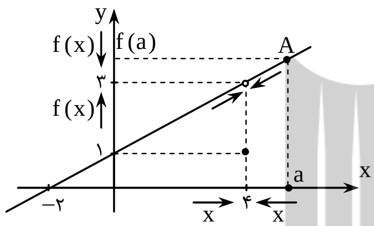
حد و پیوستگی

۳-۱: مفاهیم مقدماتی حد

با مفهوم حد و چگونگی محاسبه‌ی آن در سال گذشته در درس حسابان آشنا شده‌اید. در کتاب دیفرانسیل، ما به صورت دقیق‌تر و با زبان ریاضی با این مفهوم مواجه می‌شویم و در توابعی خاص‌تر آن را بررسی خواهیم کرد.

تعریف حد (۱): فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f در $x=a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:
مقدار تابع f را به عدد L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به‌شرط آن‌که مقدار x را به عدد a به اندازه‌ی کافی نزدیک کرده باشیم.



مسأله‌ی (۱): تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1 & x\neq 4\\ 1 & x=4\end{cases}$ **مفروض است.**

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **چقدر است؟**

ب) اگر بخواهیم $|f(x)-3|<1$**، باید** x **را به چه اندازه‌ای به ۴ نزدیک کنیم؟ برای** $|f(x)-3|<0/01$ **چقدر؟**

حل: الف) با توجه به نمودار تابع، می‌دانیم وقتی مقدار x به عدد ۴ نزدیک می‌شود (در شکل با $x=a$ نشان داده‌ایم)، روی نمودار نقطه‌ی A به سمت نقطه‌ی توخالی نزدیک می‌شود و متناظر آن، روی محور عرض‌ها مقدار $f(a)$ به ۳ نزدیک می‌شود. پس: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=3$.

ب) می‌دانیم برای $x\neq 4$، ضابطه‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ است. شرط $|f(x)-3|<1$ را به زبان ریاضی (برای $x\neq 4$) می‌نویسیم:

$$|f(x)-3|<1 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}x+1-3|<1 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}x-2|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|<1 \Leftrightarrow |x-4|<2$$

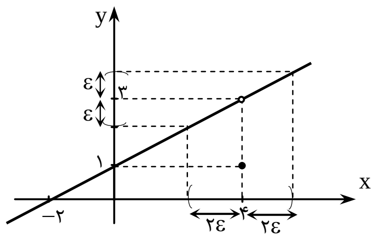
مشاهده می‌کنید که اگر $|x-4|<2$ (که چون $x\neq 4$، بهتر است آن را به شکل $0<|x-4|<2$ بنویسیم)، آن‌گاه $|f(x)-3|<1$. از بحث همسایگی می‌دانید شرط $0<|x-4|<2$ به‌معنی $x\in(2,6)-\{4\}$ است. یعنی اگر x در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع ۲ قرار بگیرد، آن‌گاه $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع ۱ قرار خواهد گرفت.
برای $|f(x)-3|<0/01$ نیز می‌توانیم بحث مشابهی داشته باشیم: (برای $x\neq 4$)

$$|f(x)-3|<0/01 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}x+1-3|<0/01 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}x-2|<0/01 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|<0/01 \xrightarrow{x\neq 4} 0<|x-4|<0/02$$

پس اگر x در همسایگی محذوف نقطه‌ی ۴ به شعاع $0/02$ قرار بگیرد، $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی ۳ به شعاع $0/01$ قرار خواهد گرفت.

مسأله‌ی (۲): در مسأله‌ی (۱)، می‌دانیم اگر $0<|x-4|<\delta$**، آن‌گاه** $|f(x)-3|<\varepsilon$**. چه رابطه‌ای بین** δ **و** ε **برقرار است؟**

حل: کافی است شرط‌ها را به زبان ریاضی به‌هم تبدیل کنیم: $|f(x)-3|<\varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{2}x+1-3|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x-4|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-4|<2\varepsilon$



معنی جمله‌های بالا این است که برای $x\neq 4$، دو نامساوی $|x-4|<2\varepsilon$ و $|f(x)-3|<\varepsilon$ معادل‌اند. پس اگر $\delta\leq 2\varepsilon$، آن‌گاه از $0<|x-4|<\delta$، می‌توانیم $|f(x)-3|<\varepsilon$ را نتیجه بگیریم. در نمودار نیز نتایج فوق را به شکل هندسی نشان داده‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید اگر x در فاصله‌ای کم‌تر از 2ε از عدد ۴ قرار بگیرد (یعنی داخل فاصله‌ی مشخص شده روی محور xها)، آن‌گاه $f(x)$ در فاصله‌ی کم‌تر از ε از عدد ۳ قرار می‌گیرد.
با توجه به دو مثال قبل تعریف حد را به زبان ریاضی چنین می‌توان بیان کرد:

تعریف حد (۲): فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد تابع f در $x=a$ برابر L است (و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$)، اگر جمله‌ی زیر درست باشد:
برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ یافت شود طوری که اگر $0<|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$.
یا به بیان دیگر: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ni\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

مسأله‌ی (۳): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۲} x^۲ - ۴x = -۴$.

حل: در این مثال $f(x) = x^۲ - ۲x$، $a = ۲$ و $L = -۴$. کافی است نشان دهیم برای هر $\varepsilon > ۰$، یک $\delta > ۰$ وجود دارد که اگر $۰ < |x-۲| < \delta$، آن‌گاه $|x^۲ - ۴x + ۴| < \varepsilon$. داریم:

$$|x^۲ - ۴x + ۴| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-۲)^۲| < \varepsilon \Rightarrow |x-۲|^۲ < \varepsilon \Leftrightarrow |x-۲| < \sqrt{\varepsilon}$$

نامساوی‌های برگشت‌پذیر بالا نشان می‌دهد که اگر $\delta \le \sqrt{\varepsilon}$، آن‌گاه از $۰ < |x-۲| < \delta$ نتیجه می‌گیریم: $|f(x) + ۴| < \varepsilon$. پس:

$$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۴$$

تست (۱): در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{x^۳ - ۳x^۲ + ۲x}{x-۱}$، اگر $۰ < |x-۱| < \delta$، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ در همسایگی -۱ به شعاع $۰/۰۴$ قرار می‌گیرد. بزرگ‌ترین مقدار δ کدام است؟

۱) $۰/۰۲$ ۲) $۰/۲$ ۳) $\sqrt[۳]{۰/۰۴}$ ۴) $۰/۰۶۴$

حل: در واقع در این تست از مفهوم $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۱$ سؤال شده است. ابتدا دقت کنید که با تقسیم صورت کسر f بر مخرج آن داریم:

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = (x-۱)(x^۲ - ۲x) \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x \ ,\ x \ne ۱$$

می‌خواهیم مقادیر f در همسایگی -۱ به شعاع $۰/۰۴$ قرار گیرند، یعنی: $|f(x) + ۱| < ۰/۰۴$. بنابراین:

$$|f(x)+۱| < ۰/۰۴ \Leftrightarrow |x^۲ - ۲x + ۱| < ۰/۰۴ \Leftrightarrow |x-۱|^۲ < ۰/۰۴ \Leftrightarrow |x-۱| < ۰/۲$$

پس اگر $\delta \le ۰/۲$، از شرط $۰ < |x-۱| < \delta$ نتیجه می‌گیریم: $|f(x)+۱| < ۰/۰۴$. بنابراین گزینه‌ی (۲) پاسخ درست است.

تست (۲): با فرض $f(x) = \begin{cases} ۵x - ۱ & x < ۱ \\ ۳x + ۱ & x \ge ۱ \end{cases}$، می‌دانیم وقتی $۰ < |x-۱| < \delta$، آن‌گاه مقادیر f در فاصله‌ی $(۳/۹۸۵, ۴/۰۱۵)$ قرار می‌گیرد. δ کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) $۰/۰۰۰۳$ ۲) $۰/۰۰۲$ ۳) $۰/۰۰۳$ ۴) $۰/۰۰۴$

حل: قرار گرفتن f در آن فاصله، معادل $|f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵$ است. چون تابع دو ضابطه‌ای است در همسایگی‌های راست و چپ $x = ۱$ جداگانه شرط را بررسی می‌کنیم:

۱) اگر $۰ < x-۱ < \delta : |f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |۳x + ۱ - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow ۳|x-۱| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |x-۱| < ۰/۰۰۵$

۲) اگر $-\delta < x-۱ < ۰ : |f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |۵x - ۱ - ۴| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow ۵|x-۱| < ۰/۰۱۵ \Leftrightarrow |x-۱| < ۰/۰۰۳$

مشاهده می‌کنید که از یکی نتیجه می‌گیریم: $\delta \le ۰/۰۰۵$ و از دیگری $\delta \le ۰/۰۰۳$. برای آن‌که همواره شرط $|f(x) - ۴| < ۰/۰۱۵$ برقرار باشد، باید هر دو نتیجه‌ی بالا برقرار باشد، یعنی $\delta \le ۰/۰۰۳$، بنابراین گزینه‌ی (۴) نمی‌تواند مقدار δ باشد.

در تعریف حد، با نزدیک شدن x به عددی مانند a، مقدار $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می‌شد، این نزدیک شدن باید از هر دو سمت a (یعنی در همسایگی چپ و راست a) صورت بگیرد.

اما به همین ترتیب با در نظر گرفتن یک همسایگی می‌توانیم حدهای یک‌طرفه را تعریف کنیم:

تعریف: حد چپ و حد راست.

۱- تابع f در $x = a$ حد راستی برابر L دارد (می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن‌که x از سمت مقادیر بزرگ‌تر از a، به a به اندازه‌ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta > ۰ \ \ni ۰ < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

۲- تابع f در $x = a$ حد چپی برابر L دارد (می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$)، اگر این جمله درست باشد: مقدار $f(x)$ را به L بتوانیم هر قدر که می‌خواهیم نزدیک کنیم، به شرط آن‌که x از سمت مقادیر کوچک‌تر از a، به a به‌اندازه‌ی کافی نزدیک شود. به بیان دیگر:

$$\forall \varepsilon > ۰ \ \exists \delta > ۰ \ \ni -\delta < x - a < ۰ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

➢ **تذکّر (۱):** همان‌طوری که مشاهده می‌کنید شرط $\circ < |x-a| < \delta$، در همسایگی راست a (برای $x > a$) تبدیل بـه $\circ < x-a < \delta$ و در همسایگی چپ a (برای $x < a$)، تبدیل به $-\delta < x-a < \circ$ می‌شود.

➢ **تذکّر (۲):** اگر حدهای چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و برابر باشند، آن‌گاه تابع f در $x=a$ حد دارد. به بیان دیگر:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

اگر هر دو حد موجود باشند، ولی برابر نباشند، آن‌گاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.

➢ **تذکّر (۳):** شرط وجود داشتن هر یک از حدها این است که مقدار L عددی حقیقی شود. به بیان دیگر وقتی $L=\pm\infty$، تابع حد ندارد.

