

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

درس اول : تابع نمایی

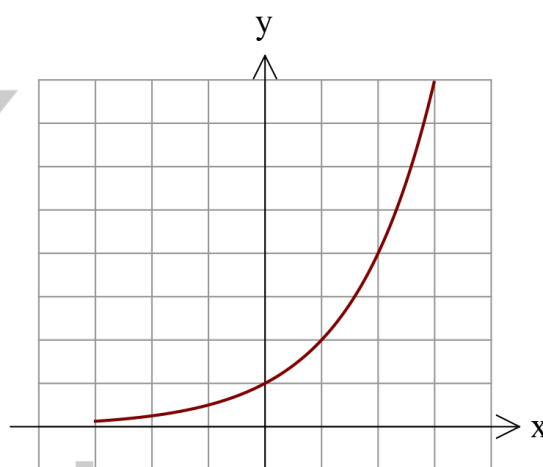
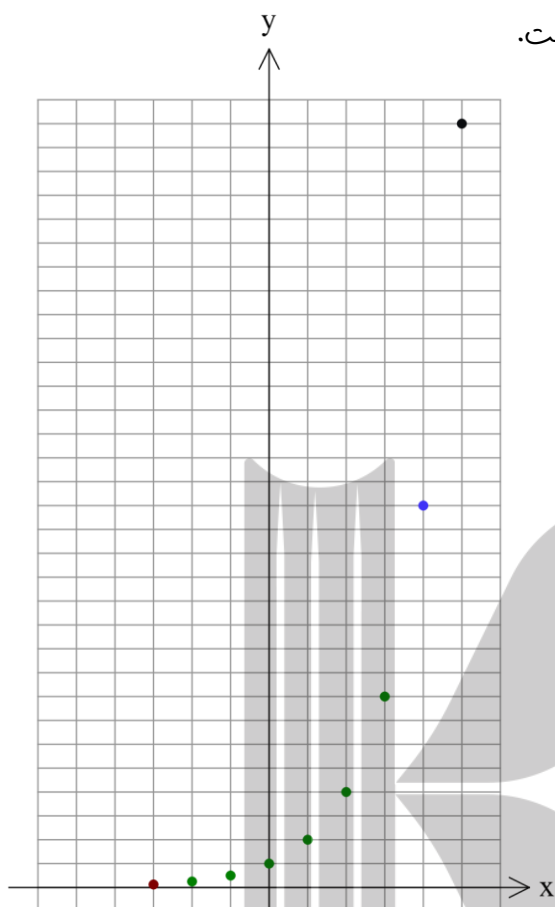
اگر توان های صحیح عدد ۲ را در نظر بگیریم نمودار زیر را خواهیم داشت.

حال فرض کنید بخواهیم دامنه را به اعداد حقیقی تعمیم دهیم :

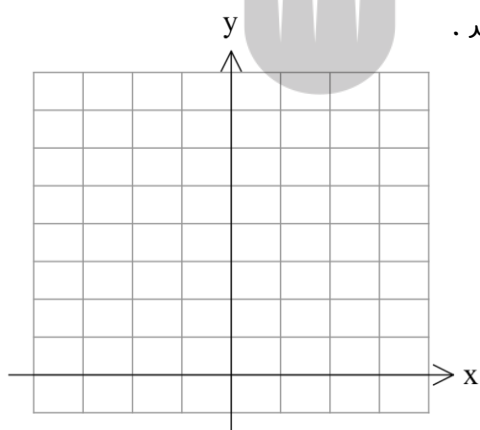
به عنوان مثال :

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1/46 \quad 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \approx 1/4 \quad 2^{1/6} = 2/66$$

پس نمودار به صورت زیر در می آید :



