط قرار دارند. خط مماس مشترک به دو نوع خارجی و داخلی تقسیم می‌شوند.



مماس مشترک خارجی



مماس مشترک داخلی

تعداد مماس‌های مشترک دو دایره با توجه به وضعیت نسبی آنها مطابق جدول زیر است.

وضع نسبی دو دایره	تعداد مماس مشترک خارجی	تعداد مماس مشترک داخلی
متخارج	۲	۲
مماس خارجی	۲	۱
متقاطع	۲	۰
مماس داخلی	۱	۰
متداخل	۰	۰

طول پاره خط محصور بین دو نقطه‌ی تماس به صورت زیر بدست می‌آید.

$$AB = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

مماس مشترک خارجی

$$A'B' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2}$$

مماس مشترک داخلی

مثال: اندازه مماس مشترک داخلی و اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$$

حل: ابتدا وضعیت دو دایره را با تعیین مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع‌ها به دست می‌آوریم.

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \rightarrow O_1(-3, 1), R_1 = \frac{\sqrt{36 + 4 - 20}}{2} = \sqrt{5}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \rightarrow O_2(1, -2), R_2 = 2$$

اکنون اندازه‌ی خط‌المركزین را تعیین کرده و با مجموع اندازه‌های دو شعاع مقایسه می‌کنیم.

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\rightarrow d > R_1 + R_2$$

لذا دو دایره متخارج هستند و دو خط مماس مشترک درونی و دو خط مماس مشترک بیرونی دارند و اندازه‌ی پاره خط‌های مماس مشترک به صورت زیر است.

$$AB = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2} = \sqrt{(5)^2 - (\sqrt{5} - 2)^2}$$

$$= \sqrt{25 - 5 + 4\sqrt{5} - 4} = \sqrt{16 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{4(4 + \sqrt{5})} = 2\sqrt{4 + \sqrt{5}}$$

$$\text{مماس مشترک داخلی } A'B' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2} = \sqrt{(5)^2 - (\sqrt{5} + 2)^2}$$

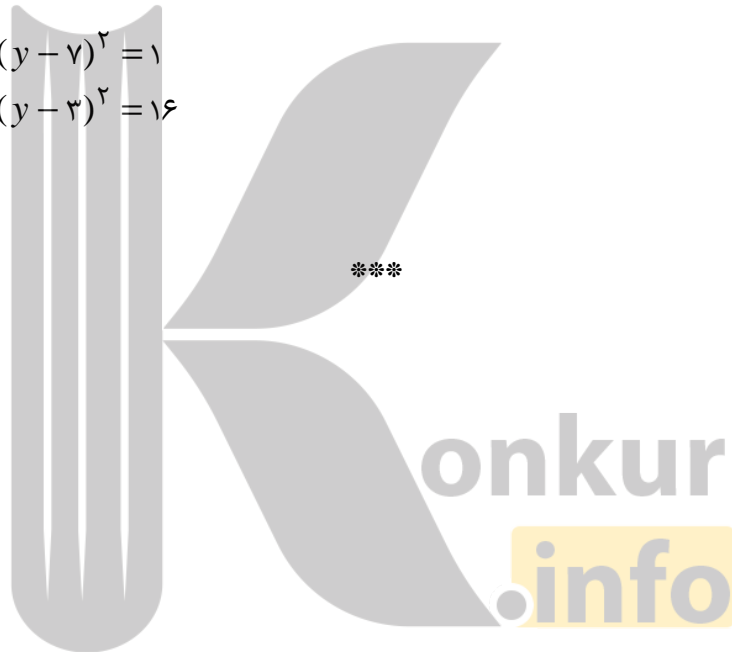
$$= \sqrt{25 - 5 - 4\sqrt{5} - 4} = \sqrt{16 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{4(4 - \sqrt{5})} = 2\sqrt{4 - \sqrt{5}}$$

تمرین برای حل :

۲۳: اندازه مماس مشترک داخلی و اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی زیر را در صورت وجود تعیین

کنید.

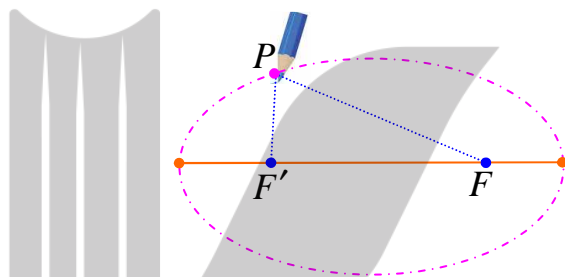
$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-7)^2 = 1 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases}$$



درس سوم: بیضی

در این درس بیضی را به عنوان یکی از مهمترین مقاطع مخروطی، تعریف می‌کنیم و در ادامه ویژگی‌های آن را به صورت هندسی بررسی می‌کنیم.

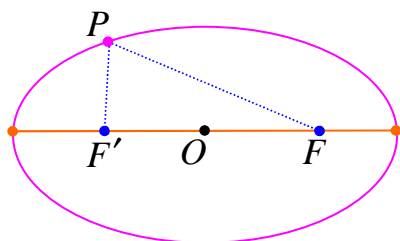
یک تکه نخ به طول l را در نظر بگیرید. اگر دو سر این تکه نخ را مطابق شکل در دو نقطه‌ی متمایز F و F' ثابت کنید و $l > FF'$ باشد. در این صورت یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.



واضح است که اگر یک نقطه‌ی دلخواه روی بیضی رسم شده را در نظر بگیریم، مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر همان طول نخ است. یعنی $PF + PF' = l$

تعریف بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه، که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد، را **بیضی** می‌نامند.



دو نقطه‌ی ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامند و آنها را با F و F' نمایش می‌دهیم. همچنین نقطه‌ی وسط پاره خط FF' را مرکز بیضی می‌گویند که در شکل مقابل با O نمایش داده شده است.

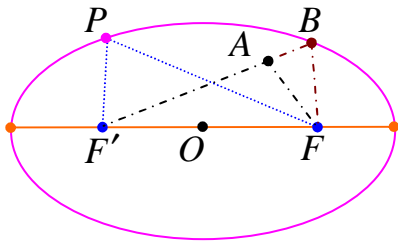
با توجه به این تعریف واضح است که اگر P یک نقطه روی بیضی باشد. در این صورت $PF + PF' = l$ با توجه به تمرین‌های زیر، ثابت می‌کنیم که این ویژگی برای هر نقطه‌ی دیگر روی بیضی برقرار است.

تمرین ۱: ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه درون بیضی تا کانون‌ها از l کمتر است.

اثبات: فرض کنید که نقطه‌ی A درون بیضی باشد. در این صورت امتداد AF (یا AF') بیضی را در

نقطه‌ی ای مانند B قطع می‌کند. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در

مثلث ABF می‌توان نوشت:



$$AF < AB + BF \xrightarrow{+AF'} AF + AF' < AF' + AB + BF$$

$$\rightarrow AF + AF' < \underbrace{AF' + AB}_{BF'} + BF \rightarrow AF + AF' < BF + BF'$$

$$\xrightarrow{BF + BF' = l} AF + AF' < l$$

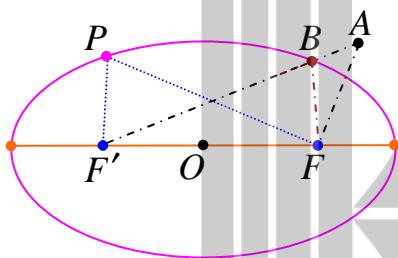
تمرین ۲: ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه بیرون بیضی تا کانون‌ها از l بیشتر است.

اثبات: فرض کنید که نقطه‌ی A بیرون بیضی باشد. در این

صورت نقطه‌ی تقاطع AF (یا AF') با بیضی را B نامگذاری

می‌کنیم. اکنون با توجه با نامساوی مثلث در مثلث ABF می‌توان

نوشت:



$$BF < AB + AF \xrightarrow{+BF'} BF + BF' < BF' + AB + AF$$

$$\rightarrow BF + BF' < \underbrace{BF' + AB}_{AF'} + AF \rightarrow BF + BF' < AF + AF'$$

$$\xrightarrow{BF + BF' = l} AF + AF' > l$$

نتیجه: اگر l طول تکه نخ اشاره شده در فوق باشد و چون طول یک پاره خط مانند l یک عدد حقیقی

مثبت است. لذا شایسته است تعریف بیضی را به شکل زیر بیان کنیم.

بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه‌ی ثابت یک عدد حقیقی

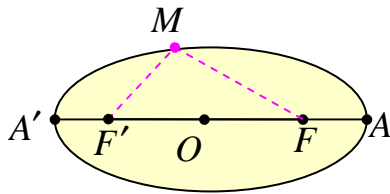
مثبت باشد. اگر این عدد حقیقی مثبت را به دلایلی که بعد با آنها آشنا می‌شویم با $2a$ نمایش دهیم، خواهیم

داشت:

$$PF + PF' = 2a$$

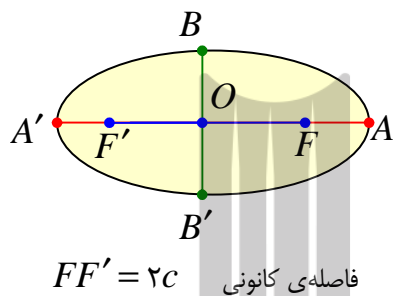
پس همواره $l = 2a$ می‌باشد به همین دلیل است که عدد $2a$ را **ثابت بیضی** می‌نامند.

