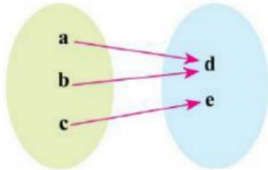
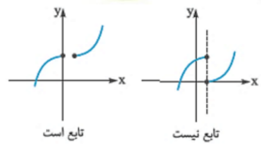
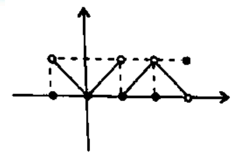
یادآوری : اگر یادمان باشد تابع را به دستگاهی تشبیه می کردیم که به ازای یک ورودی مشخص فقط یک خروجی معین تولید می کند . یعنی در آن ، خروجی به ورودی بستگی دارد . در ریاضی به مقادیر ورودی دامنه و به مقادیر خروجی برد می گوییم . بنابراین طبق تعریف بالا هیچ دو Y متمایزی نمی توانند X های یکسانی داشته باشند و همواره می گوییم Y تابعی از X است و شکل جبری یا ضابطه ای آن را بصورت $y = f(x)$ نشان می دهیم .

به طور کلی تابه را به سه روش زیر می توان نمایش داد :



۱– نمایش پیکانی (نمودار ون) : در این حالت تنها در صورتی تابع خواهیم داشت که از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود.





۲– نمایش بکمک نمودار (آزمون خط قائم)

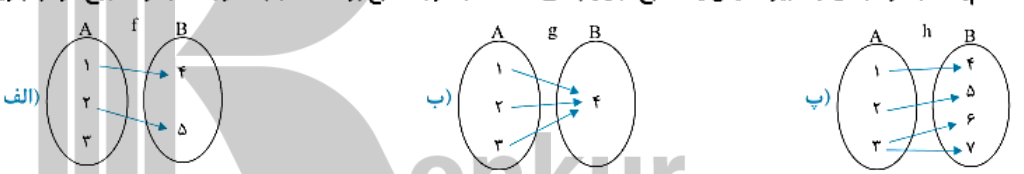
۳– نمایش بصورت زوج مرتب : $f = \{(۲, -۱), (\sqrt{۲}, ۱ - \sqrt{۲}), (\pi, \frac{۱}{\pi}), (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵})\}$

توجه داشته باشید که اگر مولفه های اول برابر باشند مولفه های دو نیز باید برابر باشند : $\begin{cases}(x,y) \in f \\ (x,z) \in f\end{cases} \Rightarrow y = z$

۴– نمایش بکمک ضابطه تابع : بعنوان مثال شکل ضابطه ای یک تابع خطی به این صورت است : $f(x) = ax + b$

«بچه ها برای مشخص کردن یک تابع به ضابطه ی آن و دامنه آن نیازمندیم »

کدام‌یک از نمودارهای ون زیر نمایش یک تابع از A به B است، در صورت تابع بودن آن را به صورت مجموعه زوج مرتب بنویسید.



الف) f یک تابع نیست، چون از عضو ۳ در A پیکانی خارج نشده است. ب) g یک تابع است و نمایش زوج مرتب آن به صورت $f = \{(۱,۴),(۲,۴)(۳,۴)\}$ است.

پ) h یک تابع نیست چون از عضو ۳ در A دو پیکان خارج شده است.

نتیجه

هرگاه f از A به B یک تابع باشد لزومی ندارد به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وصل شود.

تذکر

هرگاه f تابعی از A به B باشد، آن‌گاه مجموعه A دامنه تابع و مجموعه تمام اعضایی از B که بوسیله نوک فلش مشخص شده است، برد تابع می‌گویند.

دامنه تابع : به طور کلی دامنه تابع مجموعه مجاز برای ورودی ها (X) است که آن را با D_f نمایش می دهند به طور کلی دامنه تابع از روی ضابطه تابع قابل تشخیص است.

۱. اگر تابع با زوج‌های‌مرتب تعریف شده باشد دامنهٔ تابع برابر مجموعهٔ شامل مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب است.
۲. اگر تابع را با نمودار پیکانی نشان دهیم دامنهٔ تابع برابر مجموعهٔ شامل عضوهایی از مجموعهٔ اول است که از آن‌ها پیکانی خارج شده است.
۳. اگر تابع را با نمودار مختصاتی نشان دهیم دامنهٔ تابع برابر تصویر نمودار تابع روی محور xها است.
۴. اگر تابع را با ضابطهٔ جبری تعریف کنیم دامنهٔ تابع برابر بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطه به ازای اعضای آن تعریف می‌شود.

هم دامنه : هم دامنه یک تابع را می توان هر مجموعه دلخواه شامل برد تابع درنظر گرفت .

نوع نمایش	دامنه	برد
مجموعهٔ زوج‌های مرتب	مجموعهٔ شامل مؤلفه‌های اول	مجموعهٔ شامل مؤلفه‌های دوم
نمودار پیکانی	اعضایی از مجموعهٔ اول که از آن‌ها پیکان خارج شده است.	اعضایی از مجموعهٔ دوم که به آن‌ها پیکانی رسیده است.
نمودار مختصاتی	تصویر نمودار روی محور xها	تصویر نمودار روی محور yها
ضابطهٔ جبری	مقادیری از x که ضابطه به ازای آن‌ها تعریف می‌شود.	مقادیری که به ازای xهای متعلق به دامنه، برای y به دست می‌آید.

در تابع $y = x^2 - 2x$ دامنه، برد و هم‌دامنه را مشخص کنید.

پاسخ دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است، حال برد تابع را بدست می‌آوریم:

چون تابع درجه دوم است و ضریب x^2 مثبت، پس دارای کمترین مقدار است و این مقدار به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می‌آید:

پس $R_f = [-1, +\infty)$، بنابراین هم‌دامنه هر مجموعه‌ای شامل $[-1, +\infty)$ می‌باشد مانند........ $x = ... \to y = (.......)^2 - 2(......) = -1$

شرط برابری دو تابع : اگر نمودار های دو تابع بر هم منطبق شوند آنگاه آن دو تابه با هم برابرند . توجه داشته باشید :

نتیجه

۱: در نمایش زوج مرتب هنگامی دو تابع برابرند که تمام زوج مرتب‌های آن‌ها یکسان باشد.

