

بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**info**

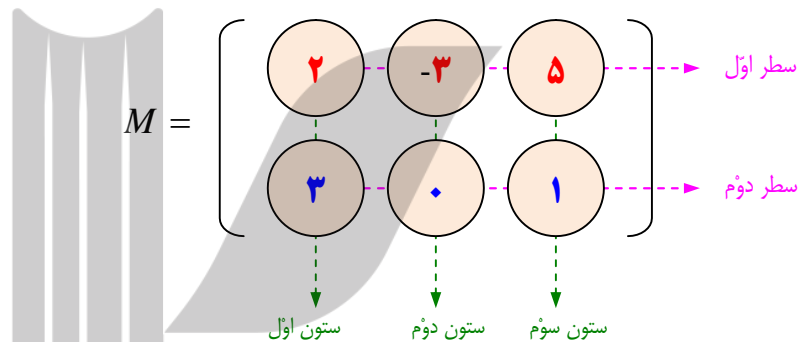
<https://konkur.info>

## درس اول : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

در این فصل با مفهوم ماتریس و ویژگی های آن آشنا می شوید و در نهایت از این مفهوم برای حل دستگاه های معادلات خطی استفاده می کنیم.

### مفهوم ماتریس

هر آرایش مستطیل شکل از اعداد ، در قالب سطر و ستون را یک **ماتریس** می نامند. هر ماتریس را با یک حرف بزرگ لاتین نامگذاری می کنند. مانند ماتریس زیر



این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است<sup>۱</sup>. در اصطلاح گویند این ماتریس دارای مرتبه‌ی  $2 \times 3$  است<sup>۲</sup>. هر یک از اعداد تشکیل دهنده‌ی ماتریس را **درایه** می نامند. اگر درایه  $k$  در سطر  $i$  و ستون  $j$  قرار دارد، می نویسند.

$$a_{ij} = k$$

مثلاً در ماتریس فوق می توان نوشت :  $a_{۱۳} = ۱$  و  $a_{۱۲} = -۳$  و  $a_{۲۲} = ۰$  و  $a_{۲۱} = ۳$

**مثال :** ماتریس مقابل را در نظر بگیرید. سپس :

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ -۲ & ۰ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

ب) درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول کدام است.

**حل :** الف) مرتبه‌ی ماتریس  $4 \times 2$  است. ب)  $a_{۲۱} = ۳$

<sup>۱</sup> . سطر ها را از بالا به پایین و ستون ها را از چپ به راست شماره گذاری می کنند.

<sup>۲</sup> . به طور کلی، اگر ماتریسی دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون باشد. در این صورت گویند، ماتریس از مرتبه‌ی  $m \times n$  است.

**مثال:** اگر  $i$  شماره‌ی سطر و  $j$  شماره‌ی ستون هر درایه باشند. ماتریس زیر را با درایه هایش بنویسید.

$$A = [i^2 + 3j]_{2 \times 3}$$

**حل:**

$$A = [i^2 + 3j]_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} (1)^2 + 3(1) & (1)^2 + 3(2) & (1)^2 + 3(3) \\ (2)^2 + 3(1) & (2)^2 + 3(2) & (2)^2 + 3(3) \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

**تمرین ۱:** اگر  $i$  شماره‌ی سطر و  $j$  شماره‌ی ستون هر درایه باشند. در هر مورد ماتریس داده شده را

تشکیل دهید.

۱)  $A = [3i + 2j]_{2 \times 2}$

۳)  $C = [3j]_{3 \times 2}$

۲)  $B = [-ij]_{3 \times 3}$

۴)  $D = [2(-1)^{i+j}]_{3 \times 3}$

\*\*\*

### ماتریس مربعی

اگر تعداد سطر و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن ماتریس را **مربعی** می‌نامند.

مانند ماتریس‌های زیر.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

هر ماتریس مربعی مانند یک چهارضلعی دارای دو قطر است. قطری که درایه‌های  $a_{ij}$  برای  $i = j$  روی

آن قرار دارند را **قطر اصلی** و دیگری را **قطر فرعی** می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی      قطر فرعی

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قطر اصلی      قطر فرعی

\*\*\*

## معرفی چند ماتریس خاص

(۱) **ماتریس سطری**: ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مانند ماتریس زیر

$$A = [1 \quad 3 \quad -1 \quad 5]_{1 \times 4}$$

(۲) **ماتریس ستونی**: ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مانند ماتریس زیر

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

(۳) **ماتریس صفر**: ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

در این فصل ماتریس صفر را با نماد  $O$  نمایش می‌دهیم.

(۴) **ماتریس قطری**: یک ماتریس مربعی است که همه‌ی درایه‌های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. مانند

ماتریس زیر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(۵) **ماتریس اسکالر**: یک ماتریس قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر باشند. مانند

ماتریس‌های زیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(۶) **ماتریس همانی (واحد)**: یک ماتریس مربعی می‌باشد که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن یک و بقیه‌ی

درایه‌ها صفر هستند. مانند ماتریس زیر

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

۷) ماتریس پایین مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. مانند

ماتریس زیر

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس بالا مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مانند

ماتریس زیر

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

\*\*\*

### ماتریس های مساوی

دو ماتریس را مساوی می گویند، هرگاه:

الف: هم مرتبه باشند.

ب: درایه های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند. یعنی برای هر  $i$  و  $j$

$$(A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij})$$

مثلاً:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال: اگر دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  مساوی باشند. مقدار  $x$  و  $y$  و  $z$  را به دست آورید.

