

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

توابع نمایی : $f(x) = a^x$ ($a > 0$ و $a \neq 1$)

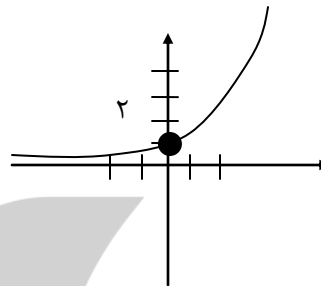
x	y
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

حالت اول ($a > 1$) : مثال $f(x) = 2^x$

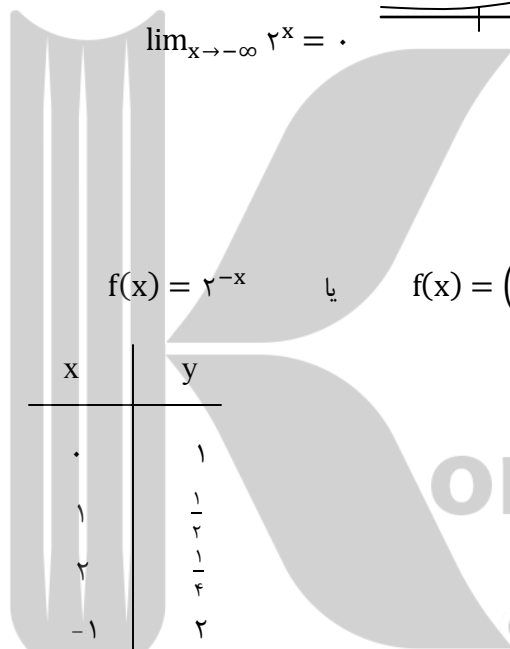
تابع در این حالت اکیدا صعودی و یک به یک است .

$D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = (0, \infty)$

خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی است .



$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$



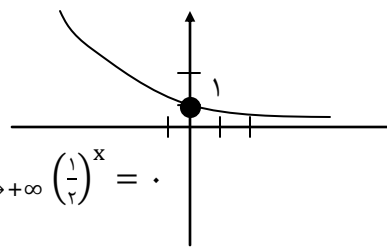
حالت دوم ($0 < a < 1$) : مثال $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ یا $f(x) = 2^{-x}$

تابع در این حالت اکیدا نزولی و یک به یک است .

$D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = (0, +\infty)$

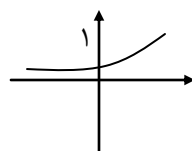
خط $y = 0$ مجانب افقی منحنی است .

x	y
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4

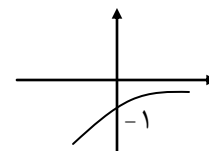


$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^x = 0$

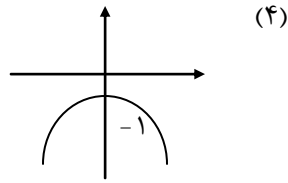
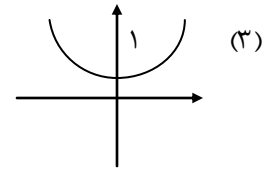
تست : نمودار تابع $f(x) = e^{|x|}$ کدام است ؟



(2)



(1)



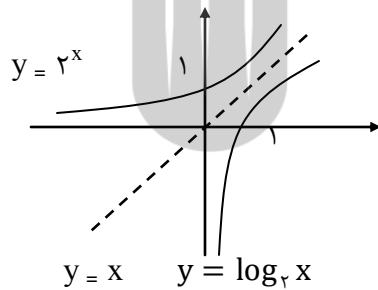
تابع لگاریتمی :

میدانیم که $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) اکیدا یکنوا و در نتیجه یک به یک است، بنابراین معکوس پذیر است، معکوس تابع نمایی که از قرینه کردن نمودار آن نسبت به خط $y = x$ بدست می آید تابع لگاریتمی نامیده می شود.

$$f^{-1}(x) = \log_a x \quad (x > 0) \quad (\text{لگاریتم } x \text{ در مبنای } a)$$

حالت اول : $y = \log_a x$ ($a > 1$) مثال : $y = \log_2 x$

← توابع $y = 2^x$ و $y = \log_2 x$ هر دو صعودی اکید هستند.



دامنه و برد

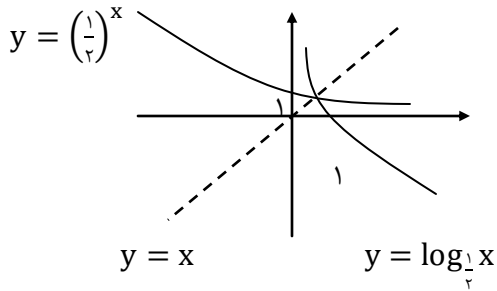
$$\begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{If } x > 1 \longrightarrow \log_a x > 0 \\ \text{If } x < 1 \longrightarrow \log_a x < 0 \\ \text{If } x = 1 \longrightarrow \log_a x = 0 \end{cases} \quad \{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$x = 0$ مجانب قائم تابع $y = \log_2 x$ است.

حالت دوم : $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) مثال : $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

← توابع $y = \left(\frac{1}{p}\right)^x$ و $y = \log_{\frac{1}{p}} x$ هر دو نزولی اکید هستند.



دامنه و برد $\rightarrow \begin{cases} D_f = (0, +\infty) \\ R_f = (-\infty, +\infty) \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{If } x > 1 \rightarrow \log_{\left(\frac{1}{p}\right)} x < 0 \\ \text{If } x < 1 \rightarrow \log_{\left(\frac{1}{p}\right)} x > 0 \\ \text{If } x = 1 \rightarrow \log_{\left(\frac{1}{p}\right)} x = 0 \end{cases} \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\left(\frac{1}{p}\right)} x = +\infty \right.$$

خط $x = 0$ مجانب قائم منحنی $y = \log_{\left(\frac{1}{p}\right)} x$ است.