۲: هرگاه ضابطه‌های دو تابع f و g مشخص شده باشند در صورتی دو تابع f و g برابر یکدیگرند که:

اولاً: دامنه آن‌ها یکسان باشند: $D_f = D_g$

ثانیاً: برای هر عضو از این دامنه یکسان مانند x مقادیر تابع f و g یعنی $f(x)$ و $g(x)$ یکسان باشد $(f(x) = g(x))$

کدام دو تابع با هم برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{|x|} \\ g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = (\sqrt{x})^2 \\ g(x) = x \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{|x|} \\ g(x) = |x| \end{cases}$

بررسی گزینهٔ «۱»: چون $x^2 \geq 0$ پس زیر رادیکال همواره نامنفی است، بنابراین $D_f = \mathbb{R}$، از طرفی $D_g = ...$ است، پس D_g .... D_f است.

پس تابع f با g برابر ..... $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \to f(x) \; ... \; g(x)$

بررسی گزینهٔ «۲»:

$D_f = \mathbb{R} - \{...\} \quad , \quad D_g = \mathbb{R} - \{...\}$

پس D_g .... D_f است. از طرفی داریم:

$f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} ...... & x > 0 \\ ...... & x < 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} ...... & x > 0 \\ ...... & x < 0 \end{cases}$

پس تابع f با g برابر است.

بررسی گزینهٔ «۳»:

$D_f : x \geq 0 \rightarrow D_f = ...$

و $D_g = ...$ می‌باشد پس D_g .... D_f بنابراین تابع f با g برابر ....

بررسی گزینهٔ «۴»:

$D_f = \mathbb{R} - \{...\} \quad , \quad D_g = ...$

بنابراین D_g .... D_f پس تابع f با g برابر ....

پس گزینهٔ .... صحیح است.

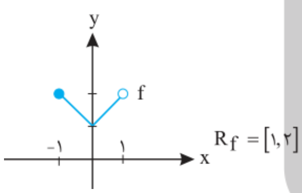
هرگاه توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases} b & x=2 \\ \dfrac{x^2-5x+a}{x-2} & x\neq 2 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ برابر باشند، مقدار b چقدر است؟

به ازای چه مقادیری از a دو تابع f و g با ضابطه‌های $g(x) = 1$ و $f(x)=\dfrac{x^2+ax+2}{x^2+ax+2}$ برابرند؟

کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) برد و هم‌دامنه می‌توانند یکی باشند.
۲) هم دامنه زیر مجموعه‌ای از برد آن است.
۳) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن $\{1\}$ باشد.
۴) بی‌شمار تابع وجود دارد که برد آن $\{1\}$ است.

اگر $\begin{cases} f:[-1,1) \rightarrow B \\ f(x) = |x| + 1 \end{cases}$ آن‌گاه B کدام مجموعه زیر می‌تواند باشد؟



۱) $(1,2]$
۲) $[-2,1)$
۳) $[1,2]$
۴) $[0,2)$

ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ است. کدام یک از توابع زیر با تابع $g(x) = |-x|$ برابر است؟

۱) $-xf(x)$
۲) $xf(x)$
۳) $x + f(x)$
۴) $-x + f(x)$

$$g(x) = |-x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow xf(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = xf(x)$$

تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2|$ برابر کدام یک از توابع است؟

۱) $\left|\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}\right|$
۲) $\left|\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}\right|$
۳) $\dfrac{(x - 2)^2}{|x - 2|}$
۴) $\dfrac{|6x - 12|}{6}$

تابع $g(x)=\frac{|6x-12|}{6}$ با تابع داده شده برابر است زیرا $D_f=D_g=\mathbb{R}$ و $g(x)=\frac{\cancel{6}|x-2|}{\cancel{6}}=|x-2|\Rightarrow f(x)=g(x)$

تابع $f(x)=|x+1|$ با تابع $|g(x)|$ برابر است، $g(x)$ برابر است با:

۱) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$ ۲) $\frac{|x^2-1|}{x-1}$ ۳) $\frac{x^2-x}{|x|}$ ۴) $\frac{(x+1)^2}{x+1}$

دامنه‌ی تابع f برابر $\mathbb{R}$ است پس باید دامنه‌ی تابع $|g|$ نیز برابر با $\mathbb{R}$ باشد که فقط گزینه‌ی (۱) این شرط را دارد (مخرج کسر آن هیچ‌گاه صفر نمی‌شود)

$$g(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x+1)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}=x+1$$

$$\longrightarrow |g(x)|=|x+1| \quad , \quad D_g=D_{|g|}=\mathbb{R}$$

تابع $y=\left|2x-|x|\right|$ با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

۱) $y=2|x|-x$ ۲) $y=x-2|x|$ ۳) $y=|x|-2x$ ۴) $y=2x-|x|$

دامنه‌ی تمام توابع داده شده برابر با $\mathbb{R}$ است پس داریم:

$$y=\left|2x-|x|\right|=\begin{cases}|2x-x| & x\ge 0\\ |2x+x| & x<0\end{cases}=\begin{cases}|x| & x\ge 0\\ |3x| & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -3x & x<0\end{cases}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده فقط گزینه ۱ با تابع فوق مساوی است زیرا:

گزینه‌ی ۱ : $y=2|x|-x=\begin{cases}2x-x & x\ge 0\\ -2x-x & x<0\end{cases}=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -3x & x<0\end{cases}$

اگر $f(x)=\begin{cases}n & x=m\\ \frac{x^3+8}{x-m} & x\ne m\end{cases}$، $g(x)=x^2-2x+4$ و دو تابع f و g برابر باشند، مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

$$f(x)=\begin{cases}n & x=m\\ \frac{x^3+8}{x-m} & x\ne m\end{cases}\longrightarrow f(x)=\begin{cases}n & x=m\\ \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x-m} & x\ne m\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی f و g می‌توان نتیجه گرفت که $m=-2$ است، همچنین چون $f=g$ است می‌توان نوشت

$$f(-2)=g(-2)$$

$$\begin{cases}g(-2)=(-2)^2-2(-2)+4=12\\ f(-2)=n\end{cases}\longrightarrow n=12$$

پس $m+n=(-2)+(12)=10$

دو تابع $f(x)=\frac{3}{x-2}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^2+cx+4}$ برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -4 ۳) -7 ۴) ۳

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$، پس $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ است بنابراین مخرج کسر تـابع g باید فقط یک ریشه‌ی ۲ باشد.

$$x^2+cx+4=0\xrightarrow{x=2}(2)^2+2c+4=0\to 2c=-8\to c=-4$$

بنابراین:

$$g(x)=\frac{ax+b}{x^2-4x+4}=\frac{ax+b}{(x-2)^2}$$

با توجه به ضابطه‌ی f، هنگامی g بـا f مسـاوی اسـت کـه $x=2$ ریشـه‌ی صورت کسر g نیز باشد پس داریم:

$$ax+b=0\xrightarrow{x=2}2a+b=0\to b=-2a\qquad g(x)=\frac{ax+b}{(x-2)^2}=\frac{ax-2a}{(x-2)^2}=\frac{a(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{a}{x-2}$$

