ماتریس

تعریف : هر آرایش ماتریسی از اعداد حقیقی شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود. هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را درایه می گوییم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۸ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow$$ دارای سه سطر و دو ستون

این ماتریس را ماتریسِ ۲×۳ میگویند و ۶ درایه دارد.

برای به دست آوردن تعداد درایه ها میتوان تعداد سطرها و تعداد ستون ها را ضرب کرد اما وقتی کنار ماتریس فوق مینویسیم : $A_{۳\times۲}$ دیگر حق نداریم اعداد را ضرب کنیم. این اعداد برای نشان دادن تعداد سطر و ستون است.

* وقتی مینویسیم $A_{m\times n}$ به چه معناست؟ جواب : تعداد سطرها m و تعداد ستون ها n است.

مثال: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۲}$ و بدانیم: $\begin{cases} a_{ij}=۱ & i<j \\ a_{ij}=۵ & i=j \\ a_{ij}=-۲ & i>j \end{cases}$ ماتریس را مشخص کنید.

مثال: در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۱ & ۷ \\ ۲ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $a_{۱۳}-۲a_{۲۱}+a_{۳۲}$ را بیابید.

مثال: ماتریسی بسازید که اطلاعات زیر را نشان دهد:

در یک لیگ فوتبال تیم های C, B, A هر کدام به ترتیب ۵و۴و۶ بازی شکست خورده اند. آن ها به ترتیب در ۲ و۴ و ۱ مسابقه به پیروزی رسیده اند و هر کدام در سه مسابقه بازی کرده اند. در نتیجه ۹ و ۱۵ و ۶ امتیاز کسب کرده اند.

*آیا میتوانید اطلاعات بالارا طوری دسته بندی کنید که تیم ها بر اساس امتیاز دسته بندی شوند؟

جمع و تفریق ماتریس ها

نکته : فقط و فقط ماتریس های هم مرتبه می توانند با هم جمع و تفریق شوند.

برای جمع و تفریق ماتریس ها باید حتما هم مرتبه باشند. و ماتریس حاصل ماتریسی هم مرتبه با آنها است که از جمع و تفریق درایه های نظیر به وجود آمده است.

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ آنگاه : $A\pm B=\left[a_{ij}\pm b_{ij}\right]_{m\times n}$

ضرب عدد در ماتریس

نکته : برای ضرب عدد r در ماتریس A باید عدد r را در تک تک درایه های A ضرب کنیم.

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ آنگاه : $rA=r\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ra_{ij}\right]_{m\times n}$

قرینه یک ماتریس

قرینه ماتریس A ماتریسی هم مرتبه مثل B است که اگر $A+B=\overline{O}$ در واقع تمام درایه ها قرینه می شوند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۵ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس C را طوری بیابید که $A+۲B-C=\overline{O}$

مثال : اگر $A=\left[i-j^{۲}\right]_{۳\times۳}$ و $B=[۶-ij]_{۳\times۳}$ مجموع درایه های سطر دوم $A+B$ را بیابید.

مثال: اگر $A=[i-۲j]_{۲\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ماتریس $A+۲B$ را بیابید.

مثال : ماتریس $A=\left[i^{۲}-۳j\right]_{۲\times۲}$ را با نشان دادن اعضا مشخص کنید.

مثال : مطلوبست $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به شرطی که : $a_{ij}=\begin{cases}-۲i+j & i>j \\ i-۳j & i=j \\ ۲i & i<j\end{cases}$

مثال: ماتریس زیر را به صورت آرایش مستطیلی نشان دهید

الف) $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}\ ,\ a_{ij}=\begin{cases}\sqrt{۲} & i=j \\ \frac{۱}{۲} & i<j \\ -۱ & i>j\end{cases}$

ب) $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۴}\ ,\ b_{ij}=\left[i^{۲}-۲ij\right]$

نهایی دی ۹۷- اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i.j & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j\end{cases}$ ماتریس $۲A-۳I$ را بیابید.

تساوی بین دو ماتریس :

دو ماتریس هم مرتبه با هم برابرند هرگاه درایه های نظیر با هم برابر باشند.

مثال: اگر $\begin{bmatrix} ۵ & x-۲y \\ ۴ & -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x-y & ۰ \\ z+۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار $x+y+z+t$ را بیابید.

مثال: اگر $۵A+۲B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$. ماتریس A را بیابید.