تست : فاصله نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است ؟

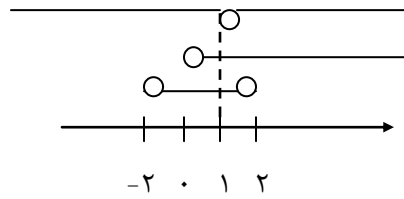
- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

تعیین دامنه‌ی توابع لگاریتمی :

در تابع $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ برای تعیین دامنه اشتراک سه شرط $\begin{cases} g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$ را بدست می‌آوریم .

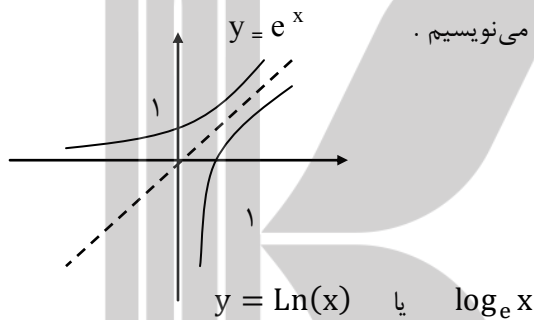
مثال : دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_x(4 - x^2)$ را بدست آورید .

$$\left. \begin{array}{l} 4 - x^2 > 0 \rightarrow 4 > x^2 \rightarrow -2 < x < 2 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(اشتراک)}} D_f = (0, 1) \cup (1, 2) \quad \text{حل:}$$



تابع لگاریتم طبیعی - تابع نمایی طبیعی :

تابع لگاریتم در پایه e را تابع لگاریتم طبیعی می‌نامیم، این تابع معکوس تابع نمایی طبیعی ($y = e^x$) است.



لگاریتم طبیعی x (لگاریتم نپری x) را بصورت $L_n(x)$ می‌نویسیم.

konkur
info

لگاریتم اعشاری (دهگانی) :

لگاریتمی که مبتنی آن عدد ۱۰ میباشد لگاریتم اعشاری یا دهگانی نامیده می‌شود، در لگاریتم اعشاری از نوشتن مبتنی لگاریتم

خودداری می‌شود و مثلا بجای آنکه بنویسیم $\log_{10} 7$ می‌نویسیم $\log 7$.

تعریف لگاریتم: بطور کلی اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد و داشته باشیم $a^n = b$ در اینصورت عدد n را لگاریتم عدد b در مبنای a می‌نامیم و چنین می‌نویسیم.

$$a^n = b \iff n = \log_a b$$

مثال: تساوی‌های زیر را بصورت لگاریتم بنویسید.

$$5^4 = 625 \longrightarrow \log_5 625 = 4$$

$$10^{-3} = 0.001 \longrightarrow \log_{10} 0.001 = -3$$

$$3^4 = 81 \longrightarrow \log_3 81 = 4$$

مثال : لگاریتم‌های زیر را بصورت اعداد توانی بنویسید.

$$\log_2 32 = 5 \longrightarrow 2^5 = 32$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \longrightarrow 10^3 = 1000$$

$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \longrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$$

نکته : در تعریف لگاریتم همیشه فرض بر آن است که پایه (مبنای) لگاریتم عدد مثبت و مخالف ۱ می باشد .

$$(a \neq 1 \text{ و } a > 0)$$

نکته : لگاریتم عدد ۱ در هر مبنایی برابر صفر است .

$$\log_a 1 = 0 \text{ زیرا } a^0 = 1 \text{ می باشد}$$

نکته : لگاریتم هر عدد در مبنای همان عدد برابر ۱ است .

$$\log_a a = 1 \text{ زیرا } a^1 = a \text{ می باشد}$$

نکته : اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند (لگاریتم آن‌ها تعریف نشده است)

مثلا $\log_a -3$ و $\log_a -7/5$ تعریف نشده و بی معنی هستند .

$$\text{نکته : } (0 < a < 1) \log_a \cdot^+ = +\infty \text{ و } (a > 1) \log_a \cdot^+ = -\infty$$

خواص لگاریتم :

(۱) اگر A و B اعدادی مثبت و a عددی مثبت و مخالف یک باشد آنگاه :

$$\log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B$$

اثبات: اگر $\log_a A = x$ و $\log_a B = y$ آنگاه $a^x = A$ و $a^y = B$

سمت چپ تساوی $\log_a A \cdot B = \log_a a^{(x+y)} = x + y = \log_a A + \log_a B$

نکته: لگاریتم حاصلضرب چند عدد برابر مجموع لگاریتم‌های آن اعداد است:

$$\log_a A \cdot B \cdot C \dots = \log_a A + \log_a B + \log_a C + \dots$$

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ حاصل لگاریتم $\log 18000$ را بر حسب a و b بدست آورید.

حل: $\log 18000 = \log 2 \times 3 \times 3 \times 1000 = \log 2 + \log 3 + \log 3 + \log 1000$

$$\longrightarrow = a + b + b + 3 = \boxed{a + 2b + 3}$$

(۲) اگر $A > 0$ و $B > 0$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ آنگاه:

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B$$

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشد، حاصل $\log \left(\frac{14}{900} \right)$ را بدست آورید.

حل: $\log(14) - \log(900) = \log(2 \times 7) - \log(3 \times 3 \times 100)$

$$= \log 2 + \log 7 - \log 3 - \log 3 - \log 100 = a + c - 2b - 2$$

(۳) اگر $x > 0$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ آنگاه:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشد، حاصل $\log\left(\frac{270}{32}\right)$ را بدست آورید.