اجزای بیضی



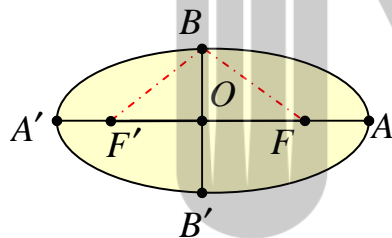
بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اگر نقاط F و F' کانون های بیضی و نقطه‌ی M روی بیضی باشد. در این صورت پاره های MF و MF' را **شعاع های حامل** نقطه‌ی M می نامند.

اگر کانونهای بیضی را به هم وصل کرده و امتداد دهیم، خط بدست آمده بیضی را در نقاط A و A' قطع می کند. پاره خط AA' را **قطر بزرگ** (قطر کانونی) بیضی می نامند و نقاط A و A' را **رأس های قطر بزرگ** می گویند.



اگر وسط پاره خط واصل دو کانون بیضی یعنی FF' را O بنامیم. نقطه‌ی O را **مرکز بیضی** می گویند. اندازه‌ی پاره خط واصل کانونهای بیضی را **فاصله‌ی کانونی** بیضی می گویند.

اگر از مرکز بیضی بر قطر بزرگ خط عمودی رسم کنیم. این خط عمود بیضی را در دو نقطه‌ی B و B' قطع می کند. پاره خط BB' را **قطر کوچک** (قطر ناکانونی) بیضی می نامند و نقاط B و B' را **رأس های قطر کوچک** می گویند. طبق تعریف بیضی واضح است که مجموع فاصله‌ی های هر رأس قطر کوچک بیضی تا کانونها برابر ثابت بیضی یعنی $2a$ می باشد. یعنی



$$BF + BF' = 2a \text{ و } B'F + B'F' = 2a$$

برای سادگی در ادامه‌ی کار، اندازه‌ی پاره خط های OA و OB و OF را به ترتیب با a و b و c نمایش می دهیم، لذا فاصله‌ی کانونی بیضی برابر $2c$ است و

$$FF' = 2c \text{ و } OF = c \text{ و } OF' = c$$

تمرین ۳: ثابت کنید که در هر بیضی فاصله‌ی رأس قطر بزرگ بیضی تا کانون مجاور به آن، برابر فاصله‌ی رأس دیگر تا کانون مجاور به آن است. یعنی $AF = A'F'$

اثبات: با توجه به تعریف بیضی واضح است که $AF + AF' = l$ و $A'F + A'F' = l$ لذا

$$AF + AF' = A'F + A'F'$$

$$\underline{AF' = AF + FF', A'F = A'F' + FF'} \rightarrow AF + AF + FF' = A'F' + FF' + A'F'$$

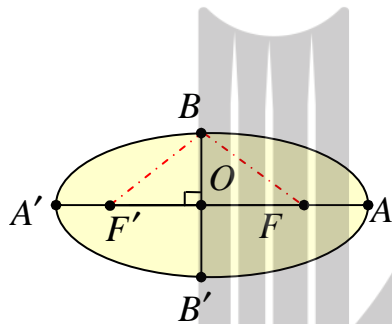
$$\rightarrow 2AF = 2A'F' \rightarrow AF = A'F'$$

نتیجه: با توجه به تمرین فوق نتیجه می شود که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر بزرگ آن است. یعنی

$$OA = OA' \text{ می باشد و چون } OA = a \text{ پس:}$$

$$AA' = 2a \text{ و } OA = a \text{ و } OA' = a$$

تمرین ۴: ثابت کنید که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر کوچک است.



اثبات: با توجه به تعریف قطر کوچک بیضی و چون

$$OF = OF' = c \text{ پس در مثلث } BFF' \text{ پاره خط } OB \text{ عمود}$$

منصف FF' می باشد. لذا $BF = BF'$ و از آنجا

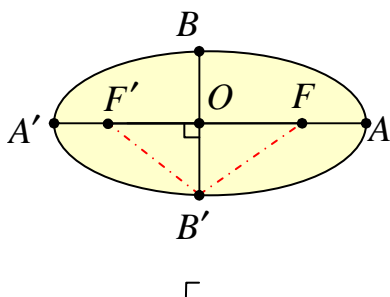
$$\text{که } BF = BF' \text{ پس } BF = BF' = a$$

از طرف در مثلث قائم الزاویه‌ی BOF (یا BOF') می توان نوشت:

$$BF^2 = OB^2 + OF^2$$

و چون $BF = a$ و $OB = b$ و $OF = c$ پس:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (*)$$



اکنون بطور مشابه در مثلث $B'FF'$ نیز خواهیم داشت.

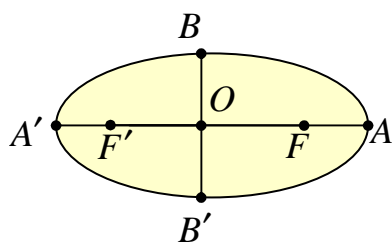
$BF = BF'$ و لذا $a^2 = OB'^2 + c^2$ و با مقایسه با

$$\text{تساوی } (*) \text{ نتیجه می شود که } OB' = b$$

و لذا نتیجه می شود که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر کوچک

آن است. یعنی $OB = OB'$ می باشد و همچنین:

$$BB' = 2b \text{ و } OB = b \text{ و } OB' = b$$



$$\begin{aligned} AA' &= 2a && \text{قطر بزرگ} \\ BB' &= 2b && \text{قطر کوچک} \\ FF' &= 2c && \text{فاصله‌ی کانونی} \end{aligned}$$

تذکره ۱: هر بیضی دارای دو قطر می باشد که یکی از دو کانون گذشته و دیگری عمود بر آن در مرکز بیضی است. قطری که از دو کانون می گذرد را قطر بزرگ (اطول) یا قطر کانونی می نامند و آنرا با $2a$ نمایش می دهند و قطر دیگر را قطر کوچک (اقصر) یا ناکانونی می گویند و آنرا با $2b$ نمایش می دهند.

اگر فاصله‌ی بین دو کانون را با $2c$ نمایش دهیم. نتیجه می شود که در هر بیضی رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

تذکره ۲: واضح است که در هر بیضی فاصله‌ی کانونی از قطر بزرگ کوچکتر است پس:

$$FF' < AA' \rightarrow 2c < 2a \rightarrow c < a \rightarrow \frac{c}{a} < 1$$

نسبت $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می نامند و آنرا با e نمایش می دهند.

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

در واقع خروج از مرکز بیضی نشان دهنده‌ی کشیدگی بیضی است. اگر e به صفر نزدیکتر باشد، بیضی به دایره شبیه تر است و اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده تر است.

تذکره ۳: قطرهای بیضی **محورهای تقارن** و مرکز بیضی **مرکز تقارن** آن است.

تمرین ۵: اندازه‌ی قطرهای یکی بیضی ۱۰ و ۶ سانتی متر می باشد. اندازه‌ی فاصله‌ی کانونی و مقدار

خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

حل: واضح است که اندازه‌ی قطر بزرگ ۱۰ و اندازه‌ی قطر کوچک برابر ۶ سانتی متر می باشد.

$$AA' = 10 \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$$

$$BB' = 6 \rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 25 = c^2 + 9 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$$

$$FF' = 2c = 2(4) = 8 \quad \text{فاصله‌ی کانونی}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \quad \text{خروج از مرکز بیضی}$$

تمرین ۶: در یک بیضی طول قطر ها ۸ و ۶ واحد بوده و مرکز بیضی روی مبدأ مختصات می باشد.

الف : خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

ب : معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

حل : الف :

$$AA' = 2a \rightarrow a = 4 \quad \text{طول قطر بزرگ}$$

$$BB' = 2b = 6 \rightarrow b = 3 \quad \text{طول قطر کوچک}$$

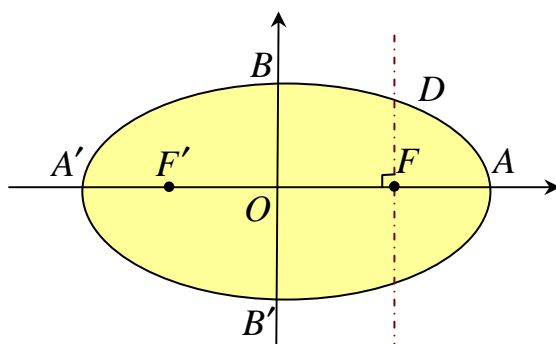
$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 16 = 9 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{خروج از مرکز بیضی}$$

ب : دایره‌ی محیطی بیضی دایره‌ای است هم‌مرکز بیضی و به شعاع a است. دایره‌ی محاطی بیضی دایره‌ای است هم‌مرکز بیضی و به شعاع b است. با این تعریف داریم :

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 16 \quad \text{معادله‌ی دایره‌ی محیطی}$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 9 \quad \text{معادله‌ی دایره‌ی محاطی}$$



تمرین ۷: مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و

قطرهای آن مانند شکل بر محورهای مختصات

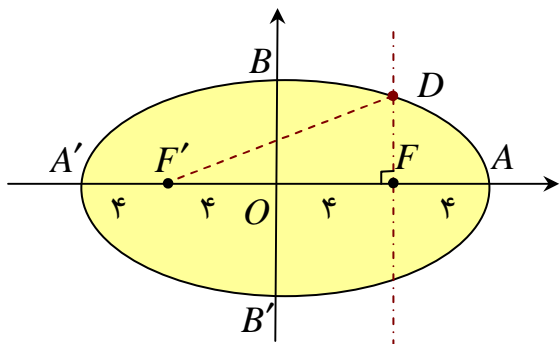
منطبق هستند. و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و

A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F

بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در نقطه‌ی D

قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.