از طرفی چون ضابطه f مساوی $f(x)=\frac{3}{x-2}$ پس $a=3$.

$$b=-2a=-6\longrightarrow a+b+c=3-6-4=-7$$

به ازای چند مقدار صحیح a، دو تابع $f(x)=x^2+2ax+13$ و $g(x)=\left|x^2+2ax+13\right|$ برابرند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

دو تابع f و g هنگامی با هم برابرند که همواره $f\ge 0$ باشد یعنی عبارت درجه‌دوم $x^2+2ax+13\ge 0$ پس باید $\Delta\le 0$ باشد.

$$\Delta=(2a)^2-4(1)(13)=4a^2-52\xrightarrow{\Delta\le 0}4a^2-52\le 0\longrightarrow a^2\le 13\longrightarrow -\sqrt{13}\le a\le\sqrt{13}$$

بنابراین اعداد صحیحی که در این فاصله قرار دارند عبارتند از: $-3,-2,-1,0,1,2,3$

به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x)=\frac{2x^2+2x-2a}{x^2+x-a}$ و $g(x)=a^3-a+2$ با هم برابرند.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{2(x^2+x-a)}{x^2+x-a}=2\\ g(x)=a^3-a+2\end{cases}\xrightarrow{f=g}\begin{cases}a^3-a+2=2\to a^3-a=0\\ a(a^2-1)=0\to\begin{cases}a=0\\a=1\\a=-1\end{cases}\end{cases}$$

از طرفی باید $D_f=D_g=\mathbb{R}$ باشد پس مخرج کسر تـابع f بایـد مخـالف صفر باشد بنابراین Δ مخرج منفی است.

$$x^2+x-a=0\to\Delta=1+4a<0\to a<-\frac{1}{4}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق فقط $a=-1$ قابل قبول است.

اگر دو تابع $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ و $g(x)=\frac{x-2c}{x^3-5x^2+ax-b}$ برابر باشند. حاصل $a-b+2c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۶

$$D_f=\mathbb{R}-\{1,2\}\to D_g=\mathbb{R}-\{1,2\}$$

پس ۱ و ۲ ریشه‌های مخرج تابع g است.

$$\begin{cases}x^3-5x^2+ax-b=0\xrightarrow{x=1}1-5+a-b=0\to a-b=4\\ x^3-5x^2+ax-b=0\xrightarrow{x=2}8-20+2a-b=0\to 2a-b=12\end{cases}\to\begin{cases}a=8\\b=4\end{cases}$$

$$g(x)=\frac{x-2c}{x^3-5x^2+8x-4}=\frac{x-2c}{(x-2)^2(x-1)}\xrightarrow{f(x)=g(x)}x-2c=x-2\to c=1$$

پس $a-b+2c=8-4+2=6$ است.

اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}+ax+b}{x+1} & x\neq -1\\ \dfrac{c}{x-1} & x=-1\end{cases}$ با یک تابع همانی برابر باشد حاصل $a-b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) -3

تابع $f(x)$ با تابع $g(x)=x$ برابر است پس داریم:

$$f(-1)=g(-1)\to \frac{c}{-1-1}=-1\to c=2$$

$$x\neq -1\to f(x)=g(x)\to \frac{x^{2}+ax+b}{x+1}=x \quad \to x^{2}+ax+b=x^{2}+x\to a=1,b=0$$

پس حاصل $a-b+c=1-0+2=3$ می‌باشد.

اگر دو تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax^{3}+b}{2x^{3}-c}$ و g با ضابطه $g(x)=2$ و دامنه $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ باهم برابر باشند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

دو تابع f و g باهم مساویند پس $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ است پس $x=-1$ ریشهٔ مخرج تابع f است.

$$2x^{3}-c=0\xrightarrow{x=-1}2(-1)^{3}-c=0\to -2-c=0\to c=-2$$

همچنین $f(x)=g(x)$، پس داریم:

$$\frac{ax^{3}+b}{2x^{3}+2}=2\to ax^{3}+b=4x^{3}+4\to a=4,b=4$$

پس $a+b+c=4+4-2=6$ است

تساوی تابع‌های زیر را بررسی کنید.

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}\\ g(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\end{cases}$$

باز هم اول می‌رویم سراغ دامنهٔ تابع‌ها:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x>1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x>1\Rightarrow D_f=(1,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}\Rightarrow \frac{x}{x-1}\geq 0\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

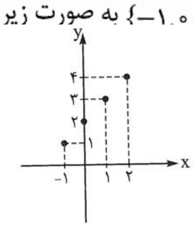
x	$-\infty$	۰		۱	$+\infty$
x	$-$	۰	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	۰	$+$
$\dfrac{x}{x-1}$	$+$	۰	$-$	ت ن	$+$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$$

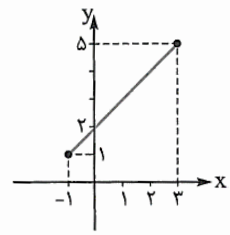
چون دامنهٔ دو تابع، با هم برابر نیستند پس لازم نیست برویم سراغ ضابطه‌ها و همین‌جا می‌توانیم بگوییم دو تابع با هم مساوی نیستند.

انواع تابع : در این درس با توابع ۱- گویا ۲-رادیکالی (ریشه دوم) ۳- پله ای (جزء صحیح) آشنا می شویم .
البته قبل از اینکه به بحث درمورد توابع گویا بپردازیم به موارد زیر توجه کنید

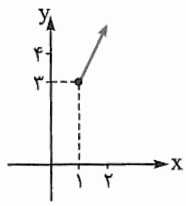
هر تابعی که نمودارش بخشی از یک خط راست باشد، تابع خطی است. ضابطهٔ تابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$ است. دامنهٔ تابع خطی ممکن است $\mathbb{R}$ یا زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. مثلاً نمودار تابع $f(x)=x+۲$ با دامنه‌های $\mathbb{R}$ ، $[۱,+\infty)$، $[-۱,۳]$، $(-\infty,۲)$ ، $\mathbb{Z}$ و $\{-۱,۰,۱,۲\}$ به صورت زیر است:



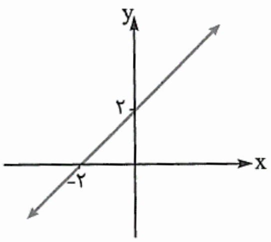
$f(x)=x+۲, D=\{-۱,۰,۱,۲\}$



$f(x)=x+۲, D=[-۱,۳]$



$f(x)=x+۲, D=[۱,+\infty)$



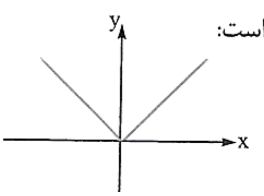
$f(x)=x+۲, D=\mathbb{R}$

برد تابع خطی را با توجه دامنه ی آن از روی نمودار تابع پیدا می کنیم .