حل: $= \log 270 - \log 32 = \log 3^3 \times 10 - \log 2^5$

$$\rightarrow = \log 3^3 + \log 10 - \log 2^5 = 3 \log 3 + \log 10 - 5 \log 2$$

$$\rightarrow 3b + 1 - 5a = 3b - 5a + 1$$

(۴) لگاریتم ریشه n ام توان m ام یک عدد برابر است با $\frac{m}{n}$ لگاریتم آن عدد.

$$\log_a \sqrt[n]{A^m} = \frac{m}{n} \log_a A$$

مثال: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ حاصل $\log\left(\sqrt[4]{2\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[5]{81}\right)$ را بدست آورید.

حل: $\log 2^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\sqrt{2}} + \log \sqrt[5]{3^4} = \log \sqrt[4]{2^5 \sqrt{2}} + \frac{4}{5} \log 3$

$$= \log \sqrt[4]{2^{11}} + \frac{4}{5} \log 3 = \log \sqrt[4]{2^{11}} + \frac{4}{5} \log 3 =$$

$$= \frac{11}{4} \log 2 + \frac{4}{5} \log 3 = \frac{11}{4} a + \frac{4}{5} b$$

$$\log_B A^m = \frac{m}{n} \log_B A \quad (5)$$

مثال: اگر $\log_3 2 = a$ آنگاه حاصل $\log_{27} 64$ را بدست آورید.

$$\log_{\sqrt{2}} 2^6 = \frac{6}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2 = \sqrt{2} \log_{\sqrt{2}} 2 = \sqrt{2} a \quad \text{حل:}$$

$$\log_B A \times \log_C B = \log_C A \xrightarrow{\text{نتیجه}} \log_B A \times \log_A B = \log_A A = 1 \quad (6)$$

$$\log_B A = \frac{1}{\log_A B} \quad \text{نتیجه:}$$

مثال: حاصل $\log_{625} 5$ را بدست آورید:

$$\log_{625} 5 = \frac{1}{\log_5 625} = \frac{1}{4} \quad \text{حل:}$$

$$\log_B A = \frac{\log_a A}{\log_a B} \quad (7) \text{ قضیه تغییر مبنا:}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 17 = \frac{\log_2 17}{\log_2 \sqrt{2}} \quad \text{مثال: (تبدیل مبنا از 3 به 5)}$$

مثال: اگر $\log 2 = a$ باشد مقدار $\log_8 625$ را بر حسب a بدست آورید.

$$\log_8 625 = \frac{\log_{10} 625}{\log_{10} 8} = \frac{\log 5^4}{\log 2^3} = \frac{4 \log 5}{3 \log 2} \quad \text{حل:}$$

$$= \frac{4 \log\left(\frac{10}{2}\right)}{3 \log 2} = \frac{4(\log 10 - \log 2)}{3 \log 2} = \frac{4(1-a)}{3a}$$

(8) اگر $x > 0$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ آنگاه:

$$a^{\log_a x} = x$$

$$5^{\log_5 3} = 3 \quad \text{مثال:}$$

مثال : حاصل $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$ را بدست آورید .

حل : $(a)^{\log_a(\log a)} = \log a$ عبارت

$$\log_a \frac{1}{A} = -\log_a A \quad (9)$$

مثال : $\log_7 \frac{1}{81} = -\log_7 81 = -4$

$$\log_{a^m} A = \frac{1}{m} \log_a A \quad (10)$$

مثال : $\log_{\sqrt[5]{6}} 2 = \log_{\sqrt[5]{6}} 2 = \frac{1}{5} \log_{\sqrt[5]{6}} 2 = \frac{1}{5}$

(11) (نتایجی از قضیه تغییر مبنا)

$$(1) \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\log_d a}{\log_d b}$$

$$(2) \log_b a \times \log_c b = \log_c a$$

$$(3) \log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

(12) اگر a و b و c مثبت و $c \neq 1$ باشد آنگاه :

اثبات : با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتم اگر نشان دهیم لگاریتم این دو عبارت مساویند خودشان نیز مساوی می شوند .

$$(1) \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \times \log_c a$$

$$(2) \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \times \log_c b$$

$$\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = 0$$

(13) اگر $a > 0$ و $b > 0$ و $a \neq 1$ آنگاه :

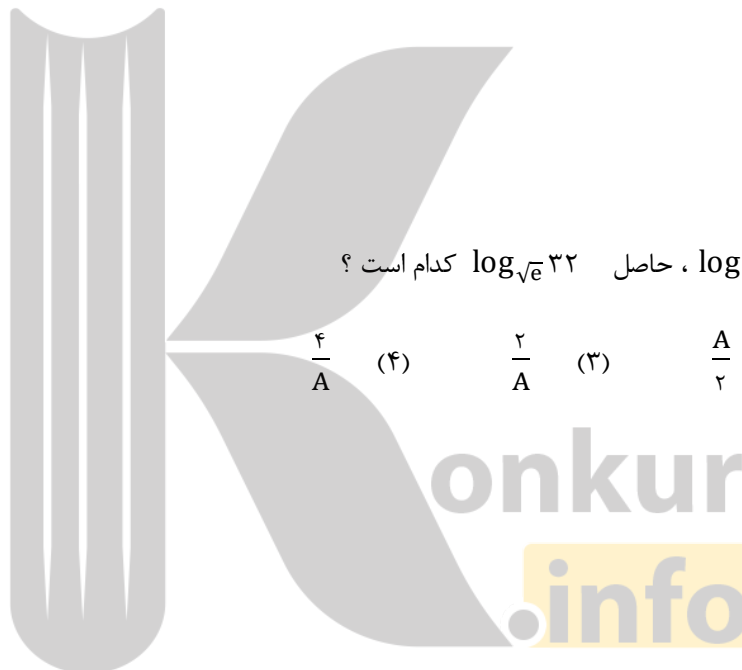
(۱۴) اگر $a > 0$ و $b > 0$ و $a \neq 1$ آنگاه : $\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = 0$