مثال: ماتریس های $A = \begin{bmatrix} ab & ۴ \\ ۳ & a+b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ با هم برابرند. $A^۲ + B^۲$ را بیابید.

مثال: اگر B, A دو ماتریس ۲×۲ باشند بطوریکه $B+۵A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$, $۳A-۲B=\begin{bmatrix} ۷ & ۱۱ \\ ۵ & -۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس B, A را بیابید.

معرفی چند ماتریس خاص

❶ ماتریس مربعی: اگر تعداد سطرها و ستون ها برابر باشد، A را یک ماتریس مربعی می گوییم. گاهی ماتریس مربته $n\times n$ را مرتبه n هم میگوییم.

$A=\begin{bmatrix} ۳ \end{bmatrix}$ مربعی مرتبه ۱ $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ مربعی مرتبه ۲ $C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۹ \\ -۴ & ۴ & ۶ \\ ۷ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ مربعی مرتبه ۳

❷ ماتریس سطری: ماتریسی که فقط یک سطر دارد.

$A=\begin{bmatrix} ۳ \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۸ \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & -۳ \end{bmatrix}$

❸ ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط یک ستون دارد. $C=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} ۵ \end{bmatrix}$

❹ ماتریس قطری : ماتریسی که تمام درایه ها به جز قطر اصلی همگی صفر هستند. $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$

$$A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n} \; ; \; i\neq j \Rightarrow a_{ij}=۰$$

❺ **ماتریس اسکالر** : ماتریسی که اولا قطری است . ثانیا تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس قطری که تمام درایه های روی قطر اصلی آن ۱ باشد را I می نامیم.

$$I_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

❻ **ماتریس صفر** : ماتریسی که تمام درایه های آن صفر باشد که در قسمت ماتریس قرینه معرفی شد. و با $\overline{O}$ نمایش می دهیم.

❼ **ماتریس بالا مثلثی** : ماتریسی است که تمام درایه های پایین قطراصلی همگی صفر باشند(سایر درایه ها میتوانند صفرباشند یا نباشند.)

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} \qquad i > j \Rightarrow a_{ij} = ۰$$

$$B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

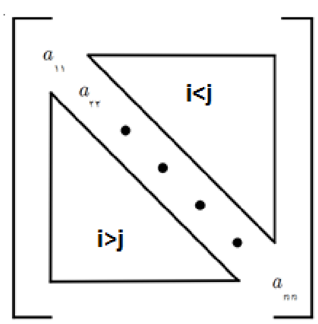
❽ **ماتریس پایین مثلثی** : ماتریسی است که تمام درایه های پایین قطراصلی همگی صفر باشند(سایر درایه ها میتوانند صفرباشند یا نباشند.)

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} \qquad i < j \Rightarrow a_{ij} = ۰$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۵ & ۲ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته : ماتریس قطری و ماتریس صفر ؛ هم بالا مثلثی هستند و هم پایین مثلثی.

نکته : در شکل روبرو در مورد درایه های بالای قطر اصلی و پایین قطر اصلی



ضرب ماتریس سطری در ستونی

ستونی سطری

$$A_{1\times m} \times B_{m\times 1}$$

$\begin{bmatrix} \Theta \\ \Psi \\ \Delta \\ \varpi \end{bmatrix} [\varpi \quad \Delta \quad \Psi \quad \Theta]$ برای ضرب باید علامت هایی که شبیه هم هستند در هم ضرب شوند و سپس عددهای به دست آمده را با هم جمع کنیم.

نکته : برای ضرب اولین موضوعی که به آن دقت میکنیم این است که وقتی دو ماتریس کنار هم نوشته میشوند تعداد ستون های اولی با تعداد سطر های دومی باید با هم برابر باشند. $A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$

مثال: $[6 \quad -3 \quad 3 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = (2\times 1)+(3\times -4)+(-3\times 5)+(6\times 9)$

برای ضرب به روش زیر عمل می کنیم

۱- ابتدا بررسی می کنیم ضرب قابل انجام دادن هست یا خیر(نکته بالا)

۲- ماتریس اولی را سطر به سطر عمل می کنیم.

۳- ماتریس دومی رو ستون به ستون عمل می کنیم.

۴- یک سطر از ماتریس اولی را با یک ستون از ماتریس دومی با روش ضرب سطری در ستونی ضرب می کنیم. سپس سراغ سطر بعدی می رویم.