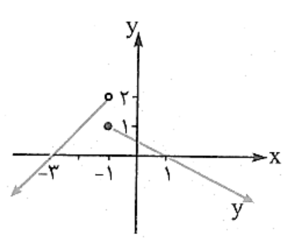
تابع ثابت: **تابعی که ضابطه‌اش به شکل $f(x)=c$ باشد، یک تابع ثابت است. برد** تابع ثابت یک **مجموعهٔ تک‌عضوی** است و نمودارش قسمتی یا تمام‌نقاط یک خط راست موازی محور xها (*یا همان خط افقی*) است. برای این‌که ببینیم یک تابع، ثابت هست یا نه، باید بررسی کنیم آیا مقدار تابع، به ازای تمام مجموعهٔ مقادیر x متعلق به دامنه، یکسان است یا نه.

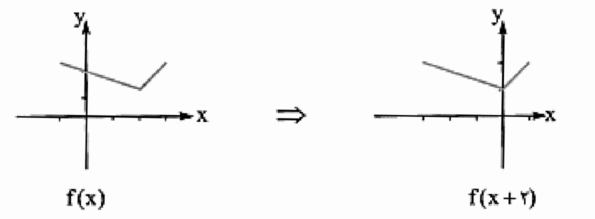
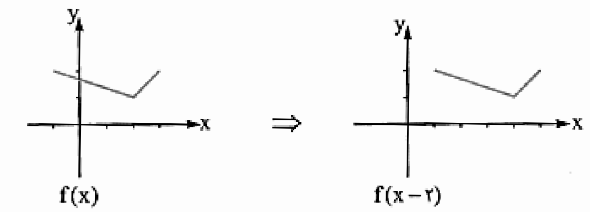
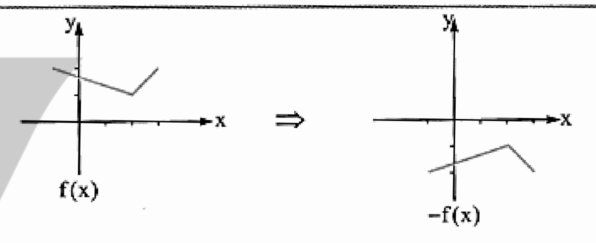
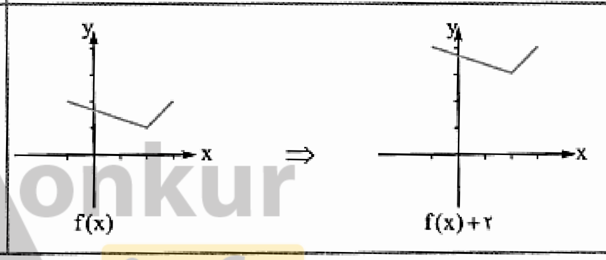
تابع همانی: تابع $f(x)=x$ (با هر دامنهٔ دلخواه) یک تابع همانی است، **یعنی به هر مقدار x، همان مقدار را برای y نسبت می‌دهد.** نمودار تابع همانی، قسمتی یا تمام خط $y=x$ (**یا نیمساز ناحیهٔ اول و سوم**) است.

تابع قدرمطلق: **تابع قدرمطلق به صورت** $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ **تعریف می‌شود.** قدرمطلق هر عدد غیرصفر برابر مقدار مثبت آن عدد و قدرمطلق صفر برابر صفر است، یعنی اگر عدد یا عبارت داخل قدرمطلق بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد به همان صورت از قدرمطلق خارج می‌شود و اگر منفی باشد قرینه می‌شود (*یا به طور خودمانی، می‌گوییم در منفی ضرب می‌شود*) نمودار تابع قدرمطلق به شکل روبه‌رو است:
(در این نمودار هر کدام از نیم‌خط‌ها نیمساز ناحیهٔ اول و دوم هستند و زاویهٔ بین دو نیم‌خط برابر ۹۰° است.)



حاصل $f(-۲)+f(۲)$ کدام است؟



تابع	روش رسم	مثال
$f(x+a)$	نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ $(-a)$ واحد در راستای محور xها انتقال می‌دهیم (یعنی a واحد به سمت چپ).	
$f(x-a)$	نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ a واحد در راستای محور xها انتقال می‌دهیم (یعنی a واحد به سمت راست).	
$-f(x)$	نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم (عرض تمام نقاط قرینه می‌شود).	
$f(x)+b$	نمودار تابع $f(x)$ را به اندازهٔ b واحد در راستای محور yها انتقال می‌دهیم (b واحد به سمت بالا با شرط $b>0$ و $\|b\|$ واحد به سمت پایین به شرط $b<0$).	

۱- تابع گویا :

هر تابع مانند $f(x)$ که بتوان ضابطه آن را به صورت $y=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای هستند و $q(x)\neq 0$ را یک تابع گویا می‌نامند.

مثال ۱: هر یک از توابع زیر ضابطه یک تابع گویا هستند.

الف) $y=\frac{1}{x}$

ب) $y=\frac{5x-1}{2x+1}$

پ) $y=\frac{\sqrt{2}x-3}{x^2-7x}$

تذکر

۱) هر تابع چندجمله‌ای یک تابع گویا است ولی عکس این جمله درست نیست.

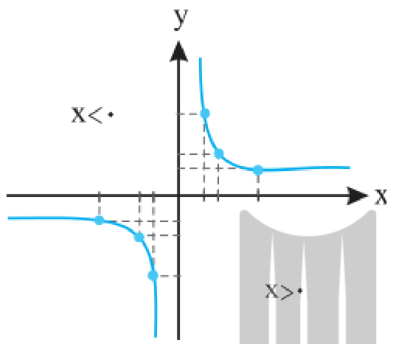
۲) هر تابع ثابت، یک تابع گویا است.

۳) مجموع، تفریق، حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم دو تابع گویا، یک تابع گویا است.