حل: اگر قرار دهیم، $D(\alpha, \beta)$ با توجه به داده‌های مسئله واضح است که $\alpha = 4$ و $\beta > 0$ می‌باشد. پس



$$D(4, \beta)$$

از طرفی طبق مسئله داریم، $F'(-4, 0)$ و $F(4, 0)$

و چون $AA' = 2a = 4(4) = 16$ یعنی $a = 8$

$$\text{لذا } DF + DF' = 2a$$

$$\sqrt{(4-4)^2 + (\beta-0)^2} + \sqrt{(4+4)^2 + (\beta-0)^2} = 16$$

$$\rightarrow \sqrt{\beta^2} + \sqrt{64 + \beta^2} = 16 \rightarrow |\beta| + \sqrt{64 + \beta^2} = 16$$

$$\xrightarrow{|\beta|=\beta} \beta + \sqrt{64 + \beta^2} = 16 \rightarrow \sqrt{64 + \beta^2} = 16 - \beta$$

$$\rightarrow (\sqrt{64 + \beta^2})^2 = (16 - \beta)^2 \rightarrow 64 + \beta^2 = 256 - 32\beta + \beta^2 \rightarrow \beta = 6$$

در نتیجه مختصات نقطه‌ی D به صورت $D(4, 6)$ می‌باشد.

تمرین ۸: با توجه به اطلاعات داده شده، در هر مورد نمودار بیضی را طوری رسم کنید که مرکز بیضی بر

مبدأ مختصات منطبق بوده و قطر بزرگ آن روی محور طول‌ها باشد. با توجه به اندازه‌ی خروج از مرکز

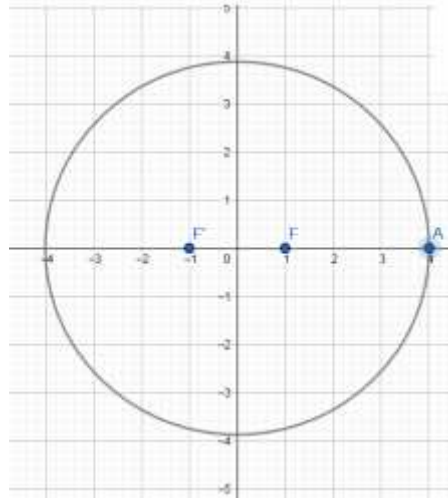
بیضی چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

الف: $c = 1$ و $a = 4$ و $e = \frac{1}{4}$

ب: $c = 3$ و $a = 4$ و $e = \frac{3}{4}$

حل: الف:

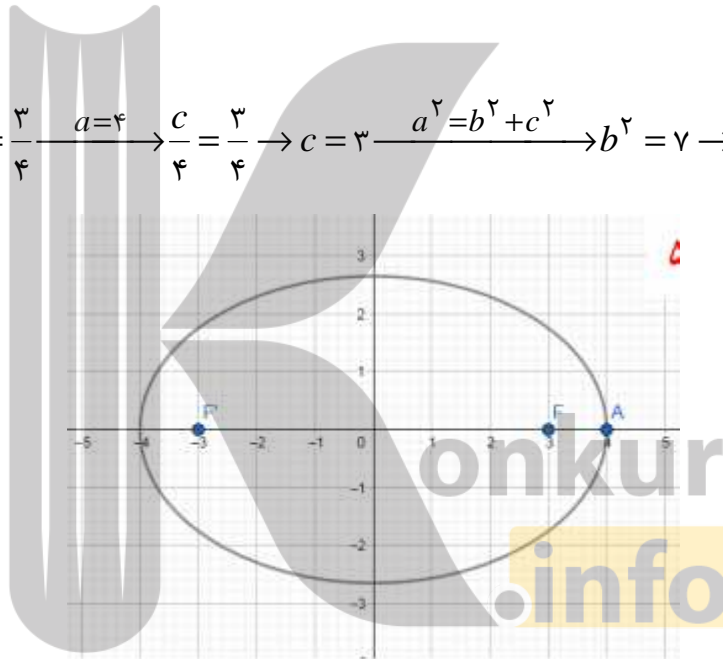
$$e = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \xrightarrow{a=4} \frac{c}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow c = 1 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} b^2 = 15 \rightarrow b = \sqrt{15}$$



بیضی به دایره شبیه است.

ب :

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{c}{4} = \frac{3}{4} \xrightarrow{a=4} \frac{c}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow c = 3 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} b^2 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$



بیضی کشیده تر است.

تمرین برای حل :

تمرین ۹: در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک برابر ۴ واحد و مختصات مرکز

بیضی (۴,۵) باشد. در این صورت:

الف : با فرض اینکه قطر بزرگ بیضی موازی محور طول ها باشد، نمودار بیضی را رسم کنید.

ب : فاصله ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ج : مختصات رئوس بیضی قطر بزرگ و رئوس قطر کوچک و کانون های بیضی را بنویسید.

تمرین ۱۰: در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک برابر ۴ واحد و مختصات مرکز بیضی (۴,۵) باشد. در این صورت:

الف: با فرض اینکه قطر بزرگ بیضی موازی محور عرض‌ها باشد، نمودار بیضی را رسم کنید.

ب: فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ج: مختصات رئوس بیضی قطر بزرگ و رئوس قطر کوچک و کانون‌های بیضی را بنویسید.

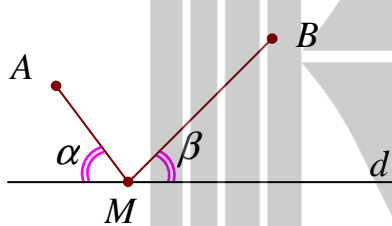
تمرین ۱۱: نقاط $F(۲,۷)$ و $F'(۲,-۱)$ کانون‌های بیضی هستند که طول قطر بزرگ آن ۱۰ می‌باشد.

الف: مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب: طول قطر کوچک بیضی را به دست آورید.

ج: نمودار بیضی را رسم کنید.

ویژگی خط مماس بر بیضی



سال گذشته دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و با عبور از نقطه‌ی M مانند M از خط d ، به گونه‌ای است که دو زاویه‌ی ایجاد شده α و β با هم برابر هستند. اکنون با توجه به این موضوع، به تمرین زیر پاسخ می‌دهیم.

تمرین ۱۲: اگر خطی چنان رسم شود که بر بیضی مماس شود. در این صورت ثابت کنید که دو زاویه‌ای

که این خط و شعاع‌های حامل نقطه‌ی تماس بوجود می‌آید، مساوی‌اند.

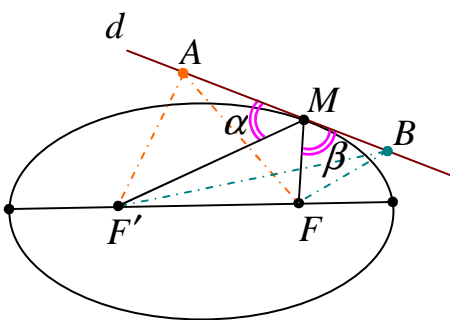
اثبات: اگر نقطه‌ی M ، نقطه‌ی تماس خط و بیضی باشد،

چون این نقطه روی بیضی قرار دارد، پس فاصله‌ی این نقطه

تا کانون‌ها از فاصله‌ی نقاط A و B که بیرون بیضی هستند، تا

کانون‌ها کمتر است. لذا نقطه‌ی M تنها نقطه‌ی ای است که

کمترین فاصله تا کانون‌ها را دارد. پس $\angle \alpha = \angle \beta$



نتیجه :

۱: اگر بدنه‌ی بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه‌ی نوری بر بدنه‌ی داخلی بیضی تابیده

شود، انعکاس نور از کانون دیگر بیضی می گذرد. چرا؟

چون اشعه‌ی نور از یکی از کانونها تابیده می شود و نور حرکت مستقیم الخط را دارد، لذا اگر پرتو نور بتواند از

بدنه‌ی بیضی رد شود از نقطه‌ی قرینه‌ی کانون دیگر نسبت به خط مماس می گذرد.

۲: اگر از یک نقطه‌ی روی کانون های بیضی، تویی چنان زده شود که به بدنه‌ی بیضی برخورد کند، در

برگشت از کانون دیگر می گذرد.

حل چند تمرین در مورد بیضی و ویژگی های آن

۱۳: دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. اگر نقطه‌ی A به کانون F' و

نقطه‌ی B به کانون F نزدیکتر و $AF' = BF$ باشد. هر یک از حالت های زیر را ثابت کنید.

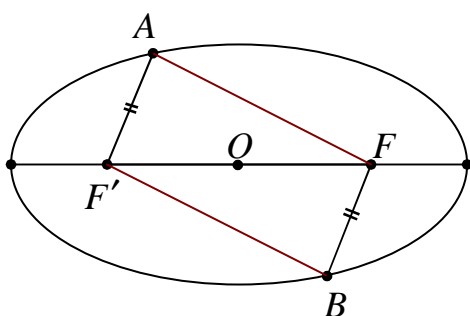
الف: در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازیند.