(۱۵) $\frac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n} = \log_{ab} n$

(۱۶) $e^{\text{Ln}x} = x$ و $\text{Ln } e^x = x$

تست : حاصل $\log_{\Delta}(\sqrt{125})^{\Gamma}$ کدام است ؟

- (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵



تست : اگر $\log_{\Gamma} \sqrt[5]{e^{\Gamma}} = A$ ، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{A}{4}$ (۲) $\frac{A}{2}$ (۳) $\frac{2}{A}$ (۴) $\frac{4}{A}$

(۱۷) $\log_{\frac{1}{a}N} \frac{1}{N} = \log_a N$

(۱۸) $\log_a N = \log_{a^r} N^r = \log_{a^r} N^r = \dots = \log_{\sqrt[r]{a}} \sqrt[r]{N} = \log_{\sqrt[r]{a}} \sqrt[r]{n} = \dots$

(۱۹) $\log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$

(۲۰) $\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \implies x = c^{b^{am}}$

تست : حاصل $A = \frac{1}{\log_9 6} + \frac{1}{\log_6 9}$ کدام است ؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل: (۲) $A = \log_9 9 + \log_9 4 = \log_9 36 = 2$

تست: حاصل $10^2 \log \sqrt[4]{6} - \log 2$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

حل: (۳) عبارت $= 10 \cdot \log \sqrt{6} - \log 2 = 10 \cdot \log\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

تست: حاصل عبارت $\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!}$ کدام است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲ (۴) ۱

حل: (۴) عبارت $= \log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \log_{100!} 4 + \dots + \log_{100!} 100$
 $= \log_{100!} 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100 = \log_{100!} 100! = 1$

تست: اگر $\log_4 27 = a$ آنگاه حاصل $\log_{64} 81 \times \log_3 18$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9a+6}{8}$ (۲) $\frac{8a+6}{9}$ (۳) $\frac{8a-6}{9}$ (۴) $\frac{9a-6}{8}$

حل: (۲) $\log_4 27 = a \implies \log_{2^2} 3^3 = a \implies \frac{3}{2} \log_2 3 = a$

$\implies \log_2 3 = \frac{2}{3}a$ و $\log_3 2 = \frac{3}{2a}$

$$\log_{\sqrt{6}} 81 \times \log_3 18 = \log_{\sqrt{6}} 3^4 \times \log_3 3^2 \times 2 = \frac{4}{6} \log_3 3 \times (2 \log_3 3 + \log_3 2)$$

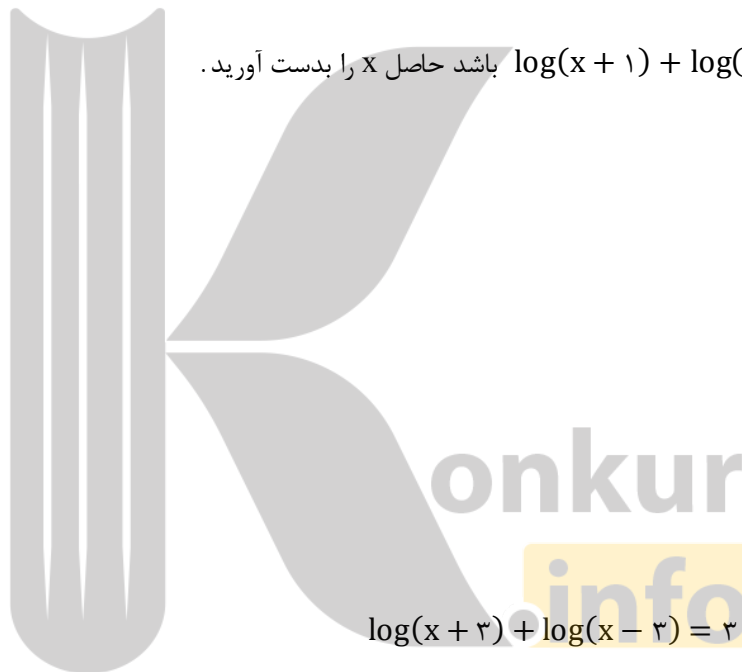
$$\implies = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} a \right) \left[2 + \frac{2}{3a} \right] = \frac{4a}{9} \times \frac{4a+2}{3a} = \frac{4a+6}{9}$$

معادلات لگاریتمی: با توجه به اینکه لگاریتم تابعی یکنوا و در نتیجه یک به یک است، می‌توان گفت اگر $\log_a x = \log_a y$

آنگاه $x = y$ ، (x و y مثبت و a عددی مثبت و مخالف یک است). از این ویژگی برای حل معادلات لگاریتمی استفاده می‌شود.

نکته: پس از بدست آوردن جوابها باید آنها را در معادله‌ی اولیه قرار دهیم تا اگر \log (منفی) حاصل شد آن جواب را قبول نکنیم.

مثال: اگر $\log(x+1) + \log(x-1) = 1$ باشد حاصل x را بدست آورید.