۴) دامنهٔ یک تابع گویا ممکن است هر مجموعهٔ دلخواهی باشد.

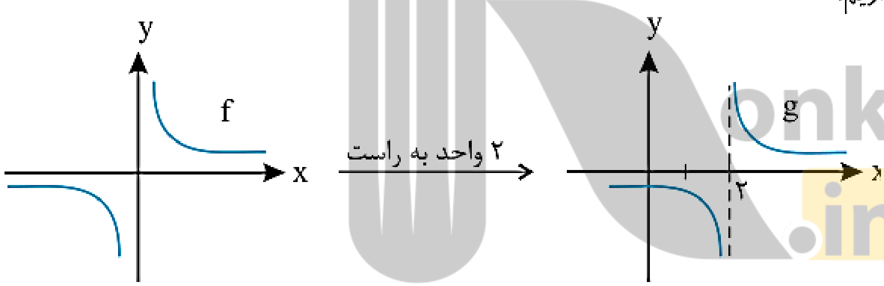
ساده‌ترین نوع این توابع، تابع با ضابطه $y=\frac{1}{x}$ است. که به ازای $x=0$ تعریف نشده و نمودار آن به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود.

x	$-\infty \leftarrow \cdots$	-2	-1	$-0/5 \cdots \rightarrow$	0	$\leftarrow \cdots$	$0/5$	1	2	$\cdots \rightarrow$	$+\infty$
y	$0 \leftarrow \cdots$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-2 \cdots \rightarrow$	$-\infty$ ت ن $+\infty$	$\leftarrow \cdots$	2	1	$0/5$	$\cdots \rightarrow$	0



مثال **نمودار تابع g با ضابطه $g(x)=\frac{1}{x-2}$ را به کمک انتقال تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{1}{x}$ رسم کنید.**

پاسخ با توجه به ضابطهٔ f و g می‌توان نتیجه گرفت که $g(x)=f(x-2)$ است، پس برای رسم تابع g کافی است نمودار f را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، پس داریم:

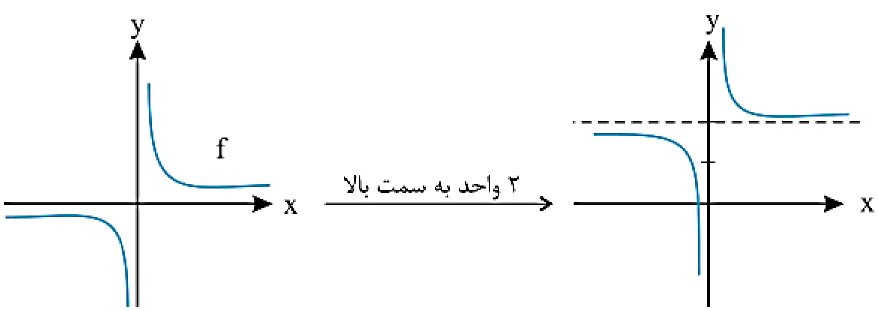


مثال **نمودارتابع g با ضابطه $g(x)=\frac{2x+1}{x}$ را به کمک انتقال تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ رسم کنید.**

پاسخ ابتدا ضابطهٔ g را ساده‌تر می‌نماییم:

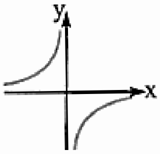
$$g(x)=\frac{2x+1}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\overset{x\neq 0}{=\!=}2+\frac{1}{x}$$

پس $g(x)=f(x)+2$، حال به کمک انتقال نمودار تابع g را رسم می‌کنیم:

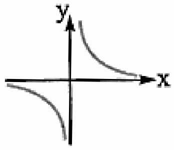


است $R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

رسم نمودار تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به روش سریع :

۱) $ad - bc > 0 \Leftarrow$ شاخه‌های منحنی صعودی‌اند و نمودار مثل $-\frac{1}{x}$ یعنی  است.

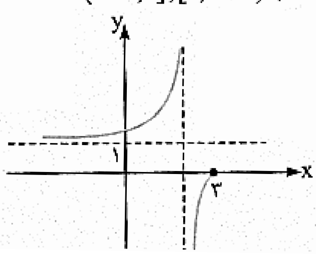
$\Leftarrow$ نمودار تابع به اندازهٔ $\frac{-d}{c}$ (یعنی ریشهٔ مخرج) در راستای محور xها و به اندازهٔ $\frac{a}{c}$ در راستای محور yها منتقل می‌شود.

۲) $ad - bc < 0 \Leftarrow$ شاخه‌های منحنی نزولی‌اند و نمودار مثل $\frac{1}{x}$ یعنی  است.

$\Leftarrow$ نمودار تابع به اندازهٔ $\frac{-d}{c}$ (یعنی ریشهٔ مخرج) در راستای محور xها و به اندازهٔ $\frac{a}{c}$ در راستای محور yها منتقل می‌کنیم.

برد تابع $f(x) = \frac{x-3}{x-2}, D_f = (-\infty, 3] - \{2\}$ کدام است؟

۱) $[0, +\infty)$ ۲) $[0, 1]$ ۳) $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 0], [1, +\infty)$



با توجه به مطالب گفته‌شده برد تابع $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ برابر است با $\mathbb{R} - \{1\}$، ولی با توجه به دامنهٔ تابع، $R_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

دامنه تابع گویا :

توابع گویا به ازای x هایی که مخرج کسر را صفر می‌کنند تعریف نشده است، بنابراین دامنه این توابع $\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ است.

> **نکته**
> برای پیدا کردن دامنه توابع گویا در صورت ساده شدن کسر مجاز به این کار نیستیم زیرا ممکن است دامنه تغییر کند.