حل:

$$A = B \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \rightarrow x = 6, y = 3, z = 6 \\ z - 1 = 5 \end{cases}$$

### تمرین برای حل :

۲: دو ماتریس زیر مساویند. مقدار  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2a+b & 5 \end{bmatrix}$$

۳: دو ماتریس زیر مساویند. مقدار  $x$  و  $y$  را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ 2 & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & y^2+1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

\*\*\*

### ضرب عدد در یک ماتریس : (ضرب اسکالر)

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را در تمام درایه‌ها ضرب کنیم. برای مثال

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 2A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 10 \\ 4 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

اگر تمام درایه‌های یک ماتریس را در عدد  $-1$  ضرب کنیم. ماتریس حاصل را **ماتریس قرینه** می‌نامند. به عبارتی ساده‌تر اگر تمام درایه‌های ماتریسی را قرینه کنیم ماتریس جدیدی بدست می‌آید که آن را ماتریس

قرینه می‌گویند. برای مثال

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس قرینه}$$

**نتیجه :** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه و  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند. در این صورت :

الف)  $A = B \rightarrow rA = rB$

ب)  $rA = rB, r \neq 0 \rightarrow A = B$

ج)  $1A = A$

د)  $0A = O$

**مثال:** اگر  $r$  یک عدد حقیقی ناصفر و  $A$  و  $B$  دو ماتریس دلخواه هم مرتبه باشند، ثابت کنید که:

$$rA = rB \rightarrow A = B$$

**حل:** چون  $r \neq 0$  پس  $\frac{1}{r}$  وجود دارد بنابراین:

$$rA = rB \rightarrow \frac{1}{r}(rA) = \frac{1}{r}(rB) \rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)A = \left(\frac{1}{r}\right)B \rightarrow \backslash A = \backslash B \rightarrow A = B$$

\*\*\*

### اعمال روی ماتریس ها

در ادامه اعمال روی ماتریس ها را معرفی می کنیم.

#### الف: جمع ماتریس ها

دو ماتریس را وقتی می توان جمع کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه های نظیر به نظیر با هم جمع می شوند. برای مثال

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

#### ب: تفاضل ماتریس ها

برای تفاضل دو ماتریس کافی است ماتریس اولی را با قرینه ی دومی جمع کنیم.

$$A - B = A + (-B)$$

برای مثال

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

**تمرین ۴:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  مطلوبست تعیین

الف)  $2A$       ب)  $A + 2B$       ج)  $2A - 3B$       د)  $A - B + C$

**نتیجه:**

(۱) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس صفر هم مرتبه اش، برابر همان ماتریس است.

$$A + O = A$$

(۲) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس قرینه اش، برابر ماتریس صفر است.

$$A + (-A) = O$$

(۳) جمع ماتریس‌ها خاصیت جابجایی دارد.

$$A + B = B + A$$

(۴) جمع ماتریس‌ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(۵) ضرب مجموع دو عدد حقیقی در یک ماتریس

$$(r + s)A = rA + sA$$

(۶) ضرب یک عدد حقیقی در مجموع دو ماتریس

$$r(A + B) = rA + rB$$

(۷) ضرب ماتریس در حاصل ضرب دو عدد

$$(rs)A = r(sA)$$

**مثال:** نشان دهید که قانون حذف در جمع ماتریس‌ها برقرار است. یعنی اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  سه ماتریس هم

مرتبه باشند. از تساوی  $A + B = A + C$  می‌توان ثابت کرد  $B = C$

**حل:** فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  سه ماتریس هم مرتبه باشند، نشان می‌دهیم که اگر

$$A + B = A + C \rightarrow B = C$$

برای این کار کافی است طرفین تساوی  $A + B = A + C$  را با  $-A$  جمع کنیم.

$$-A + (A + B) = -A + (A + C) \rightarrow (-A + A) + B = (-A + A) + C$$

$$\rightarrow O + B = O + C \rightarrow B = C$$



### ج : ضرب ماتریس ها :

دو ماتریس را وقتی می توان در هم ضرب کرد که تعداد ستون های اولی برابر تعداد سطر های دومی باشد. در این صورت هر درایه ی ماتریس حاصل ضرب را به شکل ضرب داخلی<sup>۳</sup> تعیین می کنیم.

#### مثال ۱ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 5 & 3 \\ 18 & 23 & 19 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

#### مثال ۲ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 24 & 11 \\ 37 & 23 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

**تذکره ۱ :** ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد. زیرا اگر  $A \times B$  تعریف می شود، ممکن است  $B \times A$  قابل تعریف نباشد و ممکن است قابل تعریف باشد ولی حاصل برابر  $A \times B$  نشود.

به نمونه های زیر توجه کنید.

نمونه ی اول :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

<sup>۳</sup> . بدین شکل که برای تعیین درایه ی  $a_{ij}$  در ماتریس حاصل ضرب ، ابتدا درایه های نظیر سطر  $i$  ماتریس اول را در یک ستون  $j$  ماتریس دوم را ضرب کرده و سپس حاصل ضرب ها را با هم جمع می کنیم.

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \text{تعریف نمی شود.}$$

$$\rightarrow A \times B \neq B \times A$$

نمونه‌ی دوم :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\rightarrow A \times B \neq B \times A$$

**تمرین ۵:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  ماتریس‌های زیر را در صورت امکان بدست

آورید.