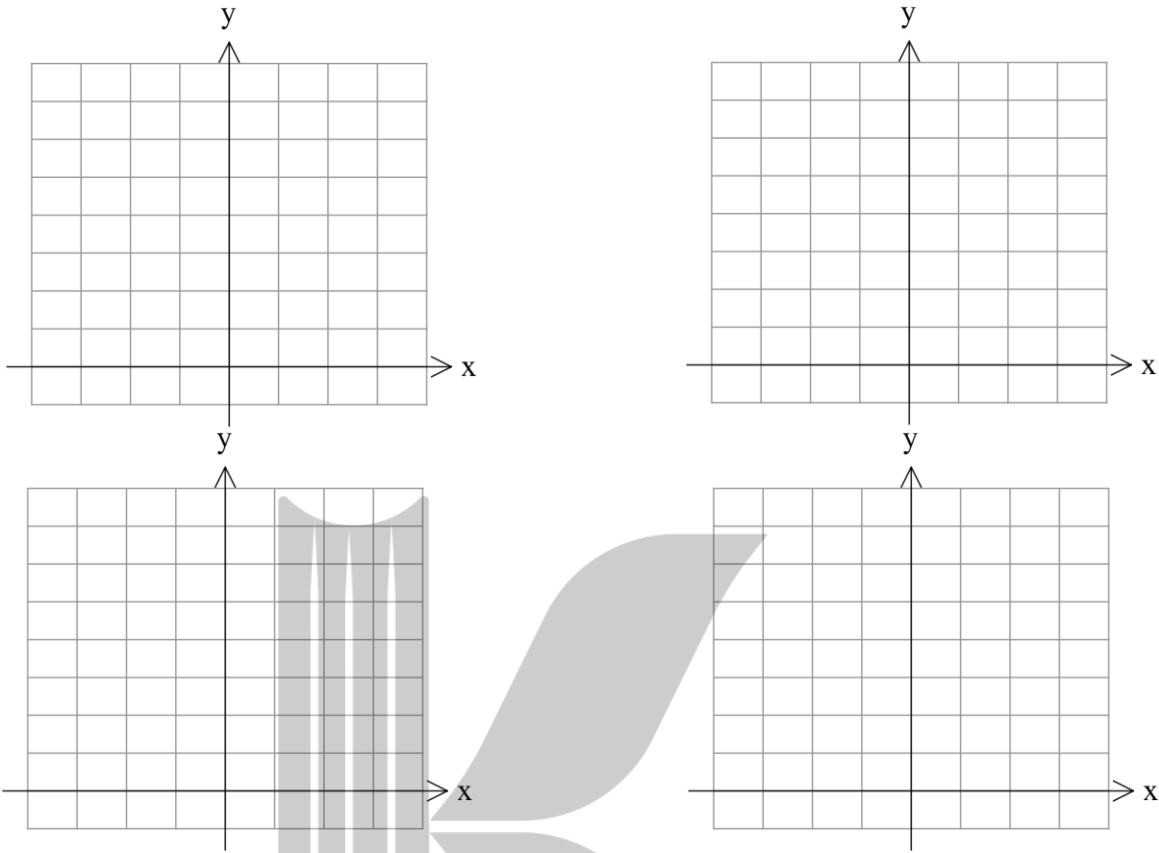
حالا به کمک ماشین حساب و نقطه یابی نمودار تابع $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید .



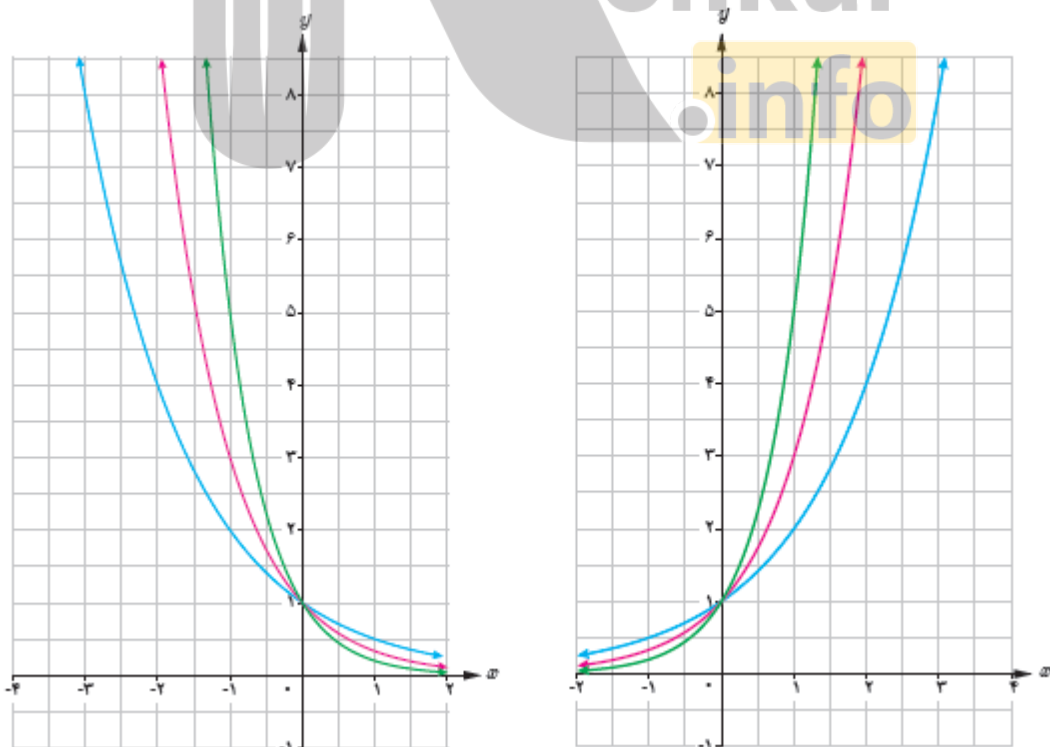
تابع نمایی : هر تابع به صورت $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) را تابع نمایی می گویند .