یک قرارداد مهم: **اگر تابع f <u>فقط</u> در یک همسایگی یک‌طرفه (همسایگی راست یا همسایگی چپ) $x=a$ تعریف شده باشد، طبق قرارداد کتاب درسی، منظور از $\lim_{x\to a} f(x)$ همان حد راست یا چپ تابع در نقطه‌ی a است.**

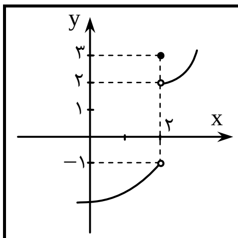
مثال:

۱- تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ در همسایگی راست $x=۱$ تعریف شده، ولی در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف نشده است. داریـم $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\circ$، ولی $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ وجود ندارد. طبق قرارداد بالا منظور از $\lim_{x\to ۱} f(x)$ همان $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ است، پس $\lim_{x\to ۱} f(x)=\circ$، بنابراین با آن‌که تابع f در $x=۱$ حد چپ ندارد، ولی در این نقطه حد دارد.

۲- تابع $f(x)=\sin^{-۱} x$ در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده، ولـی در همـسایگی راست آن تعریـف نـشده اسـت ($D_f=[-۱,۱]$). داریـم $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{\pi}{۲}$، ولی $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ وجود ندارد. طبق قرارداد بالا می‌توانیم بنویسیم: $\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{\pi}{۲}$

۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin^{-۱} x & -۱\le x\le ۱\\ \circ & x>۱\end{cases}$، هم در همسایگی راست $x=۱$ تعریف شده است، هـم در همـسایگی چـپ آن. پـس نمـی‌تـوانیم از قرارداد بالا استفاده کنیم، بنابراین منظور از $\lim_{x\to ۱} f(x)$ هیچ‌کدام از دو حد $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\circ$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{\pi}{۲}$ نیست. در این مثال حد چـپ و راست برابر نیستند، پس تابع در $x=۱$ حد ندارد.

تست (۳): **شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x\to ۲^-} f(x)+\lim_{x\to ۲^+} f(x)+f(۲)$ کدام است؟**



۱) -۲

۲) صفر

۳) ۲

۴) ۴

حل: با توجه به شکل واضح است که $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲$ (زیرا به نقطه‌ی توخـالی $(۲,۲)$ نزدیـک مـی‌شـویم)، $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=-۱$ و $f(۲)=۳$.
بنابراین پاسخ تست $۲-۱+۳=۴$ یا گزینه‌ی (۴) می‌شود.

تست (۴): **برای اثبات $\lim_{x\to ۱^-}(x^۲+۲|x-۲|)=۳$ کدام گزینه مناسب است؟**

۱) $\forall\varepsilon>\circ:\ \circ<|x-۱|<\varepsilon^۲ \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

۲) $\forall\varepsilon>\circ:\ -\sqrt{\varepsilon}<x-۱<\circ \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

۳) $\forall\varepsilon>\circ:\ -\varepsilon^۲<x-۱<\circ \Rightarrow |f(x)-۳|<\varepsilon$

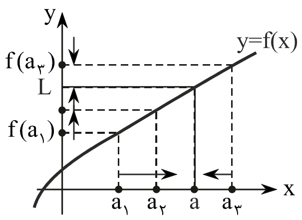
۴) $\forall\varepsilon>\circ:\ -\varepsilon<x-۱<\circ \Rightarrow |f(x)-۳|<۲\varepsilon$

حـل: در همـسایگی چـپ $x=۱$ (و بـه‌طـور کـل در همـسایگی کوچـک $x=۱$) علامـت عبـارت $x-۲$ منفـی اسـت، بنـابراین داریـم: $f(x)=x^۲+۲(۲-x)=x^۲-۲x+۴$. حال چون $L=۳$، باید شرط $|f(x)-۳|<\varepsilon$ را بررسی کنیم:

$$|f(x)-۳|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^۲-۲x+۴-۳|<\varepsilon \Leftrightarrow |(x-۱)^۲|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-۱|<\sqrt{\varepsilon}$$

چون $x\to ۱^-$، نامساوی بالا به $-\sqrt{\varepsilon}<x-۱<\circ$ تبدیل می‌شود و طبق تعریف حد چپ، گزینه‌ی (۲) پاسخ تست خواهد بود.

رابطه‌ی حد و دنباله‌ها:



فرض کنید تابع $y=f(x)$ در $x=a$ حدی برابر L داشته باشد. دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ تشکیل می‌دهیم که به عدد a همگرا باشد. می‌توانیم نقاط متناظر این دنباله را مطابق شکل روی محور x ها مشخص کنیم. با درنظر گرفتن مقادیر تابع به‌ازای $x=a_n$، دنباله‌ی دیگری به‌دست می‌آید که همان $\{f(a_n)\}$ است. می‌توانیم نقاط متناظر این دنباله‌ی جدید را مطابق شکل روی محور y ها نشان دهیم. می‌بینید که با نزدیک شدن جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ به a، جملات دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L نزدیک می‌شوند. پس دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد L همگرا است.

قضیه: **اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ و $a_n\neq a$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگرا است.**[1]

مثال: داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} x+۱=۲$، و می‌دانیم دنباله‌ی $\{\frac{n+۱}{n+۲}\}$ به عدد ۱ همگرا است. پس دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ یعنی $\{\frac{n+۱}{n+۲}+۱\}$ به عدد L (یعنی ۲) باید همگرا باشد. درستی این نتیجه را خودتان بررسی کنید.

نتیجه: **اگر دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا به عدد a باشند، $a_n\neq a$ و $b_n\neq b$، ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به یک عدد مساوی همگرا نباشند، تابع f در نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد.**

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}۰ & x\leq ۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ حد ندارد (چرا؟). برای اثبات این حکم می‌توانیم از دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b_n=\frac{-۱}{n}$ کمک بگیریم. می‌دانیم هر دو دنباله به صفر همگرایند، ولی $f(a_n)=۱$ (زیرا $a_n>۰$) و $f(b_n)=۰$ (زیرا $b_n<۰$). پس دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به دو عدد مختلف همگرا هستند، لذا تابع f در $x=۰$ حد ندارد.

تست (۵): **کدام دنباله‌های زیر نشان می‌دهند که $\lim\limits_{x\to ۰} \tan\frac{۱}{x}$ وجود ندارد؟**

۱) $\{\frac{۱}{n\pi}\}$ و $\{\frac{۱}{۲n\pi}\}$
۲) $\{\frac{۱}{۲n\pi}\}$ و $\{\frac{۱}{۳n\pi}\}$
۳) $\{\frac{۱}{n\pi-\frac{\pi}{۴}}\}$ و $\{\frac{۱}{n\pi+\frac{\pi}{۴}}\}$
۴) $\{\frac{۱}{۲n\pi-\frac{\pi}{۳}}\}$ و $\{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{۲\pi}{۳}}\}$

حل: در همه‌ی گزینه‌ها حد دنباله‌ها برابر صفر است. پس باید بررسی کنیم که در کدام گزینه مقادیر تابع به ازای دو دنباله به عددهای مختلفی همگرا می‌شود. مثلاً در گزینه‌ی (۱) اگر $a_n=\frac{۱}{n\pi}$ و $b_n=\frac{۱}{۲n\pi}$، آن‌گاه داریم: $f(a_n)=۰$ و $f(b_n)=۰$ (که $f(x)=\tan\frac{۱}{x}$). پس حد دو دنباله عددهای مختلفی نمی‌شود و این گزینه برای نشان دادن حد نداشتن تابع f مناسب نیست. به‌همین ترتیب می‌توانید گزینه‌های دیگر را رد کنید. پاسخ تست گزینه‌ی (۳) است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\dfrac{۱}{n\pi-\frac{\pi}{۴}}\Rightarrow f(a_n)=\tan(n\pi-\frac{\pi}{۴})=-۱\\[2ex] b_n=\dfrac{۱}{n\pi+\frac{\pi}{۴}}\Rightarrow f(b_n)=\tan(n\pi+\frac{\pi}{۴})=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=۰\end{cases}\Rightarrow \text{f در } x=۰ \text{ حد ندارد}$$

[1]: اگر برای تعداد متناهی از a_n ها داشته باشیم $a_n=a$، باز هم حکم این قضیه درست است.

تست (۶): برای آن‌که نشان دهیم تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in Q \\ ۰ & x\notin Q \end{cases}$ **در** $x=۲$ **حد ندارد، از دو دنباله‌ی** $\{۲+\frac{۱}{n}\}$ **و** $\{\frac{۲n+a}{n}\}$ **استفاده می‌کنیم. در این صورت** a **کدام عدد نمی‌تواند باشد؟**

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) ۷ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ٤) $\sqrt{۵}$

حل: باید دو دنباله با جمله‌های عمومی $a_n=۲+\frac{۱}{n}$ و $b_n=\frac{۲n+a}{n}$ دارای این شرط باشندکه اولاً $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=۲$ (که این شرط برقرار است)، ثانیاً $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

چون همواره a_n یک عدد گویا است، پس $f(a_n)=۱$، بنـابراین بـرای آن‌کـه $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\neq ۱$، بایـد دنبالـه‌ی $\{b_n\}$ از اعـداد گنـگ باشـد. گزینه‌های (۱)، (۳) و (۴) چنین شرطی را برآورده می‌کنند، بنابراین پاسخ تست گزینه‌ی (۲) است.

در رابطه‌ی حد و دنباله‌ها، عکس قضیه‌ی گفته شده نیز به‌صورت زیر قابل بیان است:

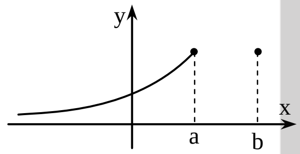
قضیه: **اگر برای هر دنباله‌ی** $\{a_n\}$ **که** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ **و** $a_n\neq a$**، داشته باشیم** $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$**، آن‌گاه** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

➢ **تذکّر:** به کلمه‌ی «هر» دقت کنید. با یک دنباله‌ی $\{a_n\}$ که در شرایط بالا صدق کند، نمی‌توان نشان داد که تابع f در $x=a$ دارای حد است!

روش‌های مختلف تشخیص نقاطی که تابع در آن‌ها حد ندارد:

با توجه به آن‌چه که تاکنون گفته‌ایم به‌صورت زیر می‌توانیم این روش‌ها را جمع‌بندی کنیم:

۱- اگر تابع f در یک همسایگی $x=a$ نامعین باشد (این همسایگی جزء دامنـه‌ی تـابع نباشـد)، تابع در این نقطه حد نخواهد داشت. زیرا اصلاً نمی‌توانیم x را به آن نقطه نزدیک کنیم.

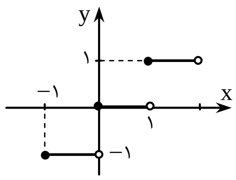


مثال:الف) در شکل مقابل، تابع در $x=b$ حد ندارد و در $x=a$ حد راست ندارد. تابع در هر دو همـسایگی $x=b$ و در همسایگی راست $x=a$ نامعین است. دقت کنید که طبـق قـرارداد، تـابع در $x=a$ حـد دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=a$ (همسایگی چپ) تعریف شده، بنابراین منظور از $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ همان $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{(۱-x)(x-۲)}$ برابر $[۱,۲]$ است، پس همسایگی چپ $x=۱$ در دامنه‌ی تـابع نیـست و $\lim\limits_{x\to ۱^-} y$ وجـود نـدارد (البتـه $\lim\limits_{x\to ۱^+} y=۰$). چون تابع فقط در یک همسایگی $x=۱$ تعریف شده، داریم: $\lim\limits_{x\to ۱} y=\lim\limits_{x\to ۱^+} y=۰$، پس تابع در $x=۱$ حد دارد.