الف)  $A \times B =$                       ب)  $B \times A =$                       ج)  $A^2 =$

**تذکر ۲:** ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A(BC) = (AB)C$$

**تذکر ۳:** ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع آنها توزیع پذیر است.

$$A(B + C) = AB + AC$$

**تذکر ۴:** اگر  $A$  یک ماتریس مربعی  $I$  ماتریس همانی و  $r$  یک عدد حقیقی و  $n$  یک عدد طبیعی باشند. در

این صورت:

$$۱) A^1 = A \quad ۲) A^n = A^{n-1} \times A \quad ۳) I^n = I \quad ۴) (rA)^n = r^n A^n$$

**تذکر ۵:** خاصیت توزیعی پذیری ضرب ماتریس‌ها نسبت به جمع ماتریس‌ها

یعنی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  و  $B = [b_{ij}]_{n \times p}$  و  $C = [c_{ij}]_{n \times p}$  سه ماتریس باشند. در این صورت

$$A(B + C) = AB + AC$$

**تذکره ۶:** خاصیت ضرب یک ماتریس در ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن

یعنی اگر  $A$  یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی  $n$  باشد. در این صورت:  $AI_n = I_n A = A$

**تذکره ۷:** خاصیت ضرب دو ماتریس دارای ضریب

یعنی اگر  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$  دو ماتریس و  $r$  و  $s$  دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(rA)(sB) = rs(AB)$$

**توجه ۱:** ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر باشد، ولی هیچکدام از ماتریس‌ها صفر

نباشند.

$$AB = O \rightarrow A = O \vee B = O$$

**مثال:** دو ماتریس زیر صفر نیستند ولی حاصل ضرب آنها ماتریس صفر است.

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = O$$

**توجه ۲:** قاعده‌ی حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد.

$$AB = AC \rightarrow B = C$$

**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} \cdot & 4 \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  بدیهی است که تساوی  $AB = AC$  برقرار

است ولی  $B \neq C$

**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$  در این صورت ثابت کنید که  $A^6 = 64I$

**حل:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \cdot \\ \cdot & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = 4I$$

$$\Rightarrow A^6 = (A^2)^3 = (4I)^3 = 64I^3 = 64I$$

## ترانهادی یک ماتریس

اگر جای سطر ها و ستون های یک ماتریس را جا به جا کنیم، ماتریس دیگری حاصل می شود که آنرا ماتریس ترانهادی می نامند.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \rightarrow A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$$

$$a_{ij} = b_{ji}$$

**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  در این صورت ترانهادی ماتریس  $A$  را بنویسید.

**حل:**

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

**تمرین ۶:** اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $A^2 - A^t + I_2$  را بدست آورید.

**توجه:** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و  $r$  یک عدد حقیقی باشند. در این صورت:

۱)  $(A + B)^t = A^t + B^t$

۲)  $(rA)^t = rA^t$

۳)  $(AB)^t = B^t A^t$

۴)  $(A^t)^t = A$

۵)  $(A^t)^n = (A^n)^t$

**تمرین ۷:** تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$(AB^t - BA^t)^t = BA^t - AB^t$$

تمرین برای حل :

۸: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت

های زیر را در صورت امکان به دست آورید.

الف)  $3A =$  ج)  $A \times C$  هـ)  $A \times B$

ب)  $B + D =$  د)  $B - D$  و)  $B \times D$

۹: اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت ماتریس های زیر را بیابید.

الف)  $(A + B) \times (A - B)$  ب)  $(A + B)^2$  ج)  $(A^t + B) \times (A + B^t)$

۱۰: اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  حاصل عبارت  $A^2 - 3A + I_2$  را بدست آورید.

۱۱: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت ماتریس  $A^2 + AB + 2B$  را بیابید.

۱۲: اگر  $A = \begin{bmatrix} mn & n^2 \\ -m^2 & -mn \end{bmatrix}$  نشان دهید که  $A^2 = O$

۱۳: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  ماتریس  $A \times B \times C$  را بدست

آورید.

۱۴: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$  نشان دهید که

$A(B + C) = AB + AC$

۱۵: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت ماتریس  $A^3$  را تعیین کنید.

۱۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ماتریس  $A^7$  را به دست آورید.

۱۷: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$  نشان دهید که  $A^3 = O$

۱۸: دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ مثال بزنید که هیچکدام ماتریس صفر نباشند ولی حاصل ضرب آنها ماتریس صفر است.

۱۹: مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری پیدا کنید که  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

۲۰: ماتریس  $X$  را طوری بیابید که  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

۲۱: معادله‌ی ماتریسی  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$  را حل کنید.

توجه: در حالت های خاص می توان ماتریس  $A^n$  را بطور مستقیم تعیین کرد. برای مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{bmatrix}$$

۲۲: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  ماتریس  $A^{2006}$  را تعیین کنید.

۲۳: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  در این صورت ماتریس  $(A^2 + AB + 2B)^{100}$  را بیابید.

۲۴: اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که  $A \times B$  یک

ماتریس قطری باشد.

۲۵: حاصل ضرب یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ دلخواه، در یک ماتریس قطری هم مرتبه‌ی آن را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

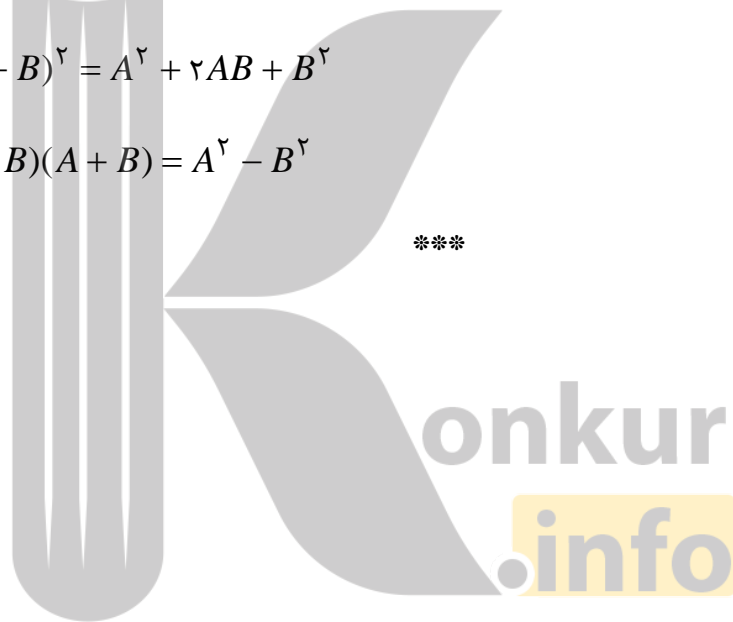
۲۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  حاصل  $A^3$  را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۲۷: اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه و  $A \times B = B \times A$  (تعویض پذیر) باشند. ثابت کنید.

