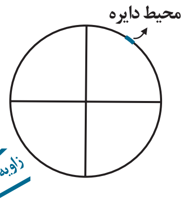
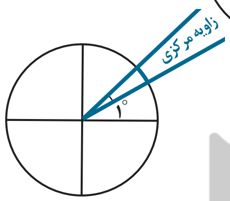
مثلثات

۱ واحدهای زاویه (درجه) ۱

درجه





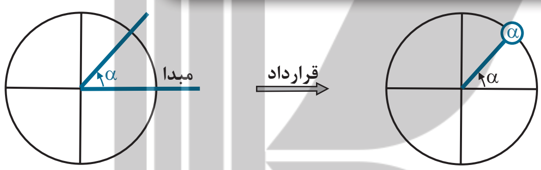
بچه‌ها! می‌خوام ۱ درجه‌رو براتون تعریف کنم. به همین منظور محیط یک دایره‌رو به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و یک تیکه‌ی دلخواه‌رو انتخاب می‌کنم.

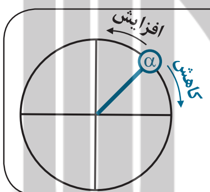
آقا اجازه؟! حتماً می‌خواید بگید که هر تیکه، یک درجه هست. مگه نه؟

نه عزیزم. اصلاً نمی‌خواستم اینو بگم!اشتباه خیلی از دانش‌آموزها اینه که فکر می‌کنن $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط یک دایره برابره با ۱ درجه، اما من می‌خوام این اشتباه رو تصحیح کنم.

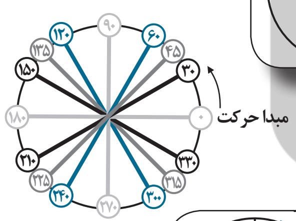
> **«به $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره نباید بگیم ۱ درجه،بلکه به زاویه‌ای مرکزی که $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره‌رو در برمی‌گیره می‌گیم ۱ درجه»**

بچه‌ها! یه قرارداد: برای راحتی کار، از این به بعد هر زاویه‌رو روی نوک عقربه‌اش نمایش بدید. یعنی:

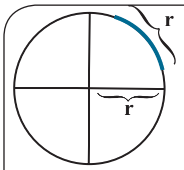
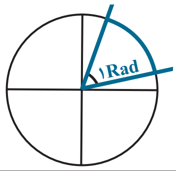


> **توجه:** اگر زاویه‌ی α برخلاف عقربه‌ی ساعت حرکت کنه می‌گیم α در حال افزایشه (حرکت در جهت مثبت) و در غیر اینصورت در حال کاهشه. (حرکت در جهت منفی)
>
> 
>

با توجه به قرارداد بالا میشه زوایای معروف روی دایره رو به صورت روبرو نمایش داد: (بر حسب درجه)

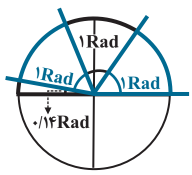


رادیان

> **بچه‌ها! حالا می‌خوام یک رادیان رو براتون تعریف کنم. پس خوب دقت کنید:**
>
> ۱) قسمتی از محیط دایره‌رو انتخاب می‌کنم که اندازه‌اش برابر شعاع دایره باشه. یعنی:
>
> 
>
>
> ۲) زاویه‌ای مرکزی رسم می‌کنم که از دو سر این قطعه بگذره.
>
> به این زاویه یک رادیان می‌گیم. نگاه کنید:
>
> 
>

آقا اجازه؟! هر یک رادیان چند درجه میشه؟ هر رادیان تقریباً ۵۷/۳ درجه هست.

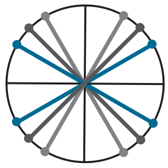
آقا اجازه؟! هر نیم دور از دایره چند رادیانه؟



با توجه به شکل روبرو، هر نیم دور از یک دایره تقریبا ۳/۱۴ رادیانه. یعنی هر نیم دور از دایره برابر با π رادیان.

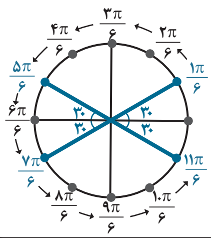
به عبارت دیگه ۱۸۰درجه معادل با π رادیانه.

دوستان من! معادل زوایای °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ بر حسب رادیان عبارتند از: ۰، $\frac{\pi}{۲}$، π، $\frac{۳\pi}{۲}$، ۲π



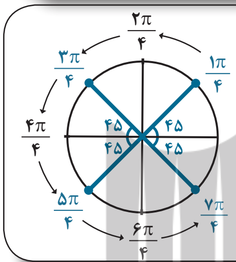
بچه‌ها! اینجا می‌خوام ۱۲ تا زاویه‌ای که توی ربع‌های اول تا چهارم قرار دارن رو در غالب ۳ تا ضربدر بیان کنم. (بر حسب رادیان)

۱) ضربدر با مدل ۳۰ درجه:



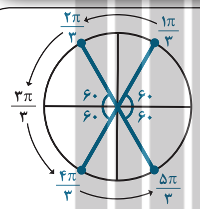
هر کدوم از ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۶}$) می‌سازن . بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$)

۲) ضربدر با مدل ۴۵ درجه:



ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۴۵ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۴}$) می‌سازن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$)

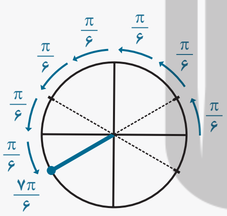
۳) ضربدر با مدل ۶۰ درجه:



اضلاع این ضربدر، زاویه‌ی ۶۰° یا $\frac{\pi}{۳}$ با افق ایجاد می‌کنن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۳}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$)

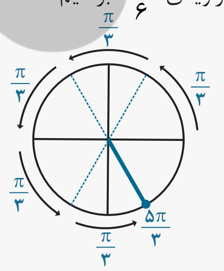
مثال زوایای زیر را روی دایره معلوم کنید.

۱) $\alpha = \frac{۷\pi}{۶}$



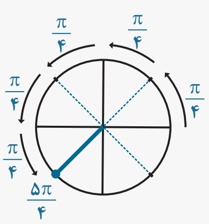
با توجه به اینکه این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هست، پس روی ضربدربا مدل ۳۰ درجه قرار داره و برای معلوم کردن این زاویه روی دایره کافیه از مبدأ حرکت ۷ تا $\frac{\pi}{۶}$ رو طی کنیم تا به زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۶}$ برسیم.

۲) $\alpha = \frac{۵\pi}{۳}$



این زاویه برحسب $\frac{\pi}{۳}$ هست پس روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار داره. اگه از مبدأ حرکت ۵ تا $\frac{\pi}{۳}$ رو طی کنیم، زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۳}$ روی دایره معلوم میشه.

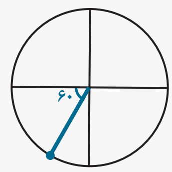
۳) $\alpha = \frac{۵\pi}{۴}$



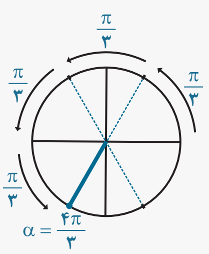
از اون‌جایی که این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هست پس روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار داره. بنابراین اگه از مبدأ حرکت ۵ تا $\frac{\pi}{۴}$ رو طی کنیم، به زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}$ خواهیم رسید.

مثال در هر یک از شکل‌های زیر مقدار زاویه‌ی α را مشخص کنید.

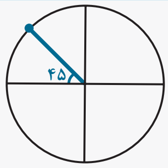
۱)

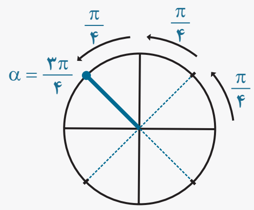


از اونجایی که α با افق زاویه‌ی ۶۰° می‌سازه، پس روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{۳}$ هست. لذا کافیه که ببینیم α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{۳}$ رو طی کرده.

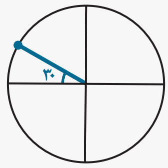


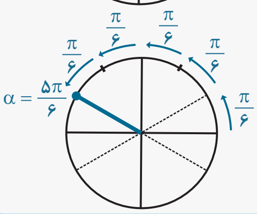
۲) از اونجایی که α با افق زاویه‌ی 45° می‌سازه، حتماً روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{4}$ هست. بنابراین باید بفهمیم که α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{4}$ رو طی کرده.





۳) از اونجایی که α با افق زاویه‌ی 30° می‌سازه، پس روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{6}$ هست. لذا کافیه معلوم بشه که α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{6}$ رو طی کرده.



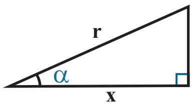


توجه توجه: بچه‌ها! تا نام و مکان زوایای معروف روی دایره‌رو توپِ توپِ توپ یاد نگرفتید، وارد قسمت بعدی نشید.

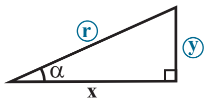
۲ زندگی نامه ی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ۲

تعریف $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در یک مثلث قائم‌الزاویه

بچه‌ها! مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبرو رو در نظر بگیرید. با توجه به این مثلث می‌خوام دو تا قرارداد باهاتون ببندم!

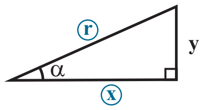


قرارداد ۱: در مثلث قائم‌الزاویه ی



داریم: $\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{r}}$. یعنی: $\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$

قرارداد ۲: در مثلث قائم‌الزاویه ی

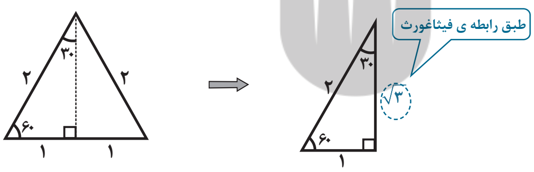


داریم: $\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{r}}$. یعنی: $\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$

حالا یه سؤال: با توجه به قراردادی که بستم، آیا می‌تونید مقادیر $\sin 30$، $\sin 45$، $\sin 60$، $\cos 30$، $\cos 60$ رو محاسبه کنید؟

آقا اجازه؟! بله می‌تونیم. باید مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های معلوم درست کنیم که دارای زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ باشه. در این صورت می‌تونیم $\sin 30$، $\sin 60$، $\cos 30$، $\cos 60$ رو طبق قراردادی که گفتید به دست بیاریم.

اما برای ایجاد یک مثلث قائم‌الزاویه با شرایط بالا، میشه یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد رو از وسط نصف کرد. یعنی:



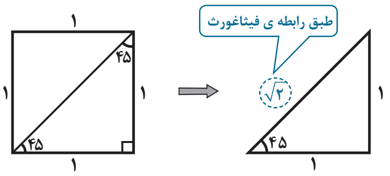
$\sin 30 = \frac{\text{ضلع مقابل ۳۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\sin 60 = \frac{\text{ضلع مقابل ۶۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cos 30 = \frac{\text{ضلع مجاور ۳۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cos 60 = \frac{\text{ضلع مجاور ۶۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

آقا اجازه؟! برای ایجاد مثلثی قائم‌الزاویه با زاویه‌ی 45° میشه از مربعی به ضلع ۱ واحد کمک گرفت؟ یعنی:



$\sin 45 = \frac{\text{ضلع مقابل ۴۵}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\cos 45 = \frac{\text{ضلع مجاور ۴۵}}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

آفرین به تو دانش‌آموز خوش فکرم!

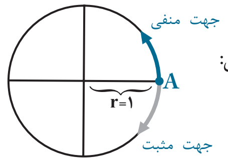
بچه‌ها! پس فهمیدیم که sin و cos زوایای 30°، 45° و 60° یکی از این ۳ مقدار هستن یعنی: $\frac{\sqrt{3}}{2}$، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{\sqrt{1}}{2}$

اگه به سه مقداربدست اومده خوب دقت کنید می‌بینید که:

۱) مخرج‌ها مقداری ثابت دارن یعنی: ۲

۲) در صورت کسر، سربازهای ۳، ۲ و ۱ به ترتیب در حال رژه رفتن هستن که کلاه (رادیکال) روی سرشون قرار داره.

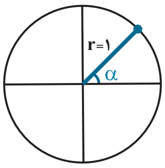
تعریف $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی



تعریف دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ای به شعاع ۱ واحدرو دایره‌ی مثلثاتی میگیم.این دایره جهت دار و نقطه ی A مبدا حرکتشه. یعنی:

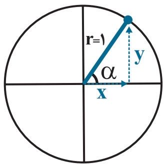
بچه‌ها! شاعر میگه: شنیدن کی بود مانند دیدن . من هم می‌گم : حفظ کردن کی بود مانند فهمیدن

از اینجا به بعد می‌خوام به کمک دایره‌ی معجزه‌گر (یعنی دایره‌ی مثلثاتی) کاری بکنم که شما یکبار برای همیشه طعم شیرین مثلثات رو بچشید. پس خوب به حرفام دقت کنید:



بچه‌ها! روی دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌ای رو که حاوی زاویه‌ی α هست در نظر بگیرید.

اگه این عقربه‌رو روی محور افق تصویر کنم، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آد.

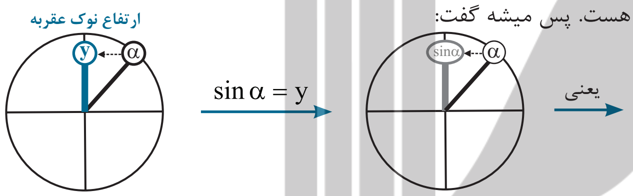


$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{y}{۱} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = y} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{۱} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = x} \end{cases}$$

پس میشه $\sin\alpha$، $\cos\alpha$ رو طبق قرارداد تعریف کرد:

اولین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی: فقط در دایره‌ی مثلثاتیه که $\sin\alpha = y$ میشه. (در دایره‌های دیگه: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$)

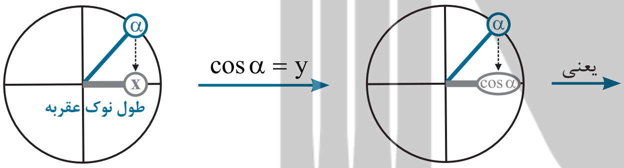
اگه به دایره‌ی مثلثاتی زیر نگاه کنید،می‌بینید که y ارتفاع نوک عقربه هست. پس میشه گفت:



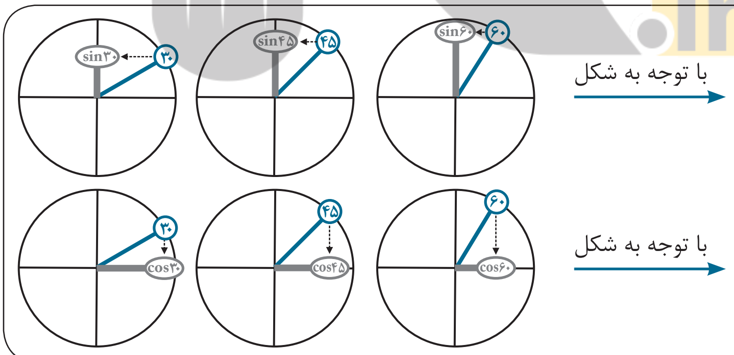
$\boxed{\sin\alpha = \text{ارتفاع نوک عقربه}}$

دومین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی: فقط در دایره‌ی مثلثاتیه که $\cos\alpha = y$ میشه. (در دایره‌های دیگه: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$)

اگه باز هم به دایره‌ی مثلثاتی زیر دقت کنید می‌بینید که x طول نوک عقربه هست. پس میشه گفت:



$\boxed{\cos\alpha = \text{طول نوک عقربه}}$



$\sin ۳۰ < \sin ۴۵ < \sin ۶۰$

$\cos ۳۰ < \cos ۴۵ < \cos ۶۰$

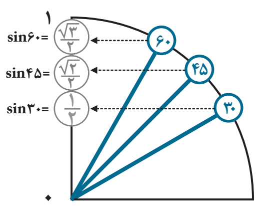
بچه‌ها! آیا یادتونه که در قسمت قبل نتیجه گرفتیم که cos و sin زاویه‌های °۶۰ و °۴۵ و °۳۰ یکی از سه مقدار $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۱}}{۲}$ رو اختیار می‌کنن؟

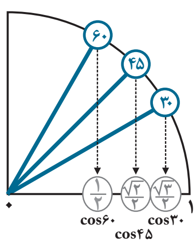
آقا اجازه؟! بله یادمونه.

حالا ازتون می‌خوام این سه مقدار رو روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.

آقا اجازه؟! با توجه به تصویرسازی‌هایی که برای ما کردید،

خیلی راحت میشه این کار رو انجام داد.





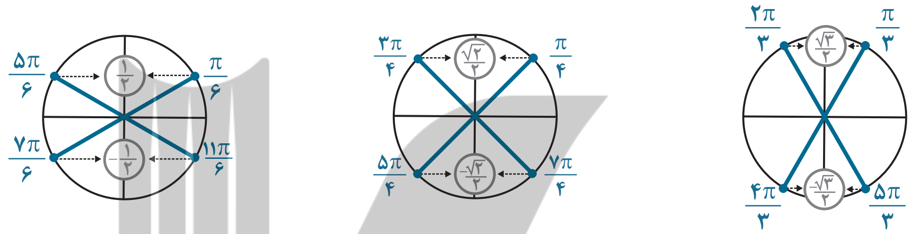
آقا اجازه؟! تا به حال ما این مقادیر رو به کمک یک جدول حفظ می‌کردیم و خیلی از اوقات اونهارو با هم قاطی می‌کردیم. اما حالا به کمک این دایره‌ی معجزه‌گر، خیلی راحت می‌تونیم بگیم که $(\sin ۰=۰ , \sin ۹۰=۱ , \cos ۰=۱ , \cos ۹۰=۰)$:

پس عزیزم، یواش یواش داره از مثلثات خوشت می‌آید. می‌خوام بهت بگم تازه کجاشو دیدی‌ی‌ی ...!!!

مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌هایی که روی ضربدرهای مدل‌سازی شده قرار دارند!

بچه‌ها! درقسمت قبل، زاویه‌هایی‌رو به شما معرفی کردم که روی ضربدرهایی با مدل ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° قرار داشتن. لطفاً cos و sin این زاویه‌ها رو به دست بیارید.

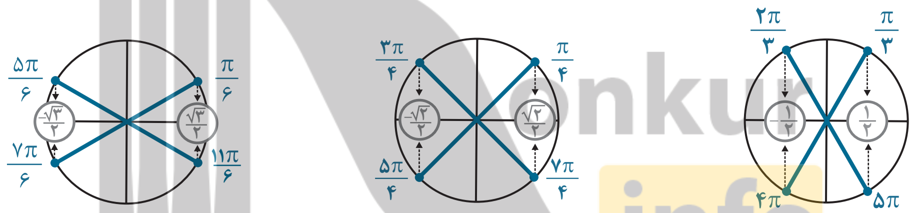
آقا اجازه؟! این ضربدرهای مدل‌سازی شده عجب چیز باحالی هستن. الان هر چی خواستید رو براتون به دست می‌آریم:



$$\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۳}=\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \sin\frac{۴\pi}{۳}=\sin\frac{۵\pi}{۳}=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۴}=\sin\frac{۳\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \sin\frac{۵\pi}{۴}=\sin\frac{۷\pi}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۶}=\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ \sin\frac{۷\pi}{۶}=\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$



$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{۳}=\cos\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}\\ \cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{۷\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos\frac{۵\pi}{۴}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{۶}=\cos\frac{۱۱\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos\frac{۷\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}$$

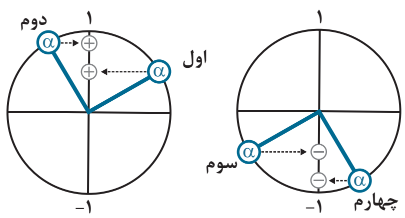
بچه‌ها! بهتون تبریک می‌گم. چون الان به مرحله‌ای رسیدید که می‌تونید cos و sin زوایای معروف رو به کمک دایره‌ی معجزه‌گر (مثلثاتی) به دست بیارید.

علامت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

بچه‌ها! میشه بگید که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در هر ربع از دایره‌ی مثلثاتی چه علامتی دارن؟

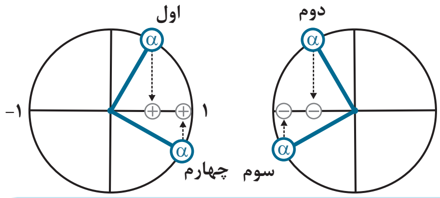
آقا اجازه؟! این که خیلی آسونه.

از اون‌جایی که $\sin\alpha$ ارتفاع نوک عقربه هست، پس اگه α در ربع اول و دوم باشه، علامت $\sin\alpha$ مثبته و اگه در ربع سوم و چهارم باشه، علامت $\sin\alpha$ منفیه. یعنی:



اما با توجه به این‌که $\cos\alpha$ طول نوک عقربه هست، پس میشه گفت:

در ربع اول و چهارم، علامت $\cos\alpha$ مثبته و در ربع دوم و سوم منفیه.

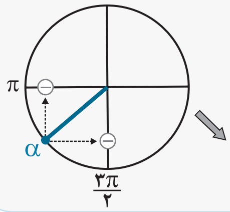


مثال اگر $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$ و $\sin\alpha + \cos\alpha < ۰$ باشد، محدوده‌ی α کدام است؟

بچه‌ها! از اون‌جایی که $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$ پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم علامتند. یعنی:

(هر دو مثبت یا هر دو منفی) اما چون مجموع $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مقداری منفیه، نتیجه

می‌گیریم که هر دوشون منفی هستند. یعنی α در ربع سوم قرار داره:



α در ربع سوم قرار داره $\Longrightarrow \pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$

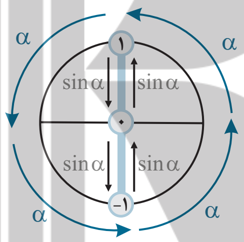
محدوده‌ی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$

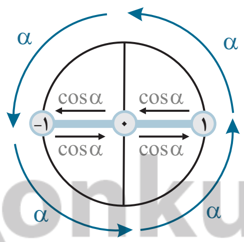
بچه‌ها! یه سؤال دیگه: میشه بگید $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در چه محدوده‌ای قرار دارن؟

آقا اجازه؟! می‌دونیم که در دایره‌ی مثلثاتی شعاع برابره با ۱

بنابراین اگر عقربه‌ی α رو هر قدر هم که بچرخونیم، $\sin\alpha$ حداکثر برابر ۱ و حداقل برابر ۱- میشه

این مطلب برای $\cos\alpha$ هم صدق می‌کنه. یعنی $\cos\alpha$ هم حداکثرش ۱ و حداقلش ۱- هست





بچه‌ها! باز هم یه سؤال: به نظر شما در هر ربع، با افزایش زاویه‌ی α،مقادیر $\sin$ و $\cos$ این زاویه افزایش پیدا می‌کنن یا کاهش؟

آقا اجازه؟! شکل‌های بالا همه چی‌رو دارن نشون می‌دن. یعنی:

sin

در ربع اول و چهارم با افزایش α، مقدار $\sin\alpha$ زیاد میشه.

اما در ربع دوم و سوم با افزایش α، مقدار $\sin\alpha$ کم میشه.

cos

در ربع اول و دوم با افزایش α، مقدار $\cos\alpha$ کم میشه.

در ربع سوم و چهارم با افزایش α، مقدار $\cos\alpha$ زیاد میشه.

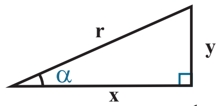
۳ زندگی نامه ی $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ۳

تعریف $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در یک مثلث قائم‌الزاویه

بچه‌ها! همون‌طور که قبلاً دیدید، با دو تا قرارداد، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ رو براتون تعریف کردم.

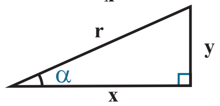
حالا می خوام دوتا قرارداد دیگه رو باهاتون تنظیم کنم.