مثال: $\log(x+3) + \log(x-3) = 3 \log 2 + \log x$

تست: اگر $\log \frac{2}{x} + \log(x+1) = 1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه ۸ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

حل: (۱) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x+2}{x} \right) = \log_{\frac{1}{2}} 10 \implies \frac{2x+2}{x} = 10 \implies 2x+2 = 10x$

$\implies x^{10} = \frac{1}{4} \implies \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right) = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-2} = -\frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} 2 = -\frac{2}{3}$

تست: حاصلضرب جوابهای معادله‌ی $(\sqrt{x})^{(\log_{\Delta} x - 1)} = 5$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۲۵ (۴) $\frac{1}{25}$

حل: (۱) از طرفین معادله در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم.

$\log_{\Delta} (\sqrt{x})^{(\log_{\Delta} x - 1)} = \log_{\Delta} 5 \implies (\log_{\Delta} x - 1) \log_{\Delta} \sqrt{x} = 1$

$\implies \frac{1}{2} (\log_{\Delta} x - 1) \log_{\Delta} x = 1 \implies (\log_{\Delta} x)^2 - (\log_{\Delta} x) - 2 = 0$

$\implies \log_{\Delta} x = 2$ یا $\log_{\Delta} x = -1 \implies x = 25$ یا $x = \frac{1}{5}$ (هر دو جواب قابل قبول هستند)

تست: جواب دستگاه: $\begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = \ln \left(\frac{e^{12} \sqrt{e^7}}{\sqrt{e}} \right) \\ \ln(xy) = 5 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} x = e^2 \\ y = e^3 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x = e^3 \\ y = e^2 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x = e \\ y = e^3 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x = e^2 \\ y = e^2 \end{cases}$

حل: (۱) $\begin{cases} x^2 y^2 = e^{12} \\ (*) xy = e^5 \end{cases} \implies \begin{cases} (xy)^2 \times y = e^{12} \\ (e^5)^2 \times y = e^{12} \implies y = e^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (*) \\ (*) \end{cases} \implies x = e^2$

تست: جواب معادله‌ی $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$ کدام است؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۱۶ (۳) ۷ (۴) ۴

$\log_{r^2} x + \log_{r^2} x + \log_r x = 7$ حل: (۲)

$\implies \frac{1}{r} \log_r x + \frac{1}{r} \log_r x + \log_r x = 7 \implies \frac{2}{r} \log_r x = 7$

$\implies \log_r x = \frac{7r}{2} \implies x = r^{\frac{7r}{2}}$

تست: در دستگاه $\begin{cases} \log_r x - \log_q y = \log_8 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ حاصل $x \cdot y$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

$\log_r x - \frac{1}{r} \log_r y = 0 \implies \log_r x - \log_r \sqrt[r]{y} = 0$ حل: (۱)

$\implies \log_r \left(\frac{x}{\sqrt[r]{y}} \right) = \log_r 1 \implies \frac{x}{\sqrt[r]{y}} = 1 \implies x^r = y$

$2x - y = 1 \implies -x^r + 2x = 1 \implies x^r - 2x + 1 = 0 \implies (x-1)^r = 0$

$\implies x = 1$ و $y = 1 \implies x \cdot y = 1$

تست: دامنه‌ی تابع $y = \log_{[x]} \left(\frac{1}{x} \right)$ کدام است؟

- (۱) $(0, +\infty) - \{1\}$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $[2, +\infty)$

$\begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \implies x > 0 \\ [x] > 0 \implies x \geq 1 \\ [x] \neq 1 \implies x \notin [1, 2] \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 2$ حل: (۴)

$(t \geq 0)$

$f(t) = f(0)e^{kt}$

تابع رشد و زوال : تابع

را تابع نمایی رشد با نسبت افزایش k برای $(k > 0)$ و تابع نمایی زوال با نسبت کاهش k برای $(k < 0)$ می‌نامیم .

نکته : $f(0)$ مقدار ثابت اولیه تابع است .

نکته : ممکن است تابع نمایی را بصورت $f(t) = Be^{kt}$ بنویسیم که در آن B مقدار ثابت اولیه تابع است .

نکته : اگر $k > 0$ ، تابع f صعودی و اگر $k < 0$ تابع f نزولی است .

تست : جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ تقریباً ۶۰ میلیون نفر بوده است ، اگر رشد نمایی آن $K = 0.02 \ln(2)$ فرض شود ، جمعیت ایران در سال ۱۴۱۵ تقریباً چند میلیون نفر است ؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

حل : (۲) $p(0) = 60$ $t = 1415 - 1365 = 50$ (سال)

$$p(t) = p(0)e^{kt} \implies p(50) = 60 \cdot e^{(0.02 \ln 2)(50)}$$

$$\implies = 60 \cdot e^{(\ln 2)} = 60 \times 2 = 120$$

تست : قیمت فروش کالایی t سال پس از خرید ، $f(t)$ تومان است .

اگر $f(t) = 1200 + 800e^{-\frac{t}{4}}$ ، چند سال پس از خرید ، قیمت این کالا ۲۰۰۰ تومان می‌شود ؟ $(\ln 10 = 2/3)$

- (۱) ۹/۲ (۲) ۱۰/۲ (۳) ۸/۲ (۴) ۷/۲

حل : (۱) $2000 = 1200 + 800e^{-\frac{t}{4}} \implies 800 = 800e^{-\frac{t}{4}}$

برای حل معادلات نمایی از طرفین لگاریتم می‌گیریم

$$\implies \frac{1}{10} = e^{-\frac{t}{4}} \implies \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{t}{4}$$

$$\implies t = 4\ln(10) = 4 \times \frac{2}{3} = 9/2$$

تست : تعدادی باکتری را در شرایط ایدآل آزمایشگاهی کشت می‌دهند ، اگر مقدار باکتریها پس از ۳ ساعت به 10^4 و پس از ۵ ساعت به 4×10^4 برسد ، تعداد باکتریها در آغاز کدام است ؟