ب: در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه ای مانند M قطع کنند،

مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

حل:

الف:



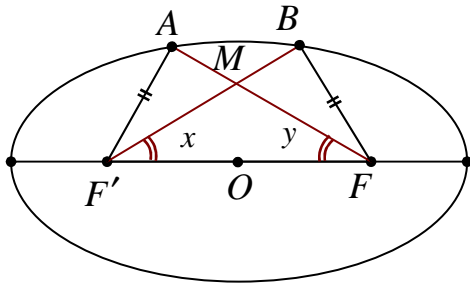
$$\left. \begin{aligned} AF + AF' &= 2a \\ BF + BF' &= 2a \\ BF &= AF' \end{aligned} \right\} \rightarrow AF = BF'$$

پس در چهارضلعی $AFBF'$ بدست آمده، اضلاع مقابل دو

بدو موازیند. لذا این چهارضلعی، متوازی الاضلاع است

$$AF \parallel BF'$$

ب:

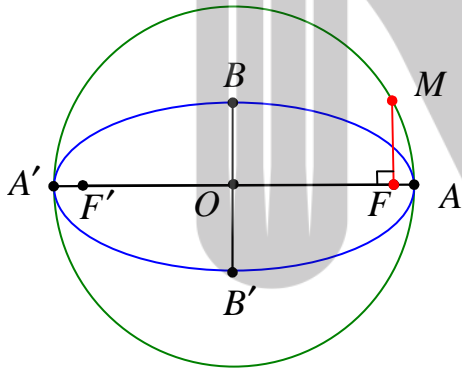


$$\left. \begin{aligned} AF + AF' &= 2a \\ BF + BF' &= 2a \\ BF &= AF' \end{aligned} \right\} \rightarrow AF = BF'$$

$$\left. \begin{aligned} AF &= BF' \\ AF' &= BF \\ FF' &= FF' \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta(AFF') \cong \Delta(BFF') \rightarrow \angle x = \angle y$$

(ض ض ض)

پس مثلث FMF' دو زاویه‌ی مساوی دارد، لذا متساوی الساقین است. حال چون نقطه‌ی M از دو سر پاره خط FF' به یک فاصله است، پس روی عمود منصف FF' قرار دارد. از طرفی طبق تعریف می‌دانیم که قطر کوچک بیضی عمود منصف FF' می‌باشد. لذا نقطه‌ی M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.



۱۴: قطر دایره ای مانند شکل مقابل، قطر بزرگ بیضی است. و از کانون F عمودی بر قطر بزرگ رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید که اندازه‌ی MF برابر نصف اندازه‌ی قطر کوچک بیضی است.

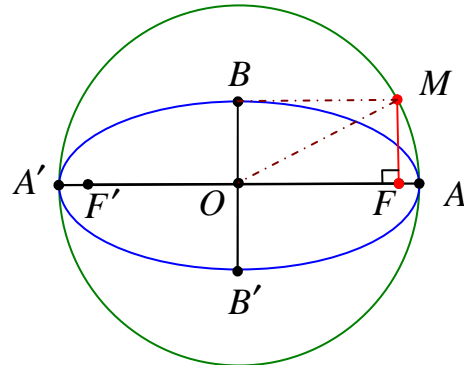
حل: طبق مسئله $OM = OA = a$ می‌باشد. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OMF می‌توان نوشت:

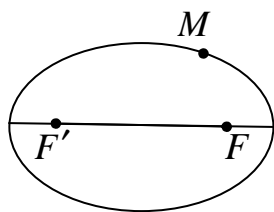
$$OM = OA = a$$

$$OF = c$$

$$OM^2 = OF^2 + MF^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 + MF^2 \rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} MF^2 = b^2 \rightarrow MF = b$$



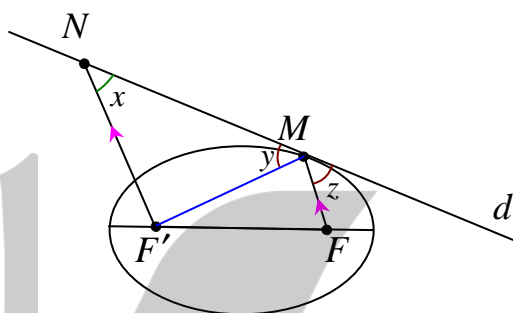


۱۵: در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص

شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در

نقطه‌ی N مانند $NF' = MF'$ قطع کند. ثابت کنید

حل: ابتدا مطابق مسئله، شکل را تکمیل می‌کنیم.



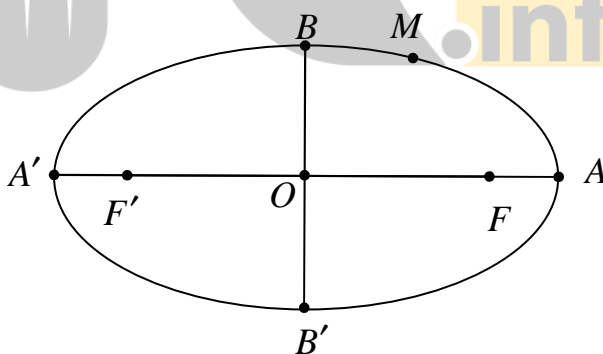
طبق ویژگی خط مماس بر بیضی داریم، $\angle y = \angle z$ و چون $NF' \parallel MF$ پس $\angle x = \angle z$. لذا

$\angle x = \angle y$ یعنی مثلث $NF'M$ دو زاویه‌ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی‌الساقین بوده و

$$NF' = MF'$$

۱۶: نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی

برابر ۴ واحد است.

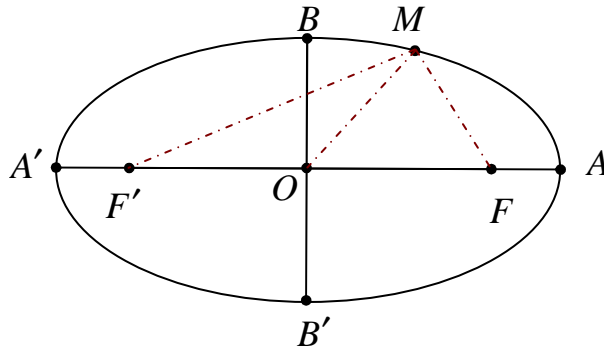


الف: نشان دهید که $OM = OF = OF'$

ب: نشان دهید که مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ج: طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

حل : ابتدا نقطه‌ی M روی را به مرکز و کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم.



الف :

$$AA' = 2a \xrightarrow{AA' = 10} a = 5$$

$$BB' = 2b \xrightarrow{BB' = 6} b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} 25 = 9 + c^2 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$$

$$\rightarrow OF = OF' = c \xrightarrow{OM = 4} OM = OF = OF'$$

ب : با توجه به اینکه مرکز بیضی یعنی نقطه‌ی O وسط FF' است. پس OM میانه‌ی وارد بر ضلع FF' می‌باشد. از طرفی چون $OM = OF = OF'$ پس مثلث MFF' قائم الزاویه بوده و زاویه‌ی FMF' قائمه است.

ج :

$$MF + MF' = 2a \xrightarrow{2a = 10} MF + MF' = 10 \rightarrow MF' = 10 - MF$$

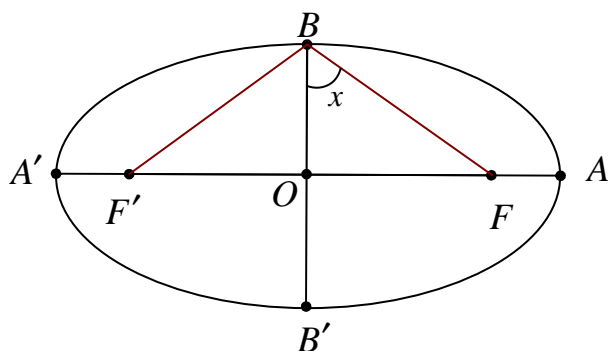
$$\Delta(MFF') : \xrightarrow{\angle FMF' = 90^\circ} MF^2 + MF'^2 = FF'^2$$

$$\xrightarrow{MF' = 10 - MF, FF' = 8} MF^2 + (10 - MF)^2 = 8^2$$

$$\xrightarrow{MF = x} x^2 + (10 - x)^2 = 64 \rightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 64$$

$$\rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 10x + 18 = 0 \xrightarrow{\Delta = 100 - 72 = 28}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10 + 2\sqrt{7}}{2} = 5 + \sqrt{7} \rightarrow MF = 5 + \sqrt{7}, MF' = 10 - (5 + \sqrt{7}) = 5 - \sqrt{7} \\ x_2 = \frac{10 - 2\sqrt{7}}{2} = 5 - \sqrt{7} \rightarrow MF = 5 - \sqrt{7}, MF' = 10 - (5 - \sqrt{7}) = 5 + \sqrt{7} \end{cases}$$



۱۷: در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ دو

برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه-

ی FBF' را تعیین کنید.