الف)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب)  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

\*\*\*



## درس دوم: وارون ماتریس و دترمینان

در این درس ابتدا به مفهوم دترمینان یک ماتریس مربعی را پرداخته و در ادامه مفهوم وارون یک ماتریس مربعی را بیان می‌کنیم. در انتها کاربردهایی از این دو مفهوم را خواهیم داشت.

### دترمینان ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$  عددی به نام دترمینان آن ماتریس نسبت داده می‌شود. دترمینان ماتریس مربعی  $A$  را با نماد  $|A|$  یا  $\det(A)$  نمایش می‌دهند و با توجه به مرتبه‌ی ماتریس به روشی خاص بدست می‌آورند. در اینجا فقط دترمینان ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  را معرفی می‌کنیم.

### الف: دترمینان ماتریس مربعی مرتبه‌ی $2 \times 2$

طبق تعریف دترمینان ماتریس  $2 \times 2$  با تفاضل حاصل ضرب درایه‌های قطر فرعی از حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی بدست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$$

**مثال:** دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**حل:**

$$|A| = (-1)(4) - (3)(2) = -4 - 6 = -10$$

**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} |A| & 4|A| \\ 6 & |A|^2 \end{bmatrix}$  در این صورت مقدار  $|A|$  را به دست آورید.

**حل:**

$$|A| = |A|^3 - 24|A| \rightarrow |A|^3 - 25|A| = 0 \rightarrow |A|(|A|^2 - 25) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A|^2 - 25 = 0 \rightarrow |A| = \pm 5 \end{cases}$$



## تمرین برای حل:

۱: دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف)  $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$

ب)  $B = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

۲: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & 2-x \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

۳: دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

۴: برای دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  درستی یا نادرستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف)  $|A + B| = |A| + |B|$

ب)  $|AB| = |A| |B|$

\*\*\*

## ماتریس کهاد (مینور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی، ماتریسی که از حذف سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام بدست می آید را کهاد درایه‌ی  $a_{ij}$

نامند و آنرا با  $M_{ij}$  نمایش می دهند.

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$  در این صورت:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad M_{23} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

\*\*\*

## همسازه‌ی (کوفاکتور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی همسازه‌ی درایه‌ی  $a_{ij}$  عددی است که به شکل زیر بدست می‌آید.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

**مثال:** همسازه‌ی درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس زیر به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**حل:**

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

\*\*\*

### ب: روش‌های محاسبه‌ی دترمینان ماتریس $3 \times 3$

در این قسمت روش‌های محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس  $3 \times 3$  را بیان می‌کنیم.

#### روش اول: محاسبه‌ی دترمینان ماتریس $3 \times 3$ به روش بسط

با توجه به درایه‌های یک سطر (یا یک ستون) دلخواه و کهاد آنها می‌توان دترمینان یک ماتریس  $3 \times 3$  را محاسبه کرد.

$$\text{فرض کنید: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ در این صورت:}$$

$$|A| = \sum_{j=1}^3 a_{ij} A_{ij} \quad (i=1 \text{ یا } i=2 \text{ یا } i=3) \quad \text{بسط نسبت به یک سطر دلخواه}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^3 a_{ij} A_{ij} \quad (j=1 \text{ یا } j=2 \text{ یا } j=3) \quad \text{بسط نسبت به یک ستون دلخواه}$$

**مثال:** بسط نسبت به سطر اول  $i = 1$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

این روش محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس مربعی را روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون یا به اختصار

**روش بسط<sup>۱</sup>** می نامند.

**مثال:** دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**حل:** کافی است یک سطر یا یک ستون دلخواه را انتخاب نموده و نسبت به آن بسط می دهیم.

مثلاً سطر سوم

$$|A| = (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)(1)(-6 - 10) + (1)(-1)(-9 - 5) + (3)(1)(6 - 2)$$

$$|A| = 16 + 14 + 12 = 42$$

**مثال:** دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**حل:** به جهت وجود صفرهای بیشتر، نسبت به سطر اول بسط می دهیم. لذا:

$$|A| = 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

**مثال:** دترمینان ماتریس زیر را به کمک بسط به دست آورید. با مشاهده‌ی حاصل چه نتیجه ای می گیرید؟

<sup>۱</sup> الف: در روش بسط بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفرهای بیشتری داشته باشد.

ب: محاسبه‌ی دترمینان های ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۴ و بالاتر نیز به همین شکل انجام می شود که جزء هدف کتاب نمی

باشد.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

**حل :** بسط نسبت به سطر سوم

$$|A| = (-1)^{3+1} x \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} y \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} z \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow |A| = x(bc - bc) - y(ac - ac) + z(ab - ab) = 0$$

**نتیجه :** اگر درایه های دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مربعی، نظیر به نظیر مساوی باشند، دترمینان آن

ماتریس برابر صفر است.

**تمرین برای حل :**

**۵ :** ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الف) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک سطر دلخواه بدست آورید.

ب) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک ستون دلخواه بدست آورید.

**۶ :** به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$B = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ 1 & b & \cdot \\ 3 & -5 & c \end{bmatrix}$$

**۷ :** به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$C = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

با مشاهده‌ی حاصل ، در مورد دترمینان یک ماتریس قطری چه نتیجه ای می گیرید؟ آیا این نتیجه برای ماتریس های مربعی بالا مثلثی و پایین مثلثی قابل بیان است.

۸: دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 4 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

۹: یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ بنویسید که دترمینان آن ۶ باشد.