- (۱) ۱۵۲۰ (۲) ۱۲۰۰ (۳) ۱۲۵۰ (۴) ۱۰۲۰

حل : (۳)

$$(1) \begin{cases} t = 3 \\ p(3) = 10^4 \\ 10^4 = p(\cdot)e^{rk} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} t = 5 \\ p(5) = 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 = p(\cdot)e^{\Delta k} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} e^{rk} = 4 \implies K = \ln(4)$$

$$(1) \implies 10^4 = p(\cdot)e^{r\ln(4)} \implies 10^4 = p(\cdot)e^{\ln(4)} \implies 10^4 = 4p(\cdot) \implies p(\cdot) = 1250$$

تست : جمعیت شهری در سال ۱۳۷۵ ، ۱۰ میلیون و در سال ۱۳۹۵ ، جمعیت آن ۱۵ میلیون برآورد شده است ، در سال ۱۴۱۵ جمعیت شهر کدام است ؟

- (۱) ۲۳/۵ (۲) ۲۱/۵ (۳) ۲۰/۵ (۴) ۲۲/۵

حل : (۴)

$$p(20) = 15 = 10 \cdot e^{r \cdot k} \implies e^{r \cdot k} = 1/5$$

$$p(40) = 10 \cdot e^{40k} = 10 \cdot (e^{20k})^2 = 10 \cdot (1/5)^2 = 22/5$$

تست : جمعیت کشوری پس از ۸ سال $1/2$ برابر می‌شود ، اگر ثابت رشد تغییر نکند ، جمعیت کشور پس از ۱۶ سال چند برابر می‌شود ؟

- (۱) $1/6$ (۲) $1/5$ (۳) $1/3$ (۴) $1/4$

$$p(t) = p(\cdot)e^{kt} \implies 1/2 p(\cdot) = p(\cdot)e^{k} \implies e^{k} = 1/2 \quad \text{حل: (۴)}$$

$$p(16) = p(\cdot)e^{16k} = p(\cdot)(e^{k})^{16} = 1/4 p(\cdot)$$

تست: اگر تعداد باکتری‌ها در یک ساعت دو برابر شود، چقدر طول می‌کشد تا تعداد آن‌ها ۸ برابر شود؟

$$2/5 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 2 \quad (۱)$$

$$p(1) = 2p(\cdot) = p(\cdot)e^k \implies e^k = 2 \quad \text{حل: (۲)}$$

$$p(t) = 8p(\cdot) = p(\cdot)e^{kt} \implies 8 = (e^k)^t \implies 8 = 2^t \implies t = 3$$

تست: در یک نوع کشت تعداد باکتری‌ها بعد از t دقیقه برابر $f(t) = Ae^{0.3t}$ است. اگر در این نوع کشت ۲۰۰ باکتری موجود باشد بعد از چند دقیقه ۱۰۰۰ باکتری وجود خواهد داشت؟ $\ln(5) = 1/62$

$$56 \quad (۴) \quad 54 \quad (۳) \quad 48 \quad (۲) \quad 45 \quad (۱)$$

$$f(t) = 200 \cdot e^{0.3t} \implies 1000 = 200 \cdot e^{0.3t} \quad \text{حل: (۳)}$$

$$\implies \ln(5) = 0.3t \implies t = 54$$

تست: از معادله $e^{\log_e \sqrt{x+1}} = 4$ ، مقدار x کدام است؟

$$8 \quad (۴) \quad -9 \quad (۳) \quad 7 \quad (۲) \quad 9 \quad (۱)$$

$$e^{\frac{1}{2} \log_e x+1} = 4 \implies (x+1)^{\frac{1}{2}} = 4 \implies (x+1)^2 = 64 \quad \text{حل: (۲)}$$

$$\implies x+1 = \pm 8 \implies x = -9 \quad \text{یا} \quad x = 7 \quad (\text{قابل قبول})$$

تست: از دستگاه $\begin{cases} \log x + \log y^2 = 2 \\ \log \sqrt{x} - \log y = -3 \end{cases}$ ، مقدار xy کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{10000}$ (۲) 10000 (۳) $\frac{1}{10}$ (۴) 1

حل: (۴) $\begin{cases} \log x + 2 \log y = 2 \\ \frac{1}{2} \log x - \log y = -3 \end{cases} \implies 2 \log x = -4 \implies \log x = -2 \implies x = \frac{1}{100}$ (۱)

(۲) $2 \log y = 4 \implies \log y = 2 \implies y = 100$

(۱) و (۲) $\implies xy = 1$

تست: اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد حاصل $\log_{12} 10 + \log_3 2$ بر حسب a و b کدام است؟

- (۱) $\frac{a+b}{b(2a+b)}$ (۲) $\frac{1}{b(a+b)}$ (۳) $\frac{2a+b}{b(a+b)}$ (۴) $\frac{b}{(2a+b)}$

حل: (۱) $\log_{12} 10 + \log_3 2 = \frac{1}{\log_{12} 10} + \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{1}{2 \log 2 + \log 3} + \frac{\log 2}{\log 3}$
 $\implies = \frac{1}{2a+b} + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b(2a+b)}$

تست: اگر $ab = 10$ باشد، ماکزیمم $\log a \times \log b$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

حل: (۱) $ab = 10 \implies \log ab = 1 \implies \log a + \log b = 1 \implies \log a = \log b = \frac{1}{2}$

$\log a \times \log b = \frac{1}{4}$

نکته: وقتی مجموع دو عبارت برابر عدد ثابتی باشد، حاصلضرب آن دو وقتی Max است که آن دو با هم برابر باشند.