حل:

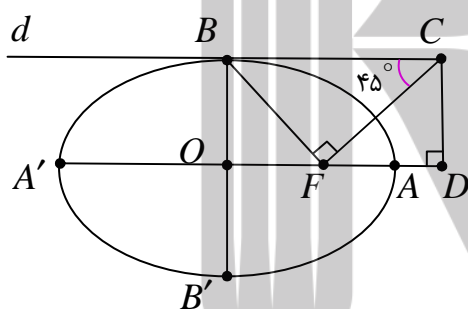
$$AA' = 2BB' \rightarrow 2a = 2(2b) \rightarrow a = 2b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=2b} 4b^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 3b^2 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{3}b$$

$$\Delta(OBF): \tan x = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \rightarrow \angle x = 60^\circ$$

از طرفی چون مثلث FBF' متساوی الساقین بوده و BB' بر قاعده‌ی FF' عمود است، پس نیمساز زاویه‌ی رأس یعنی FBF' می باشد و لذا اندازه‌ی این زاویه برابر 120° درجه است.

۱۸: در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d



در نقطه‌ی B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم

می کنیم و در نقطه‌ی F عمودی بر BF رسم می کنیم

تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند و از C عمودی بر

امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه-

ی D قطع کند. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی BCF برابر 45° درجه باشد، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

حل: واضح است که چهارضلعی $OBCD$ مستطیل است. مثلث CFB متساوی الساقین و زاویه-

ی OFB برابر 45° درجه است. پس مثلث OBF متساوی الساقین بوده و در آن $OB = OF$ می باشد.

$$\text{لذا } b = c$$

و چون در هر بیضی رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است پس:

$$a^2 = c^2 + c^2$$

$$\rightarrow a^2 = 2c^2 \rightarrow a = \sqrt{2}c$$

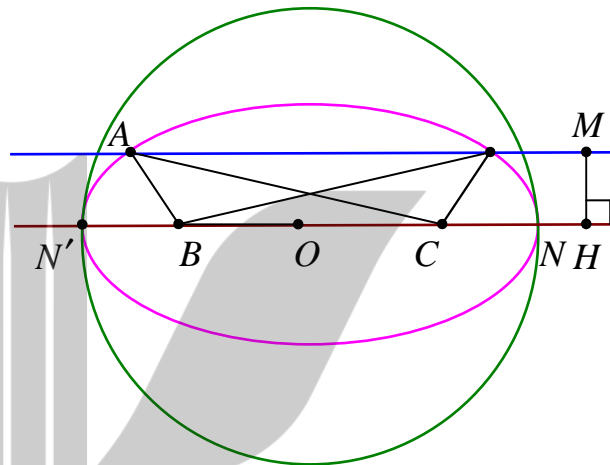
$$AF = OA - OF = a - c = \sqrt{2c} - c$$

$$AD = DF - AF \xrightarrow{DF=DC \rightarrow b=c} AD = DF - AF = b - (a - c) = 2c - \sqrt{2c}$$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{2c - \sqrt{2c}}{\sqrt{2c} - c} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2c} - c)}{\sqrt{2c} - c} = \sqrt{2}$$

۱۹: فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه‌ی ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد. با

استفاده از خواص بیضی شیوه‌ی رسم این مثلث را توضیح دهید.



حل: فرض کنیم $BC = a$ و $AH = h_a$ و محیط مثلث ABC برابر $2p$ باشد. پاره خط $BC = a$ را

رسم نموده و وسط آن را O می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و قطر $2p - a$ رسم می‌کنیم و BC را

امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط N و N' قطع کند. سپس یک بیضی به کانون‌های B و C که از N و

N' بگذرد را رسم می‌کنیم. با توجه به بحث‌های گذشته بدیهی است که قطر بزرگ بیضی است و

$$NN' = 2p - a$$

اگر A نقطه‌ی دلخواهی از بیضی باشد. پس:

$$AB + AC = NN'$$

$$\rightarrow AB + AC = 2p - a \rightarrow AB + AC + BC = 2p - a + a = 2p$$

حال از نقطه‌ی H روی امتداد NN' عمود $MH = h_a$ را رسم نموده و از M خطی موازی NN' رسم

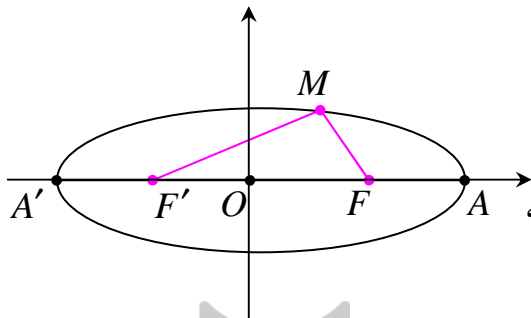
می‌کنیم. محل تقاطع خط و بیضی را A می‌نامیم و مثلث ABC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب

مسئله است.

اثبات معادله بیضی در حالت های مختلف

در این قسمت در پی آن هستیم که برای بیضی با توجه به حالت های مختلف آن معادله ای ارائه کنیم. اما برای سادگی فقط حالت های خاص (مرکز بیضی روی مبدأ مختصات) را بیان می کنیم. بدیهی است که با اعمال انتقال می توان حالت های کلی معادله بیضی را بدست آورد.

حالت اول: بیضی افقی



نقطه‌ی $M(x, y)$ روی بیضی

با کانون های $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ را در نظر می گیریم،

بنابر تعریف بیضی خواهیم داشت:

$$MF + MF' = 2a$$

لذا:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\rightarrow (\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$\rightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$\rightarrow (x-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2$$

$$\rightarrow -2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$

$$\rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \xrightarrow{\div 4} a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$\rightarrow (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (a^2 + cx)^2$$

$$\rightarrow a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + cx)^2$$

$$\rightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\rightarrow a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\rightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$\rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\xrightarrow{a^2 - c^2 = b^2} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

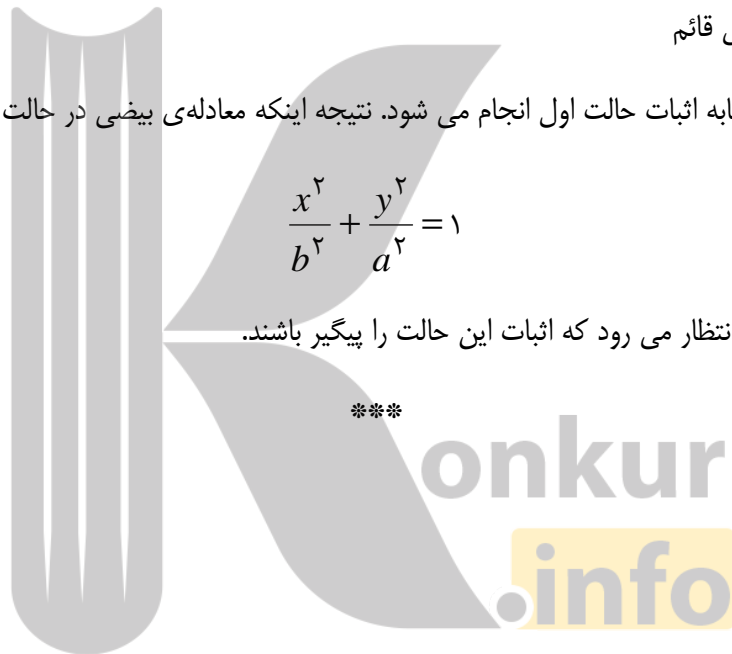
$$\xrightarrow{\div a^2b^2} \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حالت دوم: بیضی قائم

اثبات این حالت مشابه اثبات حالت اول انجام می‌شود. نتیجه اینکه معادله‌ی بیضی در حالت می‌شود:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

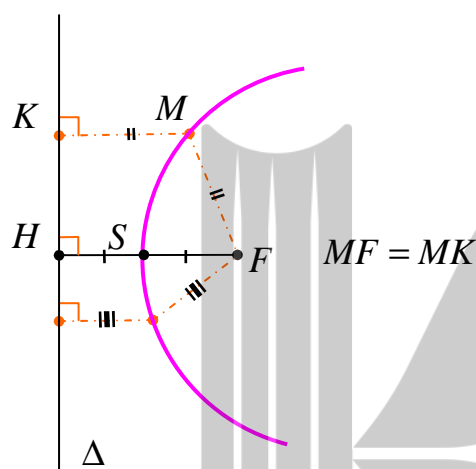
از فراگیران محترم انتظار می‌رود که اثبات این حالت را پیگیر باشند.



درس چهارم : سهمی

سهمی را در سال های گذشته به عنوان یک تابع شناخته اید. اما همانطور که در معرفی مقاطع مخروطی آشنا شده اید، سهمی به عنوان یکی از این مقاطع، یک مکان هندسی معرفی شده است. در این درس سهمی را به شکلی دقیقتر تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت هندسی و تحلیلی بررسی می کنیم.

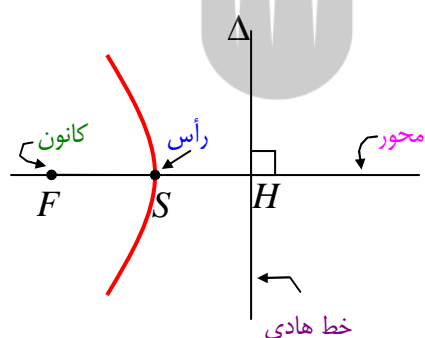
تعریف سهمی



سهمی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه، به یک فاصله باشند. نقطه‌ی ثابت را **کانون** سهمی می نامند و آن را با F نمایش می دهند و خط ثابت را **خط هادی** سهمی می گویند و آن را با Δ نشان می دهند.