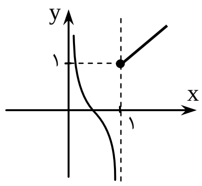
پ) تابع $y=\frac{۱}{\tan\frac{۱}{x}}$ در $x=۰$ حد ندارد، زیرا در هر همسایگی $x=۰$ که در نظر بگیریم نقاطی هست که در آن‌ها y نامعین است. در واقـع تـابع در نقاط $x=\frac{۱}{n\pi}$ (که $n\in Z-\{۰\}$) نامعین است (چرا؟)، و در هر همسایگی $x=۰$، هر چقدر هم که کوچک باشد، از این نقاط یافت می‌شود.

۲- اگر تابع در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع در این نقطـه موجـود نباشـند، یـا موجـود و نابرابر باشند، تابع در $x=a$ حد ندارد.



مثال: الف) تابع $y=[x]$ در $x=۰$ حد ندارد، زیرا مطابق نمودار تابع داریـم: $\lim\limits_{x\to ۰^+} y=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} y=-۱$.

(در واقع این تابع در هیچ نقطه‌ی $x=n$ (که $n\in Z$) حد ندارد.)



ب) تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۱ \\ \cot(\pi x) & x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد، زیرا بـا آن‌کـه $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$، ولـی $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ وجود ندارد (در واقع $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-\infty$). نمودار تابع را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ مشاهده می‌کنید.

۳- اگر برای دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$، $a_n\neq a$ و $b_n\neq b$، دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ بـه دو عدد مختلف همگرا باشند، تابع f در $x=a$ حد ندارد.

مثال: تابع $y=\sin\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ حد ندارد، زیرا برای دنباله‌هایی با جمله‌ی عمومی $a_n=\frac{1}{2n}$ و $b_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ داریم:

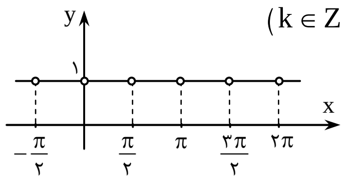
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$، ولی $f(a_n)=0$ و $f(b_n)=1$، پس $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به عددهای متفاوتی همگرا هستند.

تست (۷): چند تا از حدهای زیر وجود دارد؟

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\times\cot x$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\sin^{-1}(x-1)$ پ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: داریم: $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\times\cot x=1$. تابع $y=\tan x\times\cot x$ در نقاط $x=k\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است ($k\in Z$)



و در نقاط دیگر داریم: $y=1$. پس نمودار آن مانند شکل روبه‌رو می‌شود. بنابراین در همه‌ی نقاط $x\in R$ حد تابع برابر ۱ است، حتی نقاطی که جزء دامنه‌ی تابع نیستند.

در تابع $y=\sin^{-1}(x-1)$ همسایگی چپ $x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست، زیرا:

دامنه‌ی تابع: $|x-1|\le 1\Rightarrow -1\le x-1\le 1\Rightarrow 0\le x\le 2$

پس حد $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin^{-1}(x-1)$ وجود ندارد، ولی حد راست تابع وجود دارد و برابر $-\frac{\pi}{2}$ است. بنابراین تابع در $x=0$ حدی برابر $-\frac{\pi}{2}$ دارد، زیرا فقط در یک همسایگی $x=0$ تعریف شده است.

حد چپ تابع $\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ در $x=0$ موجود نیست، زیرا همسایگی چپ $x=0$ در دامنه‌ی تابع نیست:

$$\left.\begin{array}{l}1-x\ge 0\Rightarrow x\le 1\\ 1-\sqrt{1-x}\ge 0\Rightarrow\sqrt{1-x}\le 1\Rightarrow 1-x\le 1\Rightarrow x\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{دامنه‌ی تابع}=[0,1]$$

پس حدهای الف و ب وجود دارند. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

قضایای حد:

در بحث حد قضایایی وجود دارد که محاسبه‌ی حدود تابع را ساده می‌کند. اثبات این قضایا را می‌توانید در کتاب‌های مرجع مشاهده کنید. در این‌جا ما فهرست‌وار آن‌ها را ذکر می‌کنیم و درباره‌ی قضیه‌های مهم‌تر مثال‌هایی را حل می‌کنیم.

قضیه:

۱- اگر f تابع ثابت با دامنه‌ی R باشد (برای هر $x\in R$ داشته باشیم: $f(x)=c$)، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ (برای هر $a\in R$).

۲- اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$، آن‌گاه:[1] ($c\in R$ یک عدد ثابت است و $n\in N$)

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cL_1$ ب) $\lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=L_1\pm L_2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=L_1L_2$ ت) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{L_1}{L_2}$ **(به شرط $L_2\neq 0$)**

ث) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x)=L_1^n$ ج) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L_1}$ **(اگر n زوج باشد، برای $L_1>0$ این تساوی برقرار است.)**

چ) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L_1|$

نتیجه: با استفاده از قضیه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که یک چند جمله‌ای مانند $P(x)$ در همه‌ی نقاط $a\in R$ حد دارد و مقدار حد آن، همان $P(a)$ می‌شود. یعنی: $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$.

➢ **تذکر:** توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ نیز مانند چند جمله‌ای‌ها هستند، یعنی: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$، هم‌چنین توابع $y=\tan x$ (برای $a\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$) و $y=\cot x$ (برای $a\neq k\pi$).

[1] – در این قضیه توابع f و g باید در همسایگی یکسانی از $x=a$ تعریف شده باشند.

نکته: در قضیه‌ی قبل دیدیم که اگر f و g در $x=a$ حد داشته باشند، توابع $f \pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ (به شرط غیر صفر بودن حد g) نیز در $x=a$ حد خواهند داشت. عکس این قضیه، درست نیست. در واقع:

الف) اگر f در $x=a$ حد داشته باشد و g حد نداشته باشد، آن‌گاه قطعاً $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد نخواهند داشت، ولی fg و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند.

ب) اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، هر یک از توابع $f \pm g$، fg، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشند یا نداشته باشند.

سعی کنید در هر قسمت مثال مناسبی برای توابع f و g ارائه دهید. برای نمونه ثابت می‌کنیم که در حالت (الف)، $\frac{g}{f}$ قطعاً حد ندارد. زیرا اگر $h=\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد داشته باشد، هم h و هم f در این نقطه حد دارند، پس hf نیز حد دارد، ولی $g=hf$، بنابراین تابع g باید در $x=a$ حد داشته باشد که مخالف فرض است.

تست (۸): اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۱$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=L$، آن‌گاه طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{۲L-۱}{L+۱}\xrightarrow{\text{فرض}}\frac{۲L-۱}{L+۱}=۱ \Rightarrow ۲L-۱=L+۱ \Rightarrow L=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تست (۹): اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(|x|-a)^۲-۳ & x<۰\\ x+۲a & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد داشته باشد، مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{-۱,۳\}$ ۳) $\{۱,-۳\}$ ۴) $\varnothing$

حل: برای حد داشتن باید حد چپ و راست تابع باهم برابر باشند:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}(x+۲a)=\lim_{x\to ۰^-}(|x|-a)^۲-۳ \Rightarrow ۲a=a^۲-۳$$

$$\Rightarrow a^۲-۲a-۳=۰ \Rightarrow (a-۳)(a+۱)=۰ \Rightarrow a_۱=۳\ ,\ a_۲=-۱$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

قضیه: قضیه‌ی فشردگی: اگر در یک همسایگی محذوف $x=a$ بدانیم: $f(x)\le h(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$.

مسأله‌ی (۴): اگر برای تابع f بدانیم: $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=۰$، ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$.

حل: می‌دانیم برای هر عدد حقیقی α داریم: $-|\alpha|\le\alpha\le|\alpha|$، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\\ \lim\limits_{x\to a}-|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{فشردگی}}\lim_{x\to a} f(x)=۰$$

تست (۱۰): اگر $\forall x \in R-\{1\}: 2x-x^2-2<f(x)<\cos(\pi x)$، آن‌گاه $\lim_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟

۱) موجود نیست. **۲)** ۱ **۳)** صفر **۴)** ۱−

حل: می‌دانیم $\lim_{x\to 1} 2x-x^2-2=\lim_{x\to 1}\cos(\pi x)=-1$، پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim_{x\to 1} f(x)=-1$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

قضیه: قضیه‌ی توابع کران‌دار: اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ کران‌دار باشد و $\lim_{x\to a} g(x)=0$، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} g(x)f(x)=0$$

به بیان دیگر: صفر حدی = کران‌دار × صفر حدی.

➢ **تذکّر:** دقت کنید که در این قضیه لازم نیست تابع f در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد.

این قضیه را می‌توانید با استفاده از قضیه‌ی فشردگی اثبات کنید. برای تمرین آن را اثبات کنید. (راهنمایی: فرض کنید $|f(x)|\le k$، سپس با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نشان بدهید: $\lim_{x\to a}|f(x)g(x)|=0$ و در نهایت از مسأله‌ی (۴) استفاده کنید.)

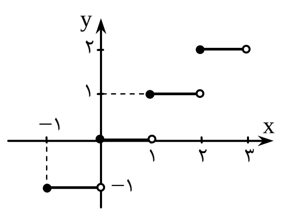
مثال: تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ حد ندارد، ولی در همسایگی آن کران‌دار است $(-1\le f(x)\le 1)$. بنابراین از $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x-1}=0$ نتیجه می‌گیریم: $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x-1}\sin\frac{\pi}{x}=0$. از دیگر توابع کران‌دار معروف می‌توان به $y=\cos x$، $y=\sin^{-1}x$، $y=\cos^{-1}x$، $y=\tan^{-1}x$ و $y=\cot^{-1}x$ اشاره کرد.

تست (۱۱): فرض کنید $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x\ge 2\\ 4-2x & x<2\end{cases}$. **در این صورت $\lim_{x\to 2} f(x)D(x)$ کدام است؟**

۱) ۲ **۲)** ۲− **۳)** صفر **۴)** وجود ندارد.

حل: با توجه به ضابطه‌ی تابع f داریم $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$، پس $\lim_{x\to 2} f(x)=0$. حال چون همواره $0\le D(x)\le 1$، پس $D(x)$ تابعی کران‌دار است و طبق قضیه‌ی قبل حاصل $\lim_{x\to 2} f(x)D(x)$ برابر صفر می‌شود. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

حد در توابع شامل جزء صحیح:



تابع جزء صحیح و مسائل حدی مربوط به آن بخش مهمی از تست‌های این مبحث را تشکیل می‌دهد. به‌این دلیل جداگانه آن را بررسی می‌کنیم.

طبق نمودار تابع $f(x)=[x]$ که در شکل روبه‌رو رسم شده است، در تمام نقاط $x=n$ (که $n\in Z$) تابع حد ندارد. در نقاط دیگر تابع حد دارد و مقدار حد با مقدار تابع یکسان است.

در نقاط $x=n$ به‌صورت دقیق‌تر طبق نمودار می‌توانیم بگوییم: $\lim_{x\to n^+} f(x)=n$ و $\lim_{x\to n^-} f(x)=n-1$. بیان بالا اساس پیدا کردن حد در توابع شامل جزء صحیح است.