۱۰: یک اگر ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ مانند  $A$  بنویسید که دترمینان آن  $-6$  باشد. سپس  $A^2$  را محاسبه

کنید. با محاسبه‌ی  $|A^2|$  و مقایسه‌ی آن با  $|A|$  چه نتیجه ای می گیرید؟

\*\*\*

### روش دوم: محاسبه‌ی دترمینان های ماتریس $3 \times 3$ به روش ساروس

ابتدا ماتریس را دو بار کنار هم می نویسیم. سپس با توجه به شکل زیر حاصل ضرب های درایه های روی خط ها را محاسبه و مطابق شکل جمع و تفریق می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & + & + & + & & - & - \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & & & & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & & \end{array}$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

**مثال:** دترمینان ماتریس زیر را به کمک قاعده‌ی ساروس تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**حل:**

$$|A| = (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (3)(3)(2) - (5)(4)(4) - (2)(2)(-1)$$

$$|A| = 24 - 15 + 16 - 18 - 80 + 4 = -69$$

**تمرین برای حل:**

**۱۱:** به روش ساروس دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \cdot & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**۱۲:** اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$  به کمک قاعده‌ی ساروس نشان دهید که

$$|A| = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$$

**۱۴:** به کمک قاعده‌ی ساروس ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} \cdot & a & b \\ a & \cdot & c \\ b & c & \cdot \end{vmatrix} = 2abc$$

۱۵: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|AB|$  و  $|BA|$  را به دست آورید.

۱۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$  در این صورت  $|A^2|$  را به دست آورید.

۱۷: ماتریس های  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

الف: حاصل  $|A|$  و  $|B|$  را به دست آورید.

ب: با مقایسه‌ی حاصل دترمینانهای بدست آمده برای ماتریس های فوق، چه نتیجه ای می گیرید.

\*\*\*

### ویژگی های دترمینان یک ماتریس مربعی

در محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس به کمک بسط نسبت به یک سطر یا یک ستون با ویژگی های جالبی

برخورد می کنیم. این ویژگی ها عبارتند از:

**ویژگی اول:** دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی، پایین مثلثی و قطری برابر با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 3 & -5 & c \end{vmatrix} = abc$$

مثلاً:

**ویژگی دوم:** هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی برابر صفر باشند، دترمینان آن

ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

مثلاً:

**ویژگی سوم:** هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی در عدد ثابت  $k$  ضرب شوند، آنگاه دترمینان آن ماتریس  $k$  برابر می‌شود.

**مثلاً:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -10 & 20 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5(-2) & 5(2) & 5(1) \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{R_2 \rightarrow R_2}{=} 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix}$$

**نتیجه:** اگر  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  باشد. در این صورت:  $|rA| = r^n |A|$

**ویژگی چهارم:** اگر در یک ماتریس مربعی جای دو سطر یا دو ستون را جابجا کنیم، دترمینان آن در عدد  $(-1)$  ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{R_1 \leftrightarrow R_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

**مثلاً:**

**ویژگی پنجم:** اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{R_1=R_2}{=} 0$$

**مثلاً:**

**ویژگی ششم:** اگر در یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون ضربی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، دترمینان آن صفر است.

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{3C_1=C_2}{=} 0$$

**مثلاً:**

**ویژگی هفتم:** اگر در یک ماتریس مربعی مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم، دترمینان آن تغییر نمی‌کند.



$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{3R_2+R_1 \rightarrow R_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & 9 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{مثلاً:}$$

**ویژگی هشتم:** دترمینان هر ماتریس مربعی و دترمینان ترانزپوزیته اش با هم برابرند.  $|A^t| = |A|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{مثلاً:}$$

**ویژگی نهم:** دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم مرتبه با حاصل ضرب دترمینان های آنها برابر

است.

$$|AB| = |A| |B|$$

**توجه:** این ویژگی فقط برای ضرب ماتریس ها برقرار است ولی برای جمع یا دو تفاضل دو ماتریس مربعی

هم مرتبه برقرار نمی باشد. یعنی:

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$

$$|A - B| \neq |A| - |B|$$

**ویژگی دهم:** برای هر ماتریس مربعی  $A$  داریم:

$$|A^k| = |A|^k$$

**ویژگی یازدهم:** اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون به صورت دو یا چند جمله ای باشند، آنگاه

دترمینان این ماتریس را می توان به صورت مجموع چند دترمینان نوشت.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

**توجه:** به کمک ویژگی دترمینان می توان دترمینان یک ماتریس مربعی را نیز محاسبه کرد. این ویژگی ها

بخصوص برای محاسبه دترمینان بدون استفاده از بسط بکار گرفته می شوند. به مثال های زیر توجه کنید.

**مثال:** بدون بسط دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

**حل:**

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{3R_1+R_2 \rightarrow R_2} \\ = \\ \xrightarrow{2R_1+R_3 \rightarrow R_3} \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)(1)(10) = -10$$

**مثال:** بدون بسط ثابت کنید که  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$

**حل:**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \\ = - \\ \xrightarrow{2R_1+R_2 \rightarrow R_2} \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

**مثال:** بدون بسط دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix} = 0$$

**حل:**

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$$

$$C_1 + C_3 \rightarrow C_3 \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \sin^2 y + \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \sin^2 z + \cos^2 z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & 1 \\ \sin^2 y & 1 & 1 \\ \sin^2 z & 1 & 1 \end{vmatrix} C_2 = C_3$$

**مثال:** اگر  $A$  یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ و  $|A| = 5$  باشد. در این صورت  $|A|$  را بیابید.