مثال: اگر $A_{3\times 2}$ و $B_{5\times 3}$ کدام ضرب قابل انجام دادن است؟ مرتبه ی ماتریس حاصل را مشخص کنید.

مثال: ماتریس $A_{2\times 2}$ را به گونه ای پیدا کنید که در تساوی $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ صدق کند.

مثال : $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = A \times B$ درایه ی c_{23} را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، درایه واقع بر سطر دوم و ستون اول ماتریس ABC را بیابید.

مثال : ماتریس های B,A مربعی و از مرتبه ۲ هستند. ثابت کنید مجموع درایه های روی قطر اصلی دو ماتریس $A+B$, $B+A$ با هم برابر هستند.

ویژگی های ضرب ماتریس ها

❶ در حالت کلی خاصیت جا به جایی ندارد.

❷ ضرب همانی در ماتریس، خاصیت جابه جایی دارد. $AI = IA = A$

❸ اگر $A\times B = A\times C$ نمی توان نتیجه گرفت $B = C$ (حذف برقرار نیست)

نکته: وقتی خاصیت حذف برقرار است که ماتریس A وارون پذیر باشد. (بعدا معنی وارون پذیری را خواهیم خواند و این موضوع را اثبات خواهیم کرد.)

❹ ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد. $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

❺ ضرب ماتریس ها خاصیت توزیع پذیری و فاکتور گیری دارد. $A\times(B\pm C) = (A\times B)\pm(A\times C)$

❻ در اعداد حقیقی می دانیم : $\forall x, y \in R \quad xy = ۰ \Rightarrow x = ۰ \vee y = ۰$

اما این خاصیت در ضرب ماتریس ها برقرار نیست یعنی اگر بدانیم $AB = \overline{O}$ نمیتوان نتیجه گرفت $A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$

📖مثال: دو ماتریس ناصفر مثال بزند که حاصلضرب آنها ماتریس صفرشود و درستی حکم بالا را نشان دهید.

❼حاصلضرب دو ماتریس قطری

کافی است درایه های روی قطر اصلی را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

برای به توان رساندن هم همین خاصیت را داریم. یعنی تمام درایه های روی قطر اصلی به توان مورد نظر میرسد.

📖مثال : برای دو ماتریس هم مرتبه و مربعی B, A داریم : $A+B=I$ ثابت کنید ضرب B, A خاصیت جابه جایی دارد.

❽ اگر دو ماتریس B, A تعویض پذیر باشند یعنی $A\times B=B\times A$ آنگاه اتحادهای زیر در مورد آنها برقرار است.

الف) اتحاد مربع دو جمله ای $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

ب) اتحاد مزدوج $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

پ) اتحاد چاق و لاغر $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$

مثال: اگر $A=B+C$ حاصل $A^{۲}+B^{۲}-AB-BA$ کدام است؟ (آزاد۷۸)

۱) $-C^{۲}$ ۲) $C^{۲}$ ۳) $\overline{O}$ ۴) C

مثال- اگر ضرب ماتریسی $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید.

مثال:اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۴ \\ -۱ & b \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ، مقدار b,a را چنان بیابید که حاصلضرب $A\times B$ ماتریسی قطری شود.

نکته: ماتریس قطری فرعی وقتی به توان برسد به ماتریس قطری تبدیل میشود.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{۱۱}$ چگونه است؟

مثال: $A^{۲}=۵A$ آنگاه $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۱۰A$ ۲) $۵^{۱۰}A$ ۳) $۵^{۹}A$ ۴) $۲۵A$

نکته: اگر $A^{۲}=kA$ آنگاه $A^{n}=k^{n-۱}A$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{۷}$ را بیابید.

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ مجموعه درایه های $A^{۵}$ کدام است؟

۱) $-۳^{۷}$ ۲) $۳^{۷}$ ۳) $-۳^{۶}$ ۴) $۳^{۶}$

مثال: اگر $A^{۲}=I$ آنگاه $A^{۱۳۹۷}+A^{۱۳۹۸}$ با کدام ماتریس برابر است؟

۱) $A+I$ ۲) $۲A$ ۳) $۲I$ ۴) $۲A+I$

مثال: مجموع درایه های $A^{۱۴۶}-A^{۱۳۹}$ را در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & -۸ \\ ۶ & -۷ \end{bmatrix}$ بیابید.