نکته: در محاسبه‌ی حد در توابع شامل جزء صحیح، در صورت امکان جزء صحیح‌ها را حذف کنید و به جای آن‌ها اعداد ثابت قرار دهید. برای این منظور دقت کنید که:

۱- اگر $f(x)\to L$ و L عددی غیر صحیح باشد، آن‌گاه: $[f(x)]=[L]$

۲- اگر $f(x)\to L^+$ (به معنی $f(x)\to L$ و $f(x)>L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)]=L$

۳- اگر $f(x)\to L^-$ (به معنی $f(x)\to L$ و $f(x)<L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)]=L-1$

دقت کنید که در موارد (۲) و (۳) از نامساوی‌ها یا تعیین علامت عبارت $f(x)-L$ یا از نمودار تابع $f(x)$ می‌توانید کمک بگیرید.

با چند تست با مفهوم نکته‌ی بالا بیش‌تر آشنا شوید:

تست (۱۲): اگر $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$ **، حد چپ تابع در** $x=۳$ **کدام است؟**

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ٤) ۴

حل: چون $۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\notin Z$ ، از بخش (۱) نکته‌ی قبل استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=[۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]\xrightarrow{۰<\frac{\sqrt{۳}}{۲}<۱}[۳+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۳}[x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]=۳\Rightarrow \lim_{x\to ۳}f(x)=۳+۳=۶$$

بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست (۱۳): با فرض $a=-\frac{۱}{۵}$ **، حاصل** $\lim_{x\to a^-}[\frac{۱}{x}]$ **کدام است؟**

۱) -۵ ۲) -۴ ۳) -۶ ٤) -۳

حل: چون عبارت داخل جزء صحیح، عدد صحیح -۵ می‌شود، باید تعیین کنیم که $\frac{۱}{x}\to(-۵)^+$ یا $\frac{۱}{x}\to(-۵)^-$. در حالت اول چون می‌توانیم $\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(-۵,-۴)$ قرار دهیم، حاصل حد $[\frac{۱}{x}]$، برابر -۵ می‌شود و در حالت دوم چون می‌توانیم $\frac{۱}{x}$ را در $(-۶,-۵)$ قرار دهیم، حاصل حد $[\frac{۱}{x}]$ برابر -۶ می‌شود. داریم:

$$x\to(-\frac{۱}{۵})^-\Rightarrow x<-\frac{۱}{۵}\Rightarrow \frac{۱}{x}>-۵\Rightarrow \frac{۱}{x}\to(-۵)^+\Rightarrow \lim_{x\to a^-}[\frac{۱}{x}]=[(-۵)^+]=-۵$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

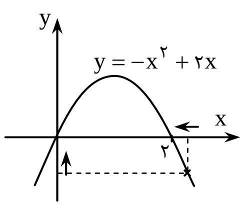
تست (۱۴): اختلاف حدهای راست و چپ تابع $f(x)=[-x^۲+۲x]-[\frac{-۲x-۵}{۳}]$ **در** $x=۲$ **کدام است؟**

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) -۱ ٤) ۲

حل: ابتدا حدهای چپ و راست $[\frac{-۲x-۵}{۳}]$ را پیدا می‌کنیم:

$$x\to ۲^+\Rightarrow x>۲\Rightarrow -۲x<-۴\Rightarrow -۲x-۵<-۹\Rightarrow \frac{-۲x-۵}{۳}<-۳\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}[\frac{-۲x-۵}{۳}]=[(-۳)^-]=-۴$$

$$x\to ۲^-\Rightarrow x<۲\Rightarrow -۲x>-۴\Rightarrow -۲x-۵>-۹\Rightarrow \frac{-۲x-۵}{۳}>-۳\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-}[\frac{-۲x-۵}{۳}]=[(-۳)^+]=-۳$$



حال حدهای چپ و راست $[-x^۲+۲x]$ را با توجه به نمودار تابع $y=-x^۲+۲x$ پیدا می‌کنیم:

با توجه به نمودار، وقتی $x\to ۲^+$ ، مقدار y به صفر از سمت مقادیر کوچک‌تر از آن نزدیک می‌شود، یعنی $y\to ۰^-$.

بنابراین: $\lim_{x\to ۲^+}[-x^۲+۲x]=[۰^-]=-۱$.

به‌همین ترتیب داریم: $\lim_{x\to ۲^-}[-x^۲+۲x]=[۰^+]=۰$. با ترکیب نتایج بالا به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=-۱-(-۴)=۳\ ,\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)=۰-(-۳)=۳\Rightarrow \text{اختلاف دو حد}=۰$$

بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

مسألهی (۵): حاصل $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}]$ ، $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$ **و** $\lim\limits_{x\to 0} x^2[\frac{1}{x}]$ **را بیابید.**

حل: حد $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}]$ وجود ندارد. کافی است دنبالهای با جملهی عمومی $a_n=\frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. داریـم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ ، و چـون $f(a_n)=n$ (که $f(x)=[\frac{1}{x}]$)، نتیجه میگیریم دنبالهی $\{f(a_n)\}$ یک دنبالهی واگرا است. پس حد مورد نظر وجود ندارد.

با استفاده از قضیهی فشردگی میتوانیم نشان بدهیم: $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$. میدانیم برای هر $\alpha\in R$ داریم: $\alpha-1<[\alpha]\le\alpha$ ، بنـابراین بـه ازای $x>0$ داریم:

$$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}\xrightarrow{x>0}x(\frac{1}{x}-1)<x[\frac{1}{x}]\le 1\Rightarrow 1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$$

چون $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x=1=\lim\limits_{x\to 0^+} 1$ ، طبق قضیهی فشردگی نتیجه میگیریم: $\lim\limits_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}]=1$. بههمین ترتیـب بـرای $x<0$ مـیتوانیـد ثابـت کنید: $\lim\limits_{x\to 0^-} x[\frac{1}{x}]=1$ و نتیجه بگیرید: $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$.

برای بهدست آوردن حد آخر نیز دقت کنید که:

$$\lim\limits_{x\to 0} x^2[\frac{1}{x}]=\lim\limits_{x\to 0} x\times\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=0\times 1=0$$

بههمین ترتیب میتوانید نشان بدهید $\lim\limits_{x\to 0} x^n[\frac{1}{x}]=0$ (برای $n\in N$ ، $n\ge 2$).

تست (۱۵): حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}[x[\frac{1}{x}]]$ **کدام است؟**

۱) صفر **۲)** ۱ **۳)** ۱- **۴) وجود ندارد.**

حل: در راهحل مسألهی قبل دیدید که برای $x>0$ داریم: $1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$. پس وقتـی $x\to 0^+$ ، داریـم: $x[\frac{1}{x}]\to 1$ ، ولـی نمـیتـوانیم بگوییم $x[\frac{1}{x}]\to 1^-$ (حتی با آنکه $x[\frac{1}{x}]\le 1$). در واقع اگر دو دنبالـه بـا جملـهی عمـومی $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{1}{n+0/5}$ را در نظر بگیریـد، داریم: $f(a_n)=1$ ، ولی $f(b_n)<1$ (که $f(x)=x[\frac{1}{x}]$). پس $\lim\limits_{n\to\infty}[f(a_n)]=1$ ، ولی $\lim\limits_{n\to\infty}[f(b_n)]=[1^-]=0$.

بنابراین گزینهی (۴) درست است.

نکته: **(عامل صفر کننده در حد)**
فرض کنید تابع f در نقطهی $x=n$ (که $n\in Z$) دارای حد باشد. در این صورت تابع $y=f(x)[x]$ در نقطهی $x=n$ تنهـا در صورتی حد دارد که f در این نقطه در نقش عامل صفر کننده ظاهر شود. یعنی f در این نقطه حدی برابر صفر داشته باشد.

اثبات: اگر $\lim\limits_{x\to n} f(x)=L$ ، آنگاه داریم:

$$\lim\limits_{x\to n^+} y=\lim\limits_{x\to n^+} f(x)\times\lim\limits_{x\to n^+}[x]=L\times[n^+]=Ln$$
$$\lim\limits_{x\to n^-} y=\lim\limits_{x\to n^-} f(x)\times\lim\limits_{x\to n^-}[x]=L\times[n^-]=L(n-1)$$

دو حد فوق تنها در صورتی باهم برابرند که $L=0$.

مثال: تابع $y=(x-2)[x]$ در $x=2$ حدی برابر صفر دارد (زیرا $x-2$ در نقش عامل صفر کننده ظاهر میشود)، ولی در نقاط دیگر با طـول صحیح حد ندارد.

تست (۱۶): تابع $f(x)=(x^3-3x+2)[x]$ **در چند نقطهی** $a\in Z$ **دارای حد است؟**

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **۴) بیشمار**

حل: تابع در نقاطی با طول صحیح دارای حد است که x^3-3x+2 دارای حد صفر باشد. پس باید ریشههای آن را بهدست آوریم. واضح است که $x=1$ یکی از ریشهها است، با تقسیم عبارت بر $x-1$ میتوانیم آن را تجزیه کنیم:

$$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x-1)=(x-1)^2(x+2)$$

پس در دو نقطهی $x=1$ و $x=-2$ ، عبارت x^3-3x+2 در نقش عامل صفر کننده ظاهر میشود. بنابراین گزینهی ۲ درست است.

حد و پیوستگی توابع

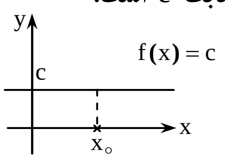
۴-۲: قضایای حد و محاسبه‌ی حد توابع

در بخش گذشته با مفهوم حد آشنا شدیم و دیدیم که چگونه حد یک تابع را می‌توان از روی نمودار آن یا نوشتن جدول مقادیر تعیین کرد. ولی در توابع پیچیده‌تر چگونه عمل می‌کنیم؟ آیا باز هم باید از جدول مقادیر تابع استفاده کنیم یا رسم نمودار آن؟

قضیه‌های حد ابزاری هستند که در محاسبه‌ی حد توابع پیچیده‌تر به ما کمک می‌کنند. تمام این قضایا را می‌توان به صورت دقیق با استفاده از تعریف ریاضی حد اثبات کرد، که البته در این‌جا از اثبات آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم.

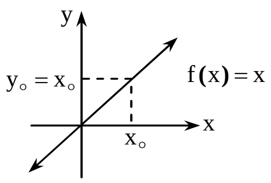
دو قضیه‌ی زیر قضیه‌هایی هستند که می‌توانید درستی آن‌ها را به راحتی با استفاده از رسم نمودار آن‌ها تحقیق کنید:

قضیه: **اگر $f(x)=c$ (c عددی ثابت و حقیقی است)، آن‌گاه حد تابع $f(x)$ در تمام نقاط برابر همان مقدار ثابت c است.**



با توجه به نمودار روبه‌رو واضح است که: $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=c$

قضیه: **برای تابع $f(x)=x$، حد تابع $f(x)$ در تمام نقاط برابر مقدار تابع است.**



از نمودار روبه‌رو واضح است که: $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=x_\circ$

قضیه‌ی بعد نشان می‌دهد که در محاسبه‌ی حدود توابع، می‌توانید از اعمال اصلی حساب روی آن‌ها استفاده کنید:

قضیه: **اگر برای دو تابع f و g داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲$، آن‌گاه:**

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_۱+L_۲$

ب) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=L_۱-L_۲$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=L_۱L_۲$

ت) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)})=\frac{L_۱}{L_۲}$ **(در این قسمت باید $L_۲\neq ۰$)**

مسأله‌ی (۱): اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-۳$ ، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x)=۸$ ، آن‌گاه حاصل هر یک از حدهای زیر را حساب کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ **ب)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{۲f(x)}{h(x)-g(x)}$ **پ)** $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{h(x)}+\frac{g(x)}{f(x)})$

حل: طبق قضیه‌ی قبل داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=-۳+۰=-۳$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\frac{۲f(x)}{h(x)-g(x)}=\frac{۲\times(-۳)}{۸-۰}=-\frac{۳}{۴}$

پ) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{h(x)}+\frac{g(x)}{f(x)})=\frac{-۳}{۸}+\frac{۰}{-۳}=-\frac{۳}{۸}$

تست (۱): اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۱$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)$ کدام است؟

۱) -۳ **۲)** -۲ **۳)** ۲ **٤)** ۳

حل: فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=L$، آن‌گاه طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{۲L-۱}{L+۱}\Rightarrow\frac{۲L-۱}{L+۱}=۱\Rightarrow ۲L-۱=L+۱\Rightarrow L=۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

با استفاده از قضیه‌ی قبل می‌توان نتایج دیگری نیز گرفت:

نتیجه‌ی (۱): اگر $g(x)=c$ را یک تابع ثابت فرض کنید، طبق خاصیت قسمت (پ) داریم:

$$\lim_{x\to a}cf(x)=cL$$

یعنی می‌توانیم حد یک تابع را در یک عدد ثابت ضرب کنیم.

نتیجه‌ی (۲): اگر $f(x)=g(x)$ باشد، باز از خاصیت قسمت (پ) به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^۲=L^۲$$

با استقراء روی n می‌توانید نتیجه‌ی زیر را ثابت کنید:

$$\lim_{x\to a}f^n(x)=L^n$$

نتیجه‌ی (۳): مشابه نتیجه‌ی (۲) برای توان‌های کسری (یا در حقیقت فرجه‌ی n تابع) هم برقرار است. یعنی

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

البته واضح است که در این قسمت اگر n عددی زوج باشد، باید شرط $L\geq ۰$ نیز برقرار باشد. این نتیجه را می‌توانید با استفاده از نتیجه‌ی (۲) اثبات کنید. (راهنمایی: اگر $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$، آن‌گاه می‌دانیم $g^n(x)=f(x)$. همچنین می‌دانیم نتیجه‌ی (۲) برای تابع g برقرار است).

نتیجه‌ی (۴): اگر در نتیجه‌ی (۲) قرار دهیم $f(x)=x$، با توجه به این‌که $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$ نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

با توجه به این نتیجه و این‌که هر چندجمله‌ای مانند $P(x)$ از مجموع جملاتی چون a_nx^n تشکیل شده، داریم:

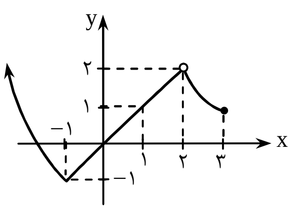
$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$$

یعنی برای محاسبه‌ی حد یک چندجمله‌ای، وقتی $x\to a$، کافی است به جای x در عبارت چندجمله‌ای مقدار a را قرار دهیم.

نتیجه‌ی (۵): با توجه به قضیه‌ی تقسیم حدها و نتیجه‌ی قبل، برای توابع گویا مانند $h(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ داریم:

$$\lim_{x\to a}h(x)=\frac{P(a)}{Q(a)}=h(a)\quad,\quad Q(a)\neq ۰$$

مسأله‌ی (۲): با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲}x^۳f(x)$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۳+f(x)}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)}{f(x)}$

حل: الف) با توجه به شکل $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۲$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲}x^۳f(x)=\lim_{x\to ۲}x^۳\times\lim_{x\to ۲}f(x)=۸\times ۲=۱۶$$

ب) داریم: $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۳+f(x)}=\sqrt{۳+\lim\limits_{x\to ۱}f(x)}=\sqrt{۳+۱}=۲$

پ) با توجه به این که $f(۰)=۰$، پس از قضایای حد نمی‌توانیم استفاده کنیم. ولی دقت کنید که مقدار تابع $h(x)=\frac{f(x)}{f(x)}$ در همسایگی محذوف صفر برابر ۱ است و تنها در نقطه‌ی صفر تعریف نشده است. واضح است که برای چنین تابعی داریم: $\lim\limits_{x\to ۰}h(x)=۱$

تست (۲): در تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax & x\geq ۲ \\ -x+۳ & x<۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)$ برابر f(۱) است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ٤) $\frac{۳}{۲}$

حل: هر دو ضابطه چندجمله‌ای هستند. پس طبق نتیجه‌ی (۴) داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}(x^{۲}+ax)=۲^{۲}+a\times ۲=۴+۲a \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}(-x+۳)=-۲+۳=۱\end{array}\right\}\xrightarrow[f(۱)=۲]{\text{فرض سؤال}} ۴+۲a+۱=۲\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۳): وضعیت حد تابع $f(x)=\frac{x\,\mathrm{sgn}(۱+x)}{۲+x}$ در نقطه‌ی $x=-۱$ کدام است؟

۱) حد دارد. ۲) فقط حد راست دارد. ۳) فقط حد چپ دارد. ٤) حد چپ و راست نابرابر دارد.

حل: حدهای چپ و راست را جداگانه می‌یابیم:

$$x\to(-۱)^{+}\Rightarrow x>-۱\Rightarrow x+۱>۰\Rightarrow \mathrm{sgn}(x+۱)=۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}\frac{x}{۲+x}=-۱$$

$$x\to(-۱)^{-}\Rightarrow x<-۱\Rightarrow x+۱<۰\Rightarrow \mathrm{sgn}(x+۱)=-۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}\frac{-x}{۲+x}=۱$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

مسأله‌ی (۳): در هر قسمت مقدار حد خواسته‌شده را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x^{۳}-۴x^{۲}}$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x+|x|}$ **پ)** $\lim\limits_{x\to ۱}(\sqrt{x^{۲}-۱}+\sqrt{۴-x^{۲}})$

حل: الف) اگر بخواهید فوراً از قضایای حد استفاده کنید، نتیجه می‌گیرید: $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x^{۳}-۴x^{۲}}=\sqrt{۰^{۳}-۴\times ۰^{۲}}=۰$. آیا این نتیجه درست است؟

خیر! می‌دانیم برای آن که تابعی در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد، باید در یک همسایگی نقطه تعریف شده باشد که بتوان بـه آن نقطـه از هـر دو طرف نزدیک شد. در این‌جا می‌دانیم:

$$f_{۱}(x)=\sqrt{x^{۳}-۴x^{۲}}=\sqrt{x^{۲}(x-۴)}\Rightarrow D_{f_{۱}}=[۴,+\infty)\cup\{۰\}$$

همان‌طور که می‌بینید با آن که تابع $f_{۱}$ در نقطه‌ی صفر تعریف شده است، ولی در همسایگی صفر تعریف نشده است. پس $\lim\limits_{x\to ۰} f_{۱}(x)$ وجود ندارد.

ب) با توجه به تعریف قدرمطلق به‌دست می‌آوریم:

$$f_{۲}(x)=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}\sqrt{۲x} & x\geq ۰ \\ ۰ & x<۰\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f_{۲}(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\sqrt{۲x}=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^{-}} f_{۲}(x)=\lim\limits_{x\to ۰^{-}} ۰=۰\end{array}\right.\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f_{۲}(x)=۰$$

پ) ابتدا دامنه‌ی تابع را با تعیین علامت عبارت پیدا می‌کنیم:

$$f_{۳}(x)=\sqrt{x^{۲}-۱}+\sqrt{۴-x^{۲}}\Rightarrow x^{۲}-۱\geq ۰\ ,\ ۴-x^{۲}\geq ۰\Rightarrow D_{f_{۳}}=[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$$

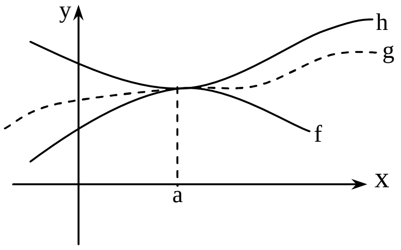
چون تابع در همسایگی راست $x=۱$ تعریف شده و در همسایگی چپ آن مقدار ندارد، پس $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f_{۳}(x)$ و در نتیجـه $\lim\limits_{x\to ۱} f_{۳}(x)$ وجـود نـدارد.

البته داریم: $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f_{۳}(x)=\sqrt{۱-۱}+\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$

نکته: **شرط اول وجود حد تابع در $x=a$، تعریف شده بودن تابع در یک همسایگی $x=a$ است. همواره در محاسبه‌ی حد یک تابع، مطمئن شوید که تابع در همسایگی نقطه‌ی موردنظر تعریف‌شده باشد. یکی از روش‌های این کار تعیین دامنه است.**

قضیه‌ی فشردگی

قضیه‌ی فشردگی (که به «قضیه‌ی ساندویچ» نیز معروف است!) قضیه‌ی مفید دیگری است که در محاسبه‌ی حد بسیاری از توابع قابل استفاده است. برای درک این قضیه، به شکل روبه‌رو نگاه کنید. در این شکل سه تابع f، g و h را در نظر گرفته‌ایم، طوری که نمودار g بین h و f باشد. (یعنی داشته باشیم: $f(x) \le g(x) \le h(x)$)



اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ (یعنی مانند شکل با نزدیک شدن به نقطه‌ی $x=a$، دو تابع f و h نیز مرتباً به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند)، خود به خود تابع g نیز که بین آن‌ها قرار دارد، فشرده می‌شود و حد آن برابر حد دو تابع f و h می‌گردد، پس:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

قضیه: **اگر برای سه تابع f، g و h که در همسایگی محذوف $x=a$ تعریف شده‌اند، داشته باشیم $f(x) \le g(x) \le h(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.**

➢ **تذکّر (۱):** شرط $f(x) \le g(x) \le h(x)$ لازم نیست برای تمام $x \in R$ یا حتی تمام xهای دامنه‌ی توابع برقرار باشد، تنها کافی است در یک همسایگی محذوف $x=a$ برقرار باشد. زیرا مفهوم حد به رفتار تابع در اطراف نقطه‌ی a مربوط است، نه به رفتار تابع در همه‌ی نقاط.

➢ **تذکّر (۲):** در شرط قضیه‌ی فشردگی نامساوی‌ها می‌تواند اکید باشد، یعنی $f(x) < g(x) < h(x)$.

➢ **تذکّر (۳):** از این قضیه درباره‌ی حدود یک طرفه نیز می‌توانید استفاده کنید.

مسأله‌ی (۴): **تابع $f(x)$ روی R تعریف شده است و می‌دانیم برای هر $x \in [0,2]$ داریم: $3x \le f(x) \le x^3 + 2$. مقدار $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را بیابید.**

حل: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2) = 3$ و $\lim\limits_{x\to 1} 3x = 3$. پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

مسأله‌ی (۵): **ثابت کنید:** $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$

حل: برای محاسبه‌ی این حد نمی‌توان از قضیه‌های ابتدایی حد استفاده کرد، چون تابع $y=[\frac{1}{x}]$ در $x=0$ حد ندارد که بخواهیم از قضیه‌ی حاصل‌ضرب حد دو تابع استفاده کنیم. اما می‌توانیم از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم.

از خواص مربوط به تابع جزءصحیح می‌دانیم، برای هر $a \in R$: $a-1 < [a] \le a$. پس: $\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \le \frac{1}{x}$. حال داریم:

الف) $x \to 0^+ : x > 0 \Rightarrow x(\frac{1}{x} - 1) < x[\frac{1}{x}] \le x \times \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x[\frac{1}{x}] \le 1$

تابع $f(x)$ در همسایگی راست نقطه‌ی $x=0$ بین دو تابع $g(x)=1$ و $h(x)=1-x$ قرار دارد و می‌دانیم:

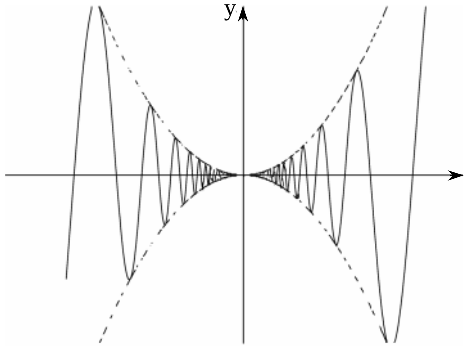
$$\left(\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = 1,\ \lim_{x\to 0^+} h_1(x) = 1\right) \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

ب) $x \to 0^- : x < 0 \Rightarrow x(\frac{1}{x} - 1) > x[\frac{1}{x}] \ge x \times \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x > x[\frac{1}{x}] \ge 1$

باز هم تابع $f(x)$ بین دو تابع g و h قرار دارد و با روشی مانند قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

با مقایسه‌ی نتایج قسمت (الف) و (ب) به‌دست می‌آوریم: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

مسأله‌ی (۶): ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) = 0$



حل: اگر $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{\pi}{x})$ وجود داشت، می‌توانستیم به راحتی با استفاده از قاعده‌ی ضرب حدها، حد مورد نظر را حساب کنیم. ولی همان‌طور که در بخش پیش دیده‌ایم، حد فوق وجود ندارد. اما با استفاده از قضیه‌ی فشردگی می‌توان حد تابع را به‌دست آورد. برای $x \neq 0$ می‌دانیم:

$$-1 \le \sin(\frac{\pi}{x}) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) \le x^2$$

پس اگر $f(x) = x^2$، $h(x) = -x^2$ و $g(x) = x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$، آن‌گاه در همسایگی محذوف $x = 0$ خواهیم داشت:

$$h(x) \le g(x) \le f(x) \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0} \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$$

در شکل نمودار تابع را می‌بینید که بین دو تابع $f(x) = x^2$ و $h(x) = -x^2$ قرار گرفته است.

نتیجه‌ای از قضیه‌ی فشردگی درباره‌ی توابع کران‌دار

مسأله‌ی (۶) را دوباره بررسی می‌کنیم. در این مسأله تابع $g(x) = x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ از ضرب دو تابع تشکیل شده است، یکی $f_1(x) = x^2$ که برای آن داریم $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ و دیگری $f_2(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$ که می‌دانیم در همسایگی نقطه‌ی $x = 0$ (و البته در کل R) کران‌دار است. منظور از کران‌دار بودن f_2 این است که مقدار تابع f_2 همواره در آن همسایگی بین دو عدد حقیقی ثابت قرار می‌گیرد (در این جا مثلاً $-1 \le \sin(\frac{\pi}{x}) \le +1$ یا معادل آن $|\sin(\frac{\pi}{x})| \le 1$).

در حالت کلی برای چنین توابعی نکته‌ی زیر را می‌توانیم بگوییم:

نکته: **اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی $x = a$ کران‌دار باشد، و حد تابع g در نقطه‌ی $x = a$ برابر صفر باشد، آن‌گاه داریم:**

$$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

به بیان دیگر: صفر = صفر × کران‌دار

تست (۴): **اگر $f(x)$ تابعی باشد که $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$، آن‌گاه مقدار حد تابع $y = (f(x)+1)\sin\frac{\pi}{x^2}$ وقتی $x \to 0$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

حل: چون $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+1) = -1+1 = 0$، تابع موردنظر از ضرب دو تابع تشکیل شده است که یکی در نقطه‌ی $x = 0$ حدی برابر صفر دارد و دیگری در همسایگی نقطه‌ی صفر کران‌دار است. طبق نکته‌ی قبل داریم: $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$.

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تست (۵): **f تابعی حقیقی است با دامنه‌ی R که در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. اگر برای هر $x \in R$ داشته باشیم: $|f(x)| \le 2$، آن‌گاه تابع $y = (x^2-1)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه دارای حد است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: چون تابع f در R کران‌دار است (زیرا همواره $-2 \le f(x) \le 2$)، پس طبق نکته‌ی قبل، در نقاطی که حد (x^2-1) برابر صفر می‌شود، حد $(x^2-1)f(x)$ نیز برابر صفر می‌شود، یعنی در ۲ نقطه‌ی $x = 1$ و $x = -1$.

در نقاط دیگر تابع $f(x)$ حد ندارد، و (x^2-1) نیز حدی غیر صفر دارد، پس حاصل‌ضرب آن دو حد ندارد.

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

➢ **تذکّر:** می‌توانید نتیجه‌ی اشاره‌شده در راه‌حل تست را به شیوه‌ی زیر اثبات کنید: از برهان خلف استفاده کنید. فرض کنید تابع $g(x)=(x^{2}-1)f(x)$ در نقطه‌ای غیر از نقاط $x=\pm 1$ حد داشته باشد، یعنی برای $a\neq \pm 1$ داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1$. چون $a^{2}-1\neq 0$، طبق قضیه‌ی تقسیم حد توابع داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x^{2}-1}=\frac{L_1}{a^{2}-1}=L_2 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=L_2$$

که با فرض حد نداشتن f در هیچ نقطه‌ای از R در تناقض است.

❍ **مسأله‌ی (۷): تابع $f(x)$ به گونه‌ای تعریف شده است که برای هر x متعلق به دامنه‌ی f داریم: $|f(x)-2|<\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}$. حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را بیابید.**

حل: اگر بلافاصله از قضیه‌ی فشردگی استفاده کنیم، به اشتباه حد موردنظر را برابر ۲ به‌دست می‌آوریم، زیرا به دامنه‌ی تابع توجهی نکرده‌ایم. با توجه به فرض و این‌که همواره $|f(x)-2|\geq 0$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}>0\Rightarrow 1-x^{2}>0\Rightarrow x^{2}<1\Rightarrow -1<x<1\Rightarrow D_f\subset(-1,1)$$

پس همسایگی راست نقطه‌ی $x=1$ در دامنه‌ی f قرار ندارد، بنابراین $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجود نیست.

➢ **تذکّر:** اگر بدانیم همسایگی چپ نقطه‌ی $x=1$ در دامنه‌ی f قرار دارد، حد چپ آن را می‌توانیم با استفاده از قضیه‌ی فشردگی به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-2|<\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}\Rightarrow \frac{x^{2}-1}{1+x^{2}}<f(x)-2<\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}} \\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{1+x^{2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^{-}}(f(x)-2)=0\Rightarrow \lim_{x\to 1^{-}} f(x)=2$$

قضیه‌های دیگر درباره‌ی وجود و عدم وجود حد

❍ **مسأله‌ی (۸): توابع $f(x)$ و $g(x)$ به گونه‌ای در همسایگی $x=a$ تعریف شده‌اند که f در $x=a$ حد دارد و g در $x=a$ حد ندارد. در هر حالت درباره‌ی وجود یا عدم وجود حد در تابع بحث کنید:**

الف) $h_1(x)=f(x)+g(x)$ **ب)** $h_2(x)=f(x)g(x)$ **پ)** $h_3(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

ت) $h_4(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ **ث)** $h_5(x)=fog(x)$ **ج)** $h_6(x)=gof(x)$

حل: الف) این تابع قطعاً حد ندارد. برای اثبات از برهان خلف استفاده کنید. فرض کنید: $\lim\limits_{x\to a} h_1(x)=L$. با توجه به فرض مثال: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L'$. پس طبق قضیه‌های حد: $\lim\limits_{x\to a} h_1(x)-f(x)=L-L'$، یعنی $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-L'$ که مخالف فرض حد نداشتن g است.

ب) تابع h_2 در $x=a$ می‌تواند حد داشته باشد، یا نداشته باشد.

مثلاً تابع $f(x)=1$ در $x=0$ حد دارد و $g(x)=[x]$ در $x=0$ حد ندارد، تابع $h_2(x)=[x]$ نیز در $x=0$ حد نخواهد داشت.

برای مثالی دیگر فرض کنید $f(x)=x$ که در $x=0$ حد دارد، و $g(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ که در $x=0$ حد ندارد. ولی داریم:

$$h_2(x)=f(x)g(x)=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}=|x|$$

که واضح است در نقطه‌ی $x=0$ حدی برابر صفر دارد.

پ) این حد هم می‌تواند وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد. از همان مثال‌های قسمت (ب) در این قسمت هم می‌توانید استفاده کنید.

ت) این تابع قطعاً حد ندارد. فرض کنید تابع h_4 در $x=a$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to a} h_4(x)=L$. با فرض $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L'$، طبق قضایای حد: $\lim\limits_{x\to a} h_4(x)f(x)=LL'$، یعنی: $\lim\limits_{x\to a} g(x)=LL'$، که مخالف فرض حد نداشتن g در $x=a$ است.

ث) این حد می‌تواند موجود باشد یا وجود نداشته باشد. برای مثال:

۱- اگر $f(x)=1$ و $g(x)=[x]$، آن‌گاه داریم $fog(x)=1$ که در همه‌ی نقاط حد دارد.

۲- اگر $f(x)=x$ و $g(x)=[x]$، آن‌گاه داریم $fog(x)=[x]$ که در $x=0$ حد ندارد.

ج) این حد هم شرایطی مانند قسمت (ث) دارد. برای مثال می‌توانیم از همان مثال‌های قسمت قبل استفاده کنید.

نکته: **اگر $f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد و $g(x)$ در $x=a$ حد نداشته باشد، آن‌گاه قطعاً توابع $f \pm g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد نخواهند داشت.**

پرسش: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} g(x)=a_1$ و $\lim\limits_{x\to a_1} f(x)=a_2$. آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{x\to a} fog(x)=a_2$ ؟

پاسخ: پاسخ سؤال منفی است! مثلاً توابع $g(x)=5$ و $f(x)=\begin{cases} x-3 & x\neq 5 \\ 4 & x=5 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=2$.

اما $\lim\limits_{x\to 3} fog(x)\neq 2$. در واقع داریم: $fog(x)=f(g(x))=f(5)=4$، یعنی fog نیز تابعی ثابت است، در نتیجه $\lim\limits_{x\to 3} fog(x)=4$.

در این پرسش مشاهده کردید که درباره‌ی ترکیب حد دو تابع نمی‌توان با قطعیت اظهارنظر کرد. البته در شرایطی خاص پاسخ این پرسش مثبت است، که این شرایط در قضیه‌ی زیر بیان شده است:

قضیه: **حد ترکیب توابع**

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} g(x)=a_1$ و $\lim\limits_{x\to a_1} g(x)=a_2$. در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a} fog(x)=a_2$، اگر و تنها اگر، حداقل یکی از شرط‌های زیر برقرار باشد:

۱- $f(a_1)=a_2$ (در آینده خواهید دید که در این حالت به f تابعی پیوسته می‌گویند.)

۲- لااقل یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x=a$ موجود باشد که $g(x)$ همواره در آن مقداری مخالف a_1 داشته باشد.