فاصله‌ی کانون تا خط هادی را یک **پارامتر سهمی** می نامند و آن را با $2p$ نشان می دهند.

$$FH = 2p$$



نقطه‌ی وسط پاره خطی که از کانون بر خط هادی عمود می شود، یک نقطه از سهمی است که آن را **رأس سهمی** می گویند. خطی که از کانون می گذرد و بر خط هادی عمود است را **محور تقارن** (محور کانونی) سهمی می نامند و آنرا به اختصار محور سهمی نیز می گویند.

قرار داد: در این درس فقط سهمی هایی را بررسی می کنیم که محور کانونی آنها موازی با یکی از محور های مختصات باشد.

بررسی سهمی

در اینجا سهمی را در چهار حالت خاص یعنی وقتی که محور کانونی آن موازی با یکی از محور های مختصات باشد، بررسی می کنیم.

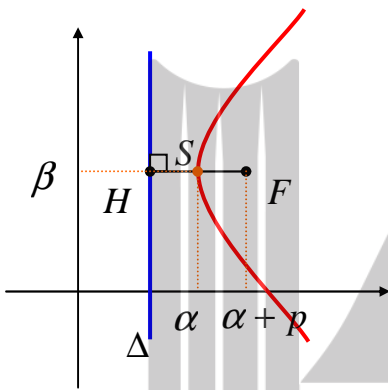
(۱) بررسی سهمی وقتی که محور کانونی آن موازی محور طول ها باشد. (سهمی افقی)

الف) سهمی افقی (رو به راست)

اگر $S(\alpha, \beta)$ رأس سهمی باشد. در این صورت داریم:

$$(y - \beta)^2 = 4p(x - \alpha)$$

معادله سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی



$$y^2 = 4px \text{ مبدأ مختصات باشد.}$$

$$F(\alpha + p, \beta) \text{ مختصات کانون:}$$

$$x = \alpha - p \text{ معادله خط هادی:}$$

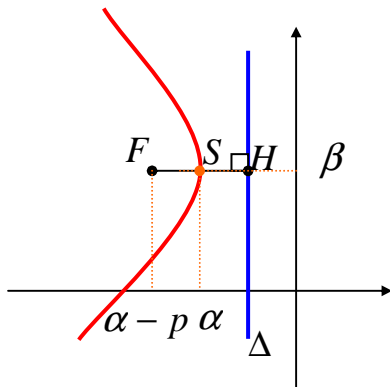
$$y = \beta \text{ معادله محور تقارن:}$$

ب) سهمی افقی (رو به چپ)

اگر $S(\alpha, \beta)$ رأس سهمی باشد. در این صورت داریم:

$$(y - \beta)^2 = -4p(x - \alpha)$$

معادله سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی



$$y^2 = -4px \text{ مبدأ مختصات باشد.}$$

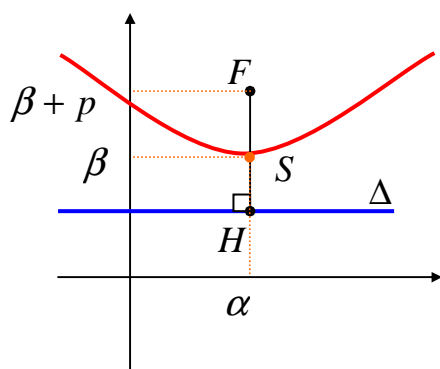
$$F(\alpha - p, \beta) \text{ مختصات کانون:}$$

$$x = \alpha + p \text{ معادله خط هادی:}$$

$$y = \beta \text{ معادله محور تقارن:}$$

۲) بررسی سهمی وقتی که محور کانونی آن موازی محور عرض‌ها باشد. (سهمی قائم)

الف) سهمی قائم (رو به بالا)



اگر رأس سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد. در این صورت داریم:

$$(x - \alpha)^2 = 4p(y - \beta)$$

معادله‌ی استاندارد سهمی:

معادله‌ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی روی

$$x^2 = 4py$$

مبدأ مختصات باشد.

$$F(\alpha, \beta + p)$$

مختصات کانون:

$$y = \beta - p$$

معادله‌ی خط هادی:

$$x = \alpha$$

معادله‌ی محور تقارن:

ب) سهمی قائم (رو به پایین)

اگر رأس سهمی $S(\alpha, \beta)$ باشد. در این صورت داریم:

$$(x - \alpha)^2 = -4p(y - \beta)$$

معادله‌ی استاندارد سهمی:

معادله‌ی سهمی در حالت خاص وقتی که رأس سهمی

$$x^2 = -4py$$

روی مبدأ مختصات باشد.

$$F(\alpha, \beta - p)$$

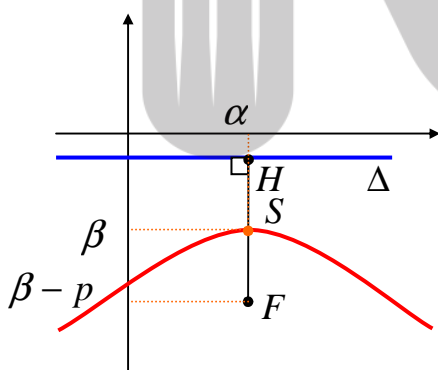
مختصات کانون:

$$y = \beta + p$$

معادله‌ی خط هادی:

$$x = \alpha$$

معادله‌ی محور تقارن:



مثال: معادله‌ی سهمی را بنویسید که $S(1, 3)$ رأس آن بوده و معادله‌ی خط هادی آن $x = 3$ باشد.

حل: با توجه به معادله‌ی خط هادی و مقایسه‌ی طول رأس سهمی با موقعیت خط هادی در دستگاه

مختصات، معلوم می‌شود که سهمی افقی رو به چپ است.

چون $S(1,3)$ مختصات رأس سهمی می باشد، پس $\alpha = 1$ و $\beta = 3$ از طرفی در این سهمی ها معادله‌ی خط هادی $x = \alpha - p$ می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha + p \\ x = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha + p = 3 \xrightarrow{\alpha=1} 1 + p = 3 \rightarrow p = 2$$

در نهایت معادله‌ی سهمی به شکل زیر به دست می آید.

$$(y - \beta)^2 = -4p(x - \alpha) \rightarrow (y - 3)^2 = -4(2)(x - 1) \\ \rightarrow (y - 3)^2 = -8(x - 1)$$

تمرین ۱: معادله‌ی سهمی را بنویسید که $y = 5$ خط هادی و $F(3,7)$ کانون آن باشد.

تمرین ۲: معادله‌ی سهمی را بنویسید که در آن $S(1,-1)$ رأس و $F(3,-1)$ مختصات کانون آن باشد.

تمرین ۳: معادله‌ی سهمی به صورت $y^2 = 6x$ داده شده است.

الف: نوع سهمی را تعیین کنید.

ب: مختصات رأس و مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی را بنویسید.

ج: نمودار سهمی را رسم کنید.

توجه: به روش مربع کامل کردن می توان معادله‌ی سهمی را به صورت متعارف نوشت. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: سهمی به معادله‌ی $x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$ داده شده است.

الف) نوع سهمی را بنویسید.

ب) مختصات رأس و اندازه‌ی پارامتر سهمی را بدست آورید.

حل:

$$x^2 - 2x + 8y + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = -8y - 8$$

$$\rightarrow (x - 1)^2 = -8(y - 1) \quad \text{سهمی قائم رو به پایین است.}$$

مختصات رأس $S(1,-1)$

$$-4p = -8 \rightarrow p = 2 \quad \text{پارامتر سهمی}$$

تمرین ۴: سهمی به معادله‌ی $y^2 - 2y - 2x - 3 = 0$ داده شده است. مختصات رأس، کانون و معادله-

ی خط هادی را نوشته و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

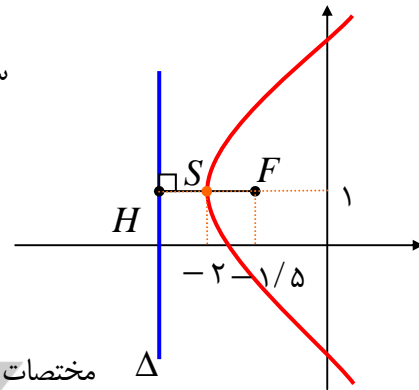
حل:

$$y^2 - 2y - 2x - 3 = 0 \rightarrow y^2 - 2y + 1 = 2x + 4$$

سهمی افقی رو به راست است. $(y-1)^2 = 2(x+2)$

مختصات رأس $S(-2, 1)$

پارامتر سهمی $4p = 2 \rightarrow p = \frac{1}{2}$



مختصات کانون $F(\alpha + p, \beta) \rightarrow F(-2 + \frac{1}{2}, 1) \rightarrow F(-\frac{3}{2}, 1)$

معادله‌ی خط هادی $x = \alpha - p \rightarrow x = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

تمرین ۵: سهمی به معادله‌ی $y^2 - 2ay - 2x + b = 0$ داده شده است. مقادیر a و b را چنان بیابید

که رأس آن $S(2, 1)$ باشد.