توجه : هر تابع به صورت $y = ka^x$ ($a > 0, a \neq 1, k \neq 0$) رفتار نمایی دارد .

تمرین: نمودار توابع $y = -3^x - 1$, $y = 3^{x-1}$, $y = (\frac{1}{3})^x + 2$, $y = -(\frac{1}{3})^{x+2}$ را به کمک انتقال رسم کنید.



تمرین: نمودار توابع 5^x , 3^x , 3^x و همچنین توابع $(\frac{1}{5})^x$, $(\frac{1}{3})^x$, $(\frac{1}{3})^x$ رسم شده است. ضابطه هر نمودار را در کنار آن بنویسید.



تمرین: مقدار نوعی باکتری خاص در هر ساعت ۴ برابر می شود اگر مقدار اولیه آن ۲۰ میلی گرم بوده باشد، جرم توده بعد از t ساعت را به صورت نمایی نوشته و مقدار آن را بعد از یک شبانه روز تخمین بزنید.

تمرین: اگر a, b, c دنباله حسابی باشند. کدام مورد درست است؟ (راهنمایی: در دنباله حسابی $a + c = 2b$)

الف) $3^a, 3^b, 3^c$ دنباله حسابی است. ب) $3^a, 3^b, 3^c$ دنباله هندسی است.

ج) $3^a, 3^{b+1}, 3^c$ دنباله حسابی است. د) $3^a, 3^{2b}, 3^c$ دنباله هندسی است.

معادله و نامعادله نمایی:

الف) اگر $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$

ب) اگر $a > 1$ در این صورت اگر $a^x > a^y$ آنگاه $x > y$.

ج) اگر $0 < a < 1$ در این صورت اگر $a^x > a^y$ آنگاه $x < y$.

تمرین: معادله و نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{81}{16}\right)^{x-1}$

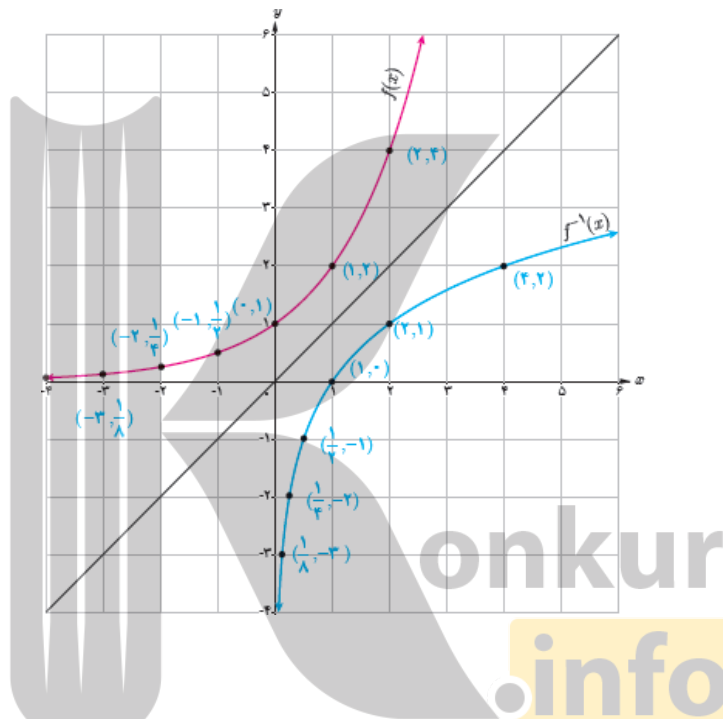
ب) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} > \left(\frac{1}{27}\right)^x$