تذکر: این قضیه (به جز شرط اول آن) در عمل فایده‌ی زیادی ندارد! بهتر است به جای آن‌که هنگام حل مسائل به این فکر کنید که شرط دوم برقرار است یا خیر، fog را حساب کنید! ذکر آن در این‌جا تنها برای تکمیل بحث است.

مسأله‌ی (۹): $f(x)$ **تابعی فرد است و می‌دانیم** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=L_1$ **و** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=L_2$. **ثابت کنید:** $L_1+L_2=0$

حل: طبق فرض $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=L_1$. حال اگر قرار دهیم $x=-t$، وقتی $x\to 0^+$ داریم $t=-x\to 0^-$. پس:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{t\to 0^-} f(-t)\xrightarrow{\text{فرد}\ f}\lim_{t\to 0^-}(-f(t))=-\lim_{t\to 0^-} f(t)=-L_2 \Rightarrow L_1=-L_2 \Rightarrow L_1+L_2=0$$

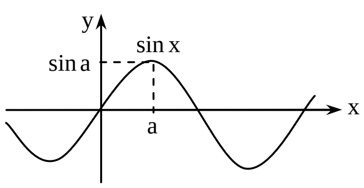
محاسبه‌ی حد در توابع مثلثاتی

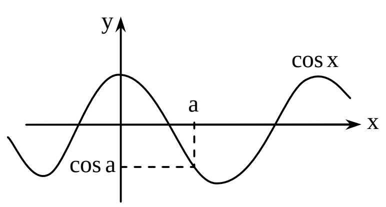
دیدیم که چگونه حد عبارت‌های شامل چندجمله‌ای‌ها، رادیکال‌ها و کسرها را می‌توان محاسبه کرد. درباره‌ی توابع مثلثاتی نیز با استفاده از تعریف ریاضی حد، می‌توان ثابت کرد که روابط زیر برقرار است:

۱) $\lim\limits_{x\to a} \sin x=\sin a$

۲) $\lim\limits_{x\to a} \cos x=\cos a$

یعنی برای محاسبه‌ی حد $\sin x$ و $\cos x$ در نقطه‌ی دلخواه a، مانند محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها کافی است مقدار تابع را در نقطه‌ی a حساب کنیم. به نمودار توابع دقت کنید و درکی از این دو رابطه پیدا کنید.





نتیجه: **درباره‌ی توابع مثلثاتی** $f(x)=\sin x$ ، $f(x)=\cos x$ ، $f(x)=\tan x$ **و** $f(x)=\cot x$ **داریم:** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ **. تنها باید به این دقت کنید که** a **در دامنه‌ی تابع باشد.**

دقت کنید که مثلاً برای $f(x)=\tan x$، طبق قضیه‌های حد داریم:

$$\lim_{x\to a}\tan x=\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a$$

مسأله‌ی (۱۰): حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin^۴ x-\cos^۴ x)$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{\sin x}$ **پ)** $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin(\frac{۱}{x})}{\sin(\frac{۱}{x})}$ **ت)** $\lim\limits_{x\to ۰}\sin(\frac{۱}{x})$

حل: الف) با استفاده از قضیه‌ها داریم:

$$\lim_{x\to\pi}(\sin^۴ x-\cos^۴ x)=\sin^۴\pi-\cos^۴\pi=۰-(-۱)^۴=-۱$$

ب) نمی‌توانیم مستقیماً از قضیه‌ها استفاده کنیم. برای $-\pi<x<۰$ داریم $\sin x<۰$، پس تابع در بازه‌ی $(-\pi,۰)$ تعریف نشده است. یعنی در همسایگی چپ $x=۰$ تعریف نشده است، در نتیجه حد تابع در نقطه‌ی صفر وجود ندارد.

پ) می‌دانیم برای اعدادی چون $x=\frac{۱}{n\pi}$ (که $n\in Z$) داریم: $\sin\frac{۱}{x}=۰$

پس تابع $f(x)$ برای مقادیری مانند $\frac{۱}{\pi},\frac{۱}{۲\pi},\frac{۱}{۳\pi},...,\frac{۱}{۲۰۰۰\pi},...$ تعریف نشده است. یعنی هر چقدر که به صفر نزدیک شویم، باز هم نقاطی وجود دارند که در آن‌ها f تعریف نشده است. پس نمی‌توانیم x را به صفر نزدیک کنیم و حد تابع f در نقطه‌ی صفر وجود ندارد.

ت) این‌بار $D_f=R-\{۰\}$ و مشکل قسمت (پ) را نداریم. ولی باز هم $\lim\limits_{x\to ۰}f(x)$ وجود ندارد! در واقع این تابع مرتباً میان ۱- و ۱+ در نزدیکی $x=۰$ نوسان می‌کند و مقدار $f(x)$ به عدد ثابتی نزدیک نمی‌شود. برای توضیح بیش‌تر به آخرین مسأله‌ی بخش قبل مراجعه کنید که تابعی شبیه این تابع را بررسی کرده‌ایم.

یادداشت: واضح است که این تابع در همه‌ی نقاط R غیر از نقطه‌ی صفر حد دارد و مقدار حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

مسأله‌ی (۱۱): حاصل هر یک از حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱۳۸۵}(\cos(\pi[x]))\sin\pi x$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۲۰۰۷}(۱-\cos\pi x)[x]^۲$

حل: الف) حدهای راست و چپ را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} x\to ۱۳۸۵^+ :[x]=۱۳۸۵\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱۳۸۵^+}f(x)=\cos(۱۳۸۵\pi)\sin(۱۳۸۵\pi)=-۱\times ۰=۰ \\ x\to ۱۳۸۵^- :[x]=۱۳۸۴\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱۳۸۵^-}f(x)=\cos(۱۳۸۴\pi)\sin(۱۳۸۵\pi)=۰\times ۱=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۱۳۸۵}f(x)=۰$$

با روشی مشابه می‌توانید ثابت کنید که برای هر $n\in Z$ داریم: $\lim\limits_{x\to n}f(x)=۰$

ب) حدهای راست و چپ را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲۰۰۷^+}f(x)=(۱-\cos(۲۰۰۷\pi))\times ۲۰۰۷^۲=(۱-(-۱))\times ۲۰۰۷^۲=۲\times ۲۰۰۷^۲$$

$$\lim_{x\to ۲۰۰۷^-}f(x)=(۱-\cos(۲۰۰۷\pi))(۲۰۰۶)^۲=(۱-(-۱))\times ۲۰۰۶^۲=۲\times ۲۰۰۶^۲$$

چون دو حد بالا با هم مساوی نیستند، حد اصلی نیز وجود ندارد. با روشی مشابه در حالت کلی می‌توانید ثابت کنید که برای $n=۲k$ ، $(k\in Z)$، تابع در نقطه‌ی $x=n$ حد دارد و برای $n=۲k+۱$ این حد وجود ندارد.

تست (۶): حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\sin x|+[x]}{4|x|+2[\frac{x}{4}]}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) -2 ۳) 1 ٤) $\frac{1}{2}$

حل: وقتی $x \to 0^-$، یعنی $x<0$ و در همسایگی $x=0$ هستیم. در این حالت داریم:

$$|\sin x|=-\sin x \quad , \quad [x]=-1 \quad , \quad |x|=-x \quad , \quad \frac{x}{4}\to 0^- \Rightarrow [\frac{x}{4}]=-1$$

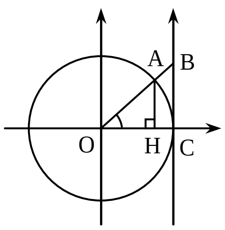
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x-1}{-4x-2}=\frac{-\sin x-1}{-4\times 0-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

برای حد توابع مثلثاتی قضیه‌ی بسیار مهم دیگری نیز قابل بیان است که کاربرد اصلی آن را در بحث رفع ابهام خواهید دید.

قضیه: با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نتایج زیر برقرارند:

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$



اثبات: دایره‌ی مثلثاتی و زاویه‌ی حاده‌ی x را درنظر بگیرید. طبق آن‌چه از این دایره می‌دانیم: $BC=\tan x$، $AH=\sin x$ و $OH=\cos x$. با توجه به $OA=OC=1$ داریم: $S_{OAC}=\frac{1}{2}AH$ و $S_{OBC}=\frac{1}{2}BC$، بنابراین: $S_{OAC}=\frac{1}{2}\sin x$ و $S_{OBC}=\frac{1}{2}\tan x$. همچنین می‌دانیم مساحت قطاع OAC برابر $\frac{1}{2}x$ است (x بر حسب رادیان). به این ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x \xrightarrow{\times \frac{2}{\sin x}} 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

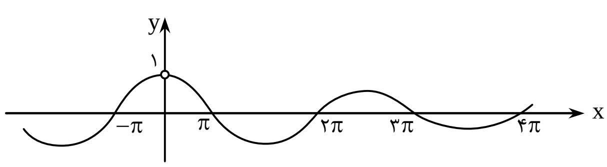
به این ترتیب تابع $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ بین دو تابع $g(x)=1$ و $h(x)=\frac{1}{\cos x}$ قرار گرفته است. چون $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=1$، پس طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

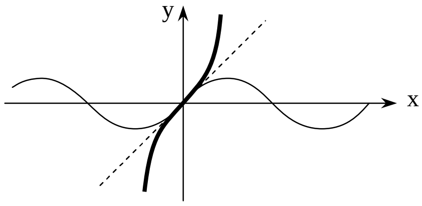
می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ یک تابع زوج است (چرا؟)، بنابراین $f(-x)=f(x)$، در نتیجه حد راست و چپ آن در نقطه‌ی $x=0$ برابر می‌شود. پس $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

برای اثبات رابطه‌ی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ می‌توانید بنویسید: $\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{f(x)}\times\frac{1}{\cos x}$، بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$$

به نمودار تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ نیز دقت کنید. می‌بینید که $\lim\limits_{x\to 0} y=1$.





در شکل روبه‌رو نیز نمودار سه تابع $y=\sin x$، $y=x$ و $y=\tan x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. می‌بینید که نامساوی‌های ابتدای اثبات در این نمودار واضح‌تر مشخص شده‌اند. برای $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم: $\sin x<x<\tan x$ و برای $-\frac{\pi}{2}<x<0$ داریم:

$\tan x<x<\sin x$

محاسبه‌ی حد در عبارت‌های شامل جزءصحیح

در بخش قبل دیدیم که چگونه در توابع شامل جزءصحیح می‌توانیم با استفاده از رسم نمودار مقدار حد را تعیین کنیم. این‌جا می‌خواهیم حالاتی پیچیده‌تر را بررسی کنیم.

اولین چیزی که در حل مسائل مربوط به حد در توابع شامل جزءصحیح باید در نظر داشته باشیم، مواردی است که می‌توانیم به جای عبارت شامل جزءصحیح یک عدد ثابت قرار دهیم. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}([5x-3]x^2+3)$ را پیدا کنیم. می‌دانیم وقتی $x\to\frac{1}{2}$ داریم $5x-3\to-\frac{1}{2}$، پس وقتی که به عدد $\frac{1}{2}$ خیلی نزدیک بشویم، مقدار عبارت $5x-3$ تقریباً $-\frac{1}{2}$ یا اعداد نزدیک به آن است، پس به جای $[5x-3]$ می‌توانیم قرار دهیم -1. به این ترتیب باید حد زیر را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}((-1)\times x^2+3)=-\frac{1}{4}+3=\frac{11}{4}$$

ولی مثلاً در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to1}([5x-3]x^2+3)$ نمی‌توانیم چنین کاری انجام دهیم. زیرا $5x-3\to2$، و عدد 2 یک عدد مرزی است! اگر مقدار $5x-3$ کمی بیش‌تر از 2 باشد داریم $[5x-3]=2$، و اگر کمی از 2 کوچک‌تر باشد داریم: $[5x-3]=1$. معمولاً این وضعیت‌ها را با علامت‌های $+$ و $-$ نشان می‌دهیم، یعنی می‌گوییم در حالت اول: $[5x-3]=[2^+]=2$ و در حالت دوم $[5x-3]=[2^-]=1$.

نکته: **در محاسبه‌ی حد در توابع شامل جزءصحیح، در صورت امکان جزءصحیح را حذف و به جای آن اعداد ثابت قرار دهید. برای این منظور دقت کنید که:**

۱- اگر $f(x)\to L$ و L عددی غیر صحیح باشد، آن‌گاه: $[f(x)]=[L]$

۲- اگر $f(x)\to L^+$ (به معنی $f(x)\to L$ و $f(x)>L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)]=L$

۳- اگر $f(x)\to L^-$ (به معنی $f(x)\to L$ و $f(x)<L$)، که L عددی صحیح است، آن‌گاه: $[f(x)]=L-1$

تست (۷): **حاصل $\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)[\frac{1}{x+1}]$ کدام است؟ (سراسری- ۸۱)**

۱) -1 **۲)** صفر **۳)** $\frac{1}{2}$ **۴)** 1

حل: وقتی $x\to1^-$، داریم: $\frac{1}{x+1}\to\frac{1}{2}$، پس $[\frac{1}{x+1}]=0$. بنابراین:

$$\lim_{x\to1^-}(x+1)[\frac{1}{x+1}]=\lim_{x\to1^-}(x+1)\times\lim_{x\to1^-}[\frac{1}{x+1}]=2\times0=0$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست (۸): **مجموع حد چپ و راست $y=(x^2+1)[x^2-2]$، وقتی $x\to\sqrt{2}$ میل می‌کند، کدام است؟ (آزاد- ۸۲)**

۱) 6 **۲)** 3 **۳)** -3 **۴)** -6

حل: وقتی $x\to\sqrt{2}$، داریم: $x^2-2\to0$. پس نمی‌توانیم به جای $[x^2-2]$ عدد صفر را قرار دهیم و باید حدهای چپ و راست را جداگانه حساب کنیم:

$$x\to(\sqrt{2})^+: x>\sqrt{2}\Rightarrow x^2>2\Rightarrow x^2-2>0\Rightarrow x^2-2\to0^+\Rightarrow[x^2-2]=0\Rightarrow\lim_{x\to(\sqrt{2})^+}y=(2+1)\times0=0$$

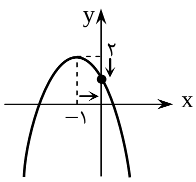
$$x\to(\sqrt{2})^-: x<\sqrt{2}\Rightarrow x^2<2\Rightarrow x^2-2<0\Rightarrow x^2-2\to0^-\Rightarrow[x^2-2]=-1\Rightarrow\lim_{x\to(\sqrt{2})^-}y=(2+1)\times(-1)=-3$$

پس پاسخ نهایی $0+(-3)=-3$ می‌شود. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

مسأله‌ی (۱۲): حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-}[-x^{۲}-۲x+۱]$ **ب)** $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۲x+۲[۳x-x^{۳}]}{x^{۲}-۵x+۳}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}}[\dfrac{۱}{\sin x}]$



حل: الف) وقتی $x\to ۰^-$، داریم: $-x^{۲}-۲x+۱\to ۱$، ولی باید تعیین کنیم که از سمت مقادیر کوچک‌تر از ۱ یا بزرگ‌تر از ۱. در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=-x^{۲}-۲x+۱$ را رسم کرده‌ایم. می‌بینید که وقتی $x\to ۰^-$، مقادیر تابع از سمت yهای بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود.

پس $-x^{۲}-۲x+۱\to ۱^+$، بنابراین حاصل حد $[۱^+]=۱$ می‌شود.

ب) وقتی $x\to ۱$، داریم: $۳x-x^{۳}\to ۲$. چون رسم نمودار تابع ساده نیست، از روش دیگری استفاده می‌کنیم. یکی از روش‌های مفید «تعیین علامت» است. می‌دانیم نامساوی $۳x-x^{۳}>۲$ معادل $-x^{۳}+۳x-۲>۰$ و برعکس آن $۳x-x^{۳}<۲$ معادل $A<۰$ است (که $A=-x^{۳}+۳x-۲$). پس A را تعیین علامت می‌کنیم:

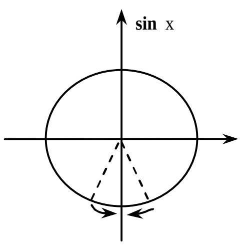
$A=(x-۱)(-x^{۲}-x+۲)=-(x-۱)^{۲}(x+۲)\to$

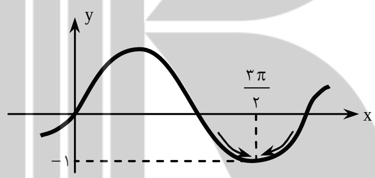
x		-۲		۱	
A	+	۰	−	۰	−

پس وقتی $x\to ۱$ (چه از راست و چه از چپ)، همواره $A<۰$، بنابراین $۳x-x^{۳}<۲$. نتیجه می‌گیریم:

$$۳x-x^{۳}\to ۲^-\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۲x+۲[۳x-x^{۳}]}{x^{۲}-۵x+۳}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۲x+۲\times ۱}{x^{۲}-۵x+۳}=-۱$$

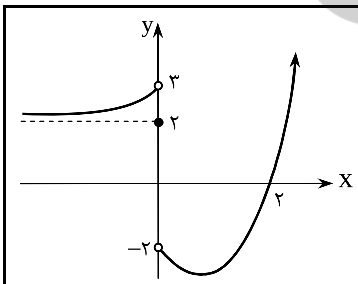
پ) وقتی $x\to\frac{۳\pi}{۲}$، داریم: $\frac{۱}{\sin x}\to -۱$. با توجه به دایره‌ی مثلثاتی (یا نمودار $y=\sin x$) واضح است که در همسایگی چپ یا راست $x=\frac{۳\pi}{۲}$ داریم: $\sin x>-۱$.





چون $\sin x>-۱$، پس $\frac{۱}{\sin x}<\frac{۱}{-۱}$، یعنی $\frac{۱}{\sin x}\to(-۱)^-$، در نتیجه: $[\frac{۱}{\sin x}]=-۲$. بنابراین پاسخ حد نیز ۲- می‌شود.

تست (۹): نمودار تابع f مطابق شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{f(x)+۳}{۳[f(x)]+۱}$ **کدام است؟**



۱) -۱ **۲)** $-\frac{۱}{۸}$

۳) $-\frac{۱}{۵}$ **۴)** $-\frac{۵}{۸}$

حل: وقتی $x\to ۰^+$، روی قسمت پایینی نمودار حرکت می‌کنیم. در این حالت $f(x)$ از طرف مقادیر کوچک‌تر از ۲- به عدد ۲- نزدیک می‌شود، یعنی: $f(x)\to(-۲)^-$. پس: $[f(x)]=-۳$. نتیجه می‌گیریم:

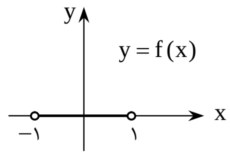
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)+۳}{۳[f(x)]+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)+۳}{۳\lim\limits_{x\to ۰^+}[f(x)]+۱}=\frac{-۲+۳}{۳\times(-۳)+۱}=-\frac{۱}{۸}$$

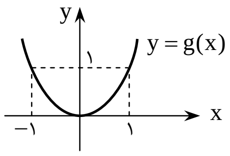
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

صفر مطلق و صفر حدی

می‌دانیم حد هر دو تابع $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=x^2$، وقتی $x\to 0$ برابر صفر است. ولی آیا نوع این دو رفتار یکسان است؟

در شکل‌های روبه‌رو نمودار دو تابع در فاصله‌ی $(-1,1)$ رسم شده است. می‌بینید که در تابع f، در یک همسایگی $x=0$ داریم $f(x)=0$، ولی در تابع g فقط وقتی $x\to 0$ داریم $g(x)\to 0$. اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در $x=0$ «صفر مطلق» است، ولی تابع g «صفر حدی» است.

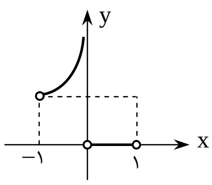




مسأله‌ی (۱۳): مقادیر $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{[x]}$ را در صورت وجود بیابید.

حل: فرض می‌کنیم: $f(x)=\frac{[x]}{x}$ و $g(x)=\frac{x}{[x]}$. هنگام محاسبه‌ی حد دو تابع، حد هر دو عبارت صورت و مخرج برابر صفر می‌شود و نمی‌توانیم از قضیه‌های مربوط به حدود استفاده کنیم. باید به روشی دیگر عمل کنیم.

وقتی $0<x<1$، داریم: $[x]=0$، بنابراین $f(x)=0$. پس تابع f در همسایگی راست $x=0$ تابع ثابتی با مقدار صفر است (صفر مطلق) و می‌توانیم نتیجه بگیریم: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ (در شکل روبه‌رو نمودار f در فاصله‌ی $(-1,1)$ رسم شده است).



برای محاسبه‌ی حد دوم به این دقت کنید که همسایگی راست $x=0$ در دامنه‌ی تابع g قرار ندارد (چرا؟) بنابراین $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ وجود ندارد.

نکته: **اگر در یک همسایگی عدد a تابع $f(x)$ دقیقاً برابر صفر باشد و داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ (ولی تابع g دقیقاً صفر نباشد)، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. (به بیانی ساده‌تر: $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$)**

همچنین دقت کنید که حالت $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}$ در دامنه‌ی تابع نیست، پس حدی هم وجود ندارد.

مسأله‌ی (۱۴): در هر قسمت حد خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{x^2}{x}]$ **ب)** $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{1-|x|}]$

حل: الف) وقتی $x\to 0$ (چه از راست و چه از چپ) داریم: $x^2\to 0$ و چون $x^2>0$، پس $[x^2]=0$ (صفر مطلق). بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}[\frac{x^2}{x}]=\lim_{x\to 0}[\frac{0}{x}]=\lim_{x\to 0}[0]=\lim_{x\to 0}0=0$$

ب) حدهای راست و چپ را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$x\to 0^+:\begin{cases}[\frac{1}{1-|x|}]=[\frac{1}{1-x}]\\ x>0\Rightarrow -x<0\Rightarrow 1-x<1\Rightarrow \frac{1}{1-x}>1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[\frac{1}{1-x}]=1$$

به همین ترتیب و با روشی مشابه نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}[\frac{1}{1+x}]=1\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

لازم به ذکر است که بحث مفصل‌تر درباره‌ی حد در عبارت‌های شامل جزءصحیح را در بخش پیوستگی خواهیم آورد و حل مثال‌های پیچیده‌تری از این گونه توابع را به آن بخش واگذار می‌کنیم.