قرارداد ۳ : در مثلث قائم‌الزاویه ی



داریم : $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ یعنی : $\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha}$

قرارداد ۴ : در مثلث قائم‌الزاویه ی

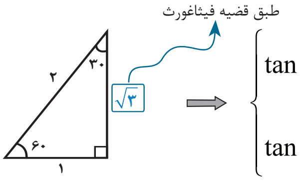


داریم : $\cot\alpha = \frac{x}{y}$ یعنی : $\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha}$

بچه‌ها! با توجه به قراردادهایی که با شما بستم، لطفاً مقادیر tan ۳۰ ، tan ۴۵ ، tan ۶۰ ، cot ۳۰ ، cot ۴۵ ، cot ۶۰ رو محاسبه کنید.

آقا اجازه؟! به روی چشم.

از همون مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که برای محاسبه‌ی sin و cos زوایای ۶۰، ۴۵ و ۳۰ استفاده کردیم، میشه برای محاسبه‌ی tan ، cot هم استفاده کرد. یعنی:



$$\begin{cases} \tan ۳۰ = \dfrac{\text{ضلع مقابل ۳۰}}{\text{ضلع مجاور ۳۰}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}} \\ \tan ۶۰ = \dfrac{\text{ضلع مقابل ۶۰}}{\text{ضلع مجاور ۶۰}} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۱} = \boxed{\sqrt{۳}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot ۳۰ = \dfrac{\text{ضلع مجاور ۳۰}}{\text{ضلع مقابل ۳۰}} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۱} = \boxed{\sqrt{۳}} \\ \cot ۶۰ = \dfrac{\text{ضلع مجاور ۶۰}}{\text{ضلع مقابل ۶۰}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}} \end{cases}$$

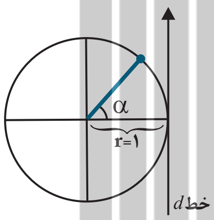
آفرین عزیزم.

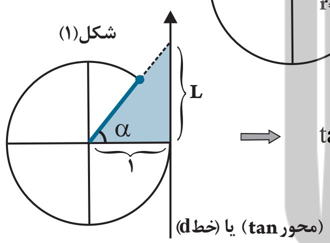
> **بچه‌ها! پس فهمیدیم که tan و cot زوایای ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° یکی از این سه مقدار هستند: $\sqrt{۳}$ و ۱ و $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$**

اگه به این سه مقدار $\sqrt{۳}$ ، ۱ ، $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$ خوب دقت کنید می‌بینید که تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\sqrt{۳}$ رو می‌دن. ($\times\sqrt{۳}$ ، $\times\sqrt{۳}$)

تعریف $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

بچه‌ها! روی دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌ای رو که حاوی زاویه‌ی α هست در نظر بگیرید.
همون‌طور که می‌بینید،خط d در سمت راست دایره، به دایره مماس شده.اگر من این عقربه رو امتداد بدم تا خط d رو قطع کنه، یک مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود می‌آد.
پس میشه طبق قرارداد $\tan\alpha$ رو در این مثلث قائم‌الزاویه تعریف کرد:



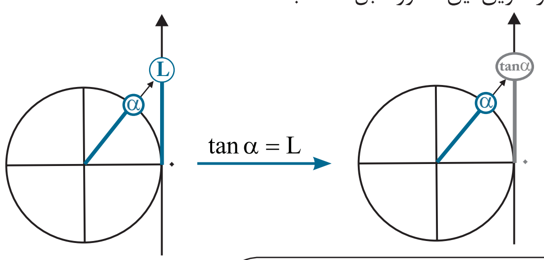


$$\tan\alpha = \dfrac{L}{۱} \Rightarrow \tan\alpha = L$$

از این به بعد، اسم (خط d) رو بذارید (محور tan). چون مقدار tan یک زاویه از طریق این محور قابل محاسبه هست.

سومین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی:

فقط در دایره‌ی مثلثاتیه که $\tan\alpha = L$ میشه (در دایره‌های دیگه: $\tan\alpha = \dfrac{L}{r}$)

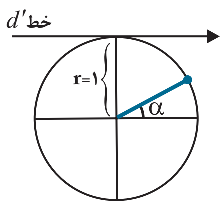


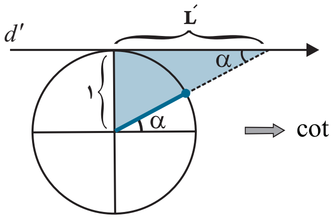
بچه‌ها!

> **اگه می‌خواید $\tan\alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید، کافیه عقربه‌ی α رو امتداد بدید تا محور tan رو قطع کنه. در این صورت: (ارتفاع نقطه‌ی برخورد = $\tan\alpha$)**

بچه‌ها یه سؤال! آیا ممکنه مقدار $\cot\alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی معلوم کنید؟

آقا اجازه؟! فکر کنیم باید خطی افقی به نام d' رو که در بالای دایره قرار داره، به دایره مماس کنیم.اگه عقربه رو امتداد بریم تا خط d' رو قطع کنه، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آد که می‌شه طبق قرارداد،مقدار $\cot\alpha$ رو به کمک این مثلث معلوم کرد. یعنی:





$\Longrightarrow \cot\alpha = \dfrac{L'}{۱} \Longrightarrow \boxed{\cot\alpha = L'}$

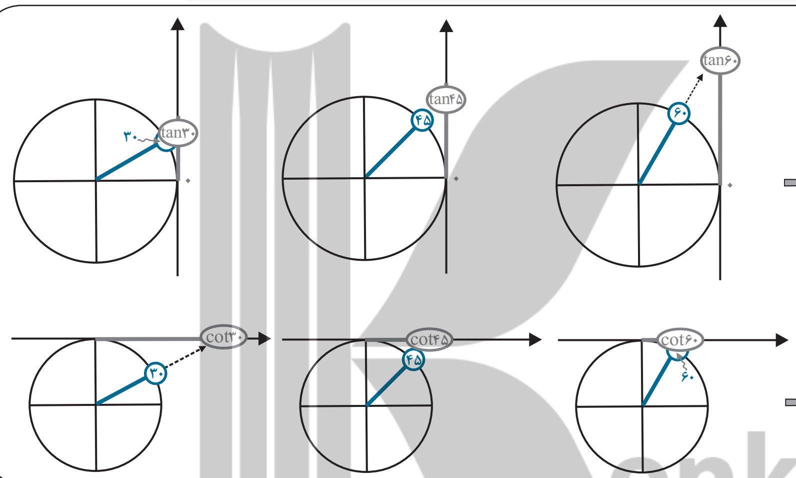
آفرین به تو دانش‌آموز خلاقم.

بچه‌ها! از این به بعد اسم (خط d') رو بذارید (محور cot)، چون مقدار cot یک زاویه به کمک این محور قابل محاسبه هست.

چهارمین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی : فقط در دایره‌ی مثلثاتی رابطه‌ی $\cot\alpha = L'$ برقراره. (در دایره‌های دیگه: $\cot\alpha = \dfrac{L'}{r}$)

بچه‌ها!

اگه می‌خواید $\cot\alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید، کافیه عقربه‌ی α رو امتداد بدید تا محور cot رو قطع کنه. در این صورت: (طول نقطه‌ی برخورد= $\cot\alpha$)

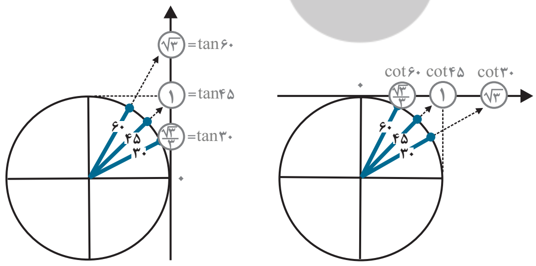


$\Longrightarrow \tan ۳۰ < \tan ۴۵ < \tan ۶۰$

$\Longrightarrow \cot ۳۰ > \cot ۴۵ > \cot ۶۰$

بچه‌ها! اگه یادتون باشه قبلاً گفتم که: cot و tan زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و۶۰ یکی از سه مقدار $\left(\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}, ۱, \sqrt{۳}\right)$ رو اختیار می‌کنن.

حالا ازتون می‌خوام این سه مقدار رو روی دایره‌ی مثلثاتی معلوم کنید.

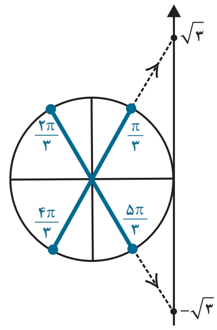
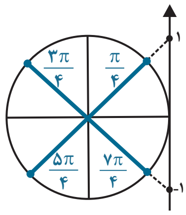
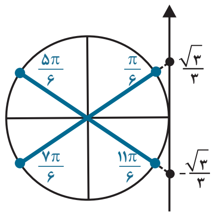


آقا اجازه؟! بفرمائید.

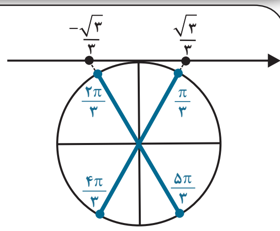
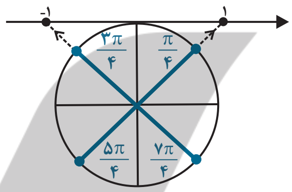
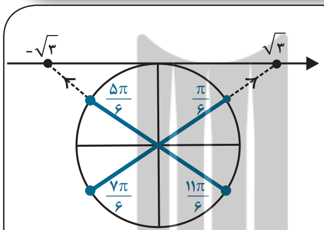
مقدار تانژانت و کتانژانت زاویه‌هایی که روی ضربدرهای مدل‌سازی شده قرار دارند!

بچه‌ها! لطفاً زاویه‌هایی که روی ضربدرهای ۳۰، ۴۵ و ۶۰ قرار دارن رو مشخص کنید و بعد tan و cot این زاویه‌ها رو بدست بیارید.

آقا اجازه؟! اگه کمی فرصت بدید خواسته‌ی شمارو اجرا می‌کنیم.

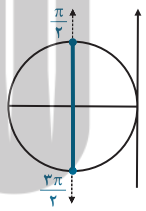
$$\begin{cases}\tan\frac{\pi}{3}=\tan\frac{4\pi}{3}=\sqrt{3}\\ \tan\frac{2\pi}{3}=\tan\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}\end{cases}\qquad \begin{cases}\tan\frac{\pi}{4}=\tan\frac{5\pi}{4}=1\\ \tan\frac{3\pi}{4}=\tan\frac{7\pi}{4}=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}\tan\frac{\pi}{6}=\tan\frac{7\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan\frac{5\pi}{6}=\tan\frac{11\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cot\frac{\pi}{3}=\cot\frac{4\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \cot\frac{2\pi}{3}=\cot\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}\qquad \begin{cases}\cot\frac{\pi}{4}=\cot\frac{5\pi}{4}=1\\ \cot\frac{3\pi}{4}=\cot\frac{7\pi}{4}=-1\end{cases}\qquad \begin{cases}\cot\frac{\pi}{6}=\cot\frac{7\pi}{6}=\sqrt{3}\\ \cot\frac{5\pi}{6}=\cot\frac{11\pi}{6}=-\sqrt{3}\end{cases}$$

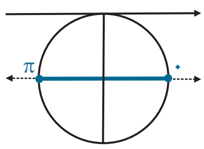
آفرین به تو. دستت درد نکنه. اما اگه به این سؤال من جواب بدی معلومه که مفهوم tan و cot یک زاویه‌رو کاملاً درک کردی.

سوال: $\tan\frac{\pi}{2}$ و $\tan\frac{3\pi}{2}$ چقدره؟



آقا اجازه؟! کافیه در دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌هایی که روی زاویه‌ی $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ قرار دارن رو امتداد بریم تا با محور tan برخورد کنه. نگاه کنید:

آقا ببخشید مثل اینکه مشکلی پیش اومده! این عقربه‌ها که با محور tan موازی هستن و امتدادشون اصلاً محور tan رو قطع نمی‌کنه، پس $\tan\frac{\pi}{2}$ و $\tan\frac{3\pi}{2}$ اصلاً مقدار نداره!



آقا با این حساب میشه گفت که $\cot(0)$ و $\cot(\pi)$ هم مقدار نداره. چون امتداد این دو زاویه، اصلاً با محور cot برخوردی نداره.

بسیار عالی! خیالم راحت شد که تا اینجارو خوب درک کردی.

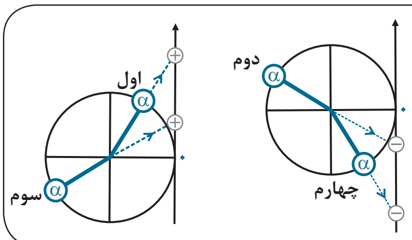
نتیجه:

$\tan\frac{\pi}{2}, \tan\frac{3\pi}{2}, \cot 0, \cot\pi =$ تعریف نشده

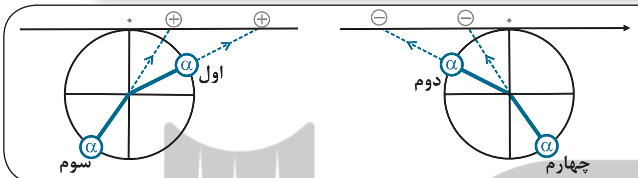
علامت $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

بچه‌ها! میشه بگید که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در هر ربع از دایره‌ی مثلثاتی چه علامتی دارن؟

آقا اجازه؟! از روی دایره‌ی مثلثاتی همه چی معلومه. یعنی علامت $\tan\alpha$ اگه α در ربع اول و سوم باشه، مثبت و اگه α در ربع دوم و چهارم باشه منفیه.



آقا همین‌طور میشه فهمید که علامت cot اگه α در ربع اول و سوم باشه، مثبت و اگه α در ربع دوم و چهارم باشه α منفیه.



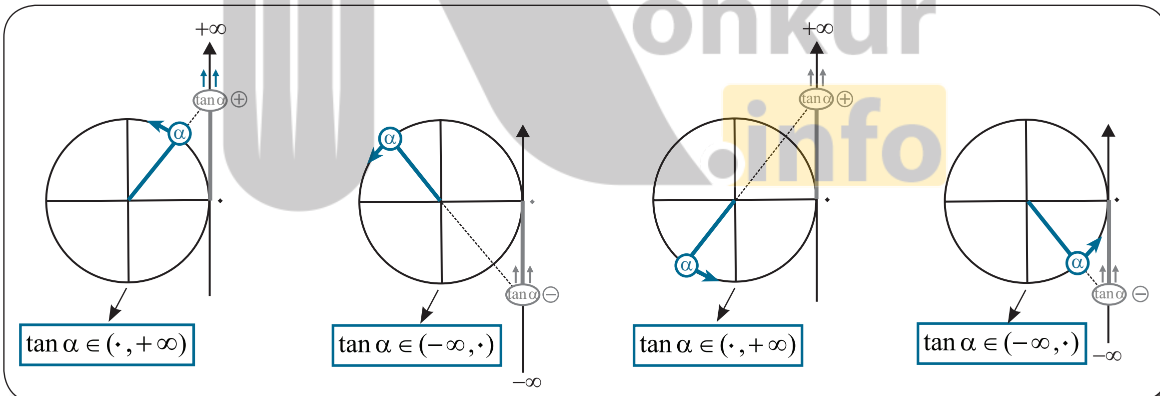
آفرین به شما.

نتیجه: در هر ربع، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ هم علامتند.

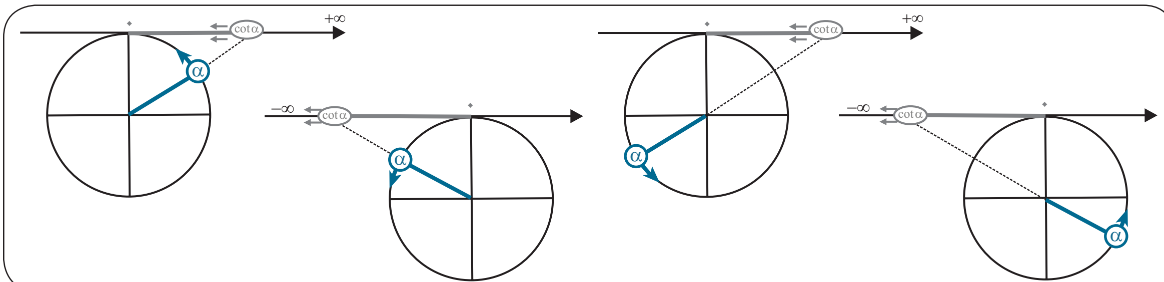
محدوده ی $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$

بچه‌ها! به نظر شما در هر ربع، با افزایش زاویه‌ی α، مقادیر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ زیاد میشن یا کم؟

آقا اجازه؟! چهار شکل زیر نشون میده که در هر کدوم از ۴ ربع، با افزایش α، مقدار $\tan\alpha$ داره زیاد میشه. از طرفی کاملاً مشخصه که با چرخیدن عقربه‌ی α درجهت مثبت، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنه.

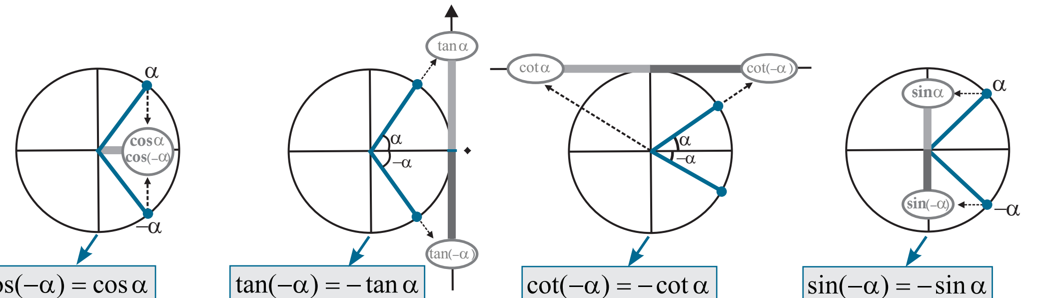


آقا اجازه؟! چهار شکل زیر هم، داره نشون می‌ده که در هر کدوم از ۴ ربع، با افزایش α، مقدار $\cot\alpha$ داره کم میشه. همچنین کاملاً معلومه که با دور زدن عقربه‌ی α، مقدار $\cot\alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنه.



۴ دو زاویه ی قرینه ۴

بچه‌ها! می‌خوام رابطه‌ی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(-\alpha)$ رو به دست بیارم. دایره‌ی مثلثاتی این رابطه‌رو خیلی واضح به ما نشون می‌ده. دقت کنید:



$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ | $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ | $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

آقا اجازه؟! از شکل‌های بالا میشه فهمید که:

۱) $\cos$ دو زاویه‌ی قرینه، با هم برابرن: $\boxed{\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)}$

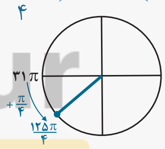
۲) $\sin$، $\tan$ و $\cot$ دو زاویه‌ی قرینه، قرینه‌ی هم دیگه هستن. یعنی:

$$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)$$

معنی روابط بالا به بیان خودمونی اینه:
۱) $\cos$ منفی خوره
۲) $\sin$، $\tan$ و $\cot$ منفی‌انداز هستن.

مثال حاصل $2\cos\left(\frac{-125\pi}{4}\right)-3\tan\left(\frac{-125\pi}{4}\right)+4\cot\left(\frac{-125\pi}{4}\right)$ **کدام است؟**

$$2\cos\left(\frac{125\pi}{4}\right)+3\tan\left(\frac{125\pi}{4}\right)-4\cot\left(\frac{125\pi}{4}\right)=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)+3(1)-4(1)=-\sqrt{2}-1$$



۵ دو زاویه‌ی مکمل ۵

بچه‌ها! اگه مجموع دو زاویه‌ی α و β برابر 180° بشه می‌گیم α و β مکمل یکدیگه هستن.

مکمل زاویه‌ی (α) برابره با $(\pi-\alpha)$، چون: $(\alpha)+(\pi-\alpha)=\pi$

β و α مکمل $\Longrightarrow \alpha+\beta=\pi$

مثال مکمل زوایای داده شده را مقابلشان بنویسید.

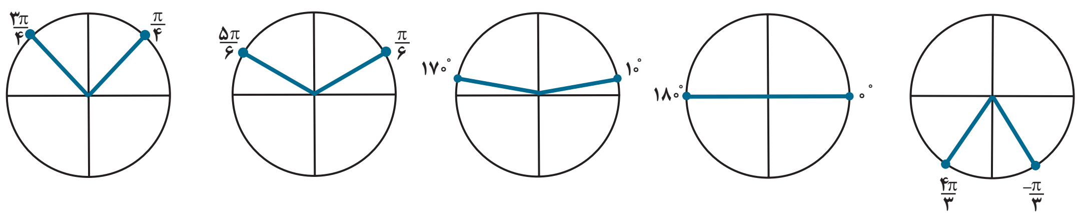
۱) $\alpha-\frac{\pi}{6}\xrightarrow{\text{مکمل}}-\alpha+\frac{7\pi}{6}$

۲) $\alpha+\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{مکمل}}-\alpha+\frac{2\pi}{3}$

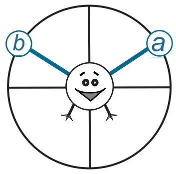
۳) $\frac{\pi}{4}-\gamma\xrightarrow{\text{مکمل}}\frac{3\pi}{4}+\gamma$

۴) $\beta-\frac{2\pi}{5}\xrightarrow{\text{مکمل}}-\beta+\frac{7\pi}{5}$

بچه‌ها! در هر کدوم از دایره‌های پایین، دو زاویه‌ی مکمل رسم کردم.



با توجه به این شکل‌ها، فکر می‌کنید که دو زاویه‌ی مکمل به چه موجودی شباهت دارن؟

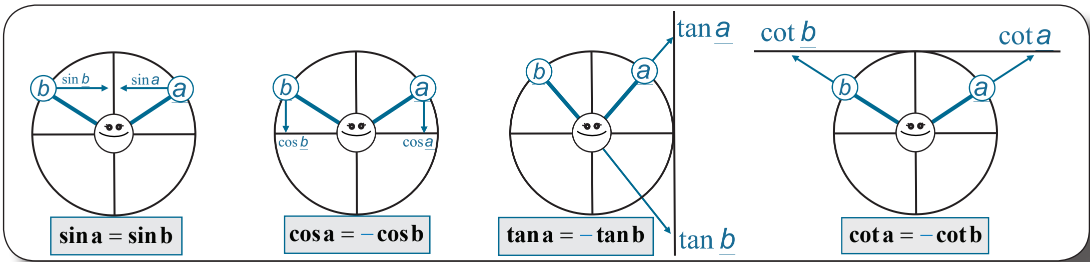


آقا اجازه؟! میشه دو زاویه‌ی مکمل‌رو شبیه به دو بال یک پرنده در نظر گرفت.

از این به بعد «به دو زاویه‌ی مکمل می‌گیم دو بال پرنده»

بچه‌ها! سؤال: نسبت‌های مثلثاتی دو بال پرنده چه رابطه‌ای با هم دارن؟

آقا اجازه؟! خیلی راحته:



آقا اجازه؟! شکل قبل داره میگه که دو زاویه‌ی مکمل، sin هاشون با هم برابرن اما cos ها، tan ها و cot هاشون قرینه‌ی هم‌دیگه هستن.

پس میشه گفت:

۱) مجموع cos های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر؛

۲) مجموع tan های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر (در صورت وجود)؛

۳) مجموع cot های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر (در صورت وجود)؛

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos a+\cos b=0\\ \tan a+\tan b=0\\ \cot a+\cot b=0\end{array}}$$

مثال حاصل $\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{11\pi}{14}$ را به دست آورید.

$$\underbrace{\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{11\pi}{14}}_{0}+\underbrace{\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}}_{0}+\cos\frac{7\pi}{14}=0+0+\cos\frac{\pi}{2}$$

مثال اگر $\sin\frac{3\pi}{8}=m$ باشد حاصل $\sin\frac{5\pi}{8}+\cot(\alpha+\frac{3\pi}{8})+\sin\frac{3\pi}{8}+\cot(\frac{5\pi}{8}-\alpha)$ بر حسب m کدام است؟

$$\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\underbrace{\cot\left(\alpha+\frac{3\pi}{8}\right)+\cot\left(\frac{5\pi}{8}-\alpha\right)}_{0}=\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}+0=2\sin\frac{3\pi}{8}=2m$$

۶ دو زاویه‌ی متمم ۶

بچه‌ها! اگه مجموع دو زاویه‌ی α و β برابر 90° بشه، می‌گیم α و β متمم یکدیگه هستن.