**حل:**

$$|A| = 5 \rightarrow ||A| A| = |5A| = 5^3 |A| = 5^3 \times 5 = 5^4 = 625$$

**تمرین برای حل:**

**۱۸:** به کمک ویژگی‌های دترمینان، دترمینان ماتریس‌ها زیر را محاسبه کنید.

الف)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ب)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

\*\*\*

**ماتریس الحاقی**

متناظر با هر ماتریس مربعی مانند  $A$  می‌توان ماتریس دیگری نظیر کرد. این ماتریس را ماتریس الحاقی می‌نامند.<sup>۲</sup> روش تعیین ماتریس الحاقی با توجه به مرتبه‌ی ماتریس متفاوت است. در اینجا فقط ماتریس الحاقی ماتریس‌های مربعی  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  را معرفی می‌کنیم.

**توجه:** ماتریس الحاقی ماتریس  $A$  را با نماد  $A^*$  نمایش می‌دهند.

**الف:** ماتریس الحاقی ماتریس مربعی  $2 \times 2$

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی  $2 \times 2$  از تعویض درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه‌های روی قطر فرعی بدست می‌آید.

برای مثال ماتریس الحاقی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  می‌شود  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

<sup>۲</sup>. ترانهاده‌ی ماتریس همسازه‌ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می‌گویند.

**مثال:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

الف: دترمینان ماتریس  $A$  را محاسبه کنید. ب: ماتریس الحاقی  $A$  را به دست آورید.

**حل:**

الف:

$$|A| = (2)(5) - (-2)(3) = 10 + 6 = 16$$

ب:

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

**ب:** ماتریس الحاقی ماتریس مربعی  $3 \times 3$

ترانهاده‌ی ماتریس همسازه‌ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می‌گویند و آنرا با  $A^*$  نمایش می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow N = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

**مثال:** ماتریس الحاقی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  را بدست آورید.

**حل:**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \cdot & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \cdot & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \cdot \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**توجه:** این روش برای محاسبه‌ی ماتریس الحاقی ماتریس مربعی  $2 \times 2$  نیز درست است.

**مثال:** ماتریس الحاقی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  را بدست آورید.

**حل:**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = d \quad A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -b \quad A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = a$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

بنابراین همانطور که قبلاً اشاره شد، ماتریس الحاقی ماتریس مربعی  $2 \times 2$  از تعویض درایه های روی قطر

اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

**تمرین برای حل:**

**۱۹:** ماتریس الحاقی ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

\*\*\*

## ماتریس های معکوس پذیر

دو ماتریس مربعی را معکوس (وارون) همدیگر گویند، هرگاه حاصل ضرب آنها ماتریس واحد باشد.

$$AB = BA = I$$

**مثال:** نشان دهید که ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است.

**حل:**

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

**تمرین برای حل:**

**۲۰:** نشان دهید که ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  وارون ماتریس  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$  است.

اگر  $A$  یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد، در این صورت وارون آن را به شکل  $A^{-1}$  نمایش می دهند. ثابت می شود که

**۱:** وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است

**۲:** یک ماتریس مربعی وارون پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

**۳:** برای هر ماتریس مربعی مانند  $A$  همواره داریم:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$

**مثال:** معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ب)  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

حل:

الف:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 20 - 21 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{لذا ماتریس } A \text{ معکوس پذیر است.}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* = \frac{1}{-1} \times \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

ب:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow |B| = 12 - 12 = 0 \rightarrow \text{لذا ماتریس } B \text{ معکوس پذیر نیست.}$$

مثال: معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 9 \neq 0 \rightarrow \text{لذا ماتریس } A \text{ معکوس پذیر است.}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* = \frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

**تمرین ۲۱:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ماتریس  $A^{-1}$  را به دست آورده و  $|A|$  را با  $|A^{-1}|$  مقایسه کنید.

**نتیجه:** اگر  $A$  یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد. در این صورت:

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{ و } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

**مثال:** اگر  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$  دترمینان ماتریس  $A$  را تعیین کنید.

**حل:**

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{(2)(6) - (3)(-7)} = \frac{1}{33}$$

**تمرین ۲۱:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$  ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

ب)  $(AB)^{-1}$     ج)  $B^{-1}A^{-1}$     د)  $A^{-1}B^{-1}$

**نتیجه:** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم مرتبه و معکوس پذیر باشند. در این صورت

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**تمرین برای حل:**

**۲۲:** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$  ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

الف)  $A^{-1}$     ب)  $B^*$     ج)  $A^{-1} + B^* + I_2$     د)  $(A^{-1})^{-1}$



۲۳: اگر  $A = \begin{bmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{bmatrix}$  . نشان دهید که :  $|A| = \log^{\frac{5}{2}}$

۲۴: اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  دترمینان ماتریس  $(A^{-1})^2$  را تعیین کنید.

۲۵:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  ثابت کنید که  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

۲۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  باشد. حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف)  $(A+B)^{-1}$

ب)  $A^{-1} + B^{-1}$

۲۷: اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$  باشد. حاصل عبارت  $2A^{-1} - 3B^{-1}$  را بیابید.

۲۸: مقدار  $m$  را چنان بیابید که ماتریس زیر وارون پذیر نباشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2m+1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

۲۹: معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  را در صورت وجود بدست آورید.

\*\*\*

## حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از وارون ماتریس

به کمک ماتریس و دترمینان دستگاه‌های معادلات خطی را به روش‌های جالبی به غیر از روش‌های معمول می‌توان حل کرد. در این فصل به این روش‌های اشاره می‌کنیم.

### دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{هر دستگاه به شکل}$$

را دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی می‌نامند که می‌توان آنرا به شکل زیر نیز نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_D$$

ماتریس  $A$  را ماتریس ضرایب و ماتریس  $X$  را ماتریس مجهولات و ماتریس  $D$  را ماتریس معلومات می‌نامند. از طرفی بدیهی است که

$$AX = D$$

$$\rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}D \rightarrow IX = A^{-1}D \rightarrow X = A^{-1}D$$

**مثال:** دستگاه زیر را به روش ماتریسی نمایش دهید.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

**حل:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**نتیجه:** شرط اینکه دستگاه جواب داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر نباشد. یعنی:

$$|A| \neq 0$$

\*\*\*

## روش های حل دستگاه های دو معادله ی دو مجهولی

در دروس ریاضی پایه های قبل، با روش های حذفی، جانشانی و روش قیاسی به عنوان روش های حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی آشنا شده اید. در اینجا به روش های دیگری برای حل این دستگاه اشاره می کنیم.