ج) $9^{2x-2} > \frac{1}{243}$

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

فرض کنید تابع رشد یک نوع باکتری به صورت $f(t) = 2^t$ است. ور به راحتی می توان گفت در زمان $t = 2/5$ مقدار این باکتری حدود $f(2/5) = 2^{2/5} \approx 5/66$ است. حال سوال اینجاست که اگر بخواهیم مثلاً بدانیم در چه زمانی مقدار این باکتری تقریباً ۶۰ می شود، چه باید کرد؟

همان طور که از نمودار تابع نمایی معلوم است، تابع نمایی یک تابع یکی به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y = x$ رسم کرد پس:



تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی $y = a^x$ را تابع لگاریتم بر مبنای a می نامند و با نماد $y = \log_a^x$ نمایش می دهند. که در آن $a > 0, a \neq 1, x > 0$ است.

تمرین: دامنه تابع $y = \log_x^{x-x}$ را مشخص کنید.

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم :

$$\log_a 1 = 0 \quad (1)$$

اثبات : چون همواره $a^0 = 1$

$$\log_a a = 1 \quad (2)$$

اثبات : چون همواره $a^1 = a$

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y \quad (3)$$

اثبات : فرض کنید $\log_a^x = p$ و $\log_a^y = q$ در این صورت $x = a^p, y = a^q$ پس داریم $xy = a^{p+q}$ و طبق تعریف

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y = p + q$$
 در نتیجه $\log_a^{xy} = p + q$ لگاریتم

مثال : اگر $\log_3^x = 1/58$ و $\log_3^y = 2/32$ باشد مقدار \log_3^{xy} را بیابید .

$$\text{حل : } \log_3^{xy} = \log_3^x + \log_3^y = 1/58 + 2/32 = 3/9$$

$$\log_a^{x/y} = \log_a^x - \log_a^y \quad (4)$$

اثبات :

مثال : اگر $\log_3^x = a$ مقدار $\log_3^{x/5}$ را بیابید . (وقتی مبنای لگاریتم ۱۰ باشد معمولا آن را نمی نویسند)

$$\text{حل : } \log 5 = \log \frac{x}{3} = \log x - \log 3 = 1 - a$$

کاربرد های لگاریتم :

۱) رشد یا کاهش درصدی : مسائلی هستند که در آن مقدار یک چیز در هر دوره به اندازه درصد خاصی افزایش یا کاهش می یابند از تابع نمایی $f(t) = a(1+r)^t$ تبعیت می کنند که در آن a مقدار اولیه آن چیز و r درصد افزایش یا کاهش (در صورت کاهش r عدد منفی می شود) در هر دوره است .

مثال : اگر جمعیت کشوری ۳۰ میلیون و نرخ رشد سالانه جمعیت آن کشور ۲ درصد باشد .

الف) بعد از ۳۵ سال جمعیت کشور چقدر است ؟

حل : حدود ۶۰ میلیون نفر خواهند شد $f(35) = 30(1/02)^{35} = 30 \times 2 = 60$

ب) بعد از چند سال جمعیت به ۱۰۰ میلیون نفر می رسد ؟

حل : حدود ۶۰/۸ سال طول خواهد کشید $100 = 30(1/02)^t \Rightarrow \frac{10}{3} = (1/02)^t \Rightarrow t = \log_{1/02} \frac{10}{3} \approx 60/8$

تمرین : فرض کنید قیمت یک نوع خودرو خاص سالانه ۳۰ درصد افت قیمت دارد و قیمت فعلی آن ۸۰ میلیون تومان است . بعد از چند سال قیمت آن حدود ۶۵ میلیون تومان خواهد بود ؟

تمرین : با نرخ سود ۱۶ درصد سالانه یک بانک ، اگر ۱۰ میلیون تومان پول در این بانک قرار دهیم .

الف) بعد از ۵ سال پول شما چقدر شده است ؟

ب) بعد از چند سال پول شما حدود ۴۴ میلیون تومان خواهد شد ؟

نکته : در بانک ها برای دقت بیشتر از نرخ رشد روزشمار استفاده می شود که فرمول آن $f(t) = a(1 + \frac{r}{365})^{365t}$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>