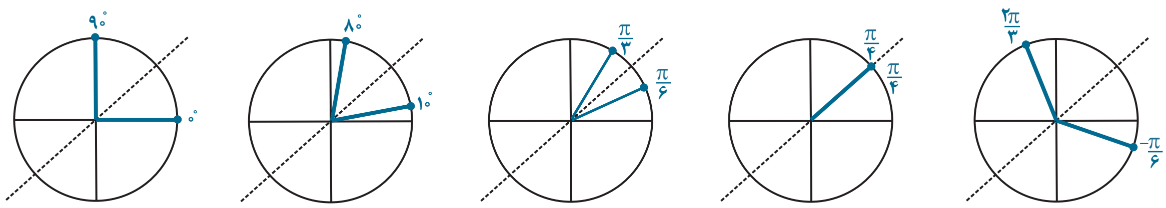
$$\boxed{\beta \text{ و } \alpha \text{ متممند} \Longrightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}}$$

مکمل زاویه‌ی (α) برابره با $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$، چون: $(\alpha)+(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\pi}{2}$

مثال متمم زوایای زیر را روبرویشان بنویسید.

$$\alpha+\frac{\pi}{3}\longrightarrow-\alpha+\frac{\pi}{6}\qquad -\frac{\pi}{4}-\beta\longrightarrow\frac{3\pi}{4}+\beta\qquad \alpha-\frac{\pi}{6}\longrightarrow-\alpha+\frac{2\pi}{3}\qquad \frac{2\pi}{3}-\alpha\longrightarrow-\frac{\pi}{6}+\alpha$$

بچه‌ها! به زاویه‌های متممی که در شکل‌های زیر رسم کردم خوب دقت کنید.



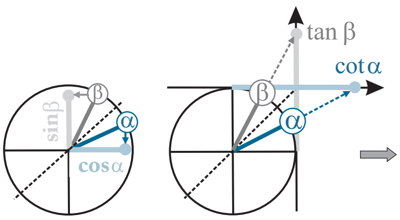
فکر می‌کنید این زاویه‌های متمم نسبت به چه خطی متقارن هستن؟

آقا اجازه؟! خط $y = x$ (یعنی نیمساز ربع اول و سوم)

فکر می‌کنید نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه‌ی متمم چه رابطه‌ای با هم دارن؟

آقا اجازه؟! sin یکی با cos اون یکی و tan یکی با cot اون یکی برابره.

بنابراین میشه گفت که اگه α و β متمم یکدیگه باشن اون موقع:



$$\boxed{\begin{aligned}\sin\beta &= \cos\alpha\\ \tan\beta &= \cot\alpha\end{aligned}}$$

مثال حاصل عبارت $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)-\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)-\sin(\frac{\pi}{4}+\beta)$ کدام است؟

$$\underbrace{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}_{\cdot}+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)}_{\cdot}=\cdot+\cdot=\cdot$$

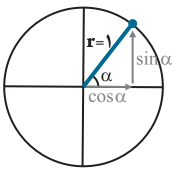
متمم   متمم

۷ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α (روابط پایه) ۷

بچه‌ها! به $(\cot\alpha, \tan\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha)$ میگن «نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α» و حالا من قصد دارم به کمک **دایره‌ی مثلثاتی**، بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α رابطه برقرار کنم.

آقا اجازه؟! مگه میشه به کمک دایره‌ی مثلثاتی، روابط مثلثاتی ایجاد کرد؟!

فکر کنم شما هنوز به معجزات دایره‌ی مثلثاتی ایمان نیاوردید!!! حالا که اینطوره پس نگاه کنید:



فیثاغورث $\longrightarrow \boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \Rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\end{cases}$

قرارداد $\tan\alpha$ $\longrightarrow \tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

قرارداد $\cot\alpha$ $\longrightarrow \cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1} \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}\\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}\end{cases}$$

بچه‌ها! با توجه به روابطی که براتون استخراج کردم، آیا می‌تونید برای این دو عبارت مثلثاتی که در پایین نوشتم، عبارت معادل پیداکنید؟

۱) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=?$ ۲) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=?$

آقا اجازه؟! فکر کنیم که بشه از رابطه‌ی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، هم ارزهای $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ و $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ رو بدست آورد.

۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=(1)^2 \Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$

$$\boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

۲) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=(1)^3 \Rightarrow (\sin^2\alpha)^3+3(\sin^2\alpha)^2(\cos^2\alpha)+3(\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^3=1$

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}=1 \Rightarrow \boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

آفرین عزیزم. کاملاً درسته.

اما بچه‌ها! اگه به دو رابطه‌ی به دست اومده توجه کنید می‌بینید که با هم فامیلن. یعنی این دو رابطه فقط در ضریب ۲ و ۳ با هم اختلاف دارن و بقیه‌ی ساختارشون مثل همه:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

مثال ساده شده‌ی عبارت $\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\times\cos x$ چیست؟

بچه‌ها! بهتره عبارت درون پرانتز رو به یک کسر تبدیل کنید (ساده کنید) یعنی:

$$\frac{(1+\sin x)^2-(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\times\cos x=\frac{\cancel{1}+2\sin x+\cancel{\sin^2 x}-(\cancel{1}-2\sin x+\cancel{\sin^2 x})}{\underbrace{1-\sin^2 x}}\times\cos x=\frac{4\sin x\cos x}{\underbrace{\cos^2 x}}=4\frac{\sin x}{\cos x}=4\tan x$$

مثال عبارت $\tan x+\cot x$ با کدام گزینه برابر است؟ ۱) $\frac{2}{\sin x\cos x}$ ۲) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}$ ۳) $\frac{1}{\sin x\cos x}$ ۴) ۱

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

یادآوری:
$$\begin{cases}a^3+b^3=(a+b)(aa-ab+bb)\\a^3-b^3=(a-b)(aa+ab+bb)\end{cases}$$
تغییر علامت
تغییر علامت

مثال ساده شده‌ی کسر $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$ چیست؟

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(\overbrace{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}^{1})}{1-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{(1-\sin x\cos x)}=\sin x+\cos x$$

مثال اگر $\tan x=2$ باشد، حاصل کسر $\frac{\sin x+\cos x}{3\sin x-2\cos x}$ کدام است؟

$$\frac{\sin x+\cos x}{3\sin x-2\cos x}=\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}{\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos}}=\frac{\tan x+1}{3\tan x-2}=\frac{2+1}{3(2)-2}=\frac{3}{4}$$

خواسته‌ی مسئله‌رو بر حسب $\tan x$ می‌نویسم
یعنی صورت و مخرج کسر رو به $\cos x$ تقسیم میکنم

$\tan x=2$

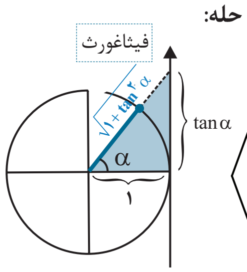
مثال ساده شده‌ی عبارت $\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}-\sin x\cos x$ کدام است؟

بچه‌ها لطفاً گوش کنید: اگه توی یک عبارت مثلثاتی، عامل‌هایی مثل $(1-\cos x)$ یا $(1+\cos x)$ یا $(1-\sin x)$ یا $(1+\sin x)$ دیدید اون عامل‌رو در مزدوجش ضرب و تقسیم کنید. معمولاً با این حرکت قفل اون عبارت مثلثاتی شکسته میشه.

$$\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}-\sin x\cos x=\frac{\sin^3 x(1+\cos x)}{\underbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}_{\underbrace{(1-\cos^2)}_{\sin^2 x}}}-\sin x\cos x=\sin x(1+\cos x)-\sin x\cos x=\sin x+\cancel{\sin x\cos}-\cancel{\sin x\cos x}$$
$$=\sin x$$

بچه‌ها! این‌دفعه می‌خوام هر کدوم از نسبت‌های مثلثاتی $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ رو فقط بر حسب $\tan\alpha$ بنویسم.

اگه من بتونم در دایره‌ی مثلثاتی، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنم که اضلاع این مثلث بر حسب $\tan\alpha$ باشه همه چی حله:

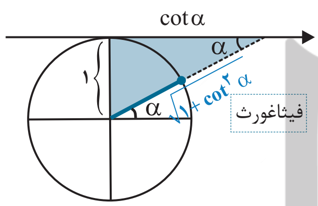


$$\sin\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}\alpha}{\text{وتر}}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}\alpha}{\text{وتر}}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$$

بچه‌ها! فکر کنم الان شما بتونید تک‌تک نسبت‌های مثلثاتی $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ رو بر حسب $\cot\alpha$ بنویسید. مگه نه؟

آقا اجازه؟! باید در دایره‌ی مثلثاتی، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم که اضلاعش بر حسب $\cot\alpha$ باشه. یعنی:



$$\sin\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}\alpha}{\text{وتر}}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}\Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}\alpha}{\text{وتر}}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}\Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha=\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}}$$

بچه‌ها! حالا می‌خوام ۴ رابطه‌ی بالارو توی ذهنتون حک کنم. (در دو مرحله)

۱) مخرج‌های این ۴ رابطه، یا $1+\tan^2\alpha$ هستن و یا $1+\cot^2\alpha$.

۲) اما یکی از دو جمله‌ی مخرج‌رو، شما در صورت کسر می‌بینید. حالا سؤال اینه که کدوم جمله‌ی مخرج، در صورت کسر قرار می‌گیره؟ یعنی :

$$\frac{?\quad ?}{1+\boxed{\tan^2\alpha}}\quad \text{و}\quad \frac{?\quad ?}{1+\boxed{\cot^2\alpha}}$$

اما قبلش لازمه که یک مطلب مهم‌رو بهتون بگم: $\sin\alpha$ با $\tan\alpha$ فامیله، $\cos\alpha$ هم با $\cot\alpha$. به همین دلیل:

در رابطه ای که بین $\sin^2\alpha$ و $\tan^2\alpha$ برقراره ، عبارت $\sin^2\alpha$ پارتی بازی میکنه و فامیلش (یعنی $\tan^2\alpha$) رو میاره بالا. $\quad \sin^2\alpha=\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\boxed{\tan^2\alpha}}$

اما $\sin^2\alpha$ از $\cot^2\alpha$ استفاده نمی‌کنه، چون باهاش غریبن . $\quad \sin^2\alpha=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$

در رابطه ای که بین $\cos^2\alpha$ و $\cot^2\alpha$ برقراره ، عبارت $\cos^2\alpha$ پارتی بازی میکنه و فامیلش (یعنی $\cot^2\alpha$) رو میاره بالا. $\quad \cos^2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\boxed{\cot^2\alpha}}$

اما $\cos^2\alpha$ از $\tan^2\alpha$ استفاده نمی‌کنه، چون باهاش غریبن . $\quad \cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

بچه‌ها! اسم این ۴ رابطه‌ی مهم رو می‌ذارم «روابط دوست و دشمن»، لازمه که بگم این روابط، توی پیدایش روابط مثلثاتی دیگه خیلی دخالت دارن.

دشمن

دوست

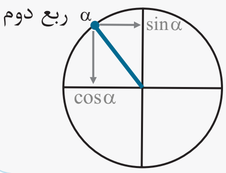
: روابط دوست و دشمن

$$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+\cot^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

مثال اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد. ساده شده‌ی عبارت $\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+\cot^۲\alpha}}$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{۱}{۱+\cot^۲\alpha}}+\sqrt{\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}}=\sqrt{\sin^۲\alpha}+\sqrt{\cos^۲\alpha}=|\overset{\text{مثبت}}{\sin\alpha}|+|\overset{\text{منفی}}{\cos\alpha}|=\sin\alpha-\cos\alpha$$



۸ روابط $\sin(\alpha\pm\beta)$ ، $\cos(\alpha\pm\beta)$ ، $\tan(\alpha\pm\beta)$ ۸

بچه‌ها! میشه مقدار $\sin(۷۵^\circ)$ رو محاسبه کنید.

آقا اجازه؟! این که کاری نداره. کافیه زاویه‌ی ۷۵° رو به صورت $۴۵^\circ+۳۰^\circ$ بنویسیم و sin رو روی این دو زاویه پخش کنیم.

$$\sin ۷۵=\sin(۴۵+۳۰)=\sin ۴۵+\sin ۳۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$$

آیا فکر نمی‌کنی جوابی‌رو که بدست آوردی، غلطه؟

آقا! ببخشید مثل اینکه اشتباه کردم. چون، sin یک زاویه امکان نداره از ۱ بیشتر بشه، ولی در اینجا این اتفاق افتاده!

$$\sin ۷۵=\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}\simeq\frac{۱/۴+۱}{۲}=\frac{۲/۴}{۲}=۱/۲ \quad \text{(غلط)}$$

ببین عزیزم، در راه حل شما یک اشتباه بزرگ نهفته. اشتباه اینه که شما فکر می‌کنی: $\sin(۴۵+۳۰)=\sin\times(۴۵+۳۰)$

در صورتیکه شما نمی‌تونی یک نسبت مثلثاتی رو در زاویه‌های درونش پخش کنی. (ضرب کنی)

چون یک نسبت مثلثاتی اصلاً در زاویه‌ی درون خودش ضرب نمی‌شه. یعنی:

$$\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)\neq\tan\alpha+\tan\beta$$

در واقع نسبتهای مثلثاتی زاویه ی $(\alpha+\beta)$ به صورت مقابل محاسبه می شن: (اگه اثبات روابط زیر رو میخواید، انتهای همین فصل رو ببینید.)

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$$

مثال در مثلثی رابطه‌ی $\sin B\cos A(\cot B-\tan A)=۰$ برقرار است. نوع مثلث کدام است؟

$$\sin B\cos A\left(\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\sin A}{\cos A}\right)=۰\Longrightarrow \sin B\cos A\left(\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin B\cos A}\right)=۰$$

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=۰\Longrightarrow\cos(A+B)=۰\Longrightarrow A+B=\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow\hat{C}=\frac{\pi}{۲}\Longrightarrow \text{قائم‌الزاویه}$$

مثال حاصل کسر $\dfrac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{۱-\tan(x+y).\tan(x-y)}$ کدام است؟

بچه‌ها! اگه کمی دقت کنید می‌بینید که ساختار رابطه‌ی بالا مربوط به $\tan(\alpha+\beta)$ هست. بنابراین میشه نوشت:

$$\frac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{۱-\tan(x+y).\tan(x-y)}=\tan\big((x+y)+(x-y)\big)=\tan ۲x$$

مثال بیش‌ترین مقدار عبارت $(\sin x+\sin ۲x)^۲+(\cos x+\cos ۲x)^۲$ را به‌دست آورید.

$$\sin^۲x+\sin^۲ ۲x+۲\sin x\sin ۲x+\cos^۲x+\cos^۲ ۲x+۲\cos x\cos ۲x=$$

$$\sin^۲x+\cos^۲x+\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۲x+۲(\sin ۲x\sin x+\cos ۲x\cos x)=۱+۱+۲\cos(۲x-x)=\overset{\text{Max=?}}{۲+۲\cos x}$$

$$\cos x\in[-۱,۱]\xrightarrow{\times ۲}۲\cos x\in[-۲,۲]\xrightarrow{+۲}۲+۲\cos x\in[۰,۴] \qquad \text{Max}(۲+۲\cos x)=۴$$

بچه‌ها! یه روزی من از $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ پرسیدم، تو اولش چی بودی که حالا بعد از ساده شدن به شکل $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ دراومدی؟

اون جواب درستی به من نداد و گفت: من از همون اول همین شکلی بودم!!! (در واقع اون خواست منو بپیچونه) اما وقتی که فکر کردم

دیدم اون از اول $\frac{\tan 45+\tan\alpha}{1-\tan 45\tan\alpha}$ بوده و بهش گفتم ای ناقلا تو از اول این شکلی بودی:

$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{\tan 45+\tan\alpha}{1-\tan 45\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\tan(45+\alpha)}$$

از اون‌جا بود که من اسم این رابطه‌رو گذاشتم: رابطه‌ی ناقلا

البته این ناقلا یه داداش هم داره:

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\tan 45-\tan\alpha}{1+\tan 45\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan(45-\alpha)}$$

تازه یه مطلبی رو یادم رفت بهتون بگم. روابط ناقلای بالا گاهی اوقات خودشون رو طوری مخفی می‌کنن که اصلاً نمی‌تونید بفهمید که این‌ها ناقلا هستن. من اسمشون رو گذاشتم روابط ناقلای مخفی. اگه صورت و مخرج این روابط رو به $\cos\alpha$ تقسیم کنید دستشون رو میشه خوند. نگاه کنید:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(45+\alpha)}$$

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\tan(45-+\alpha)}$$

مثال حاصل $\frac{1-\tan 25}{1+\tan 25}$ با کدام برابر است؟

۱) $\tan 25$ ۲) $\tan 20$ ۳) $\tan 15$ ۴) $\tan 10$

$$\frac{1-\tan 25}{1+\tan 25}=\tan(45-25)=\tan 20$$

مثال حاصل $\frac{\sin 15+\cos 15}{\sin 15-\cos 15}$ کدامست؟

$$\frac{\cos 15+\sin 15}{-(\cos 15-\sin 15)}=-\frac{1+\tan 15}{1-\tan 15}=-\tan(45+15)=-\tan 60=-\sqrt{3}$$

۹ روابط 2α ۹

روابط اصلی ($\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$)

بچه‌ها اینده‌فه بریم سراغ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی 2α.

فکر می‌کنید برای $\sin 2\alpha$ چه رابطه‌ای رو می‌شه نوشت؟

آقا اجازه؟! اگه $\sin 2\alpha$ رو به صورت $\sin(\alpha+\alpha)$ بنویسیم اون موقع:

رابطه ی مادر

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

فکر می کنید می‌شه $\sin 2\alpha$ رو برحسب $\tan\alpha$ نوشت؟

آقا اجازه؟! این که کاری نداره، کافیه رابطه ی مادر رو بر حسب $\tan\alpha$ بازنویسی کنیم.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=2\tan\alpha\times\underbrace{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}_{\text{رابطه ی دشمن}} \Rightarrow \boxed{\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\sin\bigcirc = \begin{cases} 2\sin\frown\cos\frown \\ \dfrac{2\tan\frown}{1+\tan^2\frown} \end{cases}$$

مثال $\sin 100 = 2\sin 50\cos 50 = \dfrac{2\tan 50}{1+\tan^2 50}$

مثال $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha}$

مثال $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

مثال حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$$\sin 15\cos 15 = \frac{1}{2}(2\sin 15\cos 15) = \frac{1}{2}\sin 30 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

این رابطه یه ضریب ۲ کم داره

$$\frac{\tan 7/5}{1+\tan^2 7/5}\times\cos 15 = \frac{1}{2}\times\frac{2\tan 7/5}{1+\tan^2 7/5}\times\cos 15 = \frac{1}{2}\sin 15\cos 15 = \frac{1}{4}\times 2\sin 15\cos 15 = \frac{1}{4}\sin 30 = \frac{1}{8}$$

این رابطه یه ضریب ۲ کم داره

مثال اگر $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{5}$ باشد حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

$$(\sin 2x - \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow \overbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}^{1} - \overset{\sin 4x}{\boxed{2\sin 2x\cos 2x}} = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 4x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 4x = \frac{24}{25}$$

بچه‌ها! حالا که به خوبی از پس رابطه‌های $\sin 2\alpha$ براومدید برید سراغ $\cos 2\alpha$.

آقا اجازه؟! اولین حرکت باز کردن زاویه‌ی 2α به شکل $(\alpha+\alpha)$ هست یعنی:

رابطه‌ی مادر

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

آقا اگه بخوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\cos\alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه چی‌رو به $\cos\alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

آقا اگه بخوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\sin\alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه چی‌رو به $\sin\alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

آقا اگه بخوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\tan\alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه چی‌رو به $\tan\alpha$ تبدیل کنیم.

رابطه ی دشمن

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} - \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

رابطه ی دوست

$$\boxed{\cos\bigcirc = \cos^2\frown - \sin^2\frown = 2\cos^2\frown - 1 = 1 - 2\sin^2\frown = \frac{1-\tan^2\frown}{1+\tan^2\frown}}$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید یک دانش‌آموز حواس پرت، ممکنه رابطه ی $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ رو با کدوم رابطه اشتباه کنه؟

آقا اجازه؟! با رابطه ی ناقلا؛ یعنی $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

بچه‌ها! حالا نوبت به $\tan 2\alpha$ می‌رسه.

آقا اجازه؟! روش پیدا کردن این رابطه هم مثل قبلی‌هاست یعنی؛

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید یه دانش‌آموز ممکنه رابطه‌ی $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ رو با چه رابطه‌ای اشتباه بگیره؟

آقا اجازه؟! با رابطه‌ی $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

آفرین عزیزم. حالا رابطه‌ای رو که به‌دست آوردی، من به صورت تعمیم‌یافته می‌نویسم.

$$\boxed{\tan\bigcirc = \frac{2\tan\frac{\bigcirc}{2}}{1-\tan^2\frac{\bigcirc}{2}}}$$

مثال $\tan 200 = \frac{2\tan 100}{1-\tan^2 100}$

مثال $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

مثال حاصل $\frac{\tan\alpha\cot 2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2}\times\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\cot 2\alpha = \frac{1}{2}\tan 2\alpha\cot 2\alpha = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

مثال اگر $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x} = 3$ باشد مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$$\frac{\sin x}{\sin x+\cos x} = 3 \Rightarrow 3\sin x+3\cos x = \sin x \Rightarrow 2\sin x = -3\cos x \xrightarrow{\div\cos x} 2\tan x = -3 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-3}{1-\frac{9}{4}} = \frac{-3}{\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{12}{5}$$

روابط فرعی 2α

بچه ها! چرا $\boxed{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\sin 2\alpha}$ ؟

علت $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\sin\alpha\cos\alpha$

بچه ها! چرا $\boxed{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = 1-\sin 2\alpha}$ ؟

علت $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = \underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-2\sin\alpha\cos\alpha$

بچه ها! چرا $\boxed{\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}}$ ؟

علت $\tan\alpha+\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$

بچه ها! چرا $\boxed{\tan\alpha-\cot\alpha = -2\cot 2\alpha}$ ؟

علت $\tan\alpha-\cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$

بچه ها! چرا $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{2}{4}\sin^2 2\alpha$ ؟

علت $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{2}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\alpha\cos\alpha)$

بچه ها! چرا $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$ ؟

علت $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\alpha\cos\alpha)$

این طور که معلومه ساختار دو رابطه‌ی بالا مثل هم هستن و فقط ضریب $\frac{2}{4}$ و $\frac{3}{4}$ اون‌هارو از هم متمایز کرده.

بچه ها! چرا $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ ؟

علت $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \Longrightarrow 2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$

بچه ها! چرا $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ ؟

علت $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \Longrightarrow 1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$

آقا اجازه؟! از تقسیم دو رابطه ی قبل به همدیگه، می‌شه به رابطه‌ی روبرو رسید: $\boxed{\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

۱۰ روابط (3α) ۱۰

بچه‌ها! فکر می‌کنید برای $\sin 3\alpha$ چه رابطه‌ای میشه نوشت؟

آقا اجازه؟! اگه بخوایم رابطه ای برحسب زاویه‌ی α بنویسیم باید 3α رو خورد کنیم. یعنی:

$$\sin(3\alpha)=\sin(2\alpha+\alpha)=\boxed{\sin 2\alpha}\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=\boxed{2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$

نتیجه $\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}$

درضمن $\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$

۲۱ تبدیل ضرب به جمع ۲۱

بچه‌ها! ازتون خواهش می‌کنم که ۴ رابطه‌ی پایین رو با دقت نگاه کنید و با دوربین ذهنتون یک عکس یادگاری از این ۴ رابطه بگیرید.

الف (قسمت اول، قسمت دوم)
$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\sin\alpha\cos\beta}+\boxed{\cos\alpha\sin\beta}\\ \sin(\alpha-\beta)=\boxed{\sin\alpha\cos\beta}-\boxed{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases}$$

ب (قسمت اول، قسمت دوم)
$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\boxed{\cos\alpha\cos\beta}-\boxed{\sin\alpha\sin\beta}\\ \cos(\alpha-\beta)=\boxed{\cos\alpha\cos\beta}+\boxed{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases}$$

بچه‌ها! اگه به دو رابطه ی قسمت الف دقت کنید می بنید که بسط $\sin(\alpha\pm\beta)$ از دو قسمت تشکیل شد که قسمت اولش $\sin\alpha.\cos\beta$ و قسمت دومش $\cos\alpha.\sin\beta$ هست.

سوال ۱) به نظر شما چه عملی بین $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\sin\alpha\cos\beta$ ایجاد بشه؟

*آقا اجازه؟! برای اینکه **قسمت اول** بسط $\sin(\alpha\pm\beta)$ رو به وجود بیاریم ، باید $\sin(\alpha+\beta)$ رو با $\sin(\alpha-\beta)$ **جمع** کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\sin\alpha\cos\beta}+\cancel{\cos\alpha\sin\beta}\\ \sin(\alpha-\beta)=\boxed{\sin\alpha\cos\beta}-\cancel{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو تساوی}}\boxed{۲\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$$

سوال ۲) چه عملی بین $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\cos\alpha\sin\beta$ ایجاد بشه؟

*آقا اجازه؟! برای اینکه **قسمت دوم** بسط $\sin(\alpha\pm\beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\sin(\alpha+\beta)$ رو **منهای** $\sin(\alpha-\beta)$ کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\cancel{\sin\alpha\cos\beta}+\boxed{\cos\alpha\sin\beta}\\ \sin(\alpha-\beta)=\cancel{\sin\alpha\cos\beta}-\boxed{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}}\boxed{۲\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

اما دوستان من! اگه به دو رابطه ی قسمت ب توجه کنید مشاهده می کنید که بسط $\cos(\alpha\pm\beta)$ هم از دو قسمت تشکیل شده که قسمت اولش $\cos\alpha\cos\beta$ قسمت دومش $\sin\alpha\sin\beta$ هست.

سوال ۳) چه عملی بین $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\cos\alpha\cos\beta$ ایجاد بشه؟

*آقا اجازه؟! برای اینکه **قسمت اول** بسط $\cos(\alpha\pm\beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\cos(\alpha+\beta)$ رو با $\cos(\alpha-\beta)$ **جمع** کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\boxed{\cos\alpha\cos\beta}-\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\\ \cos(\alpha-\beta)=\boxed{\cos\alpha\cos\beta}+\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو تساوی}}\boxed{۲\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$$

سوال ۴) چه عملی بین $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\sin\alpha\sin\beta$ ایجاد بشه؟

*آقا اجازه؟! برای اینکه **قسمت دوم** بسط $\cos(\alpha\pm\beta)$ رو به وجود بیاریم، باید $\cos(\alpha+\beta)$ رو **منهای** $\cos(\alpha-\beta)$ کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\boxed{\sin\alpha\sin\beta}\\ \cos(\alpha-\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}+\boxed{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}}\boxed{-۲\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$$

بچه‌ها! به چهار رابطه ای که تولید کردید میگن روابط ضرب به جمع. چون سمت چپ تساوی به صورت ضرب و سمت راست تساوی به صورت جمع یا منهاست.

مثال حاصل عبارت $۲\sin۲x\cos x-۲\sin۵x\cos۲x+\sin۷x$ کدام است؟

$$۲\sin۲x\cos x-۲\sin۵x\cos۲x+\sin۷x=\overbrace{[\sin(۲x+x)+\sin(۲x-x)]}^{\text{قسمت اول }\sin(\alpha\pm\beta)}-\overbrace{[\sin(۵x+۲x)+\sin(۵x-۲x)]}^{\text{قسمت اول }\sin(\alpha\pm\beta)}+\sin۷x$$

$$=\cancel{\sin۳x}+\sin x-\cancel{\sin۷x}-\cancel{\sin۳x}+\cancel{\sin۷x}=\sin x$$

مثال مقدار عددی $\sin۷۵^\circ\sin۱۵^\circ$ کدام است؟

عبارت $\sin۷۵\sin۱۵$ یه ضریب -۲ کم داره. اگه کنارش این ضریبرو بذاریم اون موقع میشه براش تبدیل ضرب به جمع رو نوشت:

$$\sin۷۵\sin۱۵=\frac{-۱}{۲}(-۲\sin۷۵\sin۱۵)=\frac{-۱}{۲}\underbrace{\left(\cos(۷۵+۱۵)-\cos(۷۵-۱۵)\right)}_{\text{بخش دوم }\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{-۱}{۲}(\cos۹۰-\cos۶۰)=\frac{-۱}{۲}\left(۰-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}$$

۱۱ تبدیل جمع به ضرب ۱۱

بچه‌ها! در قسمت قبل دیدید که اگه روابط
$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$ و $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$

رو به صورت ستونی یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم کنیم به چهار رابطه ی مهم میرسیم. نگاه کنید:

۱) $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cancel{\cos\alpha\sin\beta}\\ \quad\oplus\qquad\oplus\qquad\oplus\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cancel{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\underbrace{۲\sin\alpha\cos\beta}_{\text{قسمت اول }\sin(\alpha\pm\beta)}$

۲) $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\cancel{\sin\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\sin\beta\\ \quad\ominus\qquad\ominus\qquad\ominus\\ \sin(\alpha-\beta)=\cancel{\sin\alpha\cos\beta}-\cos\alpha\sin\beta\end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\underbrace{۲\sin\alpha\sin\beta}_{\text{قسمت دوم }\sin(\alpha\pm\beta)}$

۳) $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\\ \quad\oplus\qquad\oplus\qquad\oplus\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\underbrace{۲\cos\alpha\cos\beta}_{\text{قسمت اول }\cos(\alpha\pm\beta)}$

۴) $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\sin\alpha\sin\beta\\ \quad\ominus\qquad\ominus\qquad\ominus\\ \cos(\alpha-\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\sin\alpha\sin\beta\end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\underbrace{-۲\sin\alpha\sin\beta}_{\text{قسمت دوم }\cos(\alpha\pm\beta)}$

به روابط نتیجه شده، می‌گیم تبدیل جمع به ضرب. چون سمت چپ این روابط به صورت جمع و سمت راستشون به شکل ضربه.

آقا اجازه؟! معمولاً در روابط مثلثاتی، زاویه‌هایی که در سمت چپ تساوی قرار دارن یک جمله‌ای هستن نه دو جمله‌ای در حالی که روابط بدست اومده این خاصیت رو ندارن!!

دو جمله ای — دو جمله ای

۱) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=۲\sin\alpha\ \cos\beta$

۲) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=۲\cos\alpha\ \sin\beta$

۳) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=۲\cos\alpha\ \cos\beta$

۴) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-۲\sin\alpha\ \sin\beta$

خب عزیزم. این که غصه نداره. اگه در سمت چپ این تساوی‌ها به جای $(\alpha+\beta)$ بذاری x و به جای $(\alpha-\beta)$ بذاری y، به آرزوت می‌رسی. اما حواست باشه که در سمت راست این تساوی‌ها، زاویه‌ها رو حتماً بر حسب x و y بنویسی. یعنی:

$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$

$\oplus$: $۲\alpha=x+y \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{x+y}{۲}} \xrightarrow{\text{در اصطلاح خودمونی}} \boxed{\alpha=\frac{\text{جمع}}{۲}}$

$\ominus$: $۲\beta=x-y \Rightarrow \boxed{\beta=\frac{x-y}{۲}} \xrightarrow{\text{در اصطلاح خودمونی}} \boxed{\beta=\frac{\text{کم}}{۲}}$

$$\sin\overset{x}{(\alpha+\beta)}+\sin\overset{y}{(\alpha-\beta)}=۲\sin\overset{\frac{x+y}{۲}}{\alpha}\ \cos\overset{\frac{x-y}{۲}}{\beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=۲\cos\ \alpha\ \sin\ \beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=۲\cos\ \alpha\ \cos\ \beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-۲\sin\ \alpha\ \sin\ \beta$$

بچه‌ها! برای این‌که ۴ رابطه‌ی بالارو خوب به ذهنتون بسپرید و هیچ وقت فراموش نکنید، بهتون توصیه می‌کنم که این روابط رو حتماً در دو مرحله تکمیل کنید: **مرحله‌ی ۱:** ساختار نویسی **مرحله‌ی ۲:** زاویه‌گذاری

برای این‌که درک کنید چی میگم مثالی براتون می‌زنم. می‌خوام رابطه‌ی $\sin x+\sin y$ رو در دو مرحله تکمیل کنم:

مرحله‌ی ۱: فرض میکنم $\sin x+\sin y$ همون $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ هست که جوابش میشه قسمت اول $\sin(\alpha\pm\beta)$ (یعنی ساختار $2\sin\cos$)

مرحله‌ی ۲: $\frac{\text{جمع}}{2}$ (یعنی $\frac{x+y}{2}$) رو به جای اولین زاویه و $\frac{\text{کم}}{2}$ (یعنی $\frac{x-y}{2}$) رو درون دومین زاویه قرار می‌دم:

$$2\sin\underset{\downarrow}{\ }\frac{\text{جمع}}{2}\ \cos\underset{\downarrow}{\ }\frac{\text{کم}}{2}$$

$$\underset{\alpha+\beta}{\sin x}+\underset{\alpha-\beta}{\sin y}\xrightarrow{\text{قسمت اول }\sin(\alpha\pm\beta)}2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y\xrightarrow{\text{قسمت دوم }\sin(\alpha\pm\beta)}2\cos\downarrow\sin\downarrow$$

$$\cos x+\cos y\xrightarrow{\text{قسمت اول }\cos(\alpha\pm\beta)}2\cos\downarrow\cos\downarrow$$

$$\cos x-\cos y\xrightarrow{\text{قسمت دوم }\cos(\alpha\pm\beta)}-2\sin\downarrow\sin\downarrow$$

مثال حاصل $\frac{\sin 80+\sin 40}{\cos 20}$ چیست؟

$$\frac{\sin 80+\sin 20}{\cos 20}=\frac{2\sin\frac{80+40}{2}\cos\frac{80-40}{2}}{\cos 20}=\frac{2\sin 60\cancel{\cos 20}}{\cancel{\cos 20}}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

مثال حاصل کسر $\frac{\cos 6x+\cos 2x}{\sin 6x+\sin 2x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{24}$ چیست؟

$$\frac{\cos 6x+\cos 2x}{\sin 6x+\sin 2x}=\frac{2\cos\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x+2x}{2}}{2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}}=\frac{2\cos 4x\cos 2x}{2\sin 4x\cos 2x}=\cot 4x\Big|_{x=\frac{\pi}{24}}=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

۱۲ رابطه ی معرکه (نوع دیگری از تبدیل جمع به ضرب) ۱۲

بچه‌ها! می‌خوام برای هر کدوم از عبارت‌های

$$\begin{matrix}\sin x\pm\cos x\\ \sin x\pm\sqrt{3}\cos x\\ \sin x\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x\end{matrix}\quad\text{و}\quad\begin{matrix}\cos x\pm\sin x\\ \cos x\pm\sqrt{3}\sin x\\ \cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x\end{matrix}$$

معادلی پیدا کنم.

اگه خوب به عبارت‌های بالا نگاه کنید می‌بینید که جمله ی دوم این عبارت‌ها ضرایب $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,\sqrt{3}\right)$ دارن . این ضرایب همون $\tan 60$، $\tan 45$ و $\tan 30$ هستن. حالا دو رابطه‌ی کلی درست می‌کنم تا همه‌ی روابط بالارو در بربگیره، یعنی:

$$1)\ \sin x\pm\tan\theta\cos x=\sin x\pm\frac{\cos x\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin x\cos\theta\pm\cos x\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\sin(x\pm\theta)$$

$$2)\ \cos x\pm\tan\theta\sin x=\cos x\pm\frac{\sin x\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos x\cos\theta\pm\sin x\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\cos(x\mp\theta)$$

نتیجه $\cos x\pm\tan\theta\sin x=\frac{1}{\cos\theta}\cos(x\mp\theta)$

نتیجه $\sin x\pm\tan\theta\cos x=\frac{1}{\cos\theta}\sin(x\pm\theta)$

حالا می‌خوام کاری کنم که شما توی سه مرحله این دو تا رابطه ی معرکه‌رو راحت به ذهنتون بسپارید.

۱) ضریب $\frac{1}{\cos\theta}$ رو برای هر دو رابطه بنویسید. علت: اگه در سمت چپ تساوی، $\tan\theta$ رو باز کنیم، در سمت راست تساوی، ضریب $\frac{1}{\cos\theta}$ به‌وجود می‌آد (به اثبات نگاه کنید)

$$\sin x\pm\tan\theta\cos x=\frac{1}{\cos\theta}\cdots$$

$$\cos x\pm\tan\theta\sin x=\frac{1}{\cos\theta}\cdots$$

۲) اگر در سمت چپ دیدید که sin تنهاست اون موقع سمت راست رو بر حسب sin بنویسید.

$$\underset{\text{تنها}}{\sin x} \pm \tan\theta\cos x = \frac{1}{\cos\theta}\sin(x \bigcirc \theta)$$

و اگه در سمت چپ دیدید که cos تنهاست اون موقع سمت راست رو بر حسب cos بنویسید.

$$\underset{\text{تنها}}{\cos x} \pm \tan\theta\sin x = \frac{1}{\cos\theta}\cos(x \bigcirc \theta)$$

۳) اگه جواب‌رو بر حسب sin نوشتید علامت سمت چپ‌رو بدون تغییر در سمت راست بنویسید

$$\sin x \pm \tan\theta\cos x = \frac{1}{\cos\theta}\sin(x \pm \theta)$$

و اگه جواب‌رو بر حسب cos نوشتید علامت سمت چپ‌رو تغییر بدید و در سمت راست بنویسید.

$$\cos x \pm \tan\theta\sin x = \frac{1}{\cos\theta}\cos(x \mp \theta)$$

نتیجه

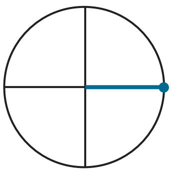
$$\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(x \pm 30) \qquad \frac{1}{\cos 30} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x \pm 60) \qquad \frac{1}{\cos 60} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

$$\sin x \pm 1\cos x = \sqrt{2}\sin(x \pm 45) \qquad \frac{1}{\cos 45} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}$$

۱۳ حل معادلات مثلثاتی ۱۳

عقربه‌ های n سر



بچه‌ها! یه سوال: میشه بگید در شکل روبرو مقدار زاویه‌ی x چنده؟

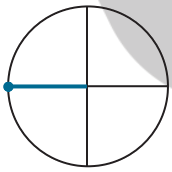
آقا اجازه؟! چه سؤال راحتی!! معلومه که مقدار x برابر با صفره.

به نظر شما $x = 2\pi$ نمی‌تونه باشه؟ *آقا $x = 2\pi$ هم می‌تونه باشه.*

نظرتون راجع به $x = 4\pi$ چیه؟

آقا اجازه؟! فهمیدم. شما می‌خواید بگید که مقدار x فقط صفر نیست بلکه می‌تونه مضرب زوجی از π باشه. یعنی:

$$x = \{\ldots, 0(\pi), 2(\pi), 4(\pi), 6(\pi), \ldots\} \xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = (\text{زوج})\,\pi \Longrightarrow x = 2k\pi$$



حالا یه سؤال دیگه: در شکل روبرو مقدار زاویه‌ی x چنده؟

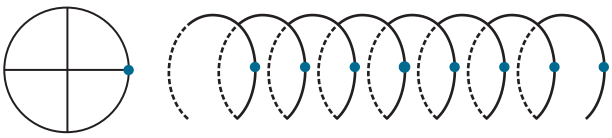
آقا اجازه؟! ایندفعه دیگه اشتباه نمی‌کنم. x می‌تونه بی‌شمار زاویه باشه که همشون مضرب فردی از π هستن. یعنی:

$$x = \{\ldots, 1(\pi), 3(\pi), 5(\pi), 7(\pi), \ldots\} \xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = (2k+1)\pi$$

بچه‌ها! می‌خوام یه موضوع مهمی رو باهاتون در میون بزارم. پس خوب گوش کنید:

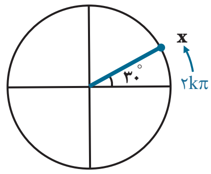
«دایره‌ی مثلثاتی اصلاً دایره نیست، بلکه یک فنره که از دو سر نامتناهیه»

اگه به این فنر از روبرو نگاه کنید مثل یک دایره هست. اما اگه از کنار بهش نگاه کنید فنر بودنش رو کاملاً حس می‌کنید.

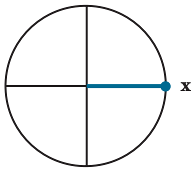


(نگاه از مقابل) (نگاه از کنار)

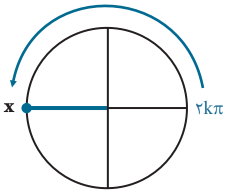
از اونجایی که این نقاط در امتداد هم قرار دارن، ما این نقاط رو از روبرو فقط یک نقطه می‌بینیم. پس وقتی ازتون پرسیدن، زاویه‌ی عقربه‌ای که روی دایره‌ی مثلثاتی قرار داره, چنده، بهتره به جای گفتن زاویه‌ی اختصاصی،فرمول عمومی اون زاویه رو بگید تا همه‌ی زوایای مربوطه رو در بربگیره. یعنی:



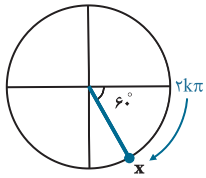
$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$



$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi$

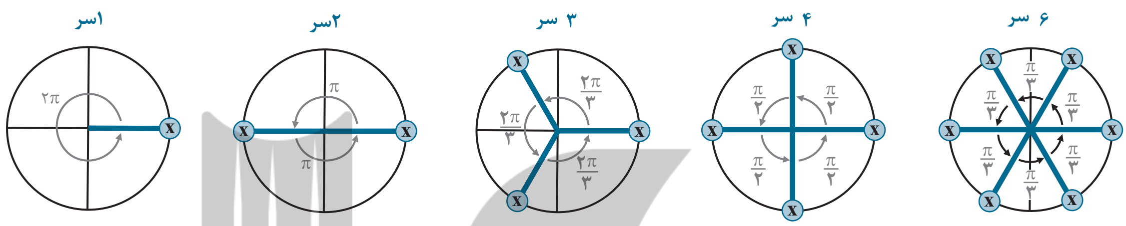


$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi + \pi \Longrightarrow x = (2k+1)\pi$



$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$

بچه‌ها! به عقربه هایی که در ۵ دایره زیر رسم شده خوب نگاه کنید.



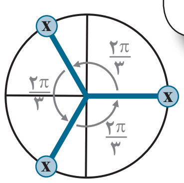
سؤال ۱: آیا در هر دایره، یکی از عقربه ها، روی مبدا حرکت، قرار داده یا نه؟ *بله آقا قرارداره.*

سؤال ۲: آیا در دایره‌های بالا، زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی، یکسان هست یا نه؟ *بله آقا یکسانه.*

تعریف: به n تا عقربه که روی یک دایره قرار بگیرن و دو شرط زیر رو داشته باشن، عقربه های n سَر میگیم:

۱) یکی از عقربه های روی مبدا حرکت باشه.

۲) زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقداری ثابت باشه.

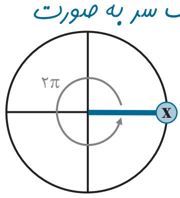


مثلا xهای شکل روبرو یک عقربه ی ۳ سر رو ایجاد کردند.

چون یکی از عقربه ها روی مبدا حرکت قرار داره و زاویه ی بین هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقدار ثابت $\frac{2\pi}{3}$ *هست.*

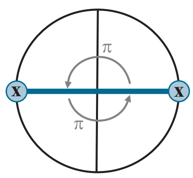
بچه‌ها! حالا ازتون می‌خوام فرمول عمومی x رو در هر یک از شکل‌های زیر بدست بیارید. *آقا اجازه؟! به روی چشم.*

عقربه‌های ۱سر: *در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابره با ۲π. بنابراین فرمول عمومی x در عقربه ی یک سر به صورت زیر محاسبه میشه:*



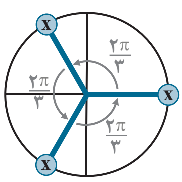
$\Longrightarrow x = \{\dots, 0(2\pi), 1(2\pi), 2(2\pi), 3(2\pi), \dots\} \Longrightarrow x = k(2\pi)$

عقربه‌های ۲سر: *در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابره با π. بنابراین فرمول عمومی x در عقربه ی دو سر به صورت زیر محاسبه میشه:*



$\Longrightarrow x = \{\dots, 0(\pi), 1(\pi), 2(\pi), 3(\pi), \dots\} \Longrightarrow x = k(\pi)$

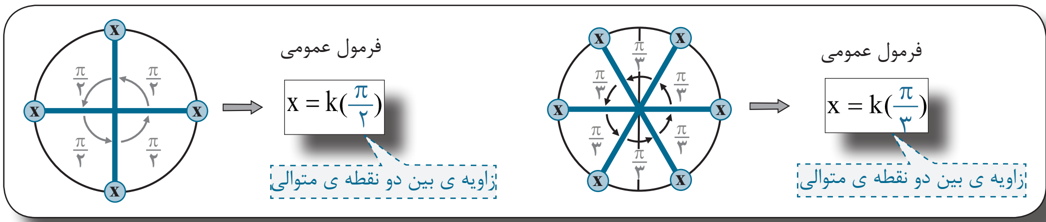
عقربه‌های ۳ سر: *در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابره با* $\frac{2\pi}{3}$*. علتش هم اینه که یک دور کامل از دایره (یعنی زاویه‌ی ۲π) به ۳ قسمت تقسیم شده بنابراین:*



$\Longrightarrow x = \{\dots, 0(\frac{2\pi}{3}), 1(\frac{2\pi}{3}), 2(\frac{2\pi}{3}), 3(\frac{2\pi}{3}), \dots\} \Longrightarrow x = k(\frac{2\pi}{3})$

آقا اجازه؟! فکر کنم از سه فرمولی که پیدا شده، بشه یه قانون درست کرد.

منظورم اینه که: اگه زاویه‌ی بین دو عقربه‌ی متوالی‌رو در k ضرب کنیم، فرمول عمومی x پیدا میشه. یعنی:



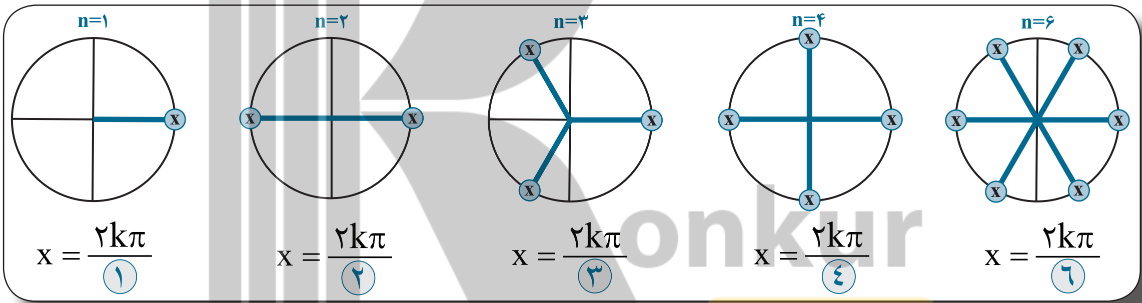
آقا اجازه؟! اگه اشتباه نکنم یه رابطه‌ی کلی کشف کردم. در عقربه های n سر، یک دور کامل از دایره (یعنی 2π) به n قسمت تقسیم میشه، پس زاویه‌ی دو عقربه‌ی متوالی برابره با $\frac{2\pi}{n}$. بنابراین اگه این زاویه رو در k ضرب کنیم فرمول عمومی x در عقربه های n سر ایجاد میشه. یعنی:

فرمول عمومی x برای عقربه های n سر

$$x = k(\frac{2\pi}{n}) \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{n}}$$

آفرین به تو دانش‌آموز کاشفم. با رابطه‌ای که ایجاد کردی، روش جدیدی در حل معادلات مثلثاتی بوجود اومد. پس الان همه با هم می‌تونیم بگیم: مثلثات سنتی خداحافظ، مثلثات نوین سلام.

بچه‌ها! اگه موافق باشید فرمول عمومی x رو برای عقربه های ۱ سر، ۲ سر، ۳ سر، ۴ سر و ۶ سر به کمک رابطه ی جدید به دست بیاریم.



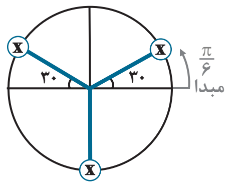
عقربه های n سر دوران یافته

بچه‌ها! عقربه های n سر، ممکنه به اندازه‌ی α رادیان دوران کنن. دراین صورت فرمول عمومی x رو برای عقربه‌های n سر دوران یافته، میشه اینطوری نوشت:

$$\frac{2k\pi}{n} \begin{cases} \xrightarrow{\alpha \text{ رادیان چرخش در جهت مثبت}} \frac{2k\pi}{n} + \alpha \\ \xrightarrow{\alpha \text{ رادیان چرخش در جهت منفی}} \frac{2k\pi}{n} - \alpha \end{cases}$$

آقا اجازه؟! از کجا بفهمیم که عقربه های n سر چه قدر دوران پیدا کرده؟

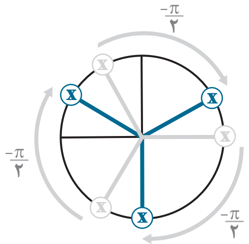
از اونجایی که در عقربه های n سر، همیشه یکی از عقربه ها روی مبدأ حرکت قرار داره، در صورت دوران، این عقربه از مبدأ جدا میشه. بنابراین کافیه شما نزدیک‌ترین نقطه به مبدأرو شناسایی کنید. در نتیجه زاویه‌ی بین این عقربه تا مبدأ حرکت، همون مقدار دورانه.



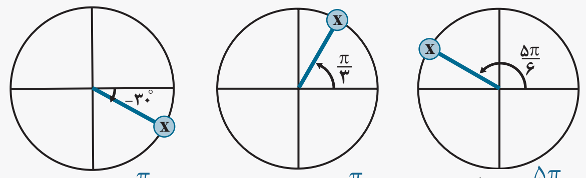
مثلاً: در شکل روبه رو شما یک عقربه‌ی ۳ سر رو می‌بینید. (یعنی $\frac{2k\pi}{3}$) همونطورکه می‌بینید این عقربه‌ی ۳ سر، مقداری چرخیده. (چون هیچ کدوم ازنقاطش روی مبدأ حرکت قرار ندارن)کاملاً واضحه که نزدیک‌ترین عقربه به مبدأ، زاویه‌ای ۳۰ درجه در جهت مثبت ایجاد کرده: $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

آقا اجازه؟! آیا دراین مثال میشه فرمول عمومی رو به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$ هم نوشت؟

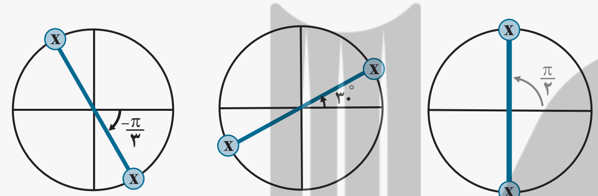
بله عزیزم. در واقع شما داری میگی که زاویه‌ی ۳ سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ در جهت منفی چرخیده. اما بچه‌ها! یه چیزی یادتون باشه: معمولاً مقدار چرخش رو با نزدیک‌ترین عقربه به مبدأ می‌سنجند.



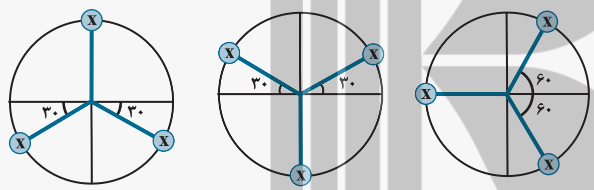
مثال فرمول عمومی زاویه‌ی x رو در هر یک از شکل‌ها به‌دست بیارید.



$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\quad$ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$



$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ $\quad$ $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$



$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ $\quad$ $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

A) آقا اجازه؟! در هر سه شکل زاویه‌ای یک سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{1}$) داریم که هر کدومشون، مقداری دوران پیدا کردن پس:

مقدار دوران + $\frac{2k\pi}{1}$ = فرمول عمومی

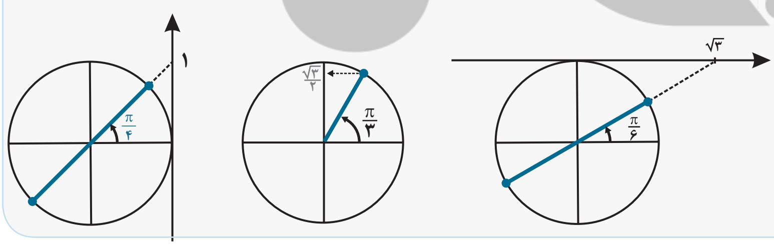
B) آقا اجازه؟! در هر سه شکل، زاویه‌ی دو سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{2}$) داریم که همشون مقداری دوران پیدا کردن. بنابراین:

مقدار دوران + $\frac{2k\pi}{2}$ = فرمول عمومی

C) آقا اجازه؟! هر سه شکل روبه‌رو زاویه‌ی ۳ سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) هستن که مقداری چرخیدن. درنتیجه:

مقدار چرخش + $\frac{2k\pi}{3}$ = فرمول عمومی

مثال مقدار $\dfrac{\tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) \times \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3})}{\cot(k\pi + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟



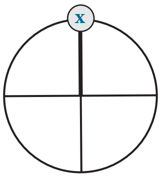
$$\frac{\tan\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\cot\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

حل معادله‌ی $\sin x = a$ به روش شهودی

بچه‌ها! تا الان هر چی مقدمه‌چینی کردیم بخاطر این بود که شما بتونید معادلات مثلثاتی رو به روش شهودی حل کنید. برای اینکه منظورم رو بهتر بفهمید چند تا سؤال ازتون می‌پرسم.

سؤال ۱: از معادله‌ی $\sin x = ۱$ مقدار x رو بیابید.

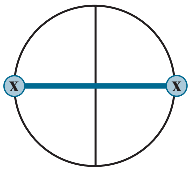
آقا اجازه؟! منظور سؤال اینه که xای رو روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید که سینوسش برابر ۱ بشه (یعنی ارتفاع اون x برابر ۱ بشه):

$\sin x = ۱ \Rightarrow$ 

$\xrightarrow{x\text{ زاویه ای یک سره که } \frac{\pi}{۲} \text{ در جهت مثبت چرخیده}} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

سؤال ۲: جواب کلی معادله‌ی $\sin x = ۰$ را به دست آورید.

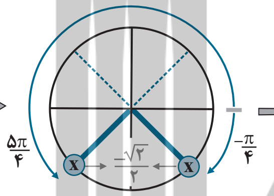
آقا اجازه؟!xهایی که ارتفاعشون صفره فقط در چپ و راست دایره‌ی مثلثاتی قرار دارن و عقربه ی دو سر ایجاد می کنن:

$\sin x = ۰ \Rightarrow$ 

$\Rightarrow = \frac{۲k\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi$

سؤال ۳: مجموعه جواب معادله‌ی $\sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ کدام است؟

آقا اجازه؟!xهایی که ارتفاعشون برابره با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ روی ضربدر با مدل ۴۵° قرار دارن (البته دو زاویه‌ی پایینی):

$\sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow$ 

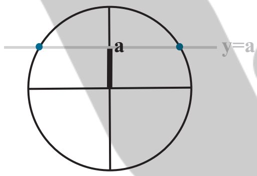
$\Rightarrow$ دو تا عقربه‌ی یک سر داریم که یکی به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ در جهت منفی و اون یکی به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}$ در جهت مثبت چرخیده

$$\begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \end{cases}$$

بچه‌ها! چرا xهایی که روی این دایره هستن رو عقربه ی دو سر در نظر نگرفتید؟

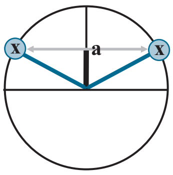
آقا اجازه؟! چون زاویه ی هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقدار ثابتی نداره.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\sin x = a$ رو پیدا کنید باید دو مرحله رو طی کنید:



۱) روی محور sin مقدار a رو انتخاب و از این نقطه خطی بر محور sin عمود کنید تا دایره‌ی مثلثاتی رو قطع کنه.

۲) نقطه‌ی برخورد، همون x یا جواب مورد نظره. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x، جواب کلی معادله هست.

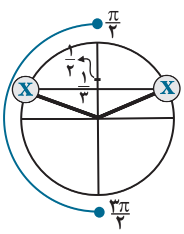


سؤال ۴: معادله‌ی $\sin x = \frac{۱}{۳}$ در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ چند جواب داره؟

آقا اجازه؟! من چه می‌دونم کدوم زاویه ارتفاعش برابر $\frac{۱}{۳}$ هست!!!

دانش‌آموز عزیزم! اگه به سؤال دقت کنی می‌بینی که مسئله مقدار x رو ازت نخواسته بلکه تعداد x رو خواسته (اون‌هم تو بازه‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$).

آهان فهمیدم آقا! در این مسئله کافیه که روی محور sin، مقدار $\frac{۱}{۳}$ رو انتخاب کرده و از این نقطه، خطی افقی رسم کنیم تا دایره رو دو نقطه قطع کنه.این دو مکان، جواب کلی معادله ی $\sin x = \frac{۱}{۳}$ هستن. اما به دنبال تعداد جوابهای این معادله در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ هستیم. پس: .

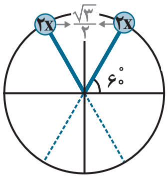
$\sin x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow$ 

$\xrightarrow{\text{در بازه‌ی } [\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]}$ تعداد جواب $= ۱$

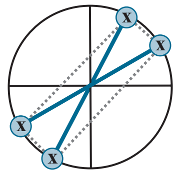
سؤال ۵: از وصل کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ روی دایره‌ی مثلثاتی کدام چند ضلعی حاصل می‌شود؟

آقا اجازه؟! فکر کنم که این معادله‌رو باید در دو مرحله حل کنیم. اول باید مقدار ۲x رو به دست بیاریم و بعد مقدار x رو بیابیم.

$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow$



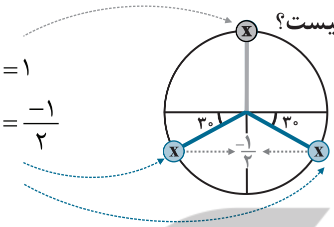
$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\div ۲} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow$



شکل حاصل از وصل کردن x ها، مستطیله.

سؤال ۶: جواب کلی معادله‌ی $۲\sin^۲ x - \sin x - ۱ = ۰$ چیست؟

$۲\sin^۲ x - \sin x - ۱ = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} \sin x = ۱ \\ \sin x = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$



توجه: با توجه به شکل، اجتماع جواب‌ها زاویه‌ی ۳ سری رو تشکیل میدن که $\frac{\pi}{۶}$ در جهت منفی دوران پیدا کرده. یعنی جواب این معادله به صورت $x = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ هست.

حل معادله‌ی $\cos x = a$ به روش شهودی

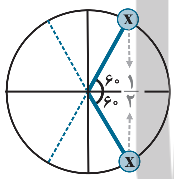
بچه‌ها! وقتی معادلات سینوسی رو به این زیبایی جواب دادید فکر کنم به راحتی از پس معادلات کسینوسی هم بربیاید.

سؤال ۱: جواب کلی معادله‌ی $\cos x = \frac{۱}{۲}$ رو به‌دست بیارید.

آقا اجازه؟! باید x هایی رو روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنیم که کسینوس اون x ها برابر $\frac{۱}{۲}$ بشه. (یعنی طول اون x ها برابر $\frac{۱}{۲}$ بشه).

این x ها روی ضربدر با مدل °۶۰ قرار دارن. (البته دو زاویه‌ی سمت راست ضربدر)

$\cos x = \frac{۱}{۲}$

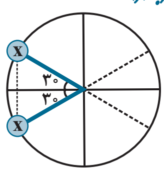


$\xrightarrow[\text{مثبت چرخیده و یکی دیگه در جهت منفی}]{\text{دو تا عقربه‌ی یک سر داریم که یکی } \frac{\pi}{۳} \text{ در جهت}} x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

سؤال ۲: جواب کلی معادله‌ی $\cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ رو به دست بیارید.

آقا اجازه؟! روی محور cos، مقدار $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ رو انتخاب کرده و از این نقطه خطی عمود رسم می کنیم تا دایره رو در دو نقطه قطع کنه. این x ها روی ضربدر با مدل °۳۰ قرار دارن. (البته دو زاویه‌ی سمت چپ ضربدر)

$\cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow$

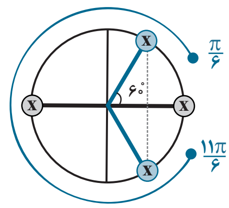


$\xrightarrow[\text{مثبت و یکی دیگه } \frac{۵\pi}{۶} \text{ در جهت منفی چرخیده}]{\text{دو تا عقربه‌ی یک سر داریم که یکی } \frac{۵\pi}{۶} \text{ در جهت}} x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$

سؤال ۳: جواب‌های معادله‌ی $\sin x - ۲\sin x\cos x = ۰$ روی بازه‌ی $[\frac{-\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}]$ در کدام‌یک از فرمول‌های زیر صدق می‌کند؟

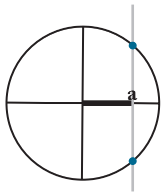
۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}$

$\sin x - ۲\sin x\cos x = ۰ \Rightarrow \sin x(۱ - ۲\cos x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow$



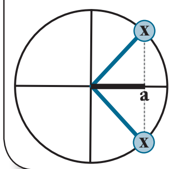
در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}]$ زاویه‌ی ۳ سری رو مشاهده می‌کنیم که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ در جهت مثبت چرخیده. بنابراین x های درون این بازه در فرمول $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}$ صدق می‌کنن.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\cos x = a$ رو پیدا کنید می تونید:



۱) روی محور cos مقدار a رو انتخاب و از این نقطه خطی بر محور cos عمود می‌کنیم تا دایره‌ی مثلثاتی رو قطع کنه.

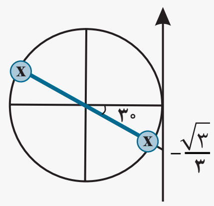
۲) نقطه‌ی برخورد، همون x یا جواب مورد نظره . البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x، جواب کلی این معادله هست.



حل معادله‌ی $\tan x = a$ به روش شهودی

مثال جواب کلی معادله‌ی $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ رو پیدا کنید.

آقا اجازه؟! باید روی محور tan مقدار $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ رو مشخص کنیم. x هایی که امتداد عقربشون به $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ برخورد کنه جواب معادله هست.

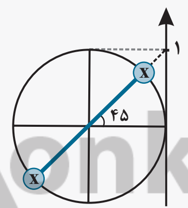


$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$

مثال تمام مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

آقا اجازه؟! خیلی آسونه. کافیه معادله‌رو به توان ۲ برسونیم و بعد طرفین رو به $\cos x$ تقسیم کنیم تا معادله‌ی تانژانتی به‌وجود بیاد.

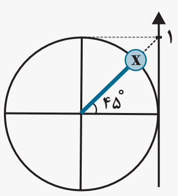
$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \xRightarrow{\text{به توان ۲}} \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = 1 \Rightarrow$



$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

دانش‌آموز کنجکاوم! خوب جلو رفتی اما بد تمومش کردی. مگه من در فصل (۱) نگفته بودم که اگه یک معادله رو به توان زوج برسونی ممکنه جواب زائد بهت بده؟

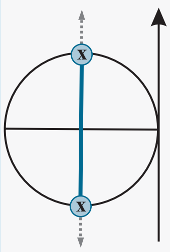
آقا اجازه؟! فهمیدم اشکال کارم کجاست. x ای که در ربع سوم قرار داره جواب معادله نیست، چون $\sin x$ و $\cos x$ رو منفی می‌کنه در نتیجه معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ به ازای x های واقع در ربع سوم تعریف نمی‌شه. بنابراین:



$\Rightarrow x = \cancel{k\pi + \frac{\pi}{4}} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

مثال فرمول عمومی x هایی رو که تانژانتشون تعریف نمیشه، بنویسید؟

آقا اجازه؟! این x ها در بالا و پایین دایره قرار دارن، چون امتداد عقربشون با محور tan برخوردی نداره. (شکل روبرو)

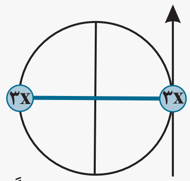


$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال جواب کلی معادله‌ی $\dfrac{\tan 3x+\tan x}{\tan x}=1$ رو به‌دست بیارید.

آقا اجازه؟! اگه یه طرفین وسطین کنیم همه چی حله.

$$\frac{\tan 3x+\tan x}{\tan x}=\frac{1}{1} \Longrightarrow \tan 3x+\tan x=\tan x \Longrightarrow \tan 3x=0 \Longrightarrow$$

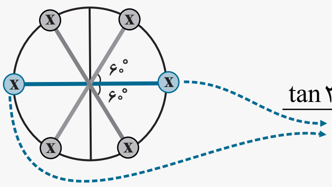


$$\Longrightarrow 3x=k\pi \Longrightarrow x=\frac{k\pi}{3}$$

دانش‌آموز عزیزم باز هم گول خوردی. آیا اصلاً به این موضوع فکر کردی که بعضی از جواب‌های به دست اومده ممکنه مخرج معادله رو صفر کنن؟

آقا اجازه؟! نمی‌دونیم چرا حواسمون به این مسائل نیست. الان بررسی می‌کنم:

$$x=\frac{k\pi}{3} \quad \text{یا} \quad x=\frac{2k\pi}{6} \xrightarrow{\text{زاویه‌ی ۶ سر}}$$



$$\frac{\tan 3x+\tan x}{\tan x}=1$$

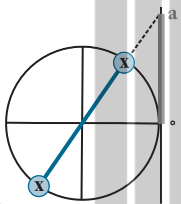
از اونجایی که x های واقع در چپ و راست دایره‌ی مثلثاتی باعث صفر شدن مخرج این معادله می‌شن، نمی‌تونن جواب معادله باشن پس جواب معادله $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

بچه‌ها! خطر خطر: در حل معادلات مثلثاتی (خصوصاً کسری و رادیکالی که محدودیت دامنه دارن) جواب‌های به دست اومده رو حتماً تو معادله‌ی اولیه چک کنید. چون ممکنه بعضی از جواب‌ها در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه نباشند.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\tan x = a$ رو پیدا کنید:

۱) روی محور tan مقدار a رو مشخص کنید.

۲) x هایی که امتداد عقربشون به a برخورد کنه جواب معادله ی $\tan x = a$ هستن.

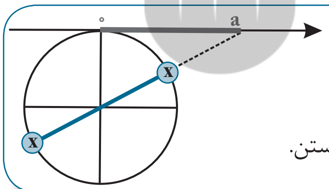


حل معادله‌ی $\cot x = a$ به روش شهودی

اگه خواستید جواب معادله ی $\cot x = a$ رو پیدا کنید میتونید:

۱) روی محور cot مقدار a رو مشخص کنید.

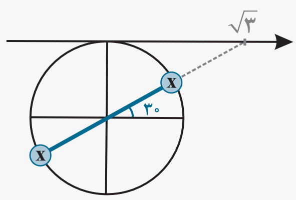
۲) x هایی که امتداد عقربشون به a برخورد کنه جواب معادله ی $\cot x = a$ هستن.



مثال : جواب کلی معادله ی $\cot x=\sqrt{3}$ کدام است؟

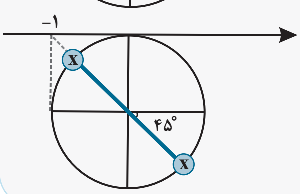
آقا اجازه؟! باید مقدار $\sqrt{3}$ رو روی محور cot مشخص کنیم.

x هایی که امتداد عقربشون به این نقطه می‌فوره جواب این سؤاله.



$$\Longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{6}}$$

مثال: جواب کلی معادله‌ی $\cot x=-1$ را به دست آورید؟

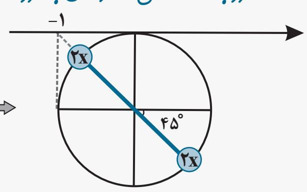


$$\Longrightarrow \boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{4}}$$

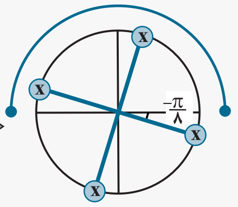
مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $\tan x - \cot x = 2$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ را به دست آورید؟

آقا اجازه؟! اگه بتونیم به کمک روابط مثلثاتی معادله‌ی بالارو که از دو نسبت مثلثاتی تشکیل شده به یک نسبت مثلثاتی تبدیل کنیم همه چی حله.

$$\tan x - \cot x = 2 \xrightarrow{\text{روابط فرعی } 2\alpha} -2\cot 2x = 2 \xrightarrow{\div(-2)} \cot 2x = -1 \Rightarrow$$



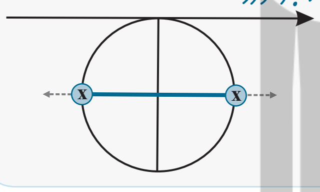
$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \xrightarrow{\text{سری که } 4 \text{ چرخیده } \frac{-\pi}{8}}$$



$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها در بازه ی $[0,\pi]$ ۲ تاست.

مثال: فرمول عمومی x هایی رو بیابید که کتانژانتشون تعریف نشده؟

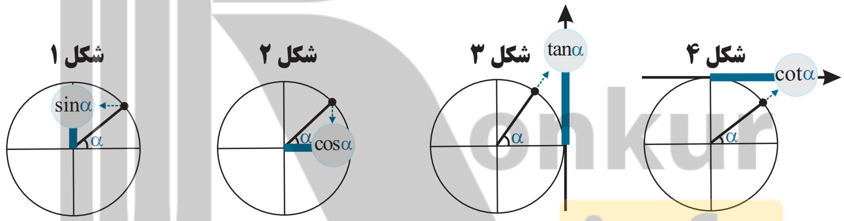
آقا اجازه؟! این x ها در چپ و راست دایره قرار دارن، چون امتداد عقربشون با محور cot نباید برخورد کنه.



$\Rightarrow x = k\pi$

حل معادلات ($\sin x = \sin\alpha$, $\cos x = \cos\alpha$, $\tan x = \tan\alpha$, $\cot x = \cot\alpha$)

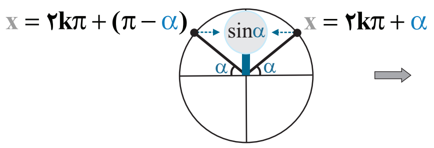
۱) فرض می‌کنیم α زاویه‌ای معلومه. در نتیجه مقادیر $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ هم مشخصن.



با توجه به شکل (۱)

برای حل معادله ی $\sin x = \sin\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که سینوسشون با $\sin\alpha$ برابر شه.

همونطور که می‌بینید این xها (جواب کلی معادله)، دو تا عقربه‌ی یک سره (یکی $x = 2k\pi + \alpha$ و دیگری $(x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$

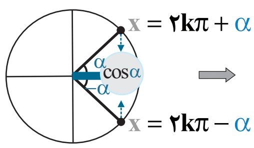


$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

با توجه به شکل (۲)

برای حل معادله ی $\cos x = \cos\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که کسینوسشون با $\cos\alpha$ برابر شه.

همونطور که می‌بینید این xها (جواب کلی معادله)، دو تا عقربه‌ی یک سره (یکی $x = 2k\pi + \alpha$ و دیگری $(x = 2k\pi - \alpha$

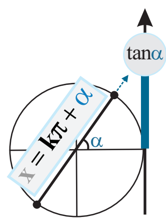


$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

با توجه به شکل (۳)

برای حل معادله ی $\tan x = \tan\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که تانژانتشون با $\tan\alpha$ برابر شه.

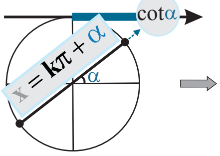
همونطور که می‌بینید این xها(جواب کلی معادله)، یک عقربه‌ی دو سره (یعنی $(x = k\pi + \alpha$



$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

با توجه به شکل (۴)

برای حل معادله ی $\cot x = \cot\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که کتانژانتشون با $\cot\alpha$ برابر شه.
همونطور که می‌بینید این xها(جواب کلی معادله)، یک عقربه‌ی دو سره (یعنی $x = k\pi + \alpha$)



$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال جواب کلی معادله‌ی $\sin ۳x = \sin ۲x$ را به‌دست آورید.

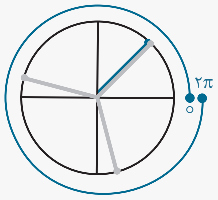
$$\sin ۳x = \sin ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ ۵x = ۲k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵} \end{cases}$$

مثال معادله‌ی $\sin ۲x = \sin(x + \frac{\pi}{۴})$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

آقا اجازه؟! به کمک رابطه‌ی قبل، مسئله به راحتی حل میشه. یعنی:

$$\sin ۲x = \sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x + \frac{\pi}{۴} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{۴}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

آقا اجازه؟! از اون‌جایی که $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ زاویه‌ی یک سربوره و $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ زاویه‌ی ۳ سر هستش. پس در بازه ی $[۰, ۲\pi]$ ۴ جواب داریم.



دانش‌آموز عزیزم، اشتباه گفتی. آیا به این موضوع توجه کردی که $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ در دل $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ قرار داره؟ در واقع $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ زیرمجموعه‌ی $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ هست.
پس جواب کلی $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ خواهد بود و تعداد جواب‌ها در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ برابره ۳ تا.

مثال یکی از ریشه‌های معادله‌ی $۱ + \cos ۵x = ۲\cos^۲ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۷}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۷}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۷}$

$$\cos ۵x = ۲\cos^۲ x - ۱ \Rightarrow \cos ۵x = \cos ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi \pm ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi \\ ۷x = ۲k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} \\ x = \frac{۲k\pi}{۷} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۷}\Big|_{k=۲} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} x = \frac{۴\pi}{۷}$$

مثال مجموعه جواب معادله ی $\tan ۴x = \tan ۲x$ را به دست آورید

$$\tan ۴x = \tan ۲x \Rightarrow ۴x = k\pi + ۲x \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

آقا اجازه؟! اعلام خطر شما دیگه برای همیشه تو ذهنمون می‌مونه. از اونجایی که این معادله محدودیت دامنه داره (چون در بعضی نقاط تعریف نمی‌شه) باید جواب به دست اومده رو توی معادله‌ی اولیه چک کنیم.

معادله‌ی اولیه

$$\tan ۴x = \tan ۲x \Big|_{x = \frac{k\pi}{۲}} \Rightarrow \tan(۲k\pi) = \tan(k\pi) \Rightarrow ۰ = ۰ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$ جواب معادله

مثال مجموعه جواب معادله‌ی $\tan ۴x \cdot \cot ۲x = ۱$ کدام است؟

$$\tan ۴x = \frac{۱}{\cot ۲x} \Rightarrow \tan ۴x = \tan ۲x \Rightarrow ۴x = k\pi + ۲x \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

معادله‌ی اولیه

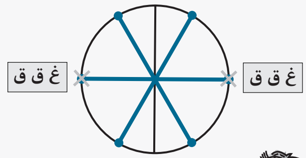
$x = \frac{k\pi}{۲}$ رو توی معادله ی اولیه چک می کنیم $\longrightarrow \tan ۴x \cdot \cot ۲x = ۱ \Big|_{x = \frac{k\pi}{۲}} \Rightarrow \tan(۲k\pi) \times \cot(k\pi) = ۱$

تعریف نشده

آقا اجازه؟! $x = \frac{k\pi}{۲}$ مجموعه جواب پوشالیه چون اصلاً در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کنه. بنابراین معادله‌ی بالا اصلاً جواب نداره.

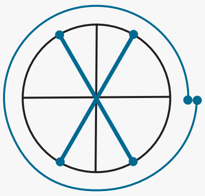
مثال معادله‌ی $\cot ۴x = \cot x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

$$\cot ۴x = \cot x \Longrightarrow ۴x = k\pi + x \Longrightarrow ۳x = k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{۳} \Longrightarrow x = \frac{۲k\pi}{۶} \Longrightarrow$$



آقا اجازه؟! نقاط سمت چپ و راست دایره در معادله‌ی $\cot ۴x = \cot x$ صدق نمی‌کنن. (چون باعث تعریف‌نشدگی cot می‌شن)

$\Longrightarrow$ ۴ = تعداد جواب



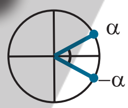
۱۴ نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ ۱۴

بچه ها می خوام قانونی رو براتون بازگو کنم که خیلی سریع بتونید نسبت های مثلثاتی زوایای $(k\pi \pm \alpha)$ رو به نسبتهای مثلثاتی زاویه ی α تبدیل کنید

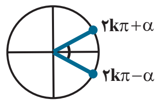
۱) اگه ضریب π عددی زوج باشه اونو از کمان های sin و cos حذف کنید

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\cancel{۲k\pi} \pm \alpha) = \sin(\pm\alpha) \\ \cos(\cancel{۲k\pi} \pm \alpha) = \cos(\pm\alpha)\end{array}}$$

راهنمایی: زوایای $\pm\alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی



و دسته زوایای $۲k\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید



و **sin** و **cos** این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

۲) اگه ضریب π عددی فرد باشه اونو از کمان های sin و cos حذف کرده، اما نسبت مثلثاتی رو قرینه کنید

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\cancel{(۲k+۱)\pi} \pm \alpha) = -\sin(\pm\alpha) \\ \cos(\cancel{(۲k+۱)\pi} \pm \alpha) = -\cos(\pm\alpha)\end{array}}$$

راهنمایی: زوایای $\pm\alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای رو در $(۲k+۱)\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و **sin** و **cos** این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

۳) ضریب π چه زوج و چه فرد باشه اونو از کمان های tan و cot حذف کنید

$$\boxed{\begin{array}{l}\tan(\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \tan(\pm\alpha) \\ \cot(\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \cot(\pm\alpha)\end{array}}$$

راهنمایی: زوایای $\pm\alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای رو در $k\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و tan و cot این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

مثال نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

۱) $\sin(۲۸۵\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

۲) $\sin(۳۲۴\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

۳) $\sin(۵۹\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

۴) $\sin(۷۸\pi + \alpha) = \sin\alpha$

۵) $\cos(۱۷۵\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

۶) $\cos(۲۴\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

۷) $\cos(۳۳\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

۸) $\cos(۴۶\pi + \alpha) = \cos\alpha$

۹) $\tan(۹۶\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

۱۰) $\tan(۹۷\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

۱۱) $\tan(۹۹\pi + \alpha) = \tan\alpha$

۱۲) $\tan(۱۰۰\pi + \alpha) = \tan\alpha$

۱۳) $\cot(۲۳\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۱۴) $\cot(۲۴\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۱۵) $\cot(۲۷\pi + \alpha) = \cot\alpha$

۱۶) $\cot(۲۸\pi + \alpha) = \cot\alpha$

حالا می خوام قانونی رو بگم که نسبت های مثلثاتی زوایای $(\underbrace{(2k+1)}^{\text{فرد}}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)$ رو به نسبتهای مثلثاتی زاویه ی α تبدیل می کنه :

$\sin(\cancel{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\pm\alpha)=؟\cos\alpha$

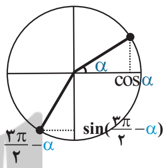
$\cos(\cancel{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\pm\alpha)=؟\sin\alpha$

$\tan(\cancel{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\pm\alpha)=؟\cot\alpha$

$\cot(\cancel{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\pm\alpha)=؟\tan\alpha$

آقا اجازه ؟! این طور که معلومه شما مضربهای فرد $\frac{\pi}{2}$ رو از کمان های درون sin، cos، tan، cot، حذف کردید بعدش، نسبت های مثلثاتی رو عوض کردید. اولاً چرا؟ ثانیاً به جای ؟ چه علامتی رو بزاریم؟! مثبت یا منفی ؟!

عزیزم! برای اینکه جواب سوالت رو بگیری به این مثال توجه کن.



می‌خوام ببینم $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ با چی برابره. فرض می‌کنم α زاویه‌ای حاده هست. پس زاویه‌ی $(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ در ربع سوم قرار میگیره .

همونطور که می‌بینید $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ با $\cos\alpha$ هم اندازه هست، نه با $\sin\alpha$

به همین دلیله که نسبتهای مثلثاتی سمت چپ و راست با هم فرق دارن. $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=؟\cos\alpha$

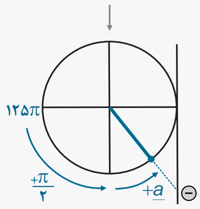
از اونجایی که α در ربع اوله پس $\cos\alpha$ مثبته. از طرفی $(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ در ربع سومه پس $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ منفیه و برای اینکه تساوی $\underbrace{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}_{-}=؟\underbrace{\cos\alpha}_{+}$ برقرار بشه باید به جای ؟ علامت منفی بذاریم.

دوستان عزیزم!نتیجه اینکه برای تشخیص علامت ؟ کافیه علامت سمت چپ معادله ی بالا رو به دست بیارید و در طرف راست معادله قرار بدید.

مثال نسبت‌های مثلثاتی زیر را بر حسب α بنویسید.

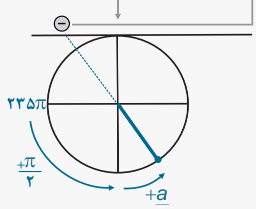
$\tan(\frac{251}{2}\pi+\alpha)=-\cot\alpha$

$(\frac{250}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$



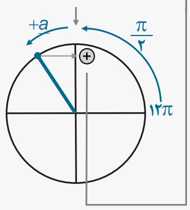
$\cot(\frac{471}{2}\pi+\alpha)=-\tan\alpha$

$(\frac{470}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$



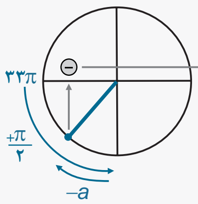
$\sin(\frac{25\pi}{2}+\alpha)=+\cos\alpha$

$(\frac{24}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$



$\cos(\frac{67}{2}\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

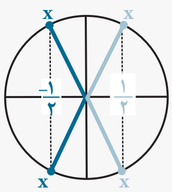
$(\frac{66}{2}\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)$



مثال جواب کلی معادله‌ی $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)\cos(\pi-x)=\sin^2(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

$$\sin(\frac{3\pi}{2}-x)\times\cos(\pi-x)=(\sin\frac{7\pi}{6})^2 \Rightarrow (-\cos x)(-\cos(-x))=(\frac{-1}{2})^2 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}$$

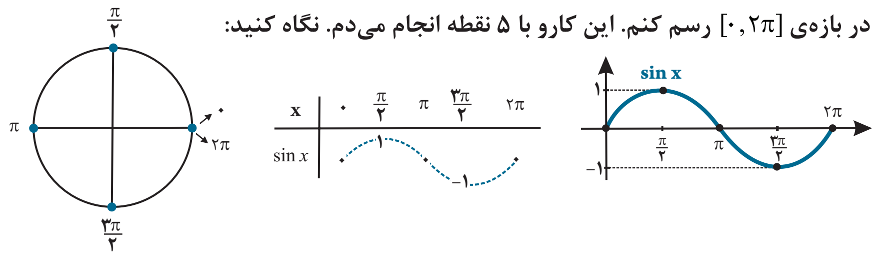
$$\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$



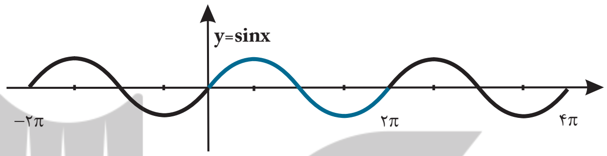
$$\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

رسم نمودار تابع $y = \sin x$

بچه‌ها! می‌خوام نمودار $y = \sin x$ رو در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ رسم کنم. این کارو با ۵ نقطه انجام می‌دم. نگاه کنید:

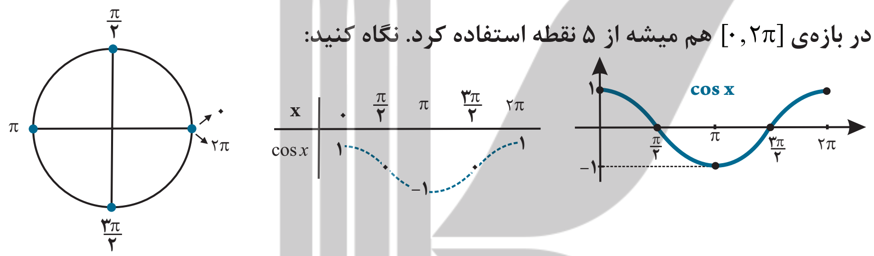


از اونجایی که در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\sin x$ مثل دور اولشه، پس نمودار $y = \sin x$ در بازه‌های $(\dots, [-۲\pi, ۰], [۰, ۲\pi], [۲\pi, ۴\pi], \dots)$ کاملاً به همدیگه شبیه هستن. یعنی:

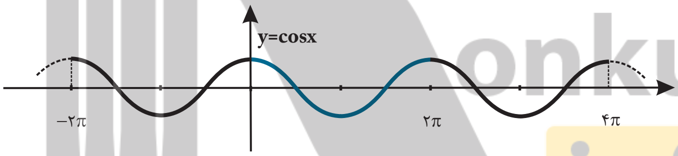


رسم نمودار تابع $y = \cos x$

بچه‌ها! برای رسم نمودار $y = \cos x$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ هم میشه از ۵ نقطه استفاده کرد. نگاه کنید:



با توجه به اینکه در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\cos x$ دور اولش هست. پس نمودار $y = \cos x$ در بازه‌های $(\dots, [-۲\pi, ۰], [۰, ۲\pi], [۲\pi, ۴\pi], \dots)$ مثل همدیگه هستن. یعنی:

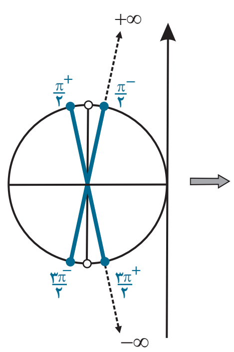


رسم نمودار تابع $y = \tan x$

بچه‌ها! حالا نوبت به رسم نمودار $y = \tan x$ رسیده.

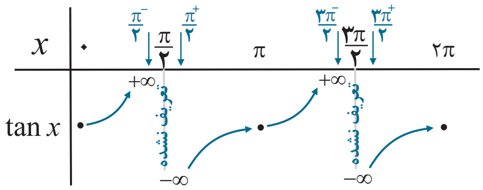
آقا اجازه؟! با توجه به اینکه $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$ در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ قرار دارن و در این نقطه مقداری برای $\tan x$ وجود نداره، چه جوری میشه نمودار $y = \tan x$ رو در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ رسم کرد؟

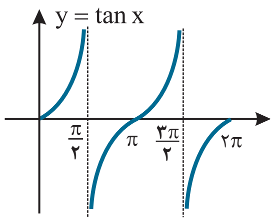
سؤال خوبی پرسیدی. با توجه به این‌که $\tan \frac{\pi}{۲}$ و $\tan \frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده، لازمه بدونیم در همسایگی بسیار نزدیک $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار به چه سمتی میره. یعنی:



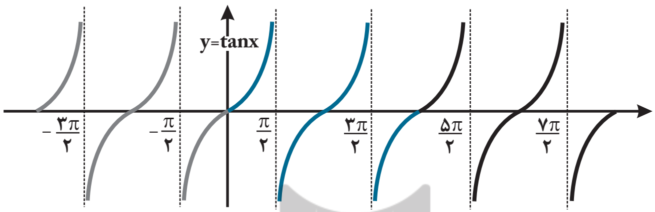
$$\begin{cases} \tan \frac{\pi^-}{۲} = +\infty \\ \tan \frac{\pi^+}{۲} = -\infty \end{cases} , \quad \begin{cases} \tan \frac{۳\pi^-}{۲} = +\infty \\ \tan \frac{۳\pi^+}{۲} = -\infty \end{cases}$$

پس برای رسم نمودار $y = \tan x$ علاوه بر این‌که از ۵ نقطه‌ی $\left(۰, \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right)$ استفاده می‌کنیم از همسایگی بسیار نزدیک $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ هم کمک می‌گیریم. یعنی: $\left(\frac{\pi^-}{۲}, \frac{\pi^+}{۲}, \frac{۳\pi^-}{۲}, \frac{۳\pi^+}{۲}\right)$





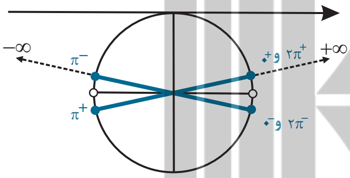
همونطور که می‌دونید در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات tan x مثل دور اولش هست. لذا نمودار $y = \tan x$ در بازه‌های $(\dots,[-2\pi,0],[0,2\pi],[2\pi,4\pi],\dots)$ کاملاً شبیه همدیگه هستن یعنی:



رسم نمودار تابع $y = \cot x$

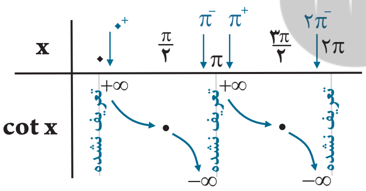
بچه‌ها! با توجه به صحبت‌هایی که در رسم نمودار $y = \tan x$ مطرح شد فکر کنم خودتون بتونید نمودار $y = \cot x$ رو رسم کنید.

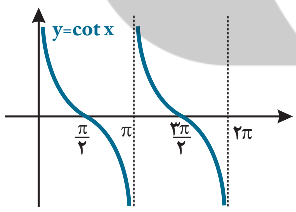
آقا اجازه؟! در بازه‌ی $[0,2\pi]$ نقاطی که cot شون تعریف نشده هست $x = 2\pi$ ، $x = \pi$ و $x = 0$ هستن. یعنی:



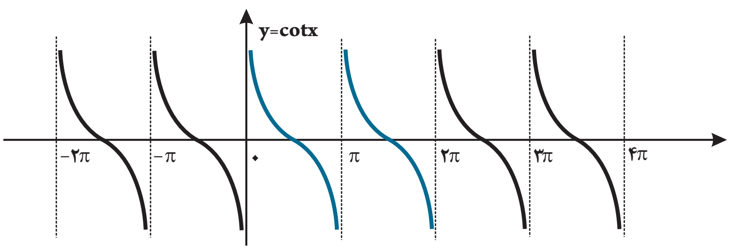
$$\Rightarrow \begin{cases} \cot 0^- = -\infty \\ \cot 0^+ = +\infty \end{cases} , \begin{cases} \cot \pi^- = -\infty \\ \cot \pi^+ = +\infty \end{cases} , \begin{cases} \cot 2\pi^- = -\infty \\ \cot 2\pi^+ = +\infty \end{cases}$$

برای رسم نمودار $y = \cot x$ علاوه بر این‌که از ۵ نقطه‌ی $\left(0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ استفاده می‌کنیم. از همسایگی راست ۰، همسایگی چپ و راست π و همسایگی چپ 2π نیز کمک می‌گیریم. یعنی: $\left(0^+,\pi^-,\pi^+,2\pi^-\right)$



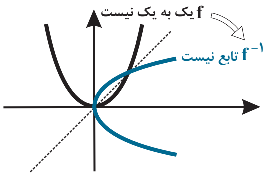


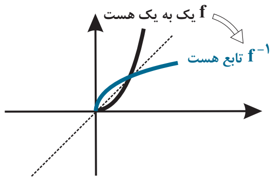
از اونجایی که در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات cot x مثل دور اولش هست. پس نمودار $y = \cot x$ در بازه‌های $(\dots,[-2\pi,0],[0,2\pi],[2\pi,4\pi],\dots)$ مثل همدیگه هسن. یعنی:



نمودار و دامنه ی تابع $y=\sin^{-۱}x$

بچه‌ها! می‌دونید که معکوس یک تابع یعنی قرینه‌ی اون تابع نسبت به خط $y=x$. حالا فکر می‌کنید معکوس تابع f (یعنی $f^{-۱}$) در چه صورتی تابع خواهد بود؟





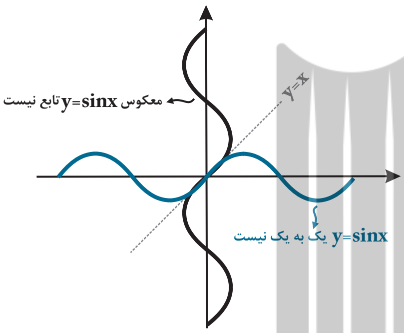
آقا اجازه؟ در صورتی که f تابعی یک به یک باشه، معکوسش (یعنی $f^{-۱}$) تابع میشه و در غیراین صورت خیر. (شکل های روبرو)

آفرین به تو دانش‌آموز خوبم.بچه‌ها! حالا می‌خوام تابع $y=\sin^{-۱}x$ رو که معکوس تابع $y=\sin x$ هست بهتون معرفی کنم.

آقا اجازه؟! شما گفتید تابع $y=\sin^{-۱}x$ ؟!!!

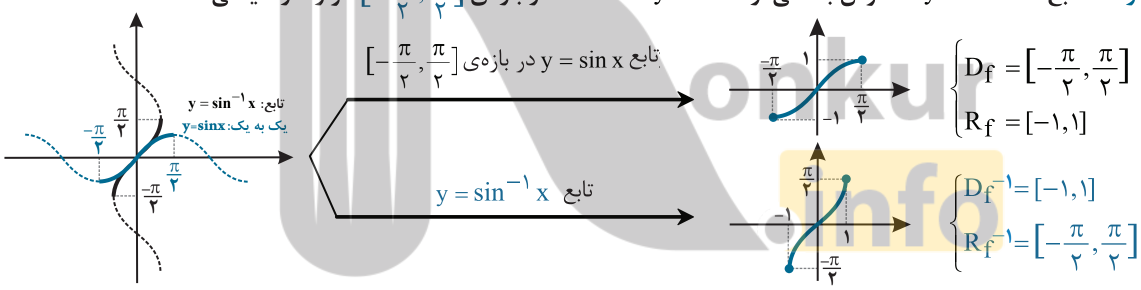
بله عزیزم. مگه عیبی داره؟

آقا اجازه؟! بله که عیب داره. همونطور که خودتون می‌دونیدتابع $y=\sin x$ ، یک به یک نیست،پس چطور به معکوسش یعنی $y=\sin^{-۱}x$ لقب تابع رو می‌دید؟!!! آقا اجازه؟! شکل روبه رو حرف‌های منو تأیید می‌کنه، نگاه کنید:



عزیزم، چرا عصبانی می‌شی؟ الان بهت میگم جریان چیه.منظور من، معکوس کل تابع $y=\sin x$ نیست بلکه معکوس قسمتی از $y=\sin x$ هست که یک به یکه.

طبق قرارداد: تابع $y=\sin^{-۱}x$ معکوس بخشی از $y=\sin x$ هست که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ قرار داره. یعنی:



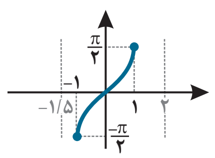
خب؛ حالا فهمیدی که چرا لقب تابع‌رو به $y=\sin^{-۱}x$ دادم؟

آقا اجازه؟! بله فهمیدم. اما کاشکی از اول این موضوع رو می‌گفتید.

خواستم ذهنت‌رو کمی به چالش بکشم تا این مفهوم‌رو خوب درک کنی.

خب بچه‌ها! با توجه به نمودار $y=\sin^{-۱}x$ مقدار $\sin^{-۱}(۲)$ و $\sin^{-۱}(-۱/۵)$ رو به دست بیارید.

آقا اجازه؟! این که کاری نداره. کافیه نمودار $y=\sin^{-۱}x$ رو رسم کنیم و $x=۲$ و $x=-۱/۵$ رو به این نمودار تصویر کنیم.در این صورت ارتفاع های به دست اومده همون $\sin^{-۱}(۲)$ و $\sin^{-۱}(-۱/۵)$ خواهند بود.



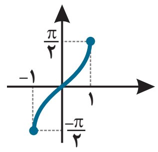
آقا اجازه؟! اذیت می کنی؟! تصویر $x=۲$ و $x=-۱/۵$ اصلاً با نمودار $y=\sin^{-۱}x$ برخوردی نداره! یعنی $\sin^{-۱}(۲)$ و $\sin^{-۱}(-۱/۵)$ اصلاً وجود نداره!

بچه‌ها! اذیتتون نکردم. فقط خواستم بگم تابع $y=\sin^{-1}(x)$ ، x هایی‌رو جذب می‌کنه که در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار داشته باشن. یعنی ورودی به $\sin^{-1}$ حق نداره خارج از بازه‌ی $[-1,1]$ باشه.

$$\begin{cases} y=\sin^{-1}(x) & \Rightarrow\quad D=\{x\mid -1\le x\le 1\} \\ y=\sin^{-1}(g(x)) & \Rightarrow\quad D=\{x\mid -1\le g(x)\le 1\} \end{cases}$$

بچه‌ها! با توجه به نمودار $y=\sin^{-1}x$ مقدار هر کدوم از عبارت‌های زیر رو مقابلشون بنویسید.

آقا اجازه؟! به روی چشم.



۱) $\sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ ۴) $\sin^{-1}(1/2)=$ تعریف نشده

۲) $\sin^{-1}(0)=0$ ۵) $\sin^{-1}(1^+)=$ تعریف نشده

۳) $\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$ ۶) $\sin^{-1}(-1^-)=$ تعریف نشده

مثال دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.(توجه: برای حل این دو مثال، بهتره اعمال روی بازه ها (فصل ۲) رو بلد باشید)

۱) $y=\sin^{-1}(\frac{1}{x-2})$

$$\frac{1}{x-2}\in[-1,1]\xrightarrow{\text{وارون}} x-2\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\xrightarrow{+2}\underbrace{x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)}_{\text{دامنه}}$$

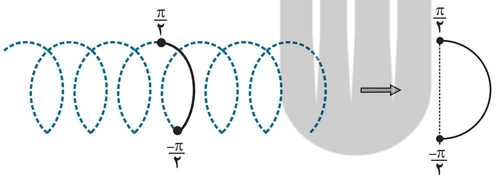
۲) $y=\sin^{-1}(\sqrt{4-x^2})$

$$\sqrt{4-x^2}\in[-1,1]\xrightarrow{\sqrt{4-x^2}\ \text{منفی نباشه}}\sqrt{4-x^2}\in[0,1]\xrightarrow{(\ )^2}4-x^2\in[0,1]$$

$$\xrightarrow{-4}-x^2\in[-4,-3]\xrightarrow{\times(-1)}x^2\in[3,4]\xrightarrow{\sqrt{\ }}|x|\in[\sqrt{3},2]\xrightarrow{\text{حذف قدر مطلق}}x\in[-2,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},2]$$

یافتن مقدار $\sin^{-1}x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

شما می‌دونید برای رسیدن به تابع $y=\sin^{-1}x$ اول باید قسمت یک به یک تابع $y=\sin x$ رو که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ هست انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. پس اگه قصد محاسبه‌ی $\sin^{-1}$ رو دارید (اون‌هم به کمک دایره‌ی مثلثاتی)، فقط بخشی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرار داره. یعنی:



(نگاه از کنار) (نگاه از مقابل)

بنابراین برای محاسبه‌ی $\sin^{-1}x$ نیاز به نیمه‌ی راست دایره‌ی مثلثاتی داریم، اما سؤال اینه که نیم‌دایره‌ی مثلثاتی سمت راست چه کمکی در به دست آوردن $\sin^{-1}$ می‌کنه؟ پس خوب نگاه کنید تا بفهمید.

$\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}$

$\sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$

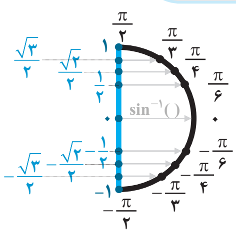
$\sin^{-1}(0)=0$

$\sin^{-1}(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$

$\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}$

$\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})=-\frac{\pi}{3}$

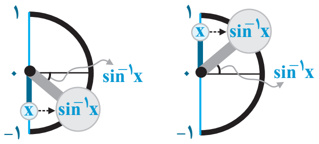
$\sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$



نمایش زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همونطور که دیدید $\sin^{-1}x$ از جنس زاویه است. برای نمایش زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ شما به دو چیز نیاز دارید:

۱) محور $\sin$ ۲) نیمه ی سمت راست دایره ی مثلثاتی



یعنی روی محور $\sin$، مقدار x رو انتخاب می‌کنید و بعد اون x رو به کمان سمت راست دایره‌ی مثلثاتی تصویر می‌کنید تا زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از ۱− به سمت ۱ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ از $-\frac{\pi}{۲}$ به سمت $\frac{\pi}{۲}$ افزایش پیدا می‌کنه.

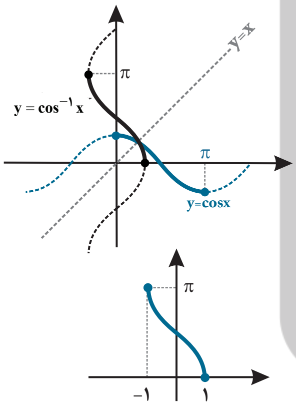
۱۸ توابع معکوس مثلثاتی ($y=\cos^{-1}x$)یا($y=\mathrm{Arc}\cos x$) ۱۸

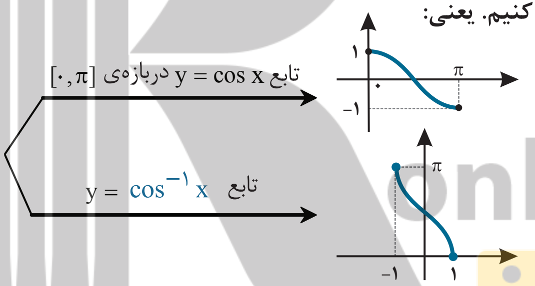
نمودار و دامنه ی تابع $y=\cos^{-1}x$

بچه‌ها! تابع $y=\cos^{-1}x$ معکوس تابع $y=\cos x$ هست، اما معکوس بخشی از $y=\cos x$ نه همش.

آقا اجازه؟! اون بخشی از $y=\cos x$ رو که می‌خواید معکوس کنید باید یک به یک باشه تا $y=\cos^{-1}x$ لیاقت تابع بودن رو پیدا کنه. اما سؤال اینه که شما قصد دارید چه بازه‌ای از $y=\cos x$ رو انتخاب کنید؟

طبق قرارداد باید بازه‌ی $[۰,\pi]$ رو انتخاب کنیم. یعنی:





$\begin{cases} D_f=[۰,\pi] \\ R_f=[-۱,۱] \end{cases}$

$\begin{cases} D_{f^{-1}}=[-۱,۱] \\ R_{f^{-1}}=[۰,\pi] \end{cases}$

بچه‌ها! با توجه به شکل روبه‌رو، فکر می‌کنید تابع $y=\cos^{-1}x$ چه x هایی رو می‌تونه جذب کنه؟

آقا اجازه؟! فقط x هایی رو که در بازه‌ی $[-۱,۱]$ قراردارند.

نتیجه

$$\begin{cases} y=\cos^{-1}(x) \Rightarrow D=\{x \mid -۱\le x\le ۱\} \\ y=\cos^{-1}(g(x)) \Rightarrow D=\{x \mid -۱\le g(x)\le ۱\} \end{cases}$$

۱) $\cos^{-1}(-۱)=\pi$ ۲) $\cos^{-1}(۰)=\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\cos^{-1}(۱)=۰$

۴) $\cos^{-1}(-۳/۵)=$ تعریف نشده ۵) $\cos^{-1}(۱^{+})=$ تعریف نشده ۶) $\cos^{-1}(-۱^{-})=$ تعریف نشده

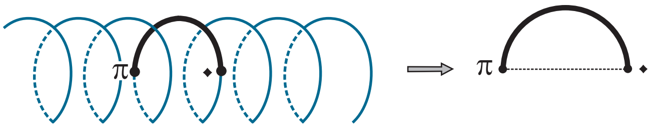
بچه‌ها! در شکل بالا با توجه به نمودار $y=\cos^{-1}x$، مقدار هر کدوم از عبارت‌های زیر رو مقابلشون بنویسید.

مثال دامنه‌ی تابع $y=\cos^{-1}(۲|x|-۳)$ کدام است؟

$$۲|x|-۳\in[-۱,۱] \xrightarrow{+۳} ۲|x|\in[۲,۴] \xrightarrow{\div ۲} |x|\in[۱,۲] \Rightarrow \underbrace{x\in[-۲,-۱]\cup[۱,۲]}_{\text{دامنه}}$$

یافتن مقدار $\cos^{-۱}(x)$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای این‌که به تابع $y=\cos^{-۱}x$ برسید باید قسمت یک به یک تابع $y=\cos x$ رو که در بازه‌ی $[۰,\pi]$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه قصد محاسبه‌ی مقدار $\cos^{-۱}x$ رو دارید (اون‌هم به کمک دایره‌ی مثلثاتی)، کافیه بخشی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $[۰,\pi]$ قرار داره. یعنی:



(نگاه از کنار) (نگاه از مقابل)

بنابراین $y=\cos x^{-۱}$ رو به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی به راحتی می‌شه حساب کرد. نگاه کنید:

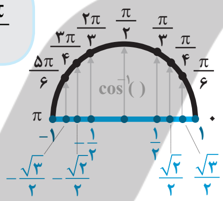
$\cos^{-۱}(۰)=\frac{\pi}{۲}$

$\cos^{-۱}(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\pi}{۳}$ $\cos^{-۱}(\frac{۱}{۲})=\frac{\pi}{۳}$

$\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۳\pi}{۴}$ $\cos^{-۱}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\pi}{۴}$

$\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۵\pi}{۶}$ $\cos^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۶}$

$\cos^{-۱}(-۱)=\pi$ $\cos^{-۱}(۱)=۰$



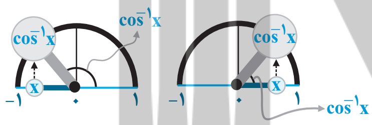
نمایش زاویه‌ی $\cos^{-۱}(x)$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای نمایش زاویه‌ی $\cos^{-۱}x$ شما به دو چیز نیاز دارید:

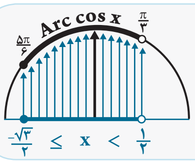
۱) محور $\cos x$ ۲) نیمه ی بالایی دایره ی مثلثاتی

یعنی روی محور cos، مقدار x رو انتخاب می‌کنید و بعدش x انتخاب شده رو به کمان بالا تصویر می‌کنید تا زاویه‌ی $\cos^{-۱}x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از ۱− به سمت ۱ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\cos^{-۱}x$ از π به سمت ۰ کاهش پیدا می‌کنه.



مثال برد تابع $y=\cos^{-۱}x$ وقتی $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$ می‌باشد کدام است؟

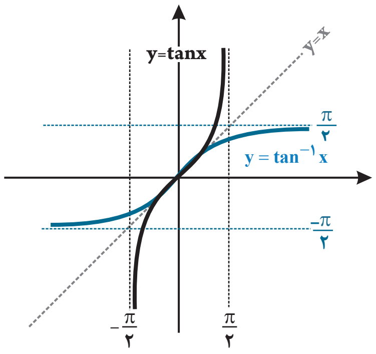


$\Rightarrow \frac{\pi}{۳}<\cos^{-۱}x\le\frac{۵\pi}{۶}$

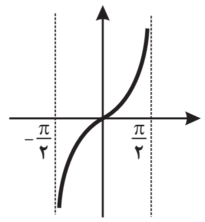
۱۹ توابع معکوس مثلثاتی $(y=\tan^{-۱}x)$ یا $(y=\operatorname{Arctan}x)$ ۱۹

نمودار و دامنه‌ی تابع $y=\tan^{-۱}x$

بچه‌ها! همون‌طور که می‌دونید تابع $y=\tan x$ یک به یک نیست، پس معکوس این تابع، تابع نخواهد بود. به همین دلیل بخشی از نمودار $y=\tan x$ رو انتخاب می‌کنم که یک به یک باشه (طبق قرارداد، بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$) در نتیجه معکوس این قطعه از $y=\tan x$، صددرصد تابع هست. پس، تابع $y=\tan^{-۱}x$ معکوس قسمتی از $y=\tan x$ هست که در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار داره. نگاه کنید:

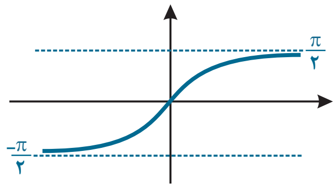


$y = \tan x \rightarrow$



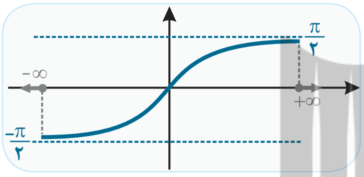
$\begin{cases} D_f = (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases}$

$y = \tan^{-۱} x \rightarrow$



$\begin{cases} D_{f^{-۱}} = \mathbb{R} \\ R_{f^{-۱}} = (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \end{cases}$

بچه‌ها! با توجه به نمودار $y = \tan^{-۱} x$ ، این تابع می‌تونه تمام x ها رو جذب کنه، یعنی دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ هست.



$\Rightarrow$

$\tan^{-۱} x \underset{x \to (-\infty)}{\approx} -\frac{\pi}{۲}$

$\tan^{-۱}(۰) = ۰$

$\tan^{-۱} x \underset{x \to (+\infty)}{\approx} = \frac{\pi}{۲}$

بچه‌ها یه سؤال: فکر می‌کنید دامنه‌ی تابع $y = \tan^{-۱}(g(x))$ چیه؟

آقا اجازه؟! از اونجایی که $y = \tan^{-۱}(\quad)$ هر مقدار حقیقی رو پذیراست.پس همه چی به $g(x)$ بستگی داره.اگه $g(x)$ تعریف بشه پس $y = \tan^{-۱}(g(x))$ هم تعریف میشه ودر غیر اینصورت خیر.بنابراین:

$$\boxed{y = \tan^{-۱}(g(x)) \Rightarrow D = D_g}$$

مثال دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

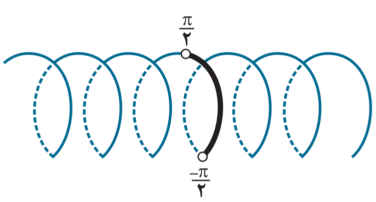
$$y = \tan^{-۱}\left(\sqrt{\frac{x-۲}{۵-x}}\right) \Rightarrow \frac{x-۲}{۵-x} \geq ۰ \Rightarrow$$

x		۲		۵	
$\frac{x-۲}{۵-x}$	−	۰	+	‖	−

$$\Rightarrow D = [۲, ۵)$$

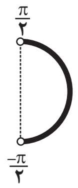
یافتن مقدار $y = \tan^{-۱} x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای رسم نمودار تابع $y = \tan^{-۱} x$ بایدقسمت یک به یک تابع $y = \tan x$ رو که در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه می‌خواید مقدار $\tan^{-۱}$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی محاسبه کنید، کافیه قسمتی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ قرار داره. یعنی:



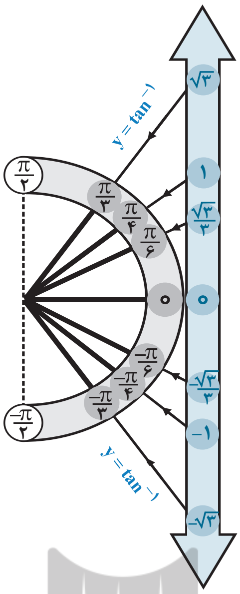
(نگاه از کنار)

$\Rightarrow$



(نگاه از مقابل)

بنابراین زاویه ی $y = \tan^{-۱} x$ رو از طریق نیم‌دایره‌ی مثلثاتی به راحتی می‌شه حساب کرد. نگاه کنید:



$\tan^{-1}(\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳}$

$\tan^{-1}(۱) = \frac{\pi}{۴}$

$\tan^{-1}(\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = \frac{\pi}{۶}$

$\tan^{-1}(۰) = ۰$

$\tan^{-1}(\frac{-\sqrt{۳}}{۳}) = -\frac{\pi}{۶}$

$\tan^{-1}(-۱) = -\frac{\pi}{۴}$

$\tan^{-1}(-\sqrt{۳}) = -\frac{\pi}{۳}$

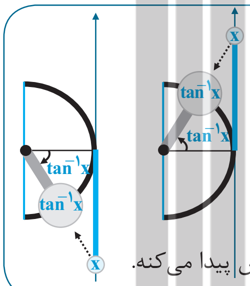
نمایش زاویه‌ی $y = \tan^{-1} x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای این‌که بتونید زاویه‌ی $y = \tan^{-1} x$ رو نمایش بدید به دو چیز نیاز دارید:

۱) محور tan ۲) نیمه ی سمت راست دایره ی مثلثاتی

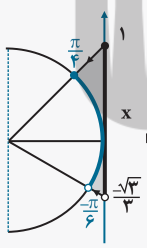
یعنی روی محور tan، مقدار x رو انتخاب می‌کنید. x انتخاب شده رو توسط یک خط به مرکز نیم‌دایره وصل می‌کنید تا زاویه‌ی $\tan^{-1} x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\tan^{-1} x$ هم از $-\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش پیدا می‌کنه.



مثال اگر $\frac{-\sqrt{۳}}{۳} < x \le ۱$ باشد، برد تابع $f(x) = ۳\tan^{-1} x + \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

$\frac{-\sqrt{۳}}{۳} < x \le ۱ \Rightarrow$



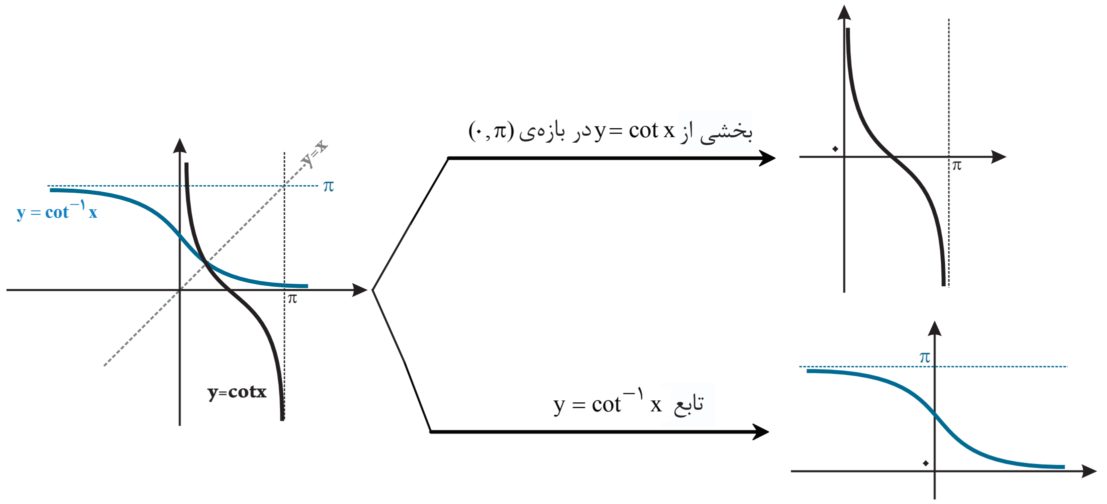
$\Rightarrow \tan^{-1} x \in (-\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۴}] \Rightarrow ۳\tan^{-1} x \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۴}] \Rightarrow ۳\tan^{-1} x + \frac{\pi}{۲} \in \underbrace{(۰, \frac{۵\pi}{۴}]}_{\text{برد}}$

۲۰ توابع معکوس مثلثاتی $(y = \cot^{-1} x)$ یا $(y = \text{Arccot}\, x)$ ۲۰

نمودار و دامنه ی تابع $y = \cot^{-1} x$

بچه‌ها! با توجه به این‌که تابع $y = \cot x$ یک به یک نیست پس معکوسش هم تابع نخواهد بود.بنابراین بخشی از نمودار $y = \cot x$ رو انتخاب می‌کنم که یک به یکه (طبق قرارداد، بازه‌ی $(۰, \pi)$) در نتیجه معکوس این قطعه از $y = \cot x$ قطعاً تابع خواهد بود.

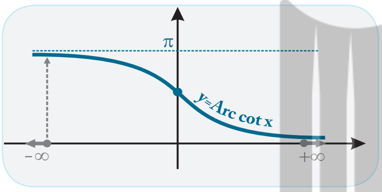
پس قرارداد، تابع $y = \cot^{-1} x$ معکوس قسمتی از $y = \cot x$ هست که در بازه‌ی $(۰, \pi)$ قرار داره. یعنی:



$$\begin{cases} D_f=(0,\pi) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{f^{-1}}=\mathbb{R} \\ R_{f^{-1}}=(0,\pi) \end{cases}$$

بچه‌ها! اگه به نمودار تابع $y=\cot^{-1}x$ دقت کنید می‌بینید که این تابع، قدرت جذب همه‌ی x ها رو داره یعنی: $D_f=\mathbb{R}$



$$\cot^{-1}x \underset{x\to+\infty}{\approx} 0$$

$$\cot^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

$$\cot^{-1}x \underset{x\to-\infty}{\approx} \pi$$

بچه‌ها یه سؤال: دامنه‌ی $y=\cot^{-1}(g(x))$ چیه؟

آقا اجازه؟!

$$\boxed{y=\text{Arc}\cot(g(x)) \Rightarrow D=D_g}$$

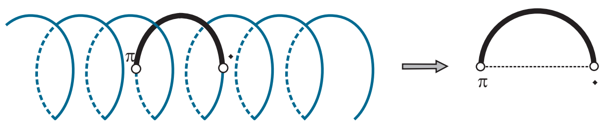
مثال دامنه‌ی تابع $y=\cot^{-1}\left(\frac{1}{x+|x|}\right)$ کدام است؟

همونطور که می دونید ، دامنه ی این تابع، x هایی هستن که باعث میشن $x+|x|\neq 0$ بشه. پس:

$$x+|x|\neq 0 \begin{cases} \text{اگر } x>0: & x+x\neq 0 \quad \text{ق ق} \\ \text{اگر } x=0: & 0+0\neq 0 \quad \text{غ ق ق} \\ \text{اگر } x<0: & x-x\neq 0 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x>0 \Rightarrow D=(0,+\infty)$$

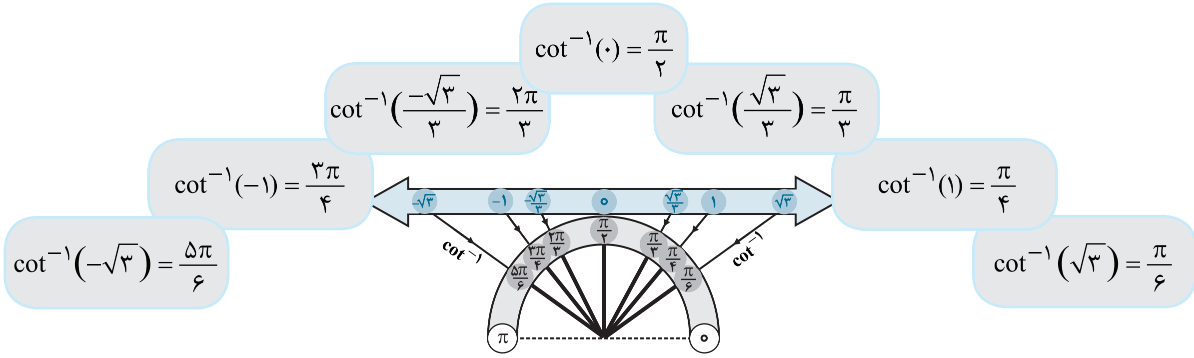
یافتن مقدار $y=\cot^{-1}x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای رسم نمودار تابع $y=\cot^{-1}x$ باید قسمت یک به یک تابع $y=\cot x$ رو که در بازه‌ی $(0,\pi)$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه می‌خواید مقدار $y=\cot^{-1}x$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی محاسبه کنید، کافیه قسمتی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $(0,\pi)$ قرار داره. یعنی:



(نگاه از کنار) (نگاه از مقابل)

بنابراین مقدار $\cot^{-1}x$ رو به راحتی میشه از طریق نیم‌دایره‌ی مثلثاتی حساب کرد. نگاه کنید:



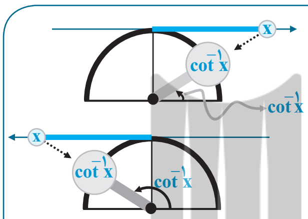
نمایش زاویه‌ی $y=\cot^{-1}x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای این‌که بتونید زاویه‌ی $\cot^{-1}x$ رو نمایش بدید به دو چیز نیاز دارید:

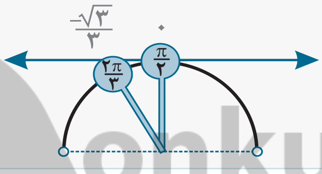
۱) محور cot ۲) نیمه ی بالایی دایره ی مثلثاتی

یعنی روی محور cot، مقدار x رو انتخاب می‌کنید. x انتخاب شده رو توسط یک خط به مرکز نیم‌دایره وصل می‌کنید تا زاویه‌ی $\cot^{-1}x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\cot^{-1}x$ هم از π به سمت صفر کاهش پیدا می‌کنه.



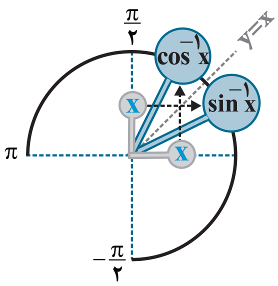
مثال مقدار عبارت $\sin\left(\frac{3}{4}\cot^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)+\cos\left(2\cot^{-1}(0)\right)$ کدام است؟



$$\sin\left(\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1-1=0$$

۲۱ روابط موجود بین زوایای $\sin^{-1}x$ ،$\cos^{-1}x$ ،$\tan^{-1}x$ ،$\cot^{-1}x$ ۲۱

مجموع دو زاویه‌ی متمم



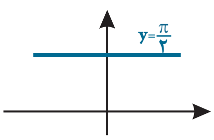
بچه‌ها! آیا می‌تونید مقدار $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ رو به کمک نیم‌دایره‌های مثلثاتی پیدا کنید؟

آقا اجازه؟! با مطالب جدیدی که گفتید، خیلی راحت میشه مقدار $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ رو به‌دست آورد. با توجه به شکل روبرو ، دو مقدار یکسان رو روی محور sin و cos انتخاب کرده و $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ این دو مقدار رو مشخص می کنیم. همونطور که می بینید زاویه‌های $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$ متمم هم‌دیگه هستن،چون نسبت به خط $y=x$ متقارنن.

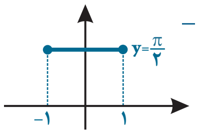
بنابراین: $\boxed{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}}$

یه سؤال دیگه: آیا می‌تونید تابع $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ رو رسم کنید؟

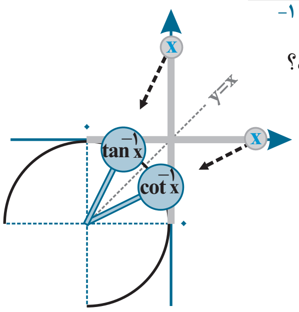
آقا اجازه؟! خیلی آسونه. این تابع، یک تابع ثابته. یعنی: $y=\frac{\pi}{2}$ پس نمودارش اینجوریه:



دانش‌آموز عزیزم باز هم حواست رو جمع نکردی. اگه به تابع $y=\sin^{-1}\underset{-1\le x\le 1}{\underbrace{x}} + \cos^{-1}\underset{-1\le x\le 1}{\underbrace{x}}$ خوب نگاه کنی می‌فهمی که این تابع فقط x هایی رو که در بازه‌ی $[-1,1]$ قرار داره می‌تونه جذب کنه، پس شما با تابع $y=\frac{\pi}{2}$ که دامنه‌اش بازه‌ی $[-1,1]$ هست سروکار داری. یعنی:

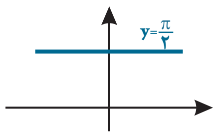


دوستان من! آیا می‌تونید مقدار $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x$ رو به کمک نیم‌دایره‌های مثلثاتی پیدا کنید؟



آقا اجازه؟! کافیه دو مقدار یکسان رو روی محور cot, tan انتخاب کرده و $\cot^{-1}, \tan^{-1}$ رو برای اینرو مقدار رومشخص کنیم. کاملاً واضحه که زاویه‌های $\tan^{-1}x$ با $\cot^{-1}x$ متمم همدیگه هستن. بنابراین:

$$\boxed{\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}}$$



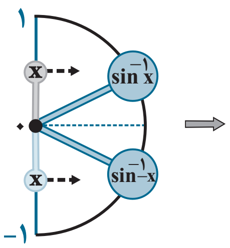
تازه نمودار تابع $y=\tan^{-1}x+\cot^{-1}x$ با توجه به این‌که دامنه‌اش برابره با $\mathbb{R}$، به شکل روبروست:

مثال معادله‌ی $\sin^{-1}x+\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ چند جواب داره؟

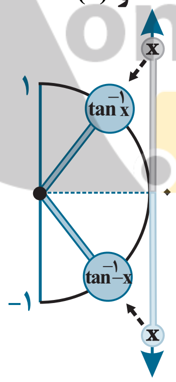
$$\sin^{-1}x=\underbrace{\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{1}{x}}_{\sin^{-1}\frac{1}{x}} \Rightarrow \sin^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

مجموع دو زاویه‌ی قرینه

شکلهای زیر داره نشون میده که زاویای $\sin^{-1}(-x)$ و $\sin^{-1}(x)$ قرینه ی همدیگه هستن (همچنین زوایای $\tan^{-1}(-x)$, $\tan^{-1}(x)$)



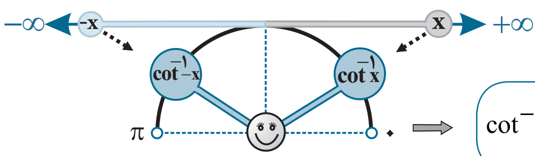
$$\boxed{\sin^{-1}(x)+\sin^{-1}(-x)=0}$$



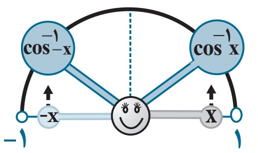
$$\boxed{\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(-x)=0}$$

مجموع دو زاویه‌ی مکمل

شکلهای زیر داره نشون میده که زاویای $\cos^{-1}x$,$\cos^{-1}(-x)$ مکمل همدیگه هستن (همچنین زوایای $\cot^{-1}x$, $\cot^{-1}(-x)$):



$$\boxed{\cot^{-1}(x)+\cot^{-1}(-x)=\pi}$$

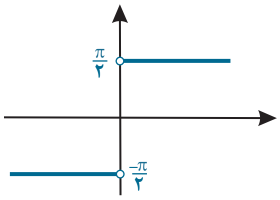


$$\boxed{\cos^{-1}(x)+\cos^{-1}(-x)=\pi}$$

مقادیر $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(\frac{1}{x})$ ، $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(\frac{1}{x})$

بچه‌ها! رابطه‌ی $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ -\frac{\pi}{2} & x<0\end{cases}$ همواره برقراره.

پس نمودار تابع $y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}$ هم به شکل روبه‌روست:



آقا اجازه؟! رو چه حسابی این حرف‌ها رو می‌زنید؟

بچه‌ها! تابع $y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}$ رو در نظر بگیرید. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}-\{0\}$ هست. یعنی: $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

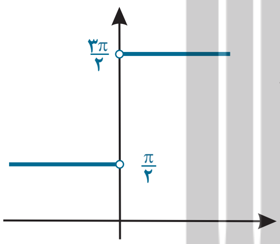
اگه مشتق این تابع‌رو به دست بیارید می‌بینید که $y'=0$ میشه. یعنی این تابع علاوه بر این‌که در بازه‌ی $(0,+\infty)$ یک تابع ثابته، در بازه‌ی $(-\infty,0)$ هم تابعی ثابت خواهد بود. از اون‌جایی که یک تابع ثابت به ازای تمام x های دامنه، فقط یک مقدار داره، کافیه که در بازه‌ی $(0,+\infty)$ یک x دلخواه مثل $x=1$ رو درون تابع قرار بدیم تا مقدار این تابع ثابت در بازه‌ی $(0,+\infty)$ معلوم بشه. هم‌چنین در بازه‌ی $(-\infty,0)$ هم باید یک x دلخواه مثل $x=-1$ رو به تابع بدیم تا مقدار تابع در بازه‌ی $(-\infty,0)$ هم مشخص بشه.

یعنی :

$$y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\begin{cases}\xrightarrow{x=1} \tan^{-1}(1)+\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\ \xrightarrow{x=-1} \tan^{-1}(-1)+\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بچه‌ها! در ضمن رابطه‌ی $\cot^{-1}x+\cot^{-1}\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x>0\\ \frac{3\pi}{2} & x<0\end{cases}$ هم همواره برقراره.

پس نمودار تابع $y=\cot^{-1}x+\cot^{-1}(\frac{1}{x})$ به شکل روبه‌روست:



آقا اجازه؟! آیا از دلایل بالا میشه برای اثبات این رابطه استفاده کرد؟

بله عزیزم.

آقا اجازه؟! فقط در اینجا یک سؤال وجود داره. چرا در این رابطه به ازای $x<0$ مقدار $\frac{3\pi}{2}$ رو قرار دارید؟

خب معلومه. اگه مثل بالا عمل کنی می‌فهمی که:

$$y=\cot^{-1}x+\cot^{-1}\frac{1}{x}=\begin{cases}\xrightarrow{x=1} \cot^{-1}(1)+\cot^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\ \xrightarrow{x=-1} \cot^{-1}(-1)+\cot^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\sin^{-1}x$ ، $\cos^{-1}x$ ، $\tan^{-1}x$

بچه‌ها! همون‌طور که می‌دونید وقتی که دو تابع معکوس هم، با یکدیگه ترکیب بشن، همدیگه رو خنثی می‌کنن و فقط عبارت درونشون می‌مونه. یعنی:

$$f^{-1}(f(x))=x \quad , \quad f(f^{-1}(x))=x$$

بنابراین $\sin^{-1}x$ رو فقط $\sin$ میتونه خنثی کنه(یعنی: $\sin(\sin^{-1}x)=x$

همچنین $\cos^{-1}x$ رو فقط $\cos$ میتونه خنثی کنه (یعنی : $\cos(\cos^{-1}x)=x$

مثال حاصل $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{2}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{5}\right)$ کدام است؟

$$\cos\Big(\sin^{-1}\frac{2}{5}+\underbrace{\sin^{-1}\frac{2}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{5}}_{\frac{\pi}{2}}\Big)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\frac{2}{5}\right)=-\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{5}$$

توجه $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha}$

پس اگه می خواید نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ رو محاسبه کنید کافیه اون نسبت مثلثاتی رو بر حسب $\sin$ بنویسید تا بتونه $\sin^{-1}$ رو خنثی کنه.وهمچنین برای محاسبه ی نسبت های مثلثاتی $\cos^{-1}x$ نسبت رو بر حسب $\cos$ بنویسید

نسبتهای مثلثاتی زاویه ی $\sin^{-1}$

۱) $\cos\bigcirc=\sqrt{1-\sin^2\bigcirc}\ \Rightarrow\ \cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}=\sqrt{1-x^2}$

۲) $\cot\bigcirc=\dfrac{\cos\bigcirc}{\sin\bigcirc}\ \Rightarrow\ \cot(\sin^{-1}x)=\dfrac{\cos(\sin^{-1}x)}{\sin(\sin^{-1}x)}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

۳) $\tan\bigcirc=\dfrac{\sin\bigcirc}{\cos\bigcirc}\ \Rightarrow\ \tan(\sin^{-1}x)=\dfrac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

نسبتهای مثلثاتی زاویه ی $\cos^{-1}$

۱) $\sin\bigcirc=\sqrt{1-\cos^2\bigcirc}\ \Rightarrow\ \sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}x)}=\sqrt{1-x^2}$

۲) $\cot\bigcirc=\dfrac{\cos\bigcirc}{\sin\bigcirc}\ \Rightarrow\ \cot(\cos^{-1}x)=\dfrac{\cos(\cos^{-1}x)}{\sin(\cos^{-1}x)}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

۳) $\tan\bigcirc=\dfrac{\sin\bigcirc}{\cos\bigcirc}\ \Rightarrow\ \tan(\cos^{-1}x)=\dfrac{\sin(\cos^{-1}x)}{\cos(\cos^{-1}x)}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

نسبتهای مثلثاتی زاویه ی $\tan^{-1}x$

۱) $\sin\bigcirc=\dfrac{\tan\bigcirc}{\sqrt{1+\tan^2\bigcirc}}\ \Rightarrow\ \sin(\tan^{-1}x)=\dfrac{\tan(\tan^{-1}x)}{\sqrt{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

۲) $\cos\bigcirc=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\bigcirc}}\ \Rightarrow\ \cos(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

۳) $\cot\bigcirc=\dfrac{1}{\tan\bigcirc}\ \Rightarrow\ \cot(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{\tan(\tan^{-1}x)}=\dfrac{1}{x}$

بچه‌ها!لطف کنید، نسبت‌های مثلثاتی $\cot^{-1}x$ رو خودتون به دست بیارید.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $۲\sin^{-1}x$, $۲\cos^{-1}x$, $۲\tan^{-1}x$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی $۲\sin^{-1}x$

$$\sin ۲\bigcirc = ۲\sin\bigcirc \cos\bigcirc \Rightarrow \sin(۲\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = ۲\sin(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha})\cos(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = ۲x\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$\sin ۲\bigcirc = ۲\sin\bigcirc \cos\bigcirc \Rightarrow \sin(۲\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = ۲\sin(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha})\cos(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = ۲\sqrt{۱-x^{۲}}\,.x$$

$$\sin ۲\bigcirc = \frac{۲\tan\bigcirc}{۱+\tan^{۲}\bigcirc} \Rightarrow \sin(۲\tan^{-1}x) = \frac{۲\tan(\tan^{-1}x)}{۱+\tan^{۲}(\tan^{-1}x)} = \frac{۲x}{۱+x^{۲}}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی $۲\cos^{-1}x$

$$\cos ۲\bigcirc = ۲\cos^{۲}\bigcirc - ۱ \Rightarrow \cos(۲\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = ۲\cos^{۲}(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) - ۱ = ۲x^{۲}-۱$$

$$\cos ۲\bigcirc = ۱ - ۲\sin^{۲}\bigcirc \Rightarrow \cos(۲\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = ۱-۲\sin^{۲}(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = ۱-۲x^{۲}$$

$$\cos ۲\bigcirc = \frac{۱-\tan^{۲}\bigcirc}{۱+\tan^{۲}\bigcirc} \Rightarrow \cos(۲\underbrace{\tan^{-1}x}_{\alpha}) = \frac{۱-\tan^{۲}(\tan^{-1}x)}{۱+\tan^{۲}(\tan^{-1}x)} = \frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$$

$$\tan ۲\bigcirc = \frac{۲\tan\bigcirc}{۱-\tan^{۲}\bigcirc} \Rightarrow \tan(۲\tan^{-1}x) = \frac{۲\tan(\tan^{-1}x)}{۱-\tan^{۲}(\tan^{-1}x)} = \frac{۲x}{۱-x^{۲}}$$

رابطه‌ی Extra

بچه‌ها! آخرین رابطه از مبحث توابع معکوس مثلثاتی رو می‌بینید که من اسمش رو گذاشتم رابطه‌ی فوق‌العاده به دلیل حجم زیاد اثبات، فقط خود رابطه رو براتون می‌گم:

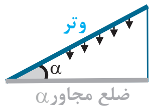
$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{۱-xy}\right) & x.y \le ۱ \\ \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{۱-xy}\right) + \pi & x>۰, y>۰ \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{۱-xy}\right) - \pi & x<۰, y<۰ \end{cases} & x.y > ۱ \end{cases}$$

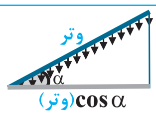
مثال $\tan^{-1}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{۱}{۳}\right) \overset{\boxed{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۶}\le ۱}}{=} \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{۵}{۶}}{\frac{۵}{۶}}\right) = \tan^{-1}(۱) = \frac{\pi}{۴}$

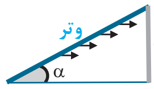
مثال $\tan^{-1}(۲) + \tan^{-1}(۳) \overset{\boxed{۲\times۳=۶>۱}}{=} \tan^{-1}\left(\frac{۲+۳}{۱-۲\times۳}\right) + \pi = \tan^{-1}\left(\frac{۵}{-۵}\right) + \pi = -\frac{\pi}{۴} + \pi = \frac{۳\pi}{۴}$

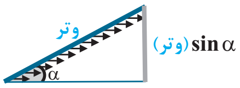
مثال $\tan^{-1}(-۲) + \tan^{-1}(-۳) \overset{\boxed{(-۲)(-۳)=۶>۱}}{=} \tan^{-1}\left(\frac{(-۲)+(-۳)}{۱-(-۲)(-۳)}\right) - \pi = \tan^{-1}\left(\frac{-۵}{-۵}\right) - \pi = \frac{\pi}{۴} - \pi = \frac{-۳\pi}{۴}$

کلید حل مسائل کاربردی و هندسی

در مثلث قائم الزاویه ی 

وظیفه ی $\cos\alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مجاور α ست. یعنی : 

در مثلث قائم الزاویه ی 

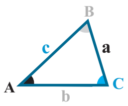
وظیفه ی $\sin\alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مقابل α ست. یعنی : 

علت بالایی : $\cos\alpha = \dfrac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} \Longrightarrow \text{ضلع مجاور } \alpha = \text{وتر} \cdot \cos\alpha$

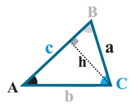
بچه ها ! در یک مثلث ، روابطی بین اضلاع و زوایای اون مثلث وجود داره که من ۳ دسته از اونها رو براتون بازگو می کنم :

دسته ی اول : (معروف به روابط sin)

این قانون باعث برقراری ارتباط ، بین دو ضلع دلخواه و زوایای روبروشون میشه .



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}}$$

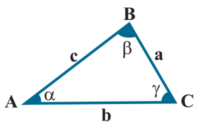
(علت) در مثلث  داریم :

$$\begin{cases} h = a\sin B \\ h = b\sin A \end{cases} \Rightarrow a\sin B = b\sin A \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

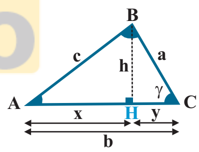
بقیه ی اثبات با شما .

دسته ی دوم : (معروف به روابط cos)

در این قانون ، شما با داشتن اندازه ی دو ضلع و زاویه ی بین شون می تونید اندازه ی ضلع سوم مثلث رو بدست بیارید .



$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\alpha \\ b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\beta \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma \end{cases}} \odot$$

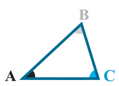
(علت $\odot$) : 

$$\begin{cases} \text{ABH در مثلث} : h^۲ = c^۲ - x^۲ \\ \text{BCH در مثلث} : h^۲ = a^۲ - y^۲ \end{cases} \Rightarrow c^۲ - x^۲ = a^۲ - y^۲ \Rightarrow c^۲ - (b-y)^۲ = a^۲ - y^۲ \Rightarrow c^۲ - (b^۲ - ۲by + \cancel{y^۲}) = a^۲ - \cancel{y^۲}$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲by \xrightarrow{y = a\cos\gamma} c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos\gamma$$

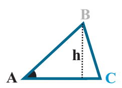
دسته ی سوم : مساحت مثلث

در این قانون ، مساحت یک مثلث ، به کمک دو ضلع و زاویه ی بین اون دو ضلع ، قابل محاسبه هست :



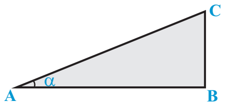
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{AB.AC.\sin A}{۲} = \frac{AB.BC.\sin B}{۲} = \frac{BC.AC.\sin C}{۲}$$

$$\boxed{S_{\text{مثلث}} = \frac{\sin(\text{زاویه ی بین دو ضلع}) \times \text{حاصلضرب اندازه ی دو ضلع}}{۲}}$$

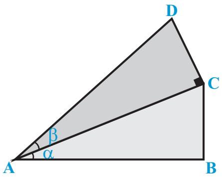
(علت)  : $S = \dfrac{h.AC}{۲} \xrightarrow[\text{با توجه به}]{h = AB\sin A} S = \dfrac{AB\sin A.AC}{۲} \Rightarrow S = \dfrac{AB.AC.\sin A}{۲}$

بچه‌ها! می‌خوام برای $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ رابطه‌ای ایجاد کنم. پس مراحلی رو که طی می‌کنم با دقت زیرنظر بگیرید:

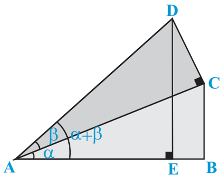
۱) مثلث قائم‌الزاویه‌ای درست می کنم که حاوی زاویه‌ی α باشه :



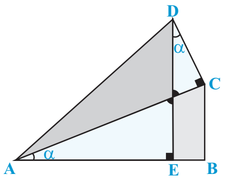
۲) مثلث قائم‌الزاویه‌ای دیگه‌ای رو روی وتر این مثلث ایجاد می‌کنم که حاوی زاویه‌ی β باشه :



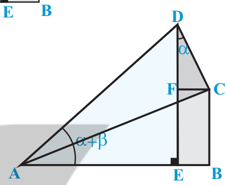
۳) برای زاویه‌ی $\alpha+\beta$ هم یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آرم:



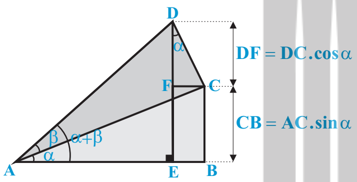
توجه داشته باشید که :



۴) حالا مستطیل FCBE رو ایجاد می‌کنم :



دوستان عزیزم! همه ی مقدمه چینی های بالا به خاطر این بود که به شکل روبرو برسم :



$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DE}{AD}=\frac{DF+FE}{AD}\overset{\text{با توجه به مستطیل}}{=\!=\!=}\frac{DF+CB}{AD}=\frac{DC.\cos\alpha+AC.\sin\alpha}{AD}=\cos\alpha\cdot\overset{\sin\beta}{\overset{\uparrow}{\boxed{\frac{DC}{AD}}}}+\sin\alpha\cdot\overset{\cos\beta}{\overset{\uparrow}{\boxed{\frac{AC}{AD}}}}$$

علامت تغییر نمی‌کنه

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AE}{AD}=\frac{AB-EB}{AD}\overset{\text{با توجه به مستطیل}}{=\!=\!=}\frac{AB-FC}{AD}\overset{\text{لطفاً خودتون ادامه بدید}}{=}\dots\dots\dots\dots\dots$$

علامت تغییر می‌کنه

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$