### الف: روش حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از دترمینان

اگر  $A$  ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی باشد. می توان آنرا به روش زیر حل کرد. این روش را **روش کرامر** می نامند.

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}$$

و

$$y = \frac{|A_2|}{|A|}$$

که  $A_1$  از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون اول ماتریس ضرایب و  $A_2$  از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون دوم ماتریس ضرایب بدست می آیند.

**مثال:** دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

**حل:** لذا دستگاه جواب دارد.

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5 + 2}{-2 - 1} = 1$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 - 5}{-2 - 1} = 3$$

**ب: روش حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده ماتریس معکوس**

در این روش دستگاه را به شکل  $X = A^{-1}D$  تبدیل می‌کنیم و در صورت وجود جواب مقدار مجهولات آنرا تعیین می‌کنیم.

**مثال:** دستگاه‌های زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases} \qquad \text{ب) } \begin{cases} -2x + y = 5 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

**حل:**

الف:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -2 - 1 = -3 \neq 0. \qquad \text{لذا دستگاه جواب دارد.}$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* = \frac{1}{-3} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}D \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

ب:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 4 - 4 = 0. \qquad \text{لذا دستگاه جواب ندارد.}$$

**تمرین برای حل:**

**۳۰:** هر یک از دستگاه‌های زیر را به دو روش بیان شده حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases} \qquad \text{ب) } \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

\*\*\*

## بحثی پیرامون معادلات خط در صفحه

می دانیم که در هر صفحه، دو خط نسبت به هم سه حالت زیر را دارند.