① قبل از پیداکردن دامنه حق نداریم تابع را ساده کنیم، چون ممکن است ریشه‌ای از مخرج حذف شود، مثلاً:

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-x}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{درست}} x^{۲}-x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۱\end{cases}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۱\}\ \checkmark\\[2ex]\xrightarrow{\text{نادرست}} f(x)=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x(x-۱)}=\frac{x+۱}{x},\ x=۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ \times\end{cases}$$

② اگر در صورت و مخرج ضابطهٔ تابع، کسر دیگری داشته باشیم، باید ریشهٔ مخرج‌های این کسرها را هم پیدا کنیم، مثلاً:

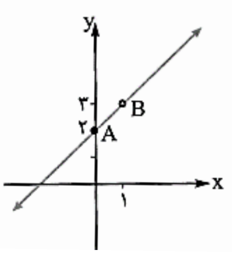
$$f(x)=\frac{۱+\frac{۱}{x+۱}}{۱-\frac{۳}{x^{۲}-۱}}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{\text{درست}}\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x=۱,x=-۱\\۱-\frac{۳}{x^{۲}-۱}=۰\Rightarrow\frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۱}=۰\Rightarrow x^{۲}-۴=۰\Rightarrow x=۲,x=-۲\\\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۲,۲,-۱,۱\}\ \checkmark\end{cases}\\[2ex]\xrightarrow{\text{نادرست}} f(x)=\frac{\frac{x+۱+۱}{x+۱}}{\frac{x^{۲}-۱-۳}{x^{۲}-۱}}=\frac{\frac{x+۲}{x+۱}}{\frac{x^{۲}-۴}{(x-۱)(x+۱)}}=\frac{(x+۲)(x-۱)(x+۱)}{(x+۲)(x-۲)(x+۱)}\\[2ex]=\frac{x-۱}{x-۲}\Rightarrow x-۲=۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}\ \times\end{cases}$$

③ اگر صورت و مخرج یک تابع گویا ریشهٔ مشترک داشته باشند، می‌توانیم x را مخالف ریشهٔ موردنظر، فرض کنیم و ضابطهٔ تابع را ساده کنیم. با این روش می‌توانیم، نمودار این تابع‌ها را به راحتی رسم کنیم. نمودار این تابع‌ها در ریشهٔ مشترک **صورت و مخرج** *(که متعلق به دامنهٔ تابع نیست)* **نقطهٔ توخالی دارد.**

مثلاً بیایید نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x-۱}$ را رسم کنیم: $f(x)=\frac{x^{۲}+x-۲}{x-۱}\Rightarrow f(x)=\frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱}\xrightarrow{x\neq۱} f(x)=x+۲$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=x+۲\,(x\neq۱)$ است، یعنی نمودار تابع یک خط راست است که در نقطهٔ $x=۱$ *(یعنی نقطهٔ* $(۱,۳)$*)* توخالی است:

$$x=۰\Rightarrow y=۰+۲=۲\Rightarrow A(۰,۲)$$
$$x=۱\Rightarrow y=۱+۲=۳\Rightarrow B(۱,۳)$$



دقت کنید با این‌که $۱\notin D_f$*، اما مختصات نقطهٔ* $B(۱,۳)$ *را پیدا می‌کنیم تا این نقطه را توخالی رسم کنیم.*

مثال دامنهٔ توابع گویا با ضابطه‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $y=\frac{۷x-۴}{۲x-۵}$ ب) $y=\frac{x^۲-۴x}{x^۲+x+۱}$ پ) $y=\frac{۲x+۱}{x^۲-۳x+۲}$ ت) $y=\frac{x}{x-۲}+\frac{۵}{x^۲-۳x}$

پاسخ

الف) ابتدا ریشهٔ مخرج را بدست می‌آوریم:

$$۲x-۵=۰\to x=\frac{۵}{۲}$$

پس دامنهٔ تابع برابر است با $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{۵}{۲}\right\}$.

ب)

ریشهٔ مخرج: $x^۲+x+۱=۰\to \Delta=-۳<۰$

پس معادلهٔ فوق ریشه ندارد و $D=\mathbb{R}$ است.

پ)

ریشهٔ مخرج: $x^۲-۳x+۲=۰\longrightarrow \begin{cases} x=\dots \\ x=\dots \end{cases}$

پس $D=\mathbb{R}-\{\dots,\dots\}$ است.

ت) این تابع از مجموع دو تابع کسری تشکیل شده پس داریم:

$$\begin{cases} x-۲=۰\to x=\dots \\ x^۲-۳x=۰\to \begin{cases} x=\dots \\ x=\dots \end{cases} \end{cases}$$

پس $D=\dots-\{\dots,\dots,\dots\}$ است.

تست دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-\frac{۸}{x}}{x^۳-\frac{۱۶}{x}}$ برابر کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{۲,-۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰,۲,-۲\}$

همان‌طور که گفتیم تمام مخرج‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x=۰ \\ x^۳-\frac{۱۶}{x}=۰ \Rightarrow \frac{x^۴-۱۶}{x}=۰ \Rightarrow x^۴=۱۶ \Rightarrow x=۲\,,\,x=-۲ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰,۲,-۲\}$$

مثال نشان دهید دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x^۲-x}$ باهم مساوی نیستند.

پاسخ

$$f(x)=\frac{۱}{x}\to D_f=\dots$$

$$g(x)=\frac{x-۱}{x^۲-x}\to x^۲-x=۰\to \begin{cases} x=\dots \\ x=\dots \end{cases}\to D_g=\dots.$$

پس $D_f\neq D_g$، از طرفی داریم:

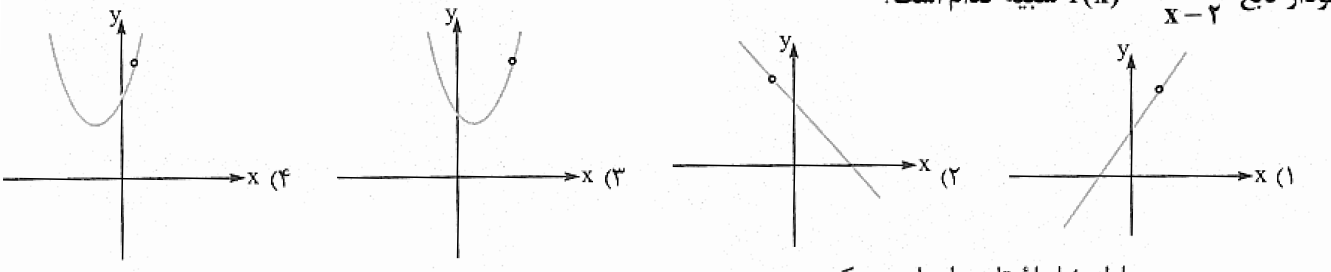
$$g(x)=\frac{x-۱}{x^۲-x}=\frac{x-۱}{x(x-۱)}\xrightarrow{۱\notin D_g} g(x)=\frac{\cancel{x-۱}}{x\,\cancel{(x-۱)}}=\frac{۱}{x}$$

چون شرط اول تساوی دو تابع برقرار نبود پس دو تابع f و g باهم مساوی نیستند.