مثال: اگر $A^{۳}=-۲I$ آنگاه $A^{۲۹}$ کدام است؟

۱) $۵۱۲A^{۲}$ ۲) $-۵۱۲A^{۲}$ ۳) $۵۱۲A$ ۴) $-۲۵۶A^{۲}$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $C^{۲}$ کدام است؟

۱) ۱۶　　۲) ۱۸　　۳) ۲۰　　۴) ۲۴

وارون ماتریس

در مجموعه اعداد حقیقی وارون عددناصفر a ، عددی حقیقی مثل $\frac{۱}{a}$ است بطوریکه $a\times\frac{۱}{a}=۱$ که عدد ۱ را عضو خنثی عمل ضرب در اعداد حقیقی میگویند.

در ماتریس ها وارون ماتریس ناصفر A ، ماتریسی مانند B است که $\begin{matrix} A\times B=I \\ B\times A=I \end{matrix}$

ماتریس وارون A را با $A^{-۱}$ نمایش می دهیم.

مثال: نشان دهید وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $B=\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۱۰} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۵} & ۰ \end{bmatrix}$ است.

روش محاسبه وارون ماتریس ۲×۲ روبرو

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

دنبال ماتریسی مثل B هستیم که $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ و $A\times B=I$

با حل دستگاه روبرو داریم : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} ax+bz=۱ \\ ay+bt=۰ \\ cx+dz=۰ \\ cy+dt=۱ \end{cases} \Rightarrow B=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

* پس وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس روبروست: $B=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

عدد حقیقی $ad-bc$ که در واقع تفاضل درایه های روی قطر اصلی و قطر فرعی است را دترمینان ماتریس A میگوییم.

پس: $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

نکته: ماتریس وقتی وارون دارد که دترمینان آن صفر نشود .پس اگر دترمینان ماتریسی برابر صفر شود ، ماتریس وارون ندارد. اصطلاحا میگوییم وارون پذیر نیست.

یعنی نمیتوان ماتریسی پیدا کرد که اگر در خود ماتریس ضرب شود حاصل I شود.

مثال: مقدار a را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+۱ & ۱ \\ ۲ & a+۲ \end{bmatrix}$ وارون پذیر باشد.

مثال: اگر $\cos x=\frac{۱}{۲}$ و $A=\begin{bmatrix}۱ & -\tan x\\ \tan x & ۱\end{bmatrix}$ دترمینان A^{-1} را بیابید.

نکات مهم وارون

برای دو ماتریس وارون پذیر ۲×۲ داریم :

الف) $(A\times B)^{-۱}=B^{-۱}\times A^{-۱}$

ب) $(kA)^{-۱}=\frac{۱}{k}A^{-۱}$

پ) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

ت) $(A^{n})^{-۱}=(A^{-۱})^{n}$

ث) $(B^{-۱}AB)^{n}=B^{-۱}A^{n}B$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۱\\ -۱ & -a\end{bmatrix}$ باشد، $(A^{۲})^{-۱}$ را بیابید. ($a\neq ۱,-۱$)

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}۱۳ & ۵\\ ۱۵ & -۷\end{bmatrix}$ باشند، حاصل $(B^{-۱}AB)^{۱۴}$ کدام است؟

۱) $-A$ ۲) A ۳) I ۴) $-I$

دستگاه دو معادله دو مجهول

اگر دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ را به شکل ماتریسی بنویسیم داریم: $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب مینامیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را ماتریس مجهولات و $\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ را ماتریس معلوم(مقادیر) مینامیم.

پس شکل ماتریسی دستگاه بالا به صورت زیر است: $AX=B$

اگر هر دو طرف رابطه فوق را در A^{-1} ضرب کنیم داریم : $X=A^{-1}\times B$

مثال: اگر $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=A\times\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۶ & ۱۴ \end{bmatrix}$ ماتریس A را بیابید.

مثال: در دستگاه $\begin{cases} ۲x+۳y=۰ \\ ۴x+۵y=۱ \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب را به دست آوردید.

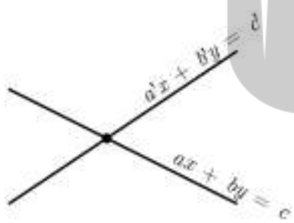
مثال: اگر X ماتریسی ۲×۲ باشد که $X \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه ماتریس X را پیدا کنید.

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ متشکل از دو معادله خط است. اگر y,x خاصی در دستگاه صدق کند جواب دستگاه است.