حل: کافی است که معادله را به صورت استاندارد بنویسیم.

$$y^2 - 2ay - 2x + b = 0 \xrightarrow{+a^2} y^2 - 2ay + a^2 = 2x - b + a^2$$

$$\rightarrow (y - a)^2 = 2(x - \frac{b - a^2}{2})$$

سهمی افقی روبه راست است. لذا رأس سهمی به صورت $S(\frac{b - a^2}{2}, a)$ می باشد. در نتیجه خواهیم

داشت:

$$\begin{cases} a = 1 \\ \frac{b - a^2}{2} = 2 \rightarrow \frac{b - 1}{2} = 2 \rightarrow b = 5 \end{cases}$$

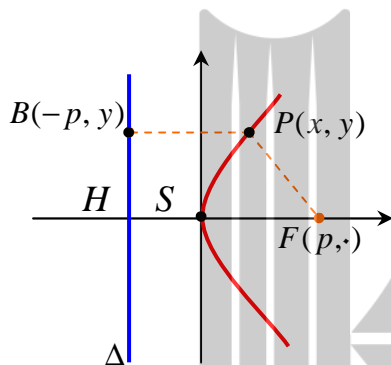
اثبات معادله سهمی در حالت های مختلف

در این قسمت در پی آن هستیم که برای سهمی با توجه به حالت های مختلف آن معادله ای ارائه کنیم. اما برای سادگی فقط حالت های خاص را بیان می کنیم. بدیهی است که با اعمال انتقال می توان حالت های کلی معادله سهمی را بدست آورد.

۱: معادله سهمی و معادله خط هادی یک سهمی افقی که رأس آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد را بدست آورید.

حل:

حالت اول: سهمی افقی (رو به راست)



فرض کنید که p یک عدد مثبت باشد. در این صورت با این شرایط مختصات کانون سهمی $F(p,0)$ می باشد. از طرفی خط هادی سهمی موازی محور عرض ها است و معادله آن به شکل $x = -p$ خواهد بود. حال اگر نقطه دلخواهی از سهمی باشد، طبق تعریف سهمی خواهیم داشت:

$$PF = PB$$

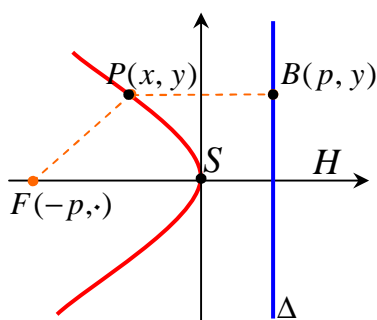
$$\rightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$\rightarrow (x-p)^2 + (y-0)^2 = (x+p)^2 + (y-y)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\rightarrow -2px + y^2 = 2px \rightarrow y^2 = 4px$$

حالت دوم: سهمی افقی (رو به چپ)



فرض کنید که a یک عدد مثبت باشد. در این صورت با این شرایط مختصات کانون سهمی $F(-p,0)$ می باشد. از طرفی خط هادی سهمی موازی محور عرض ها است و معادله آن به شکل $x = p$

خواهد بود. حال اگر $P(x, y)$ نقطه‌ی دلخواهی از سهمی باشد، طبق تعریف سهمی خواهیم داشت :

$$PF = PB$$

$$\rightarrow \sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2}$$

$$\rightarrow (x+p)^2 + (y-0)^2 = (x-p)^2 + (y-y)^2$$

$$\rightarrow x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2$$

$$\rightarrow 2px + y^2 = -2px \rightarrow y^2 = -4px$$

۲ : معادله‌ی سهمی و معادله‌ی خط هادی یک سهمی قائم که رأس آن منطبق بر مبدأ مختصات باشد را

بدست آورید.

حل این تمرین به دانش آموزان محترم واگذار می شود.

تمرین برای حل :

۶ : در یک سهمی $S(2,1)$ مختصات رأس و $F(2,5)$ مختصات کانون می باشد.

الف : نوع سهمی را تعیین کنید.

ب : معادله‌ی سهمی را بنویسید.

ج : معادله‌ی خط هادی را بنویسید.

۷ : در یک سهمی $S(4,6)$ مختصات رأس و معادله‌ی خط هادی آن $y = 9$ می باشد.

الف : نوع سهمی را تعیین کنید.

ب : مختصات کانون سهمی را بنویسید.

ج : معادله‌ی سهمی را بنویسید.

۸ : سهمی به معادله‌ی $x^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ داده شده است. مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی

آن را تعیین نموده و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۹: سهمی به معادله $x^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ داده شده است. مختصات کانون و معادله خط هادی

آن را تعیین نموده و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.

۱۰: سهمی به معادله $y^2 = 2x - 4y$ داده شده است.

الف: مختصات رأس و کانون بیضی را بدست آورید.

ب: مختصات نقاط برخورد نمودار سهمی با محورهای مختصات را تعیین کنید.

ج: نمودار سهمی را رسم کنید.

۱۱: مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ (که در آن $a \neq 0$) را به دست

آورید.

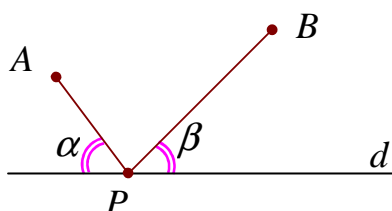
۱۲: سهمی به معادله $y^2 = 4x - 4$ داده شده است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای

رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

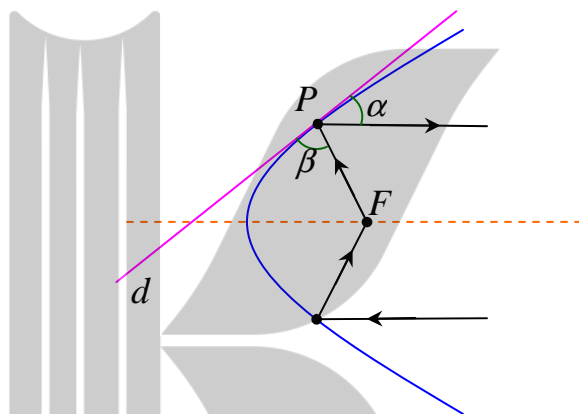


ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

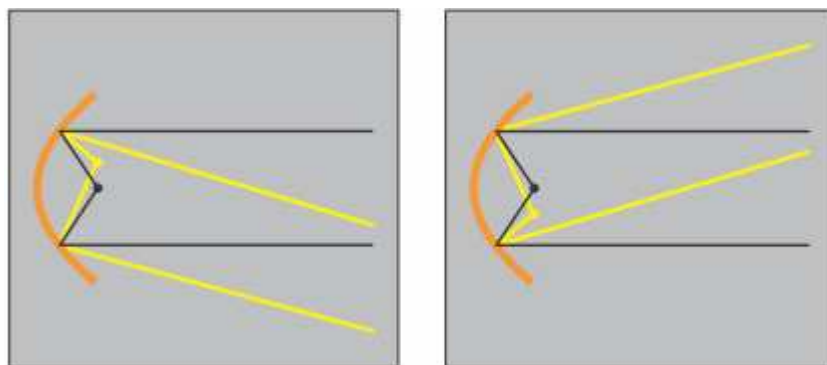
یکی از ویژگی‌های سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه‌ی سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و بر عکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه‌ی سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.



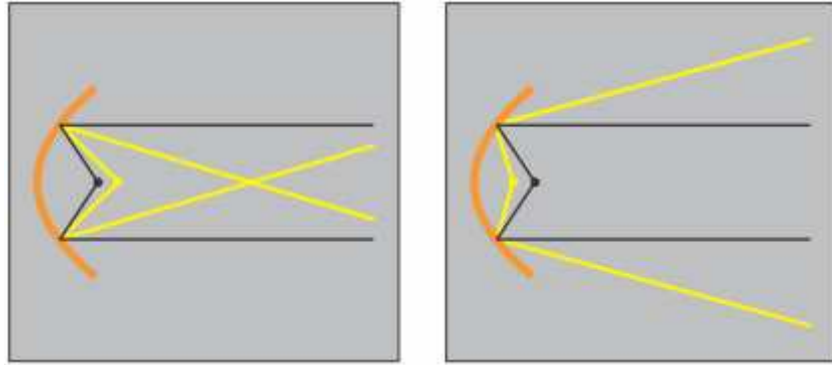
دلیل این امر را در ویژگی معادله‌ی خط مماس بر منحنی را قبلاً مشاهده کردید. یعنی اگر خط d بر سهمی در نقطه‌ی P مماس شود، زاویه‌های α و β برابر خواهند شد.



از این ویژگی برای ساخت بسیاری از وسایل از جمله چراغ جلوی اتومبیل‌ها استفاده می‌شود. با قرار گرفتن لامپ چراغ اتومبیل در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی، اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی با هم (نه موازی با محور) اما رو به بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا پایین ایجاد می‌کنند.



اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد، شعاع‌های نور با هم موازی خارج نمی‌شوند و یا از هم فاصله می‌گیرند یا در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.



فن آوری ساخت گیرنده‌ی امواج ماهواره ای (دیش ماهواره) نیز مشابه چراغ اتومبیل می باشد. ساخت آینه های محدب یا مقعر نیز به کمک این فن آوری انجام می شود.