تست: حاصل x از معادله $\log \sqrt{x} + \log_x 100 = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۰۰۰۰

حل: (۲) $\log \sqrt{x} + \frac{1}{\log_{10} x} = 2 \implies \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{\frac{1}{2} \log x} = 2$

$\implies \left(\frac{1}{2} \log x\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} \log x\right) + 1 = 0 \implies \left(\frac{1}{2} \log x - 1\right)^2 = 0$

$\implies \log x = 2 \implies x = 100$

تست: معادله $\log_{\Delta-x}(x-1) + \log_{\Delta-x}(x+2) = \log_{\Delta-x} 4$ دارای جواب است.

- (۱) ۳ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۲

حل (۴)

$\log_{\Delta-x}(x-1)(x+2) = \log_{\Delta-x} 4$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \implies x > 1 \\ x+2 > 0 \implies x > -2 \\ \Delta-x > 0 \implies x < \Delta \\ \Delta-x \neq 1 \implies x \neq \Delta-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < \Delta \text{ و } x \neq 4$$

$x^2 + x - 2 = \log_{\Delta-x} 4 \implies x^2 + x - 2 = 4 \implies x^2 + x - 6 = 0$

$\implies x = -3 \text{ یا } x = 2$ (قابل قبول)

تست: جواب معادله $\log_{\Delta} \log_{\Delta} \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} 2 + \log_{\Delta} 1$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۶ (۴) ۴

حل: (۳) $\log_{\Delta} \log_{\Delta} \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} 2 - \log_{\Delta} \Delta \implies \log_{\Delta} \log_{\Delta} \log_{\Delta} x = \log_{\Delta} \left(\frac{2}{\Delta}\right)$

$$\implies \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{5} \implies \log_{\sqrt{2}} x = (\sqrt{2})^{\frac{2}{5}} \implies \log_{\sqrt{2}} x = 4 \implies x = 16$$

تست : حاصل $\sqrt{10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \log 16}$ کدام است ؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۵

$$\sqrt{10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \log 16} = \sqrt{10 \cdot 2 + 1 \cdot \log \sqrt{16}} = \sqrt{10 \cdot 2 + 1 \cdot \log 4} = \sqrt{10 \cdot 2 + 4} = 20 \quad \text{حل: (۲)}$$

تست : جواب معادله‌ی $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$ کدام است ؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۰۰۰۰

$$5^{\log x} = x^{\log 5} \implies 2 \times 5^{\log x} = 50 \implies 5^{\log x} = 25 \quad \text{حل: (۱)}$$

$$\implies \log x = 2 \implies x = 100$$

تست : حاصل $A = \log_x \sqrt{x^{\sqrt{x}} \sqrt{x^{\sqrt{x}}}}$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{7}{10}$ (۲) $\frac{10}{7}$ (۳) $\frac{15}{12}$ (۴) $\frac{16}{15}$

$$A = \log_x \sqrt{\sqrt{x^{\sqrt{x}}} \sqrt{x^{\sqrt{x}}}} = \log_x \sqrt[2]{\sqrt[2]{x^{\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}}}} = \log_x \sqrt[2]{x^{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{7}{10} \quad \text{حل: (۱)}$$

تست : حاصل $A = 10^{-1+2 \log 5}$ کدام است ؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

حل: (۳) $A = 10^{-1} \times 10^{2 \log 5} = \frac{1}{10} \times 10^{\log 25} = \frac{1}{10} \times 25 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

تست: اگر $\log(a-b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ باشد، مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

- (۱) ab (۲) $2ab$ (۳) $3ab$ (۴) $4ab$

حل: (۳) $\log(a-b) = \frac{1}{2} \log ab \implies \log(a-b) = \log \sqrt{ab}$

$\implies a-b = \sqrt{ab} \implies (a-b)^2 = ab \implies a^2 + b^2 - 2ab = ab$

$\implies a^2 + b^2 = 3ab$

تست: حاصل عبارت $A = \log_{\sqrt{xy}} x + \log_{\sqrt{xy}} y$ برابر است با:

- (۱) x (۲) y (۳) xy (۴) 2

حل: (۴) $A = \log_{\sqrt{xy}} xy = 2 \log_{xy} xy = 2$

تست: معادله‌ی $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)} = 7^{\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+2)}$ دارای جواب است.

- (۱) 2 (۲) -1 (۳) -2 (۴) 2 و -1

حل: (۴) $(x+2)^{\log_{\frac{1}{3}} 9} = (2x^2+3x+2)^{\log_{\frac{1}{7}} 7} \implies (x+2)^{-2} = (2x^2+3x+2)^{-1}$

$\implies (x+2)^2 = 2x^2+3x+2 \implies x^2+4x+4 = 2x^2+3x+2 \implies$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \text{ یا } x = 2$$

تست : در دستگاه : $\begin{cases} \log x^2 y^2 = 2 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$ کدام است ؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱ (۳) ۱۱ (۴) ۹

حل : (۳) $\begin{cases} \log x^2 + \log y^2 = 2 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2 \log x + 2 \log y = 2 \\ 2 \log x - 2 \log y = 2 \end{cases}$

$$\implies \Delta \log x = \Delta \implies \log x = 1 \implies x = 10 \text{ و } \log \frac{10}{y} = 1$$

$$\implies \left(\frac{10}{y}\right) = 10 \implies y = 1 \implies x + y = 11$$

تست : حاصل عبارت $\frac{1}{\log_{18} 3} - \frac{1}{\log_3 2}$ برابر است با :

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۳

حل : (۲) $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$

تست : جواب معادله‌ی $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$ کدام است ؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۹ (۳) ۱ (۴) ۸