(x,y) نقطه ای از صفحه ای است که هم روی خط $ax+by=c$ و هم روی $a'x+b'y=c'$ است پس (x,y) همان محل تلاقی دو خط است.

در واقع حل دستگاه همان پیدا کردن محل تلاقی دو خط است.



الف) اگر دو خط متقاطع باشند

$$m \neq m' \Rightarrow \frac{-a}{b} \neq \frac{-a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$$

ب) دو خط موازی هستند اما منطبق نیستند. $m = m' \Rightarrow \frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

پ) دو خط موازی و منطبق هستند.

$$m = m' \Rightarrow \frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

گام اول: ابتدا تصمیم می گیریم که با کدام سطر یا ستون میخواهیم دترمینان را محاسبه کنیم.

گام دوم: از اولین درایه برای تمام درایه ها میتوان به صورت یک در میان علامت مثبت و منفی در نظر گرفت.

گام سوم : هر درایه باید در یک دترمینان ۲×۲ ضرب شود. روش به دست آوردن این دترمینان به این صورت است که تمام درایه هایی که در سطر و ستون این درایه ی مورد نظر هست را حذف میکنیم و بقیه را در دترمینان مورد نظر مینویسیم. به طور مثال درایه هایی که متناظر با $a_{۱۳}$ حذف میشوند به صورت روبروست:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

مثال: دترمینان ماتریس روبرو را بیابید. $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & -۷ \\ -۱ & -۲ & ۵ \end{bmatrix}$

یافتن ماتریس مربعی درجه ۳ با روش ساروس

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال: اگر $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=A+x\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$ باشد، A کدام است؟(سراسری ریاضی ۸۷)

نکات دترمینان های 3×3

۱- $|I_3|=1$

۲- $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$

۳- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=-abc$

۴- $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$

۵- $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix}=abc$

۶- اگر یک سطر (ستون) صفرباشد، حاصل صفر است.

۷- اگر دو سطر (دو ستون) ماتریسی با هم برابر باشد، دترمینان صفر است.

۸- اگر A ماتریسی مربعی و $n\times n$ باشد، $|\lambda A|=\lambda^n|A|$

۹- اگر یکی از سطرها (ستونها) مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد ، دترمینان صفر است.

۱۰- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$

۱۱- اگر $m>n$ آنگاه $|A_{m\times n}B_{n\times m}|=0$

نهایی خرداد ۹۸ - اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد،حاصل $|A^3|$ را بیابید.

مثال: اگر $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & y & -1 \\ 3 & 4 & z \end{vmatrix}=-2$ آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} -2x & 12 & -6 \\ 1 & -3y & -1 \\ 1 & -12 & z \end{vmatrix}$ را با استفاده از خواص دترمینان ها بیابید.

مثال: اگر A ماتریسی ۲×۲ باشد، بطوری که $|A|=-۳$ حاصل $\left||A|A\right|$ چقدر است؟

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد، بطوری که $|A|=۴$ آنگاه دترمینان ماتریس $A|A|$ چقدر است؟(کنکور ۹۸)

۱) **۶۴** ۲) **۹۶** ۳) **۱۲۸** ۴) **۲۵۶**

مثال: $|A|A=۵I_۳$ آنگاه حاصل $|A|$ را بیابید.

مثال: معادله $\begin{vmatrix} ۷ & ۵ & x \\ ۷ & ۱ & x \\ ۷ & ۲ & x \end{vmatrix}=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

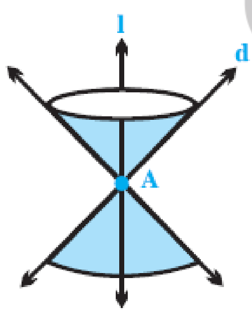
مثال: مقادیر x از رابطه $\begin{vmatrix} ۰ & x-۳ & x-۲ \\ x+۳ & ۰ & -۴ \\ x+۲ & ۶ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$ کدام است؟(کنکور ریاضی ۹۷)

۱) $-۱,-۶$ ۲) $-۱,۶$ ۳) $۱,-۶$ ۴) $۱,۶$

مقاطع مخروطی

❶ رویه مخروطی: اگر خط l,d در نقطه ای مانند A (مطابق شکل) **متقاطع** باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را در یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم.

در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.



❷ فصل مشترک حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی را مقطع مخروطی می‌نامیم.

حالت های مختلف این تقاطع به صورت زیر است: