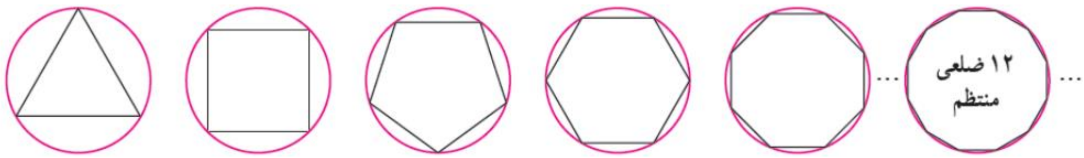
▪ مفهوم حد و فرایند های حدی :

یکی از مهمترین کاربرد های علم ریاضی مدل سازی پدیده های طبیعی است که معمولا به شکل یک تابع انجام می شود ، گاهی اوقات برای پیش بینی رفتار این توابع در نزدیکی یک نقطه مورد نظر از مفهوم حد استفاده می کنیم (هواشناسی)

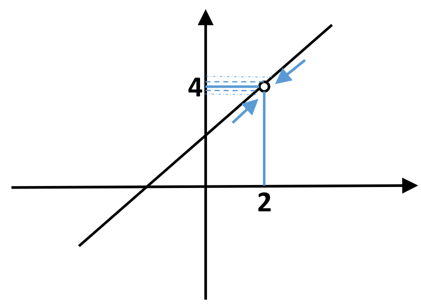


توجه داشته باشید ، با زیاد شدن تعداد اضلاع چندضلعی محاطی مساحت تحت پوشش آن نیز زیاد می شود تا در بیشترین مقدار ممکن به مساحت دایره برسد . حال مفهوم حد می گوید : **وقتی تعداد اضلاع به سمت بی نهایت میل می کند مساحت چندضلعی با مساحت دایره برابر می شود .**

مثال : برخی مواقع وقتی تابع f در یک بازه شامل نقطه a (احتمالا به جز خود نقطه a) تعریف شده باشد ، مفهوم حد گیری را می توان با تعیین مقدار تابع f در دو طرف نقطه a و نقاط نزدیک به آن بررسی کرد :

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

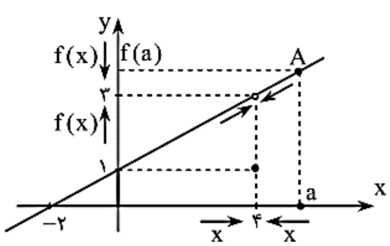
X	1	1.5	1.9	1.999 →	2	← 2.001	2.01	2.5	3
F(x)	3	3.5	3.9	3.999 →	?	← 4.001	4.01	4.5	5



با نزدیک شدن x به ۲ از هر دو طرف ، مقدار تابع به عدد ۴ نزدیک می شود . به زبان ریاضی می گوییم **حد f(x) ، x به سمت ۲ می شود ۴** و می نویسیم :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

نکته : وجود یا عدم وجود مقدار تابع f در نقطه a تاثیری در حد آن در نقطه a ندارد ، یعنی لزومی ندارد برای بررسی حد تابع در یک نقطه تابع در آن نقطه تعریف شده باشد .



تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+۱ & x\neq ۴\\ ۱ & x=۴\end{cases}$ **مفروض است.**

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)$ **چقدر است؟**

ب) اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۱$**، باید** x **را به چه اندازه‌ای به ۴ نزدیک کنیم؟**

حل: الف) با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم وقتی مقدار x به عدد ۴ نزدیک می‌شود (در شکل با $x=a$ نشان داده‌ایم)، روی نمودار نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی توخالی نزدیک می‌شود و متناظر آن، روی محور عرض‌ها مقدار $f(a)$ به ۳ نزدیک می‌شود. پس: $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۳$.

ب) می‌دانیم برای $x\neq ۴$، ضابطه‌ی تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$ است. شرط $|f(x)-۳|<۱$ را به زبان ریاضی (برای $x\neq ۴$) می‌نویسیم:

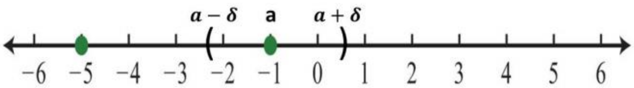
$$|f(x)-۳|<۱ \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x+۱-۳|<۱ \Leftrightarrow |\tfrac{۱}{۲}x-۲|<۱ \Leftrightarrow \tfrac{۱}{۲}|x-۴|<۱ \Leftrightarrow |x-۴|<۲$$

مشاهده می‌کنید که اگر $|x-۴|<۲$ (که چون $x\neq ۴$، بهتر است آن را به شکل $۰<|x-۴|<۲$ بنویسیم)، آن‌گاه $|f(x)-۳|<۱$. از بحث همسایگی می‌دانید شرط $۰<|x-۴|<۲$ به‌معنی $x\in(۲,۶)-\{۴\}$ است. یعنی اگر x در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع ۲ قرار بگیرد، آن‌گاه $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع ۱ قرار خواهد گرفت.

■ **مفهوم همسایگی و همسایگی محذوف یک عدد** :

همسایگی در واقع یک بازه است که حول یک نقطه تعریف می‌شود. هر بازه به صورت (a-ε , a+δ) را یـک همسـایگی نقطـه a می‌نامند.

اگر بازه به صورت (a-δ , a+δ) باشد، آن را همسایگی متقارن a می‌نامند. زیرا فاصله آن از دو طرف نقطه a به یک اندازه است.



اگر نقطه a را از همسایگی متقارن آن حذف کنیم، آن را همسایگی محذوف نقطه a می‌نامند.

اگر بازه به صورت (a , a+δ) باشد، آن را همسایگی راست a می‌نامند.

اگر بازه به صورت (a-δ , a) باشد، آن را همسایگی چپ a می‌نامند.

حال تعریف حد را به یاد آورید. حد گرفتن از تابع f در نقطه a یعنی فرآیند نزدیک شدن به نقطه a تـا حـد ممکـن و بـه دسـت آوردن خروجی تابع در حین این فرآیند.

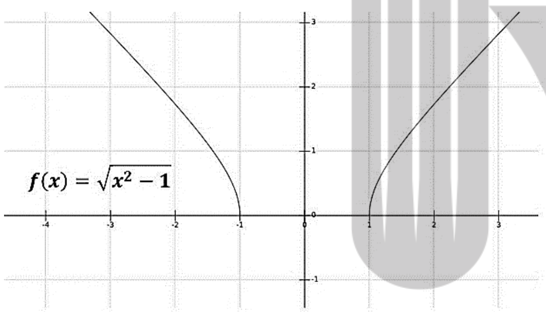
بدیهی است که باید تابع در نقاط نزدیک به a تعریف شده باشد. یعنی باید تابع حداقل در همسایگی محذوف نقطه a تعریف شـده باشد. زیرا در حد گرفتن به خود a نمی‌رسیم ولی بسیار بسیار به آن نزدیک می‌شویم.

پس می‌توانیم بگوییم که:

شرط اینکه بتوانیم از حد تابع f حول نقطه a صحبت کنیم اینست که تابع f حداقل در همسـایگی محـذوف نقطـه a تعریـف شـده باشد.

شرط اینکه بتوانیم از حد چپ تابع f حول نقطه a صحبت کنیم اینست که تابع f حداقل در همسایگی چـپ نقطـه a تعریـف شـده باشد.

شرط اینکه بتوانیم از حد چپ تابع f حول نقطه a صحبت کنیم اینست که تابع f حداقل در همسایگی راست نقطه a تعریـف شـده باشد.



مثال :تابع زیر را در نظر بگیرید

این تابع در هیچ همسایگی نقطه صفر تعریف شده نیست. پس نمی‌توان از حد این تابع حول نقطه‌ی صفر صحبت کرد.

این تابع در همسایگی راست نقطه ۱ تعریف شده است. پس می‌توان از حد راست این تابع حول نقطه ۱ صحبت کرد.

به عنوان مثال به بازه های زیر دقت کنید :

(۱و۵) ← یک همسایگی برای عدد ۳ است .   **(۱و۵) - {۳} ← یک همسایگی محذوف بررای عدد ۳ است .**

(-۳و۱) ← یک همسایگی چپ برای عدد یک است .   **(-۲و۵) ← یک همسایگی راست برای عدد -۲ است**

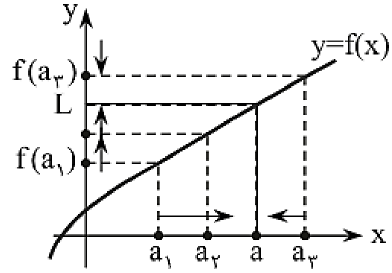
مثال : آیا تابع $f(x) = \log 9 - x^2$ در همسایگی عدد صفر تعریف شده است؟ در کدام نقططه تابع f همسایگی چپ دارد؟

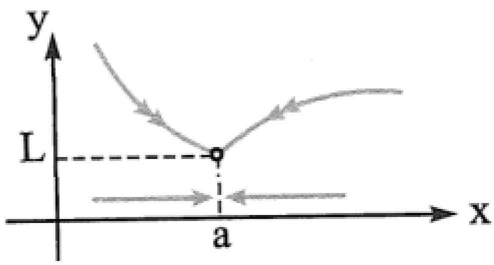
مثال : اگر بازه ی (x+۴ و ۲x-۱) یک همسایگی برای عدد ۱ باشد حدود x را بیابید .

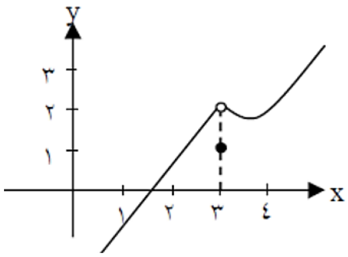
■ **تعریف حد تابع در یک نقطه :**

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد به طوری که وقتی متغیر x به x_0 (از دو طرف) میل کند آنگاه f(x) به یک میزان دلخواه ثابت در دو طرف برسد (L) :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$







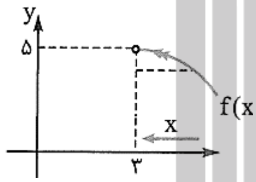
■ **مفهوم حد چپ و حد راست :**

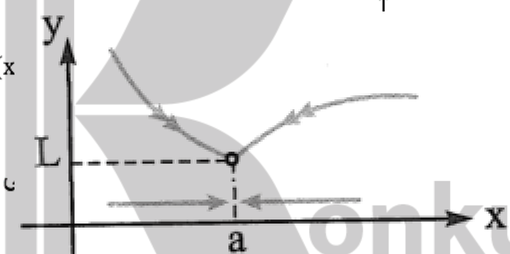
فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_\circ, b)$ تعریف شده باشد. حد راست f در $x_\circ$ برابر عدد l است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = l$$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a, x_\circ)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در $x_\circ$ برابر عدد l است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت چپ به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

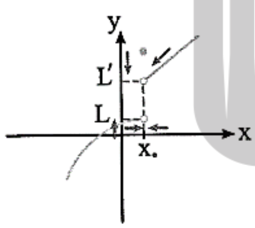
$$\lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = l$$

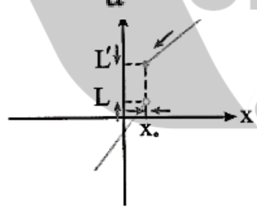


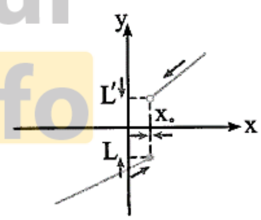


$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۲$$

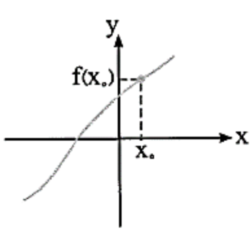
در نمودارهای زیر، وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ... می‌شود، مقدار تابع به L نزدیک می‌شود، اما ... x با مقادیر کوچک‌تر از $x_\circ$ به $x_\circ$ نزدیک



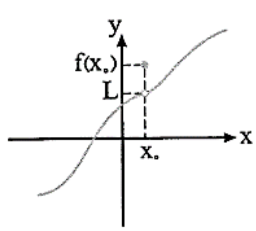




نکته هنگامی که تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ دارای حد باشد و تابع در این نقطه تعریف شده باشد، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد. یعنی ممکن است:



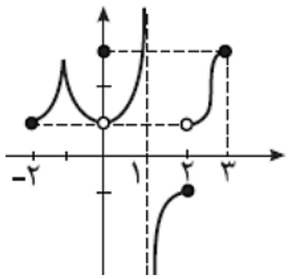
$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$



$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = L \neq f(x_\circ)$$

نکته مهم : شرط این که تابع f(x) در یک نقطه دارای حد باشد این است که :

$$\boxed{\lim_{x\to x_\circ} f(x) = l \ \text{اگر و تنها اگر}\ \lim_{x\to x_\circ^+} f(x) = l \,,\ \lim_{x\to x_\circ^-} f(x) = l}$$



شرایط وجود حد از روی نمودار: ۱ – داشتن همسایگی در حداقل یک طرف نقطهٔ مورد نظر، ۲ – برابری حدهای چپ و راست

حد تابع در صورت وجود یکتاست.

$x=-۲$: فقط حد راست وجود دارد و برابر یک است. بنابر این حد در نقطه $x=-۲$ برابر یک میشود.

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=\lim_{x\to -۲^+} f(x)=۱$$

$x=۳$: فقط حد چپ وجود دارد و برابر ۳ است. بنابر این حد در نقطهٔ $x=۳$ برابر ۳ میشود.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۳$$

$x=۰$: در نقطهٔ صفر حد وجود دارد ولی با مقدار تابع برابر نیست.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱\\ f(۰)=۳\end{cases}$$

$x=۱,۲$: در نقطهٔ ۱ و ۲ حد وجود ندارد، چون شاخه‌ها به هم نرسیدند.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)\begin{cases}۱^+ : -\infty\\ ۱^- : +\infty\end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to ۲} f(x)\begin{cases}۲^+ : ۱\\ ۲^- : -۱\end{cases}$$

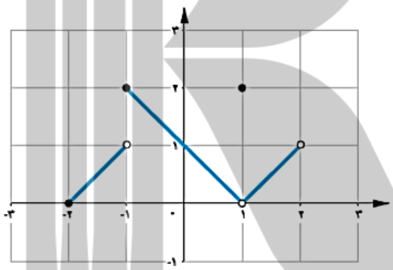
مثال. برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$ ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$ ت) $\lim_{x\to -۲^+} f(x)=۰$

ث) $\lim_{x\to -۱} f(x)=۲$ ج) $\lim_{x\to ۰} f(x)=۱$

چ) $\lim_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

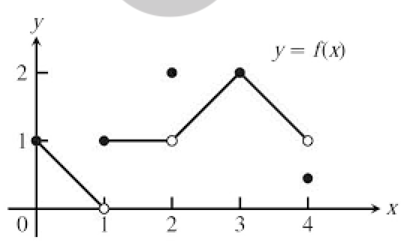


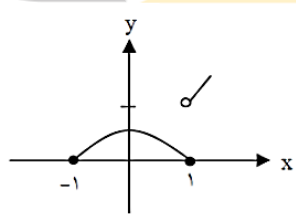
۱) $\lim_{x\to -۱} f(x)$

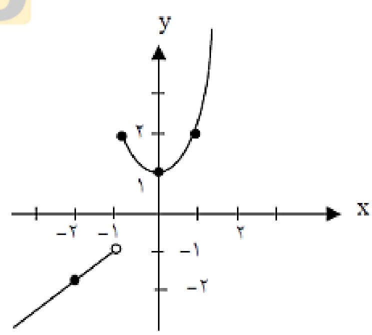
۲) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$

۳) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$

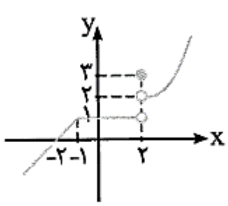
۴) $\lim_{x\to ۱} f(x)$







نمودار تابع f، به‌صورت شکل مقابل داده شده است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)+\lim\limits_{x\to -۱} f(x)-۳f(۲)$ کدام است؟



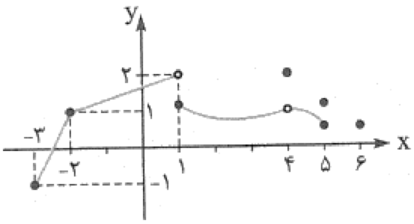
۱) ۹ ۲) ۳

۳) -۳ ۴) -۶

وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲، به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع از روی نمودار بـه عـدد ۲ نزدیـک می‌شـوند. هم‌چنـین بـا نزدیـک شدن x از دو طرف به عدد ۱-، مقادیر تابع با توجه به نمودار به عدد ۱ نزدیک می‌شوند. بنابراین:

گزینهٔ (۴) صحیح است. $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲$ ، $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۱$ ، $f(۲)=۳ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)+\lim\limits_{x\to -۱} f(x)-۳f(۲)=۲+۱-۹=-۶ \Rightarrow$

شکل مقابل نمودار تابع f است، مقادیر خواسته شده‌را بیابید.

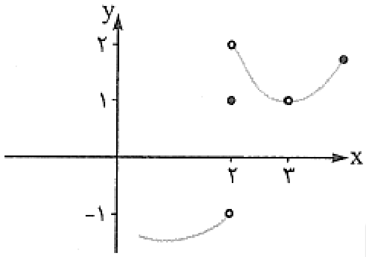


$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to -2} f(x)$

$\lim_{x\to 4} f(x)$ $f(4)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to 6} f(x)$ $\lim_{x\to -3} f(x)$

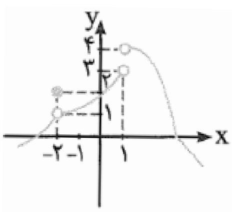
شکل مقابل نمودار تابع f است حاصل $f(2)+\lim_{x\to 2^+} f(x)+\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

شکل مقابل نمودار تابع f است. $\lim_{x\to (-2)^+} (fof)(x)$ کدام است؟



۱) ۴   ۲) ۲

۳) ۲-   ۴) ۳

$$x\to(-2)^+ \Rightarrow x>-2 \Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+} f(x)=1$$

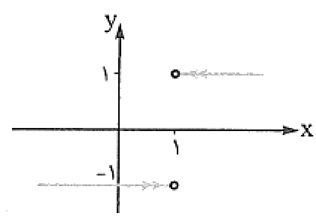
اگر به نمودار توجه کنیم، مشاهده می‌کنیم که $f(x)$ با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ میل می‌کند. بنابراین:

$$A=\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=1 \xrightarrow{A>1} A\to 1^+ \Rightarrow \lim_{x\to(-2)^+} f(f(x))=\lim_{A\to 1^+} f(A) \xlongequal{\text{با توجه به نمودار}} 4 \Rightarrow$$

گزینهٔ (۱) صحیح است.

حاصل حد تابع $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ وقتی که $x\to 1$ کدام است؟

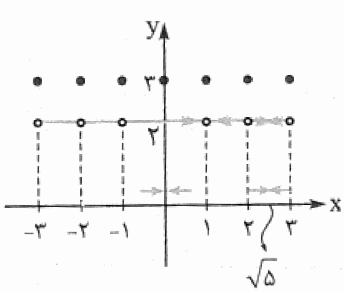
۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۱-   ۴) وجود ندارد.



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-1} & x>1\\[2mm] \dfrac{-(x-1)}{x-1} & x<1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x<1\end{cases}$$

اگر $f(x)=\begin{cases}2 & x\notin\mathbb{Z}\\ 3 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶



تابع در تمام نقاط همان $y=2$ است به‌جز نقاط صحیح که مقدارش در تک‌نقطه‌هایی برابر ۳ می‌شود. نمودار تابع را رسم کرده‌ایم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

پس جمع آن‌ها می‌شود: $2+2=4$.

$$\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x)=2$$

جمع‌بندی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L\end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$$

پس یادتان باشد که برای داشتن حد در یک نقطه باید شرایط زیر وجود داشته باشد:

۱) بتوانیم از هر دو طرف به آن نقطه نزدیک شویم، پس در واقع x باید نقطه‌ای در درون دامنه باشد. (یعنی مرز نباشد.)

۲) هم حد راست داشته باشیم، هم حد چپ!

۳) حد چپ = حد راست

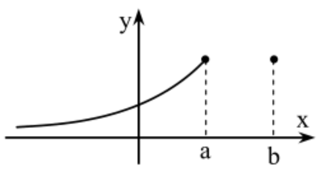
۴) **از همه مهم‌تر؛** در محاسبهٔ حد اصلاً کاری با خود نقطه نداریم، حتی ممکن است نقطهٔ ما توخالی باشد، یعنی اصلاً در دامنه نباشد.

۵) در نقاط ابتدا و انتهای دامنه چون‌که حداکثر یکی از حدهای راست یا چپ را دارند، تابع حد ندارد.

روش‌های مختلف تشخیص نقاطی که تابع در آن‌ها حد ندارد:

با توجه به آن‌چه که تاکنون گفته‌ایم به‌صورت زیر می‌توانیم این روش‌ها را جمع‌بندی کنیم:

۱- اگر تابع f در یک همسایگی $x=a$ نامعین باشد (این همسایگی جزء دامنه‌ی تابع نباشد)، تابع در این نقطه حد نخواهد داشت. زیرا اصلاً نمی‌توانیم x را به آن نقطه نزدیک کنیم.

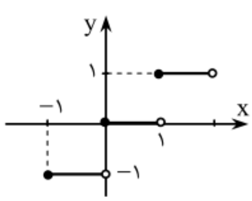


مثال:الف) در شکل مقابل، تابع در $x=b$ حد ندارد و در $x=a$ حد راست ندارد. تابع در هر دو همسایگی $x=b$ و در همسایگی راست $x=a$ نامعین است. دقت کنید که طبق قرارداد، تابع در $x=a$ حد دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=a$ (همسایگی چپ) تعریف شده، بنابراین منظور از $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ همان $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{(۱-x)(x-۲)}$ برابر $[۱,۲]$ است، پس همسایگی چپ $x=۱$ در دامنه‌ی تابع نیست و $\lim\limits_{x\to ۱^-} y$ وجود ندارد (البته $\lim\limits_{x\to ۱^+} y=۰$). چون تابع فقط در یک همسایگی $x=۱$ تعریف شده، داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} y=\lim\limits_{x\to ۱^+} y=۰$، پس تابع در $x=۱$ حد دارد.

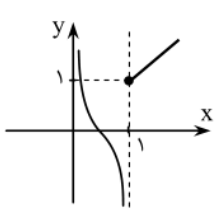
پ) تابع $y=\dfrac{۱}{\tan\frac{۱}{x}}$ در $x=۰$ حد ندارد، زیرا در هر همسایگی $x=۰$ که در نظر بگیریم نقاطی هست که در آن‌ها y نامعین است. در واقع تابع در نقاط $x=\dfrac{۱}{n\pi}$ (که $n\in Z-\{۰\}$) نامعین است (چرا؟)، و در هر همسایگی $x=۰$، هر چقدر هم که کوچک باشد، از این نقاط یافت می‌شود.

۲- اگر تابع در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود نباشند، یا موجود و نابرابر باشند، تابع در $x=a$ حد ندارد.



مثال: الف) تابع $y=[x]$ در $x=۰$ حد ندارد، زیرا مطابق نمودار تابع داریم: $\lim\limits_{x\to ۰^+} y=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} y=-۱$.

(در واقع این تابع در هیچ نقطه‌ی $x=n$ (که $n\in Z$) حد ندارد.)



ب) تابع $f(x)=\begin{cases}x & x\ge ۱\\ \cot(\pi x) & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد، زیرا با آن‌که $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$ ، ولی $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ وجود ندارد (در واقع $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$). نمودار تابع را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ مشاهده می‌کنید.

- **محاسبه حد تابع از روی ضابطه** :

خب اصل مطلب اینجاست ! تا آخر که قرار نیست نمودار رسم کنیم ...! در واقع اگر ضابطه تابع مشخص باشد ۹۹ درصد مواقع اصلا نیازی نیست نمودار رسم کنیم ! فقط کافیست آن نقطه ای که می خواهیم در آن حد بگیریم را در تابع جاگذاری کنیم (بماند که بعضی وقتها جواب هایی ظاهر می شوند که ما خوشمان نمیاید !!! مثل $\frac{0}{0}$  ... که البته بعدا یاد میگیریم چطور حلش کنیم)

> با استفاده از قضیه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ در همه‌ی نقاط $a \in R$ حد دارد و مقدار حد آن، همان $P(a)$ می‌شود. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.
>
> توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ نیز مانند چند جمله‌ای‌ها هستند، یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$،
>
> هم‌چنین توابع $y = \tan x$ (برای $a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$) و $y = \cot x$ (برای $a \neq k\pi$).

حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 3} x^3 - 4x = 3^3 - 4(3) = 27 - 12 = 15$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x-1}{5x+2} = \frac{4(2)-1}{5(2)+2} = \frac{7}{12} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{|x|-1}{[x]+5} = \frac{|\pi|-1}{[\pi]+5} = \frac{\pi-1}{3+5} = \frac{\pi-1}{8} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{2^x-1}{3^x-4^x} = \frac{2^{(1)}-1}{3^{(1)}-4^{(1)}} = \frac{1}{-1} = -1$$

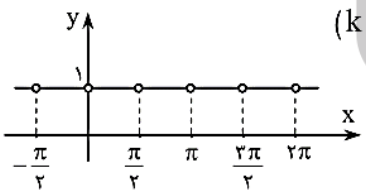
$$\lim_{x\to -5} \sqrt{x+3} = \sqrt{(-5)+3} = \sqrt{-2} \Rightarrow \text{حد ندارد} \qquad \lim_{x\to -4} f(x) = f(-4) = 3$$

چند تا از حدهای زیر وجود دارد؟

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \tan x \times \cot x$ **ب)** $\lim\limits_{x\to 0} \sin^{-1}(x-1)$ **پ)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

۱) صفر   **۲)** ۱   **۳)** ۲   **۴)** ۳

داریم: $\lim\limits_{x\to 0} \tan x \times \cot x = 1$. تابع $y = \tan x \times \cot x$ در نقاط $x = k\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است ($k \in Z$) و در نقاط دیگر داریم: $y = 1$. پس نمودار آن مانند شکل روبه‌رو می‌شود. بنابراین در همه‌ی نقاط $x \in R$ حد تابع برابر ۱ است، حتی نقاطی که جزء دامنه‌ی تابع نیستند.



در تابع $y = \sin^{-1}(x-1)$ همسایگی چپ $x = 0$ در دامنه‌ی تابع نیست، زیرا:

$$|x-1| \le 1 \Rightarrow -1 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 2 \text{ :دامنه‌ی تابع}$$

پس حد $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin^{-1}(x-1)$ وجود ندارد، ولی حد راست تابع وجود دارد و برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین تابع در $x = 0$ حدی برابر $-\frac{\pi}{2}$ دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x = 0$ تعریف شده است.

حد چپ تابع $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ در $x = 0$ موجود نیست، زیرا همسایگی چپ $x = 0$ در دامنه‌ی تابع نیست:

$$\left.\begin{array}{l} 1-x \ge 0 \Rightarrow x \le 1 \\ 1-\sqrt{1-x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} \le 1 \Rightarrow 1-x \le 1 \Rightarrow x \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{دامنه‌ی تابع} = [0,1]$$

پس حدهای الف و ب وجود دارند. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

- **اکنون می خواهیم نحوه محاسبه حد در ضابطه توابع زیر را بررسی کنیم** :

۱- تابع ثابت   ۲- تابع همانی   ۳- تابع کسری (گویا)   ۴- تابع رادیکالی (ریشه)   ۵- تابع چند ضابطه ای

۶- تابع قدرمطلقی   ۷- تابع مثلثاتی   ۸- تابع جزء صحیح

■ قبل از یادگیری نحوه محاسبه حد در ۸ نوع تابع ذکر شده به قضایای زیر در محاسبه حد دقت کنید:

۱-اگر f تابع ثابت با دامنه‌ی R باشد (برای هر $x \in R$ داشته باشیم: $f(x) = c$)، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x) = c$ (برای هر $a \in R$).

۲-اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$، آن‌گاه:[1] ($c \in R$ یک عدد ثابت است و $n \in N$)

الف) $\lim_{x\to a} cf(x) = cL_1$

ب) $\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = L_1 \pm L_2$

پ) $\lim_{x\to a} (fg)(x) = L_1 L_2$

ت) $\lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{L_1}{L_2}$ (به شرط $L_2 \neq 0$)

ث) $\lim_{x\to a} f^n(x) = L_1^n$

ج) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ (اگر n زوج باشد، برای $L_1 > 0$ این تساوی برقرار است.)

چ) $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L_1|$

■ **حد تابع ثابت:**

حد تابع ثابت $f(x) = k$ (k عددی حقیقی و ثابت است)، در هر عدد دلخواه a، برابر همان مقدار ثابت k است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} k = k$$

برای مثال، اگر $f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to \pi} f(x) = 2$$

■ **حد تابع همانی:**

حد تابع $f(x) = x$ (تابع همانی) در هر نقطهٔ a برابر با a است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x \xrightarrow{\text{به جای } x\text{، } a \text{ قرار می‌دهیم}} a$$

برای مثال داریم:

$$\lim_{x\to -4} x = -4 \quad , \quad \lim_{x\to 11} x = 11$$

اگر تابع f در $x = 3$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to 3} f(x)$ کدام است؟

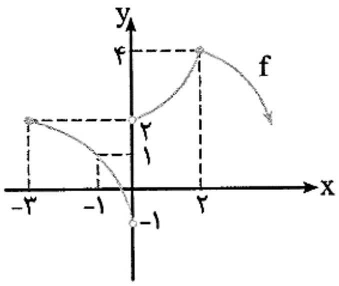
۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3

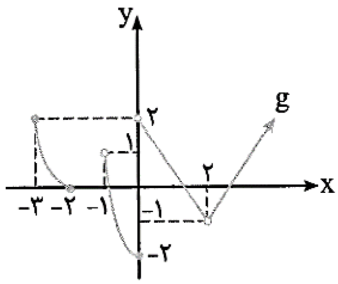
فرض کنیم $\lim_{x\to 3} f(x) = A$ باشد، در این صورت:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = \frac{\lim_{x\to 3}(2f(x)-1)}{\lim_{x\to 3}(f(x)+1)} = \frac{2\lim_{x\to 3} f(x)-1}{\lim_{x\to 3} f(x)+1} = \frac{2A-1}{A+1} = \frac{5}{1} \Rightarrow 2A-1 = 5(A+1) \Rightarrow 2A-1 = 5A+5$$

$\Rightarrow 3A = -6 \Rightarrow A = -2 = \lim_{x\to 3} f(x) \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

نمودار تابع‌های f و g، داده شده است. کدام گزینه صحیح است؟





۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+} (۳f(x)+۲g(x))=۱۲$

۲) $\lim\limits_{x\to -۱} (f(x).g(x))=۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{(f(x))^۲}{g(x)}=-\dfrac{۱}{۲}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)-۲g(x)}{f(x).g(x)}=-۲$

گزینهٔ (۱): $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۲\ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^+} g(x)=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} (۳f(x)+۲g(x))=۳(\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x))+۲(\lim\limits_{x\to ۰^+} g(x))=۳(۲)+۲(۲)=۱۰$

گزینهٔ (۲): با توجه به نمودار تابع g، این تابع در سمت چپ $x=-۱$ تعریف نشده است. پس سمت چپ $x=-۱$ در تابع $f.g$ تعریف نشده است، بنابراین در تابع $f.g$، x به ۱- میل نمی‌کند، پس $\lim\limits_{x\to -۱} (f(x)g(x))$ وجود ندارد.

گزینهٔ (۳): $\lim\limits_{x\to ۰^-} g(x)=-۲\neq ۰\ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{(f(x))^۲}{g(x)}=\dfrac{(\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x))^۲}{\lim\limits_{x\to ۰^-} g(x)}=\dfrac{(-۱)^۲}{-۲}=\dfrac{۱}{-۲}=-\dfrac{۱}{۲}$

گزینهٔ (۴): حاصل حد هر یک از عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم و با تقسیم این دو مقدار، حاصل حد به‌دست می‌آید:

$$\lim\limits_{x\to ۲} (f(x)-۲g(x))=\lim\limits_{x\to ۲} f(x)-۲(\lim\limits_{x\to ۲} g(x))=۴-۲(-۱)=۶$$

$$\lim\limits_{x\to ۲} (f(x).g(x))=\lim\limits_{x\to ۲} f(x).\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۴\times(-۱)=-۴$$

$\Rightarrow$ حاصل $=\dfrac{۶}{-۴}=-\dfrac{۳}{۲}$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

- **حد تابع کسری (گویا)**:

اگر $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند $x_۰$ کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم، به شرط آن‌که $\lim\limits_{x\to x_۰} Q(x)\neq ۰$، پس حد تابع $f(x)=\dfrac{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+l}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\cdots+l'}$، (m و n دو عدد صحیح نامنفی) در $x_۰$ برابر است با مقدار تابع f در نقطهٔ $x_۰$، به شرط آن‌که $x_۰$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد.

- **حد تابع رادیکالی (ریشه)**:

اگر $\lim\limits_{x\to a} (mx+n)=l>۰$، آن‌گاه:

$$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

به عنوان مثال، داریم:

$$\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{۴x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۲} (۴x+۱)}=\sqrt{۴(۲)+۱}=\sqrt{۹}=۳$$

اگر $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۳$ باشد، حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}((f(x))^۲\sqrt{g(x)+۱})$ کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۲   ۳) ۸   ۴) ۹

$$\lim\limits_{x\to ۱}((f(x))^۲\sqrt{g(x)+۱})=\lim\limits_{x\to ۱}(f(x))^۲\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{g(x)+۱}=(\lim\limits_{x\to ۱} f(x))^۲\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(g(x)+۱)}=(۲)^۲\sqrt{۳+۱}=۴\times ۲=۸$$

■ **حد تابع چند ضابطه ای :**

در توابع چندضابطه‌ای مقادیر حد چپ و راست تابع در نقطهٔ مرزی را باید با توجه به ضابطهٔ مربوطه به‌دست آورد. اگر $x \to a^+$، آن‌گاه از ضابطه‌ای که برای $x > a$ تعریف شده است، برای محاسبهٔ حد راست استفاده می‌کنیم و اگر $x \to a^-$، آن‌گاه از ضابطه‌ای که برای $x < a$ می‌باشد، برای محاسبهٔ حد چپ استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثال، اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & x > 1 \\ -2x^2 + 5 & x < 1 \end{cases}$ باشد، برای به‌دست آوردن حاصل $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$، با توجه به مفهوم $x \to 1^+$، (x با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک می‌شود.) باید از ضابطهٔ $x > 1$ ، $f(x) = \sqrt{x+3}$ برای محاسبهٔ حد استفاده کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = 2$$

هم‌چنین برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ باید از ضابطهٔ $(x < 1)$ ، $f(x) = -2x^2 + 5$ استفاده کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2x^2 + 5) = -2(1)^2 + 5 = 3$$

چون $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ ، پس تابع f در $x = 1$ حد ندارد.

به عنوان مثال حد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 2x + 3 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 4$ و $x = 1$ از ما خواسته‌اند، برای $x = 4$ چون مرز بازه‌ها نیست، کار ساده‌ای داریم؛ فقط باید ببینیم که در کدام بازه قرار دارد و از ضابطهٔ آن بازه، حد را به دست می‌آوریم. ۴ از یک بزرگ‌تر است پس در ضابطهٔ بالایی می‌افتد و در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^2 + x) = (4)^2 + 4 = 20$$

اما در $x = 1$ قضیه فرق دارد، چون وقتی می‌نویسیم $x \to 1$، یک طرف میل‌کردن در ضابطهٔ بالا و طرف دیگرش در ضابطهٔ پایین است، این‌جا است که باید حد چپ و حد راست را جداگانه حساب کنیم:

حد راست: برای محاسبهٔ حد راست فقط کافی است همان یک را در ضابطهٔ مربوط به $x \geq 1$ قرار دهیم:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x) = (1)^2 + 1 = 2$$

حد چپ: برای محاسبهٔ حد چپ هم، خود یک را در ضابطهٔ مربوط به $x < 1$ قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$$

پس حد راست برابر ۲ و حد چپ برابر ۵ شد! یعنی تابع در $x = 1$ حد ندارد.

در تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{5x - 4} & x \geq 4 \\ \frac{1}{2}ax + 11 & x < 4 \end{cases}$، اگر در نقطهٔ $x = 4$، مقدار حد چپ با مجذور مقدار حد راست تابع برابر باشد، مقادیر a کدام هستند؟

۱) ۵ ، ۱- ۲) ۵- ، ۱ ۳) ۵ ، ۱ ۴) ۵- ، ۱-

در تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+a & x\geq ۲ \\ x^۲-۳x & x<۲ \end{cases}$، اگر $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳$ باشد، a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۹ ۴) -۹

▪ حد تابع قدرمطلقی :

در محاسبهٔ حد $|f|$، اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد، آن‌گاه می‌توان حد عبارت داخل قدرمطلق را به‌دست آورد و این مقدار را با علامت مثبت نوشت:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a}f(x)|$$

به عنوان مثال، حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۰}\left|\dfrac{x^۲+۴}{\sqrt{x+۱}-۳}\right|$ برابر است با:

$$\lim_{x\to ۰}\left|\frac{x^۲+۴}{\sqrt{x+۱}-۳}\right|=\left|\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+۴}{\sqrt{x+۱}-۳}\right|=\left|\frac{(۰)^۲+۴}{\sqrt{۰+۱}-۳}\right|=\left|\frac{۴}{-۲}\right|=۲$$

تابع $f(x)=|x|$ در تمام نقاط حد دارد، اما دیدیم که تابع $\dfrac{|x-۱|}{x-۱}$ در $x=۱$ حد نداشت. به صورت کلی در توابع به فرم $\dfrac{|x-a|}{x-a}$ اگر حد را در $x=a$ بخواهند، باید حد چپ و حد راست جداگانه حساب شوند.

حد تابع $f(x)=\dfrac{|x-۲|}{(x-۲)}$ در $x=۲$ و $x=۱$ را حساب کنید.

در $x=۱$ مشکلی نداریم، فقط باید جای‌گذاری کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=$$

اما در $x=۲$ باید حدهای چپ و راست جداگانه حساب شوند:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|}{x-۲}=$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x-۲|}{x-۲}=$$

▪ حد تابع مثلثاتی : (که ابتدای این بخش در مورد آن صحبت کردیم ...)

همان‌گونه که برای عبارت‌های جبری با استفاده از قضایایی که تاکنون گفته شده است حد را محاسبه کرده‌ایم، می‌توان حد توابع مثلثاتی را با استفاده از قضایای زیر به‌دست آورد:

تابع $f(x)=\sin x$ در هر نقطه $a\in\mathbb{R}$ دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

تابع $f(x)=\cos x$ در هر نقطه $a\in\mathbb{R}$ دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

تابع $f(x)=\tan x$ (یا $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$) برای همهٔ مقادیر حقیقی a به‌جز $a=k\pi+\dfrac{\pi}{۲}$، $(k\in\mathbb{Z})$ که برای آن‌ها داریم $\cos a=۰$، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با:

$$\lim_{x\to a}\tan x=\tan a \ ,\ a\neq k\pi+\frac{\pi}{۲} \ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

تابع $f(x)=\cot x$ (یا $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$) برای همهٔ مقادیر حقیقی a به‌جز $a=k\pi$، $(k\in\mathbb{Z})$ که برای آن‌ها داریم $\sin a=۰$، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با:

$$\lim_{x\to a}\cot x=\cot a \ ,\ a\neq k\pi \ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۴} \tan(\frac{\pi}{۲\sqrt{x}})\cos\frac{\pi}{x}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۴) ۱

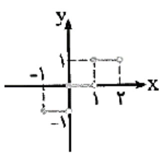
با قرار دادن عدد ۴ به جای x، داریم: $\lim\limits_{x\to ۴} \tan(\frac{\pi}{۲\sqrt{x}})\cos\frac{\pi}{x} = \tan(\frac{\pi}{۲\sqrt{۴}})\cos\frac{\pi}{۴} = \tan\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴} = ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

اگر $f(\frac{\pi}{۲}-x) = \frac{\sin^۲ x + ۴\sin x + ۳}{\sin^۲ x + ۱}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۵　　۳) ۴　　۴) ۳

▪ حد تابع جزء صحیح :

نمودار تابع $y=[x]$ به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار f در نقطه‌ای به طول $x=۱$، داریم:

۱) اگر $x\to ۱^+$ $(x>۱)$، آن‌گاه مقادیر f برابر ۱ است: $۱<x<۲ \Rightarrow [x]=۱ \Rightarrow f(۱/۰۱)=f(۱/۰۰۱)=\cdots=۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$

۲) اگر $x\to ۱^-$ $(x<۱)$، آن‌گاه مقادیر f برابر صفر است: $x\to ۱^- \Rightarrow ۰<x<۱ \Rightarrow [x]=۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-}[x] = \lim\limits_{x\to ۱^-} ۰ = ۰$

چون حد راست و چپ تابع در $x=۱$ با هم برابر نیستند، پس تابع f در $x=۱$ حد ندارد. می‌توان با توجه به نمودار، نکتهٔ کلی بعدی را برای تابع $y=[x]$ در نقطهٔ صحیح $x=m$ بیان کرد:

> اگر m یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه تابع $y=[x]$ در $x=m$ حد ندارد و داریم: $\lim\limits_{x\to m^-}[x]=m-۱$ ، $\lim\limits_{x\to m^+}[x]=m$

اما تابع $y=[x]$ در هر نقطهٔ غیرصحیحی حد دارد و مقدار حد آن برابر است با مقدار تابع در آن نقطه.

به عنوان مثال، اگر $x=\frac{۳}{۲}$ باشد، آن‌گاه داریم: $\lim\limits_{x\to \frac{۳}{۲}}[x]=[\frac{۳}{۲}]=۱$

حاصل $\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^-}[-۴x] + \lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۳})^+}[۶x]$ ، کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) -۱

حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+}[x+۳]=[۲^++۳]=[۵^+]=۵$$

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}[x+\frac{۳}{۲}]=[(\frac{۱}{۲})^++\frac{۳}{۲}]=[۲^+]=۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{۷}{۳})^-}[۳x]=[۳(\frac{۷}{۳})^-]=[۷^-]=۶$$

$$\lim_{x\to ۱}[x^۲+x+\frac{۱}{۲}]$$

به ازای $x=۱$ حاصل داخل براکت می‌شود: $۱^۲+۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$ پس نمی‌خواهد که حد چپ و حد راست را جداگانه حساب کنیم و یک جای‌گذاری ساده در پیش داریم:

$$\lim_{x\to ۱}[x^۲+x+\frac{۱}{۲}]=[\underbrace{۱^۲+۱+\frac{۱}{۲}}_{۲/۵}]=۲$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}}[x^۲]$$

اگر در عبارت $x^۲$ به جای x عدد $\sqrt{۲}$ را قرار دهیم، حاصل ۲ می‌شود، پس متأسفانه داخل براکت صحیح شده و حد چپ و حد راست را باید جداگانه حساب کنیم:

حد چپ : $\lim_{x\to\sqrt{۲}^-}[x^۲]=[(\sqrt{۲}^-)^۲]=[۲^-]=۱$

حد راست : $\lim_{x\to\sqrt{۲}^+}[x^۲]=[(\sqrt{۲}^+)^۲]=[۲^+]=۲$

پس تابع در $x=\sqrt{۲}$ حد ندارد.

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}[\frac{۱}{x}]$$

وقتی که $x\to(\frac{۱}{۲})^-$ برود یعنی $\frac{۱}{x}$ به سمت ۲^+ میل می‌کند در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}[\frac{۱}{x}]=[۲^+]=۲$$

اگر تابع $f(x)=a[x]+۲[x]$ در $x=۱$ حد داشته باشد، a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) f در $x=۱$ هیچ‌وقت حد ندارد.

نکته بسیار مهم : در حل مسائل که دارای قدرمطلق یا جزصحیح باشند ابتدا باید قدر مطلق را تعیین علامت و جزصحیح را تعیین مقدار کنیم وسپس مسائل را حل نماییم.

اگر $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$، حد چپ تابع در $x=۳$ کدام است؟

۱) ۵ **۲)** ۶ **۳)** ۷ **۴)** ۴

چون $۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\notin Z$، از بخش (۱) نکته‌ی قبل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=[۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]\xrightarrow{۰<\frac{\sqrt{۳}}{۲}<۱}[۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=۳\Rightarrow\lim_{x\to ۳}[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=۳\Rightarrow\lim_{x\to ۳}f(x)=۳+۳=۶$$

با فرض $a=-\frac{۱}{۵}$، حاصل $\lim_{x\to a^-}[\frac{۱}{x}]$ کدام است؟

۱) -۵ **۲)** -۴ **۳)** -۶ **۴)** -۳

در تابع جزءصحیح $f(x)=[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]$، مجموع حد چپ و راست وقتی $x \to ۶$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}([\sin x]+\cos x)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$، ابتدا حاصل $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (حد تابع داخل [ ]) را به‌دست می‌آوریم. در این‌صورت:

۱) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و l عددی غیرصحیح باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[l]$. به عنوان مثال، داریم: $\lim\limits_{x\to ۲}[\frac{x^۲}{۳}]=[\frac{۴}{۳}]=۱$ عددی غیرصحیح

پس اگر به ازای $x=a$، حاصل عبارت داخل براکت، عددی غیرصحیح شود، برای محاسبهٔ حد به‌جای x، a قرارمی‌دهیم.

۲) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و l عددی صحیح باشد، باید حد چپ و راست تابع $y=[f(x)]$ را در $x=a$ به‌دست آوریم.

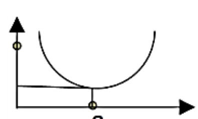
به عنوان مثال؛ برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۱}[x^۲+۲x]$، داریم: $\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲+۲x)=۳\in \mathbb{Z}$

اگر $x\to ۱^+$، آن‌گاه $x>۱$ و در نتیجه داریم: $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x^۲+۲x]=[۱^+ +۲(۱^+)]=[۳^+]=۳$

هم‌چنین اگر $x\to ۱^-$، آن‌گاه $x<۱$ و در نتیجه داریم: $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x^۲+۲x]=[۱^- +۲(۱^-)]=[۳^-]=۲$

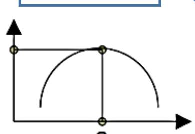
پس تابع f در $x=۱$ حد ندارد.

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{Z}$ (l یک عدد صحیح باشد) و $x=a$ طول نقطهٔ مینیمم یا ماکزیمم f باشد، آن‌گاه تابع $[f]$ در $x=a$ دارای حد است.



$x>a \to f(x)>L \Rightarrow [f(x)]=L$

$x<a \to f(x)>L \Rightarrow [f(x)]=L$



$x>a \to f(x)<L \Rightarrow [f(x)]=L-۱$

$x<a \to f(x)<L \Rightarrow [f(x)]=L-۱$

تابع $f(x)=[x^۲]$ در بازهٔ $(-۱,۲)$، در چند نقطه حد **ندارد**؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تابع $y=[x^۲]$ به ازای xهایی که $x^۲$ یک عدد صحیح شود، حد ندارد. به جز آن‌که طول نقطهٔ مینیمم یا ماکسیمم تابع $y=x^۲$ باشد.

$x=۰$ طول نقطهٔ مینیمم $y=x^۲$ است، پس تابع در $x=۰$ حد دارد. $x^۲=۰\Rightarrow x=۰$

$x^۲=۲\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\xrightarrow{x\in(-۱,۲)} x=\sqrt{۲}$ ✓

$x^۲=۱\Rightarrow x=\pm ۱\xrightarrow{x\in(-۱,۲)} x=۱$ ✓

$x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$ ✗

$x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}\xrightarrow{x\in(-۱,۲)} x=\sqrt{۳}$ ✓

❖ **نکته :**

در قضیه‌ی قبل دیدیم که اگر f و g در $x=a$ حد داشته باشند، توابع $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط غیر صفر بودن حد g) نیز در $x=a$ حد خواهند داشت. عکس این قضیه، درست نیست. در واقع:

الف) اگر f در $x=a$ حد داشته باشد و g حد نداشته باشد، آن‌گاه قطعاً $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد نخواهند داشت، ولی fg و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند.

ب) اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f\pm g$، fg، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند یا نداشته باشند.

به عنوان مثال، تابع $f(x)=x^{2}$ در $x=0$ حد دارد و تابع $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ در $x=0$ حد ندارد و داریم:

$$\lim_{x\to 0^{+}}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0^{+}}(x^{2}+1)=0^{2}+1=1\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0^{-}}(x^{2}-1)=0^{2}-1=-1$$

پس تابع $f+g$ در $x=1$ حد ندارد. به همین ترتیب تابع $f-g$ نیز در $x=0$ حد ندارد، اما تابع‌های $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در $x=0$ حد دارند:

$$\lim_{x\to 0^{+}}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0^{+}}x^{2}=0^{2}=0\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0^{-}}(-x^{2})=0$$

پس تابع $f.g$ در $x=0$ دارای حدی برابر صفر است.

به همین ترتیب داریم:

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^{2}}{1}=0\ ,\ \lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^{-}}(-x^{2})=0$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ در $x=0$ دارای حدی برابر صفر است.

در نکتهٔ قبل ذکر شده است که ممکن است توابع $f.g$ و $\frac{f}{g}$ در $x=a$ دارای حد باشند. یعنی می‌توان مثالی ارائه کرد که این دو تابع نیز در $x=a$ حد نداشته باشند. به مثال بعدی دقت کنید:

با فرض $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x<1\end{cases}$، آیا تابع $f.g$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

تابع f در $x=1$ حد دارد و تابع g در $x=1$ حد ندارد:

$$\lim_{x\to 1^{+}}g(x)=\lim_{x\to 1^{+}}1=1\neq\lim_{x\to 1^{-}}g(x)=\lim_{x\to 1^{-}}(-1)=-1\ ,\ \lim_{x\to 1}f(x)=1^{2}=1$$

برای تابع $f.g$، داریم:

$$\lim_{x\to 1^{+}}(f(x)g(x))=\lim_{x\to 1^{+}}(x^{2}\times 1)=1^{2}=1\ ,\ \lim_{x\to 1^{-}}(f(x)g(x))=\lim_{x\to 1^{-}}(x^{2}\times(-1))=-1$$

چون حد چپ و راست تابع $f.g$ در $x=1$ با هم برابر نیستند، پس تابع $f.g$ در $x=1$ حد ندارد.

اگر تابع f در نقطه‌ی $x=1$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)-1}{f(x)+1}=1$، آن‌گاه $\lim_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ٤) 3

اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(|x|-a)^{۲}-۳ & x<۰\\ x+۲a & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{-۱,۳\}$ ۳) $\{۱,-۳\}$ ٤) $\varnothing$

❖ **نکته :**

اگر تابع f در $x=a$ **حدی برابر صفر** داشته باشد و تابع g در $x=a$ حد نداشته باشد ولی حد چپ و راست داشته باشد، آن‌گاه تابع $f.g$ حدی برابر صفر دارد و تابع $\frac{f}{g}$ با فرض آن‌که حد چپ و راست تابع g در $x=a$ مخالف صفر باشد نیز حدی برابر صفر دارد.

اگر $g(x)=\begin{cases}x^{۲}+۱ & x\geq ۱\\ -x^{۳} & x<۱\end{cases}$ باشد، ضابطهٔ تابع f کدام باشد تا تابع $f.g$ در $x=۱$ حد داشته باشد؟

۱) $f(x)=x^{۲}+۳x$ ۲) $f(x)=x^{۳}+x^{۲}-۲$ ۳) $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ ۴) $f(x)=-x^{۲}+۵x$

تابع g در $x=۱$ حد ندارد، زیرا:

$\lim_{x\to ۱^+} g(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x^{۲}+۱)=۱^{۲}+۱=۲$ ، $\lim_{x\to ۱^-} g(x)=\lim_{x\to ۱^-}(-x^{۳})=(-۱)^{۳}=-۱$

اگر $\lim_{x\to ۱} f(x)=۰$ باشد، آن‌گاه تابع $f.g$ در $x=۱$ حد دارد. با حدگیری توابع داده‌شده در گزینه‌ها وقتی که $x\to ۱$، داریم:

$\lim_{x\to ۱}(x^{۳}+x^{۲}-۲)=۱^{۳}+۱^{۲}-۲=۰ \Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

❖ **نکته :**

اگر هیچ‌یک از دو تابع f و g در $x=a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند و هم‌چنین ممکن است در $x=a$ حد نداشته باشند. در این حالت باید حتماً حد چپ و راست هر یک از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آوریم و سپس بررسی کنیم.

توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+۱ & x\geq ۲\\ -x+۳ & x<۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۲\\ x^{۲} & x<۲\end{cases}$ داده شده‌اند. کدام تابع زیر در $x=۲$ حد دارد؟

۱) $f+g$ ۲) $f-g$ ۳) $\frac{f}{g}$ ۴) $f.g$

حد چپ و راست توابع f و g را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(\frac{۱}{۲}x+۱)=\frac{۱}{۲}\times ۲+۱=۲$ ، $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(-x+۳)=-۲+۳=۱$

$\lim_{x\to ۲^+} g(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+۱)=۲+۱=۳$ ، $\lim_{x\to ۲^-} g(x)=\lim_{x\to ۲^-} x^{۲}=۲^{۲}=۴$

هیچ‌یک از دو تابع f و g در $x=۲$ حد ندارند.

حد چپ و راست هر یک از توابع موجود در گزینه‌ها را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم.

$\lim_{x\to ۲^+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۲^+} f(x)+\lim_{x\to ۲^+} g(x)=۲+۳=۵$

$\lim_{x\to ۲^-}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۲^-} f(x)+\lim_{x\to ۲^-} g(x)=۱+۴=۵$

بنابراین تابع $f+g$ در $x=۲$ دارای حدی برابر ۵ است.

❖ **نکته** :

(عامل صفر کننده در حد)
فرض کنید تابع f در نقطه‌ی $x=n$ (که $n \in Z$) دارای حد باشد. در این صورت تابع $y=f(x)[x]$ در نقطه‌ی $x=n$ تنهـا در صورتی حد دارد که f در این نقطه در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود. یعنی f در این نقطه حدی برابر صفر داشته باشد.

مثال: تابع $y=(x-۲)[x]$ در $x=۲$ حدی برابر صفر دارد (زیرا $x-۲$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر می‌شود)، ولی در نقاط دیگر با طـول صحیح حد ندارد.

تابع $f(x)=(x^۳-۳x+۲)[x]$ در چند نقطه‌ی $a \in Z$ دارای حد است؟

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **٤) بی‌شمار**

تابع در نقاطی با طول صحیح دارای حد است که $x^۳-۳x+۲$ دارای حد صفر باشد. پس باید ریشه‌های آن را به‌دست آوریم. واضح است که $x=۱$ یکی از ریشه‌ها است، با تقسیم عبارت بر $x-۱$ می‌توانیم آن را تجزیه کنیم:

$$x^۳-۳x+۲=(x-۱)(x^۲+x-۲)=(x-۱)(x+۲)(x-۱)=(x-۱)^۲(x+۲)$$

پس در دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=-۲$، عبارت $x^۳-۳x+۲$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

- **رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$: حاصل حد روبرو را ببینید ...** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}=\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$

به این حالت مبهم می گوییم و برای رفع آن از روش های زیر استفاده می کنیم :

۱- تقسیم چند جمله ای ۲- تجزیه به کمک اتحاد ها ۳- اتحاد های مثلثاتی (در توابع مثلثاتی)

- توابعی که حد آنها پس از جاگذاری x حالت مبهم $\frac{0}{0}$ دارند : الف) توابع کسری شامل عبارات چند جمله ای

ب) توابع کسری شامل عبارات گنگ (رادیکالی) ج) توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی

❖ **نکته بسیار مهم :**   **در مسیر رفع ابهام $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ، هدف اصلی حذف عامل صفر شونده (x-a) از صورت و مخرج کسر است .**

- **رفع ابهام توابع کسری شامل عبارات چند جمله ای :**

برای رفع ابهام این گونه توابع مـی‌تـوان از مـوارد زیـر در جای مناسب استفاده کرد :

الف) بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x - a$ ب) فاکتور گیری پ) اتحادهای جبری

وقتی که $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\circ}{\circ}$ باشد معلوم است که عامل صفر کننده در صورت و مخـرج کسـر وجـود دارد. پس صورت و مخرج کسر را با روش‌های ذکر شده تجزیه می‌کنیم و عامل صفر کنندهٔ صورت و مخرج را که $(x-a)$ می‌باشد حذف می‌کنیم. و بعد با جایگذاری حد تابع را در نقطهٔ a بدست می‌آوریم.

اگر با روش تجزیه نتوانستیم عامل مشترک صفرکننده را حذف کنیم، باید صورت و مخـرج را بـر $(x-a)$ تقسیم نماییم.

اتحادهای جبری مهم :

$a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)$

$x^۲ + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

$a^۳ \mp b^۳ = (a \mp b)(a^۲ \pm ab + b^۲)$

$a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + ... + a + ۱)$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}{(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}(x^۲+۲x+۴)=(۲)^۲+۲(۲)+۴=۱۲$$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲+۳x+۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x+۲)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x+۲}{x-۱}=\frac{۱}{-۲}=-\frac{۱}{۲}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۳x-۱۰}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۷}$

با قرار دادن عدد ۲ به جای x، حاصل کسر به‌صورت $\frac{\circ}{\circ}$ درمی‌آید. بنابراین عبارت‌های صورت و مخرج کسر بر $x - ۲$ بخش‌پذیرند. با تجزیهٔ آن‌ها داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲+۳x-۱۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x-۳)}{\cancel{(x-۲)}(x+۵)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۳}{x+۵}=-\frac{۱}{۷}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-[x]}{2x^2-x-1}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

ابتدا با توجه به مفهوم $x\to 1^+$ ، مقدار $[x]$ را به‌دست می‌آوریم: $x\to 1^+ \Rightarrow 1<x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow$ حاصل حد $= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{2x^2-x-1}$

با قرار دادن عدد یک به جای x ، در حد اخیر، حاصل به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. داریم:

$2x^2-x-1=(x-1)(2x+1) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2} =$

$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+3x-5}{x^2-1} =$

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} =$

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{3x^2-12} =$

$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^2-1} =$

- **رفع ابهام توابع کسری شامل عبارات گنگ** :

در این نوع رفع ابهام ها با دو نوع تابع گنگ روبرو هستیم : ۱) توابع رادیکالی با فرجه ۲ ۲) توابع رادیکالی با فرجه ۳
برای رفع ابهام توابع رادیکالی با فرجه ۲ معمولا از اتحاد مزدوج کمک می گیریم
برای رفع ابهام توابع رادیکالی با فرجه ۳ معمولا از اتحاد چاق و لاغر کمک می گیریم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-x}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})}{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲-\sqrt{۳x+۱}}{x-۱}\times\frac{۲+\sqrt{۳x+۱}}{۲+\sqrt{۳x+۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\overbrace{۴-(۳x+۱)}^{۳-۳x}}{(x-۱)(۲+\sqrt{۳x+۱})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۳(x-۱)}{(x-۱)(۲+\sqrt{۳x+۱})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۳}{۲+\sqrt{۳x+۱}}=\frac{-۳}{۲+\sqrt{۳(۱)+۱}}=-\frac{۳}{۴}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^{۲}-۴x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

کسر که $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ است،رادیکال را اول باید از بین ببریم و بعدش عامل صفرکننده را از صورت و مخرج خط بزنیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۱-\sqrt{x-۳}}{x^{۲}-۴x}\times\frac{۱+\sqrt{x-۳}}{۱+\sqrt{x-۳}}=\lim_{x\to ۴}\frac{\overbrace{۱-(x-۳)}^{۴-x}}{(x^{۲}-۴x)(۱+\sqrt{x-۳})}=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)}{x(x-۴)(۱+\sqrt{x-۳})}=\lim_{x\to ۴}\frac{-۱}{x(۱+\sqrt{x-۳})}$$
$$=\frac{-۱}{۴(۱+۱)}=-\frac{۱}{۸}$$

حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

صورت و مخرج کسر هر دو تابع رادیکالی می‌باشند، بنابراین هر دو را گویا می‌کنیم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}\times\underbrace{\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}}_{۴}\times\frac{\overbrace{\sqrt{۲x-۱}+۳}^{۶}}{\sqrt{۲x-۱}+۳}=\lim_{x\to ۵}\frac{\cancel{۶}^{۳}((۲)^{۲}-(\sqrt{x-۱})^{۲})}{\cancel{۴}_{۲}((\sqrt{۲x-۱})^{۲}-(۳)^{۲})}=\lim_{x\to ۵}\frac{۳\overbrace{(۴-x+۱)}^{-(\cancel{x-۵})}}{۲\underbrace{(۲x-۱-۹)}_{۲(\cancel{x-۵})}}=-\frac{۳}{۴}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{\sqrt[۳]{۳x-۲}+۲}{x^{۲}+۲x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

با قرار دادن عدد ۲- به جای x ، حاصل حد به‌صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید. با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، صورت و مخرج کسر را در عبارت $(\sqrt[۳]{۳x-۲})^{۲}-۲\sqrt[۳]{۳x-۲}+۲^{۲}$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to -۲}\frac{\sqrt[۳]{۳x-۲}+۲}{x(x+۲)}\times\frac{(\sqrt[۳]{۳x-۲})^{۲}-۲\sqrt[۳]{۳x-۲}+۴}{\underbrace{(\sqrt[۳]{۳x-۲})^{۲}-۲\sqrt[۳]{۳x-۲}+۴}_{۴+۴+۴=۱۲}}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(\sqrt[۳]{۳x-۲})^{۳}+۸}{x(x+۲)\times ۱۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(۳x-۲)+۸}{x(x+۲)\times ۱۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{\cancel{۳}^{۱}(\cancel{x+۲})^{۱}}{x(\cancel{x+۲})_{۱}\times\cancel{۱۲}^{۴}}=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

در برخی از موارد برای رفع ابهام و محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ، با تغییر متغیر $x-a=t$ می‌توان مسئله را راحت‌تر حل کرد.

حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{2\sqrt{x-1}+x^2-1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$$x-1=t \xrightarrow{x\to 1^+} t\to 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}+x-1}{2\sqrt{x-1}+(x-1)\underbrace{(x+1)}_{2}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{2t}+t}{2\sqrt{t}+2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{2t}}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6}\times\frac{x+\sqrt{4x-3}}{x+\sqrt{4x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-(4x-3)}{(x^2-5x+6)(x+\sqrt{4x-3})}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}=$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-5x-24}=$$

▪ رفع ابهام توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی:

برای رفع ابهام این نوع توابع معمولا از بسط های مثلثاتی ، اتحاد های مثلثاتی و روش تغییر متغیر کمک می گیریم

برخی از روابط مثلثاتی به شرح زیر می باشد

① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

② $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

③ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

④ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ⑤ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

⑥ $\tan\theta \times \cot\theta = 1$ ⑦ $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ⑧ $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$$۱-\cos\alpha = ۲\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$
$$۱+\cos\alpha = ۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$
$$۱\pm\sin\alpha = (\sin\frac{\alpha}{۲} \pm \cos\frac{\alpha}{۲})^{۲}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \dfrac{\cos^{۲} x}{۱-\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۲

$\frac{\pi}{۲}$ را که در تابع جای‌گذاری می‌کنیم، معلوم می‌شود که با یک کسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ روبه‌رو هستیم، پس باید با تجزیه‌کردن و ساده‌کردن، عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج را با هم خط بزنیم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^{۲} x}{۱-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin^{۲} x}{۱-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (۱+\sin x) = ۱+(۱) = ۲$$

حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{۱+\cos^{۳} x}{\sin^{۲} x}$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{۱-\sin ۲x}{\cos x - \sin x}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) صفر ۴) -۱

حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ **کدام است؟** (سراسری ریاضی-۹۳)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

در محاسبهٔ حد مثلثاتی $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$ وقتی $x\to 0$، می‌توان به جای $\sin 2x$، $2x$ و به جای $\tan 5x$، $5x$ را قرار دهیم.
در واقع می‌گوییم وقتی $x\to 0$، $\sin 2x$ با $2x$ و $\tan 5x$ با $5x$ هم‌ارز است و می‌نویسیم: $\sin 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x \quad , \quad \tan 5x \underset{x\to 0}{\sim} 5x$
اگر $u\to 0$، آن‌گاه: $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u \quad , \quad \tan u \underset{u\to 0}{\sim} u$

حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+2x)}{\tan(x^2+5x)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

$$x\to 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x\to 0 \Rightarrow \sin(x^2+2x)\sim x^2+2x \\ x^2+5x\to 0\Rightarrow \tan(x^2+5x)\sim x^2+5x\end{cases} \Rightarrow \text{حاصل حد} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^2+5x} \overset{\text{کم‌توان}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

نکته بسیار مهم : برای تعیین علامت و تعیین مقدار توابع مثلثاتی باید از دایره مثلثاتی استفاده شود.

حد عبارت $\sin\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}\right]-\cos x[\sin 2x]$ وقتی $x\to\pi$ کدام است؟ (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۵)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد

برای بدست آوردن حد توابع با جزء صحیح اولین قدم تعیین مقدار جزء صحیح می باشد از آن جا که عبارت داخل جزء صحیح مثلثاتی می باشد باید از دایره مثلثاتی استفاده کنیم و چون در صورت مسئله به حد چپ یا حد راست اشاره نشده است باید هر ۲ طرف چپ و راست محاسبه شود.

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin\frac{x}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{2})^+\right]-\cos x\left[\sin(2\pi)^+\right]=\sin\frac{x}{2}(-1)-\cos x\,(0)=-\sin x \to \lim_{x\to\pi^+}(-\sin\frac{\pi}{2}^+)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{x}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{2})^-\right]-\cos x\left[\sin(2\pi)^-\right]=\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{\pi}{2}(0)-\cos(-1) = \lim_{x\to\pi^-}\cos x=-1$$

حد عبارت $\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+\left[\tan^2 x\right]$ وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) حد ندارد

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+\left[\tan^2 x\right]=\lim\left[\sin 0^+\right]\cos 3x+\left[\tan^2\frac{\pi}{3}^+\right]=\lim(0)\times\cos 3x+\left[\left(\sqrt{3}\right)^{2+}\right]=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+\left[\tan^2 x\right]=\lim\left[\sin 0^-\right]\cos 3x+\left[\tan^2\frac{\pi}{3}^-\right]=\lim(-1)\cos 3\times(\frac{\pi}{3})+\left[\left(\sqrt{3^-}\right)^2\right]=-1\times(-1)+\left[3^-\right]=1+2=3$$

- **روش تغییر متغیر در رفع ابهام مثلثاتی** : در این گونه رفع ابهام ها نیز $x-x_0$ عامل صفر شونده است که باید از صورت و مخرج کسر حذف شود .

روند کار : $x-x_0$ را مساوی t قرار می دهیم ($t=x-x_0$) و از روی آن x را بر حسب t پیدا می کنیم ($x=t+x_0$) ، سپس در تغییر متغیر (t) در همسایگی داده شده مشخص می کنیم که t به سمت چه عددی میل می کند ...

※ در ضمن معمولا هدف ما رسیدن به عبارت $\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{sinx}=1$ است .

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos\frac{x}{۲}[-\sin x]}{x-\pi}$$

در یک همسایهٔ چپ نقطهٔ $x=\pi$ داریم:

$$x<\pi\Rightarrow\sin x>۰\Rightarrow-\sin x<۰\Rightarrow[-\sin x]=-۱$$

حال می‌توان نوشت:

$$\text{شیب‌نیم‌مماس چپ}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{-\cos\frac{x}{۲}}{x-\pi}=\frac{۰}{۰}$$

حال فرض می‌کنیم $x-\pi=t$ یا $x=\pi+t$ پس داریم:

$$=\lim_{t\to۰^-}\frac{-\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{t}{۲})}{t}=\lim_{t\to۰^-}\frac{\sin\frac{t}{۲}}{t}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to(۲\pi)^+}\frac{\sin x[\cos\frac{x}{۲}]}{x-۲\pi}$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x[\cos\frac{x}{۲}]}{x-\pi}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\sin\pi|x|}{x+۱}$$

- **رفع ابهام توابع شامل جزء صحیح و قدرمطلق :**

حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{|x^3-2x+1|}{2x^2-3x+1}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $-\frac{1}{2}$

با قرار دادن عدد ۱ به جای x، حاصل حد به‌صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. عبارت x^3-2x+1 بر $x-1$ بخش‌پذیر است و با تقسیم x^3-2x+1 بر $x-1$ ، داریم:

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{|x^3-2x+1|}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|(x-1)\overbrace{(x^2+x-1)}^{\text{حاصل}=1}|}{(x-1)\underbrace{(2x-1)}_{\text{حاصل}=1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{|x-1|}^{\text{مثبت}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1$$

حد تابع $f(x)=\frac{|x|+[x]}{2|x|-[x]}$ وقتی که $x\to 0^+$ ، کدام است؟

۱) ۱- ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $-\frac{1}{2}$

وقتی که x از سمت راست به صفر میل می‌کند، x عددی مثبت و بسیار نزدیک به صفر است، پس $|x|=x$ و $[x]=0$ است در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|+[x]}{2|x|-[x]}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+0}{2x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|x|\left[\frac{1}{x}\right]$ کدام است؟ (کنکور خارج کشور- ۱۳۹۳)

۱) ۱- ۲) حد ندارد ۳) صفر ۴) ۱

برای توابع با قدر مطلق ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علام نماییم از آن جایی که صورت سوال تعیین نکرده x از کدام طرف به صفر میل می کند در نتیجه باید از هر ۲ طرف بررسی شود. می دانیم اگر $u\to\infty$ در این حالت $[u]\sim u$ که با استفاده از این نکته

چون $x\to 0$ پس $\frac{1}{x}\to\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}x\times\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-}(-x)\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-}(-x)\times\frac{1}{x}=-1$$

چون حد چپ و حد راست با هم برابر نمی باشد تابع حد ندارد.

$\lim_{x\to 0}\frac{[x]+|x|}{x+1}=$

$\lim_{x\to 1}\frac{[x-1]}{x-1}=$

$\lim_{x\to 0/1}(\frac{1}{[x]})=$

حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left([2x]+[-2x]\right)\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^3}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

می دانیم: $[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in z\\ -1 & u\notin z\end{cases}$

به دلیل اینکه $x\to 0$، مقدار x نزدیک به صفر می باشد و هیچ گاه به صفر نمی رسد لذا باید حالت $u\notin Z$ را در نظر بگیریم یعنی:

$[2X]+[-2X]=-1$

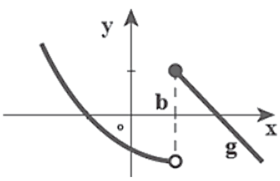
$$\lim_{x\to 0}(-1)\times\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}=\lim -\frac{\left(1-\cos^3 x\right)\left(1+\sqrt{1+0}\right)}{1-\left(1+x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-\cos^3 x\right)(2)}{-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x^2+\cos x\right)(2)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(3)\left(1-\cos x\right)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-x^2}\lim\frac{-6\times\frac{2x^2}{4}}{-x^2}=+3$$

- **پیوستگی تابع در یک نقطه** : همانطور که از نام آن پیداست ، یعنی اینکه تابع در آن نقطه دارای انقطاع (قطع شدگی) نباشد . بدین منظور به نمودار هایی که در آنها بدون برداشتن قلم از روی کاغذ بتوان نمودار را رسم کرد ، پیوسته می گوییم .
- شرط پیوستگی تابع از روی ضابطه هم این است : اگر در یک نقطه از تابع حد چپ ، حد راست و مقدار تابع با هم برابر باشند می گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است . **عموما یک تابع چند ضابطه ای می دهند و ما شرط را در نقطه ی تغییر رفتار تابع (مرز بازه ها) اعمال می کنیم...**

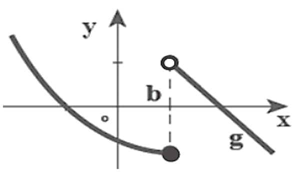
- **بنابراین شرط پیوستگی در نقطه a این است که حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در نقطه a برابر باشد**

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

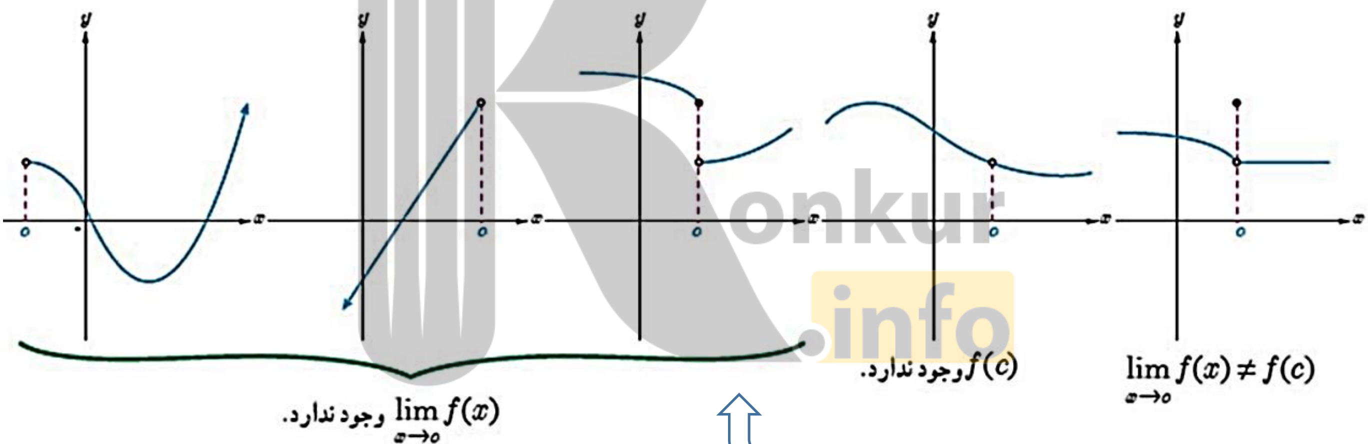


گاهی اوقات تعریف پیوستگی به صورت $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ بیان می شود

f در a فقط پیوستگی راست دارد هرگاه : $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\neq \lim_{x\to a^-} f(x)$



F در a فقط پیوستگی چپ دارد هرگاه : $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$



انواع ناپیوستگی ها :

این نوع ناپیوستگی ها را که در آنها در نقطه a حد و جود دارد ولی با مقدار تابع برابر نیست یا مقدار تابع در a اصلا تعریف نشده است ناپیوستگی رفع شدنی می نامند اگر تابع f در a حد نداشته باشد در a نا پیوستگی غیر رفع شدنی (رفع نشدنی)دارد

مثال : به ازای کدام مقدار a تابع
$$f(x)=\begin{cases} x\left[\dfrac{x}{۲}\right] & ,x\neq ۲ \\ a & ,x=۲\end{cases}$$
در نقطه x=۲ پیوسته است

$$x\to ۲^+ \to x>۲ \Rightarrow \frac{x}{۲}>۱ \to \left[\frac{x}{۲}\right]=۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} x\left[\frac{x}{۲}\right]=۲\times ۱=۲$$

$$x\to ۲^- \to x<۲ \Rightarrow \frac{x}{۲}<۱ \to \left[\frac{x}{۲}\right]=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} x\left[\frac{x}{۲}\right]=۲\times ۰=۰$$

اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x & x\geq ۱ \\ ax+۱ & x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

تابع $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+۲x & x\geq ۱ \\ x^{۲}-x+۱ & ۰\leq x<۱ \\ \frac{x+\sqrt{۱-x}}{x+۱} & x<۰ \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های صفر و ۱ چگونه است؟

۱) در صفر پیوسته، در ۱ پیوسته ۲) در صفر پیوسته، در ۱ ناپیوسته ۳) در صفر ناپیوسته، در ۱ پیوسته ۴) در صفر ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & -\pi<x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+b & x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-۱}{x^{۲}-۱} & x\neq ۱, x>۰ \\ a & x=۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+3} & x>1\\ -2a+1 & x=1\\ \dfrac{x-2}{2x} & x<1\end{cases}$ در $x=1$ پیوستگی راست دارد؟

۱) $\frac{3}{4}$　　۲) $\frac{1}{4}$　　۳) $-\frac{1}{4}$　　۴) $-\frac{3}{4}$

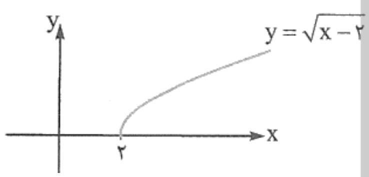
پیوستگی در یک بازه:

۱- تابع f را در بازه (a,b) پیوسته گویند هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد

۲- تابع f در بازه $[a,b)$ پیوسته گویند هر گاه در تمام نقاط (a,b) پیوسته باشد و در a پیوستگی راست داشته باشد

۳- تابع f در بازه $(a,b]$ پیوسته گویند هر گاه در تمام نقاط (a,b) پیوسته باشد و در a پیوستگی چپ داشته باشد

۴- تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته گویند هر گاه در تمام نقاط (a,b) پیوسته باشد و در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد



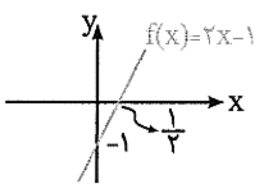
تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ در چه بازه‌ای پیوسته است؟

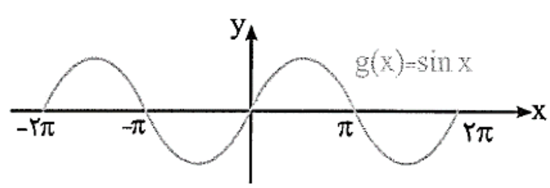
دامنهٔ f برابر است با: $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$ و نمودارش هم این شکلی است:

معلوم است که این تابع در بازهٔ $[2,+\infty)$ پیوسته است.

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

به عنوان مثال، توابع $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\sin x$ با نمودارهای زیر، روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند:





در نکتهٔ زیر، پیوستگی برخی از توابع خاص را روی دامنهٔ آن‌ها بررسی می‌کنیم:

آ) توابع چندجمله‌ای همه جا (روی $\mathbb{R}$) پیوسته‌اند. برای مثال، تابع $f(x)=x^5-2x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

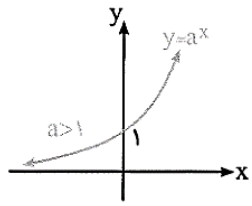
ب) توابع کسری گویا در دامنه‌شان پیوسته‌اند. برای مثال تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ پیوسته است و تابع $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ روی $D_g=\mathbb{R}$ پیوسته است.

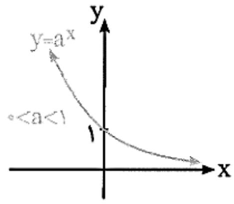
پ) توابع رادیکالی در دامنه‌شان پیوسته‌اند. برای مثال تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ روی بازهٔ $[2,+\infty)$ پیوسته است.

ت) توابع مثلثاتی در دامنه‌شان پیوسته‌اند.

ث) تابع $f(x)=\log_a x$ در دامنهٔ خود، یعنی بازهٔ $(\circ,+\infty)$ پیوسته است. به عنوان مثال، تابع $f(x)=\log_{۳} x$ در بازهٔ $(\circ,+\infty)$ پیوسته است.

ج) تابع $f(x)=a^x$ در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.





چ) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، آن‌گاه روی هر زیربازهٔ دلخواه از آن نیز پیوسته است. به عنوان مثال، تابع $f(x)=۲^x$ روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته و در نتیجه روی هر زیربازهٔ دلخواه از آن، مثلاً بازهٔ $[-۱,۴)$ نیز پیوسته است.

تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۴x+a}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود a کدام است؟

۱) $a\geq ۴$ ۲) $a<۴$ ۳) $a\in\{\}$ ۴) $a\in\mathbb{R}$

برای آن‌که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، در واقع باید برای تمام مقادیر حقیقی x داشته باشیم:

$$x^۲+۴x+a\geq\circ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ \text{ ضریب } =۱>\circ \\ \Delta\leq\circ\Rightarrow ۱۶-۴a\leq\circ\Rightarrow a\geq ۴ \end{cases}$$

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a+\sin ۳x & \circ\leq x<\frac{\pi}{۲} \\ b\cos ۲x & \frac{\pi}{۲}<x\leq ۲\pi \end{cases}$، با شرط $f(\frac{\pi}{۲})=۲$، در بازهٔ $[\circ,۲\pi]$ پیوسته است. $a-b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۵

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۴-x^۲} & |x|\leq ۲ \\ \frac{۱}{۲}x-۱ & |x|>۲ \end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

نکات مـــهم در پیوستگی تـــوابع :

۱- اگر f تابعی پیوسته باشد $\sqrt[2k+1]{f}$, f^k نیز پیوسته می باشد و $\sqrt[2k]{f}$ در بازه ای که $f\geq 0$ باشد پیوسته است.

۲- تابع چند ضابطه ای f به معادله ی $f(x)=\begin{cases} f_1(x)\to D_{f_1}\\ f_2(x)\to D_{f_2}\\ f_3(x)\to D_{f_3}\\ \ldots \end{cases}$ وقتی در $\mathbb{R}$ پیوسته است که:

الف-تک تک ضابطه ها در دامنه ی مربوط به خودشان پیوسته باشند

ب- تابع f در نقاط مرزی دامنه ضوابط پیوسته باشد

۳- اگر f پیوسته باشد $|f|$ نیز پیوسته است ولی از پیوستگی $|f|$ نمی توان پیوستگی f را نتیجه گرفت

بررسی پیوستگی تابع $y=[f(x)]$:

الف- اگر f در a پیوسته باشد و $f(a)\notin\mathbb{Z}$ انگاه $[f(x)]$ در a پیوسته است به عبارت دیگر به ازای نقاطی مانند a که داخل جزء صحیح غیر صحیح شود تابع $[f(x)]$ پیوسته است

ب- اگر f در a پیوسته باشد و $f(a)\in\mathbb{Z}$ آنگاه $[f(x)]$ در a یکی از چهار حالت زیر را دارد:

قبلا گفتیم

۱) اگر a طول مینیمم نسبی f باشد تابع $[f(x)]$ در آن پیوسته است

۲) اگر a طول ماکزیمم نسبی f باشد $[f(x)]$ در آن هیچ گونه پیوستگی ندارد

۳) اگر f در a صعودی اکید باشد تابع $[f(x)]$ در آن ناپیوسته ولی از راست پیوسته است

۴) اگر f در a نزولی اکید باشد تابع $[f(x)]$ در آن ناپیوسته ولی ازچپ پیوسته است

در تابع $f(x)=[ax+b]$ اگر به ازای x درون جزء صحیح عددی صحیح شود آنگاه :

اگر $a>0$ باشد f در x ناپیوسته و فقط پیوستگی راست دارد

اگر $a<0$ باشد f در x ناپیوسته و فقط پیوستگی چپ دارد

بررسی پیوستگی تابع f^{-1} بر اساس تابع f

الف)اگر تابع در بازه $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد تابع f^{-1} نیز در بازه $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیدا صعودی است

ب) اگر تابع در بازه $[a,b]$ پیوسته و نزولی اکید باشد تابع f^{-1} نیز در بازه $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیدا نزولی است

نتیجه:

۱- اگر f پیوسته باشد f^{-1} نیز پیوسته می باشد

۲- جهت یکنوایی f و f^{-1} یکسان است یعنی یا هردو صعودی اند و یا هردو نزولی

۳- اگر f صعودی اکید باشد تقعر f و f^{-1} قرینه یکدیگرند و اگر f نزولی اکید باشد تقعر f و f^{-1} یکسان است

نکته: اگر g در نقطه a و f در نقطه g(a) پیوسته باشد تابع fog در نقطه a پیوسته است

نکته:اگر $\lim_{x\to a} g(x)=b$ و f در نقطه b پیوسته باشد $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)$ به عبارت دیگر حد از توابع پیوسته عبور می کند

بررسی پیوستگی توابع $f\pm g, fg$

۱- اگر f و g در a پیوسته باشند توابع $f\pm g, fg$ در a پیوسته می باشند

۲- اگر f,g در a ناپیوسته باشند توابع $f\pm g, fg$ ممکن است در a پیوسته باشند یا نباشند

۳- اگر از f یا g یکی در a پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد آنگاه $f\pm g$ حتما در x=a ناپیوسته است و fg ممکن است در a پیوسته باشد یا نباشد

نکته: اگر تابع g در a ناپیوسته و یا حد نداشته باشد ولی در یک همسایگی a تعریف شده و کراندار باشد و f در a پیوسته و f(a)=۰ آنگاه تابع fg حتما در a پیوسته است .

مثال-تابع $[x]$ در x=۱ ناپیوسته و x-۱ در این نقطه پیوسته و مقدارش صفر است بنابراین تابع $f(x)=(x-۱)[x]$ در x=۱ پیوسته است

نتیجه مهم:اگر f یک چند جمله ای باشد تابع $y=f(x)[x]$ در ریشه های f(x)=۰ پیوسته است