**الف:** دو خط متقاطع اند که در این حالت، همدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند.

**ب:** دو خط موازیند که هیچ گاه همدیگر را قطع نمی کنند.

**ج:** دو خط منطبق اند که در تمام نقاط مشترک هستند.

**مثال:** مختصات نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات زیر را تعیین کنید.

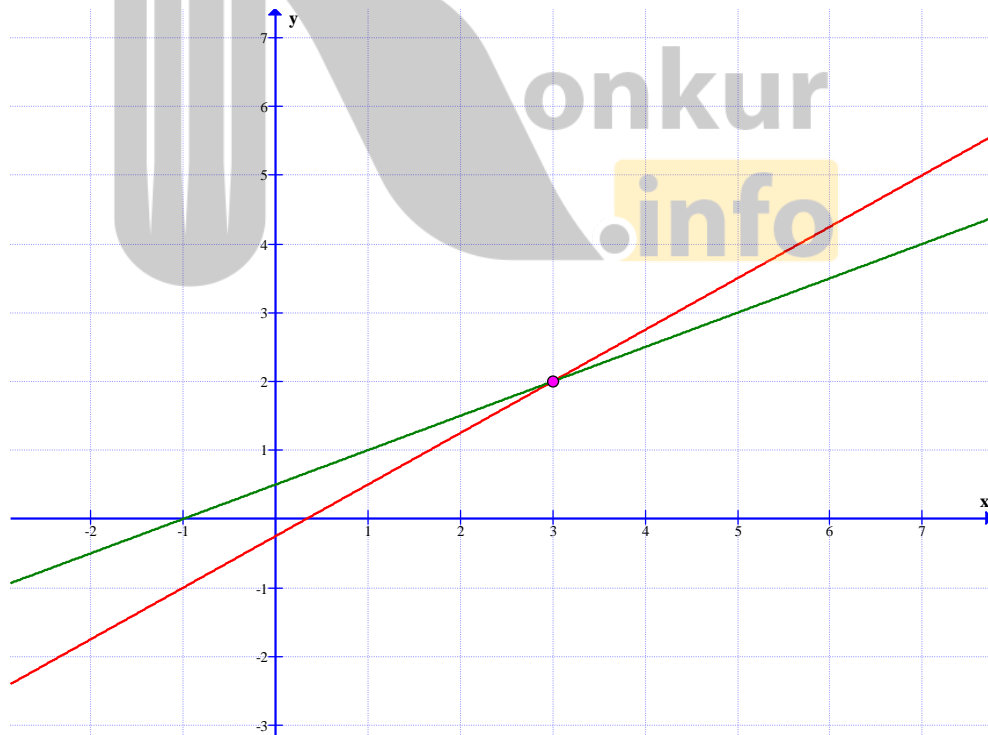
$$3x - 4y = 1 \text{ و } x - 2y = -1$$

**حل:** کافی است که دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 2$$

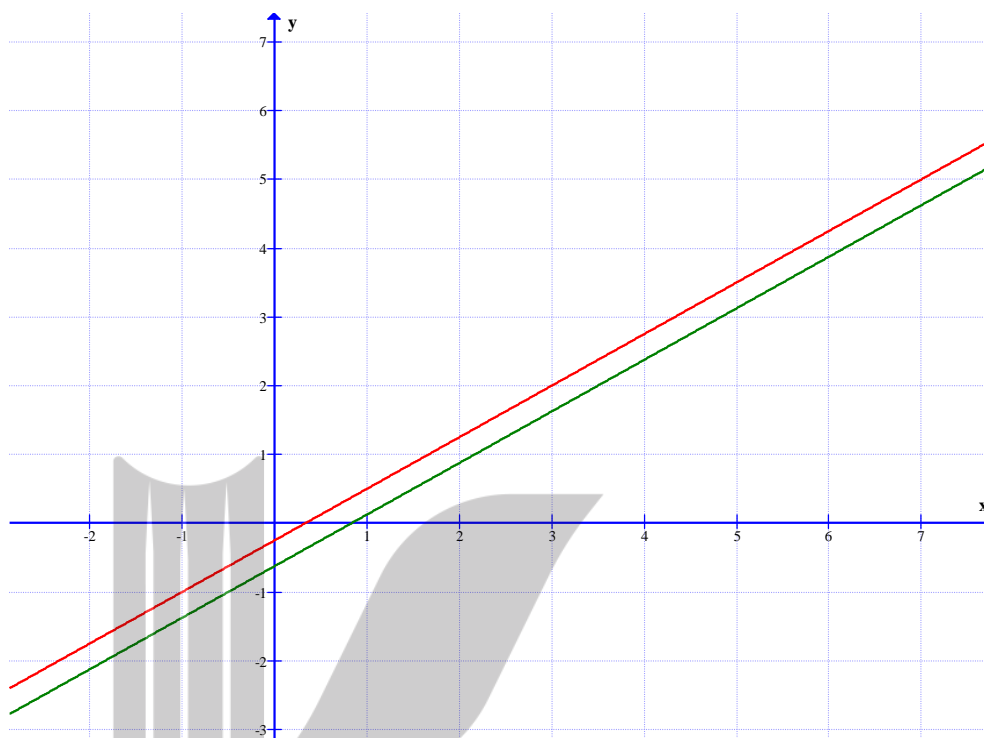
لذا نقطه‌ی تلاقی این دو خط می شود.  $P(3, 2)$

توجه کنید که در اگر نمودارهای این دو خط را رسم نماییم، همین موضوع تأیید می شود.



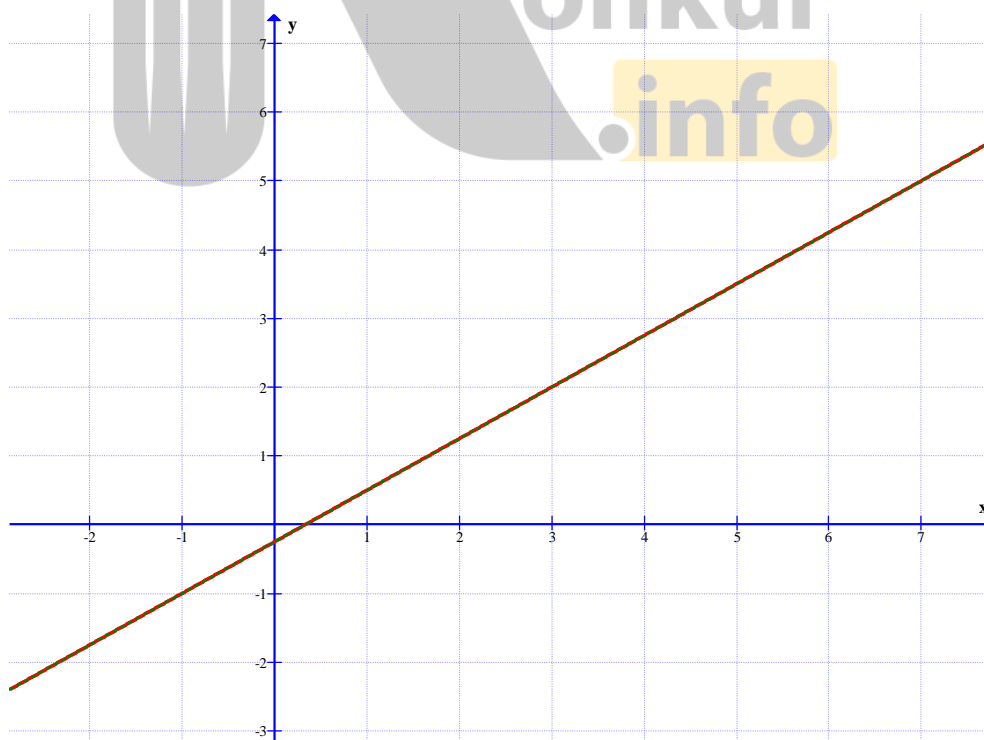
**مثال:** دو خط به معادلات زیر به جهت داشتن شیب‌های مساوی، موازی هستند.

$$3x - 4y = 1 \text{ و } 6x - 8y = 5$$



**مثال:** واضح است که دو خط به معادلات زیر منطبق‌اند.

$$3x - 4y = 1 \text{ و } 6x - 8y = 2$$



**نتیجه:** اگر معادلات دو خط به صورت زیر باشند.

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ و } a_2x + b_2y = c_2$$

می توان گفت که :

**الف)** اگر  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  در این صورت دو خط متقاطع اند و دستگاه یک جواب دارد.

**ب)** اگر  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  در این صورت دو خط موازیند و دستگاه دارای جواب نیست.

**ج)** در این صورت دو خط منطبقند و دستگاه بیشمار جواب دارد.

**توجه:** در مورد الف می توان گفت یک دستگاه معادلات خطی وقتی دارای جواب است که دترمینان ضرایب

آن صفر نباشد.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_D$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1 \rightarrow a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0$$

که قبلاً این موضوع را مشاهده کرده ایم.

**تمرین ۳۱:** بدون رسم نمودار و بدون حل دستگاه، تعداد جواب های دستگاه زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 5y = 1 \end{cases}$$

**تمرین برای حل:**

**۳۲:** روی وجود یا عدم وجود و تعداد جواب های هر یک دستگاه های معادلات خطی زیر بحث کنید.

الف)  $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

ب)  $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$

ج)  $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$

**۳۳:** به ازای چه مقداری از  $k$  دستگاه زیر دارای یک جواب می باشد.

$$\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**info**

<https://konkur.info>