مثال ۶: دامنه هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

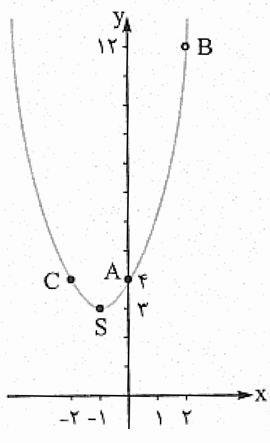
الف) $y=\frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۴}$ ب) $y=\dfrac{۱}{۱+\frac{۱}{x+۱}}$

نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ شبیه کدام است؟



اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2} \Rightarrow f(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \xrightarrow{x\neq 2} f(x)=x^2+2x+4$$

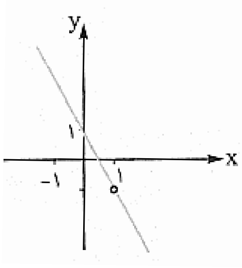


پس ضابطهٔ f به صورت $f(x)=x^2+2x+4\,(x\neq 2)$ است، یعنی نمودار تابع یک سهمی است (که رسمش را پارسال یاد گرفتیم) که در نقطهٔ $x=2$ (یعنی نقطهٔ $(2,12)$) یک نقطهٔ توخالی دارد:

$$f(x)=x^2+2x+4\,,\ x\neq 2$$

$$S\Big|^{-1} \Rightarrow y=1-2+4=3 \Rightarrow S\Big|^{-1}_{3}\ ,A(0,4),B(2,12),C(-2,4)$$

کدام گزینه ضابطهٔ تابع با نمودار مقابل است؟



۱) $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{1-x}$
۲) $f(x)=\frac{-2x^2-3x+1}{x-1}$
۳) $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$
۴) $f(x)=\frac{-2x^2+3x+1}{1-x}$

نمودار داده‌شده یک تابع خطی است که در نقطهٔ $x=1$ توخالی است (یعنی $x=1$ جزء دامنهٔ تابع نیست) پس معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(0,1)$ و $(1,-1)$ را می‌نویسیم:

$$(0,1),(1,-1) \Rightarrow m=\frac{-1-1}{1-0}=-2 \Rightarrow y=-2x+1$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $x\neq 1$ و $f(x)=-2x+1$ است. ($x\neq 1$ را به این علت می‌نویسیم که $x=1$ جزء دامنه نبود) حالا برای این‌که ضابطه را به شکل کسری تبدیل کنیم، ضابطهٔ تابع یعنی $-2x+1$ را در عامل $x-1$ ضرب و تقسیم می‌کنیم: $\frac{(-2x+1)(x-1)}{x-1}$،

چون نوشتن $x-1$ در مخرج باعث می‌شود که $x=1$ جزء دامنه نباشد و از طرفی صورت و مخرج ضرب عبارت در $x-1$ باعث می‌شود که عبارت (در نقاط دیگر) تغییر نکند، پس:

$$f(x)=\frac{(-2x+1)(x-1)}{x-1}=\frac{-2x^2+2x+x-1}{x-1}=\frac{-2x^2+3x-1}{x-1}$$

حالا ممکن است فکر کنیم که این ضابطه در گزینه‌ها نیست، اگر دقت کنیم و صورت و مخرج کسر به دست آمده را در منفی (یعنی در -1) ضرب کنیم، داریم:

$$f(x)=\frac{-2x^2+3x-1}{x-1}=\frac{2x^2-3x+1}{1-x}$$

پاسخ

$\mathbb{R}-\{$ ریشه‌های مخرج $\}$

الف) ریشهٔ مخرج : $x^2-4=0 \rightarrow x=....$ یا $x=... \quad \rightarrow D_y=R-\{...,...\}$

ب) مخرج کسر کوچک : $x+1=0 \rightarrow x=...$

مخرج کسر بزرگ $1+\frac{1}{x+1}=0 \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک‌گیری}} \frac{x+1+1}{x+1}=0 \rightarrow \frac{x+2}{x+1}=0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=....$

پس $D=\mathbb{R}-\{...,...\}$ است.

مثال **اگر دامنه تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{2x+7}{x^2+ax+1}$ برابر $\mathbb{R}$ شود حدود a را بیابید.**

پاسخ هنگامی دامنهٔ تابع f برابر $\mathbb{R}$ است که مخرج کسر ریشه نداشته باشد. چون معادله مخرج کسر درجه دوم است، پس باید Δ آن منفی باشد، بنابراین داریم:

$$x^2+ax+1=0 \rightarrow \Delta=a^2-4<0 \rightarrow a^2<4 \rightarrow -2<a<2$$

مثال **اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{x+3}{x^2+ax+b}$ برابر $\mathbb{R}-\{-2\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

پاسخ با توجه به این که در دامنهٔ تابع فقط عدد -2 از مجموعهٔ اعداد حقیقی خارج شده پس مخرج کسر دارای یک ریشه -2 است و این یعنی Δ معادله برابر با صفر است، پس داریم:

$$x^2+ax+b=0 \rightarrow \Delta=a^2-4b=0$$

هم‌چنین می‌دانیم هرگاه $\Delta=0$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=\frac{-b}{2a}$ است، پس داریم:

$$x=\frac{-a}{2}=-2 \rightarrow a=4$$

پس $b=...$ و $a+b=....$ است، بنابراین گزینهٔ .... صحیح است.

مثال **تابع f با ضابطه $y=\frac{x^2+1}{x}$ مفروض است.**

الف) **آیا از دستگاه f، $y=1$ خارج می‌شود؟**

ب) **اگر $y=m$ از دستگاه خارج شود m باید چه شرطی داشته باشد؟**

پ) **برد تابع را بیابید.**

پاسخ

الف) در ضابطهٔ تابع به جای y عدد ۱ را قرار می‌دهیم تا ورودی دستگاه را بیابیم:

$$\frac{x^2+1}{x}=1 \rightarrow x^2-x+1=0$$

چون Δ منفی است، معادله جواب ندارد بنابراین $y=1$ نمی‌تواند از دستگاه خارج شود.

ب) $$\frac{x^2+1}{x}=m \rightarrow x^2-mx+1=0 \xrightarrow{(1)} \Delta=(-m)^2-4(1)(1) \rightarrow \Delta=m^2-4$$

هنگامی معادله درجه دوم (۱) دارای جواب است که $\Delta \geq 0$ باشد، پس

$$m^2-4 \geq 0 \rightarrow m \leq -2 \text{ یا } m \geq 2$$

پ) با توجه به قسمت ب می‌توان نتیجه گرفت بُرد تابع برابر است با:

$$Ry=(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$$

مثال دامنه هر یک از توابع کسری که شامل قدرمطلق هستند را بیابید.