حل : (۴) $x = 2^{2^4} \implies x = 2^2 \implies x = 8$

تست : دامنه‌ی تابع $f(x) = \log(\log(\log x))$ کدام است ؟

- (۱) $(10, +\infty)$ (۲) $(0, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(2, +\infty)$

حل: (۱) $\log(\log x) > 0 \implies \log(\log x) > \log 1 \implies \log x > 1$

$\log x > \log 10 \implies x > 10$

تست: جواب معادله‌ی $25^{\log x} = 5 + 4(5^{\log x})$ کدام است؟

- (۱) 10 (۲) -1 (۳) 5 (۴) 1

حل: (۱) $5^{2 \log x} = 5 + 4(5^{\log x})$

$\implies (5^{\log x})^2 - 4(5^{\log x}) - 5 = 0 \implies (5^{\log x} - 5)(5^{\log x} + 1) = 0$

$\implies 5^{\log x} = -1$ (غ ق ق) یا $5^{\log x} = 5 \implies \log x = 1 \implies x = 10$

تست: معادله‌ی $6^{\log x} + 8^{\log x} = x$ دارای جواب است.

- (۱) 10 (۲) 100 (۳) 1000 (۴) $\frac{1}{10}$

حل: (۲) $6^{\log x} + 8^{\log x} = x^{\log 10} \implies 6^{\log x} + 8^{\log x} = 10 \cdot \log x$

$\implies \frac{6^{\log x}}{10 \cdot \log x} + \frac{8^{\log x}}{10 \cdot \log x} = 1 \implies \left(\frac{6}{10}\right)^{\log x} + \left(\frac{8}{10}\right)^{\log x} = 1$

$\implies \log x = 2 \implies x = 100$

تست: مجموعه جواب‌های معادله‌ی $\log_x 2 \times \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$ کدام است؟

- (۱) 12 (۲) 24 (۳) 32 (۴) 64

حل: (۱) $\log_x 2 \times \frac{1}{\log_2 \frac{x}{16}} = \frac{1}{\log_2 \frac{x}{64}}$

$\implies \log_x 2 \times \frac{1}{\log_2 x - \log_2 16} = \frac{1}{\log_2 x - 6} \quad (\log_2 x = t) \implies \frac{1}{t} \times \frac{1}{t-4} = \frac{1}{t-6}$

$\implies \dots \implies t = 2 \text{ یا } 3 \implies \log_2 x = 2 \text{ یا } 3 \implies x = 4 \text{ یا } 8$

تست: در دستگاه: $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$ حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۱۲

حل: (۳) $\begin{cases} \frac{\log x}{\log y} + \frac{\log y}{\log x} - 2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{(\log x)^2 - (\log y)^2 - 2 \log x \log y}{\log x \log y} = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

$\implies \frac{(\log x - \log y)^2}{\log x \log y} = 0 \implies \begin{cases} \log x = \log y \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

$\implies x^2 + x = 12 \implies x = -4 \text{ (غ ق ق)} \text{ یا } x = 3 \implies y = 3$

تست: جواب معادله $\frac{\log 2}{1 - \log x} = \frac{1}{3}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{3}$

حل: (۱) $3 \log 2 = 1 - \log x \implies \log x = 1 - 3 \log 2 = \log 10 - \log_2 8 = \log \frac{10}{8}$

$= \log \frac{10}{8} \implies x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

تست: اگر $\begin{cases} \log_3 x - \log_9 y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ آنگاه $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲

حل: (۴) $\log_r x = \log_q y$

$$\implies \log_r x = \frac{1}{r} \log_r y \implies \log_r x = \log_r \sqrt[r]{y} \implies x = \sqrt[r]{y} \text{ و } y = x^r$$

$$2x - x^2 = 1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0 \implies (x-1)^2 = 0 \implies x = 1 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} y = 1$$

تست: ریشه‌های معادله‌ی $x^{\log_\delta x} = 625$ کدامند؟

- (۱) 25 و $\frac{1}{25}$ (۲) 25 و $\frac{1}{\delta}$ (۳) ± 25 (۴) $\pm \delta$

حل: (۱) $\log_\delta x = \log_x 625 \implies \log_\delta x = \log_x \delta^4 = 4 \log_\delta x \implies \log_\delta x = \frac{1}{\log_\delta x}$

$$\implies (\log_\delta x)^2 = 4 \implies \log_\delta x = \pm 2 \implies x = 25 \text{ و } x = \frac{1}{25}$$

تست: اگر $\log_9 8 = a$ ، آنگاه $\log_{27} 16 \times \log_3 2$ برابر است با:

- (۱) $3a^2$ (۲) $\frac{3a^2}{4}$ (۳) $\frac{4a^2}{3}$ (۴) $\frac{16a^2}{27}$

حل: (۴) $\log_9 8 = a \implies \log_{3^2} 2^3 = a \implies \frac{3}{2} \log_3 2 = a \implies \log_3 2 = \frac{2a}{3}$

$$\log_{27} 16 \times \log_3 2 = \log_{3^3} 2^4 \times \log_3 2 = \frac{4}{3} \times \frac{2a}{3} \times \frac{2a}{3} = \frac{16a^2}{27}$$

تست: دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_{(x-1)}(x - [x] + 2)$ کدام است؟

- (۱) $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty)$
 (۳) $(2, +\infty)$ (۴) $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$

$$\cdot \leq x - [x] < 1 \implies 2 \leq x - [x] + 2 < 3 \implies (\text{مثبت است}) \quad \text{حل: (۱)}$$

$$x - 1 > 0 \text{ و } x - 1 \neq 1 \implies D_f = (1, +\infty) - \{2\}$$



بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>