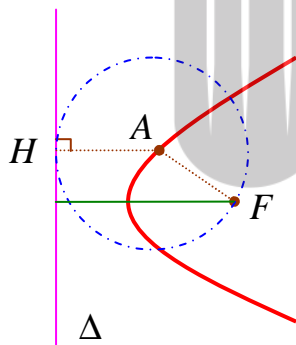
حل چند مسئله‌ی دیگر پیرامون سهمی

۱۳: سهمی با کانون F و خط هادی Δ داده شده اند.

الف: ثابت کنید هر نقطه روی سهمی مرکز دایره است که از کانون گذشته و بر خط هادی مماس می باشد.

ب: ثابت کنید مرکز هر دایره که از کانون بگذرد و بر خط هادی مماس باشد، روی سهمی است.

حل:



فرض کنیم A نقطه‌ی دلخواهی روی سهمی باشد. حال اگر به مرکز A و

شعاع AF دایره ای رسم می کنیم. بنابه تعریف سهمی، این نقطه از

کانون و خط هادی آن به یک فاصله است. پس دایره‌ی رسم شده بر

خط Δ مماس است.

همچنین فرض کنید که به مرکز B دایره ای به شعاع r طوری شده است

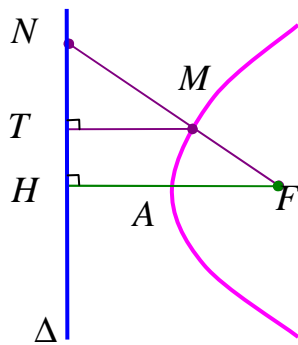
که $BH = BF = r$. پس نقطه‌ی B از کانون و خط هادی سهمی به یک فاصله است. لذا نقطه‌ی B

روی سهمی است.

توجه: با توجه به تمرین فوق می توان تعریف زیر را نیز برای سهمی بیان کرد.

سهمی مکان هندسی مرکز دایره هایی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت روی آن صفحه گذشته و بر

یک خط ثابت از آن صفحه مماس باشند.



۱۴: در شکل مقابل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی Δ رسم شده است. از F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا Δ را در N قطع کند و از نقطه‌ی M ، خط MT را بر Δ عمود کرده ایم. ثابت کنید:

$$\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

حل: نقاط A و M روی سهمی هستند. پس فاصله‌ی آنها از کانون و خط هادی سهمی برابر است. یعنی:

$$MT = MF \text{ و } AH = AF$$

از طرفی می توان نوشت با توجه به قضیه‌ی تالس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta FNH : TM \parallel FH &\rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{FN} \xrightarrow{MT=MF, FH=2FA} \frac{MF}{2FA} = \frac{NM}{FN} \\ &\rightarrow \frac{FN}{2FA} = \frac{NM}{MF} \quad (1) \end{aligned}$$

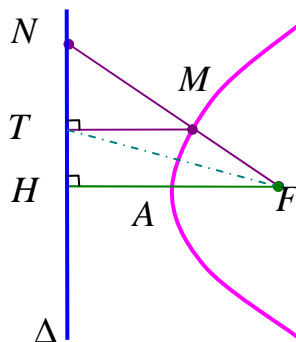
$$\Delta FNH : TM \parallel FH \rightarrow \frac{TN}{TH} = \frac{NM}{MF} \quad (2)$$

حال از روابط (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{FN}{2FA} = \frac{TN}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{FN}{FA} = \frac{2TN}{TH}$$

روش دیگر اثبات: کانون سهمی را به نقطه‌ی T وصل می کنیم.

بنابر تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است. از اینجا نتیجه می شود که:



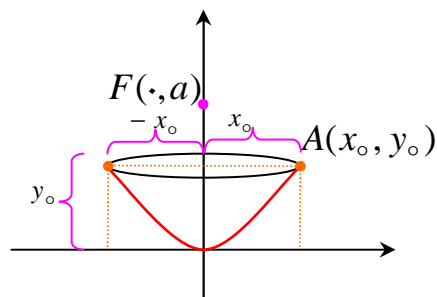
$$\angle MTF = \angle MFT$$

از طرفی $MT \parallel FH$ و خط مورب می باشد. پس بنا به قضیه‌ی خطوط موازی

$$\angle MTF = \angle TFH$$

از این دو نتیجه معلوم می شود که TF نیمساز زاویه‌ی NFH می باشد. اکنون بنابر قضیه‌ی نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{NT} = \frac{FH}{TH} \rightarrow \frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\div 2} \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$



۱۵: یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد

متفاوت و مشاهده‌ی فاصله‌ی کانونی متفاوت آنها به این فکر

افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش، فاصله‌ی کانونی

آن را به دست آورد. او به کمک دوستش تلاش کردند، فرمولی

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی یک دیش پیدا کنند. بعد از مدتی به این نتیجه رسیدند که: ابتدا قطر دهانه-

ی دیش را در خودش ضرب می کنیم و سپس حاصل ضرب را بر اندازه‌ی گودی (عمق) دیش تقسیم می

کنیم و در آخر عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم می نماییم. حاصل فاصله‌ی کانونی دیش است. شما دلیل درستی

این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید. (فاصله‌ی رأس

سهمی تا کانون آن را فاصله‌ی کانونی می نامند که قبلا اندازه‌ی آن را با p نمایش داده ایم.)

حل: با توجه به شکل، معلوم است که سهمی داده شده، یک سهمی قائم است و رأس آن روی مبدأ

مختصات قرار دارد. پس معادله‌ی سهمی به صورت $x^2 = 4py$ می باشد. حال اگر (x_0, y_0) نقطه‌ای

روی سهمی باشد به راحتی می توان فاصله‌ی کانونی را به شکل زیر به دست آورد.

$$x_0^2 = 4py_0$$

$$\rightarrow p = \frac{x_0^2}{4y_0}$$

با توجه به روش ارائه شده، اگر دهانه‌ی دیش $2x_0$ و عمق دیش y_0 باشد. بنا به روش مسئله داریم.

$$\frac{2x_0 \times 2x_0}{y_0} = \frac{4x_0^2}{16y_0} = \frac{x_0^2}{4y_0} = p$$

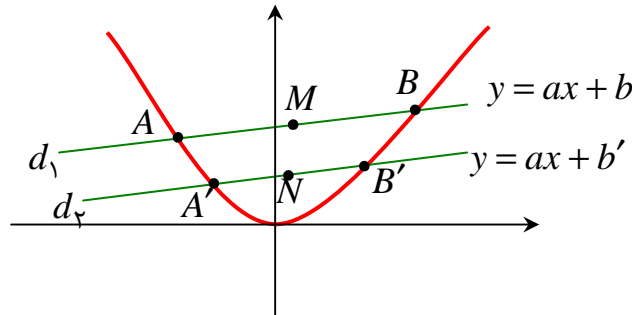
که این نتیجه با اثبات فوق مطابقت دارد.

اکنون بر این اساس اگر قطر یک دیش گیرنده‌ی امواج تلویزیونی ۹۶ و عمق آن ۸ سانتی متر باشد. فاصله‌ی

کانونی آن را حساب کنید.

۱۶: سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع

اند در نظر بگیرید.



الف: معادله‌ی درجه‌ی دوّمی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و d_2 سهمی $y = x^2$ باشد.

ب: فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه‌ی M وسط پاره خط باشد. مختصات نقطه‌ی M را به دست آورید.

پ: مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه‌ی N (نقطه‌ی وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

ت: خط MN نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ث: با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

حل:

الف:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = ax + b \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = ax + b \rightarrow x^2 - ax - b = 0$$

$$\frac{x_A = \alpha, x_B = \beta}{\rightarrow A \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} \beta \\ \beta^2 \end{vmatrix}}$$

ب:

$$x^2 - ax - b = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = a, \quad P = \alpha\beta = -b$$

$$M \left| \begin{array}{l} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{S' - 2P}{2} = \frac{a' + 2b}{2} \end{array} \right. \rightarrow M \left| \begin{array}{l} \frac{a}{2} \\ \frac{a' + 2b}{2} \end{array} \right.$$

پ :

$$\left. \begin{array}{l} y = x' \\ y = ax + b' \end{array} \right\} \rightarrow x' = ax + b' \rightarrow x' - ax - b' = 0$$

$$\frac{x_{A'} = \alpha', x_{B'} = \beta'}{\rightarrow A' \left| \begin{array}{l} \alpha' \\ \alpha' \end{array} \right., B' \left| \begin{array}{l} \beta' \\ \beta' \end{array} \right.}$$

$$x' - ax - b' = 0 \Rightarrow S = \alpha' + \beta' = a, P' = \alpha'\beta' = -b'$$

$$N \left| \begin{array}{l} \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{a}{2} \\ \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2} = \frac{\alpha' + \beta'}{2} = \frac{S' - 2P'}{2} = \frac{a' + 2b'}{2} \end{array} \right. \rightarrow N \left| \begin{array}{l} \frac{a}{2} \\ \frac{a' + 2b'}{2} \end{array} \right.$$

ت : موازی اند. زیرا M و N دارای طول های مساوی اند و معادله ی خط MN بصورت $x = \frac{a}{2}$ است.

ث : ابتدا دو خط موازی مانند d و d' را چنان رسم می کنیم که سهمی را در نقاط A و B و A' و B' قطع کند. سپس وسط های پاره های AB و $A'B'$ را به ترتیب M و N می نامیم. از رأس سهمی خط L را موازی خط MN رسم می کنیم. خط L پاسخ مسئله است.

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>