الف) $y=\frac{x-۳}{|x|-۲}$

ب) $y=\frac{x^۲-x}{|x-۱|+۵}$

پاسخ

الف) ابتدا ریشهٔ مخرج کسر را بدست می‌آوریم: $|x|-۲=۰ \to |x|=۲ \to x=۲$ یا $x=-۲$ مخرج کسر

پس: $D=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$.

ب) می‌دانیم $|x-۱|$ همواره یک عبارت نامنفی است پس جمع آن با ۵ نمی‌تواند برابر با صفر باشد، بنابراین مخرج کسر همواره مخالف با صفر است، پس $D=\mathbb{R}$ است.

نکته در تعیین دامنه توابع گویا در کاربردهای واقعی، ممکن است با محدودیت‌های بیشتری مواجه باشیم.

مثال ۸: اگر هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای بوسیله تابع f با ضابطه $y=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه شود که در آن x درصد آلودگی و y هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.
دامنه این تابع را در این حالت (واقعی) بیابید.

پاسخ در این تابع، علاوه بر این که مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد محدودیت‌های زیر نیز وجود دارد.

اولاً: x نمی‌تواند منفی یا صفر باشد یعنی $x>۰$

ثانیاً: y (هزینه پاک‌سازی) نیز مثبت است چون $x>۰$ است صورت کسر y نیز مثبت و در نتیجه باید مخرج کسر آن نیز مثبت باشد، یعنی:

$۱۰۰-x>۰ \to x<۱۰۰$

حال اگر از دو وضعیت بالا اشتراک بگیریم دامنهٔ این تابع بدست می‌آید: $D=(... , ...)$

نوشتن ضابطه:

در بعضی از مسائلی که شامل یک موضوع کاربردی هستند، باید ضابطهٔ یک تابع گویا را بنویسیم و بعد مسئله را حل کنیم. معمولاً در این سؤال‌ها تابعی گویا برحسب متغیری که با توجه به صورت سؤال تعریف می‌کنیم، می‌نویسیم. مثال زیر را با هم ببینیم:

دانش‌آموزی در ۴ امتحان از ۱۰ امتحانی که از اول سال داده است، نمرهٔ ۲۰ گرفته است. خانوادهٔ دانش‌آموز قول داده‌اند اگر در بیشتر از ۸۰ درصد امتحان‌ها نمرهٔ ۲۰ بگیرد، برایش یک PS4 جایزه بگیرند! اگر او بتواند در تمام امتحان‌هایی که از این به بعد می‌دهد۲۰ شود. حداقل چند امتحان دیگر باید بدهد تا صاحب یک PS4 شود؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

پاسخ اگر دانش‌آموز بعد از این x امتحان بدهد کلاً $۱۰+x$ امتحان داده که در $۴+x$ تای آن‌ها نمرهٔ ۲۰ گرفته است، پس ضابطهٔ تابعی که نشان‌دهندهٔ درصد نمره‌های ۲۰ اوست، برابر است با $f(x)=\frac{x+۴}{x+۱۰}\times۱۰۰$ ($\times۱۰۰$ *به خاطر این است که مقدار تابع به درصد بیان می‌شود*). حالا باید حداقل x را طوری حساب کنیم که مقدار تابع $f(x)$ بزرگ‌تر از ۸۰ شود:

$$f(x)>۸۰ \Rightarrow \frac{x+۴}{x+۱۰}\times۱۰۰>۸۰ \Rightarrow ۱۰۰x+۴۰۰>۸۰x+۸۰۰ \Rightarrow ۲۰x>۴۰۰ \Rightarrow x>۲۰$$

پس دانش‌آموز باید بیشتر از ۲۰ امتحان دیگر بدهد که حداقلش می‌شود $۲۰+۱=۲۱$.

تست آموزشی

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x^۲+ax-۱۲}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b-۱\ ,\ -b\}$ باشد، تعداد اعداد صحیح بازهٔ $[-۴a\ ,\ ۶a]$ که عضو دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{|x|-۴}}$ هستند، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

می‌دانیم دامنهٔ تابع گویای f به صورت:

$D_f=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ می‌باشد. بنابراین، $b-۱$ و $-b$ ریشه‌های عبارت $x^۲+ax-۱۲$ هستند، حال از آنجایی که مجموع این ریشه‌ها برابر است با $(-a)$، پس داریم:

$$(-b)+(b-۱)=(-a)\Rightarrow -۱=-a\Rightarrow a=۱$$

از طرفی برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $g(x)$، داریم:

$$|x|-۴>۰\Rightarrow |x|>۴\Rightarrow \begin{cases} x>۴ \\ x<-۴ \end{cases}$$

بنابراین اعداد صحیح بازهٔ $[-۴\ ,\ ۶]$ که عضو D_g می‌باشند عبارتند از $\{۶\ ,\ ۵\}$.

تابع $f(x)=۳x+۲$ با دامنهٔ $[-۱\ ,\ ۲]$ مفروض است. اگر برد تابع f دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{x-۱}{۲}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو صحیح برد تابع g کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

از روی دامنهٔ f تابع f را می‌سازیم تا برد f حاصل شود.

$$-۱\le x\le ۲\Rightarrow -۳\le ۳x\le ۶\Rightarrow -۱\le ۳x+۲\le ۸$$

لذا دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-۱\ ,\ ۸]$ است.

$$-۱\le x\le ۸\Rightarrow -۱-۱\le x-۱\le ۸-۱\Rightarrow -\frac{۲}{۲}\le \frac{x-۱}{۲}\le \frac{۷}{۲}$$
$$\Rightarrow -۱\le g(x)\le ۳/۵$$

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۸x-b+۱}{x^۲+ax-۱۰}$ به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{۵\ ,\ b\}$ و $f(c)=۱$ باشد، آن‌گاه c کدام است؟

۱) $۲/۶$ ۲) $-۲/۶$ ۳) $۲/۴$ ۴) $-۲/۴$

چون دامنهٔ تابع f به صورت $\mathbb{R}-\{۵\ ,\ b\}$ است، پس $x=۵$ ریشهٔ مخرج f است:

$$۵^۲+۵a-۱۰=۰\Rightarrow a=-۳$$

با جای‌گذاری $a=-۳$، مخرج تابع f را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا b نیز به دست آید:

$$x^۲-۳x-۱۰=۰\Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=-۲\Rightarrow b=-۲ \end{cases}$$

با جای‌گذاری $a=-۳$ و $b=-۲$، معادلهٔ $f(c)=۱$ را حل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۸x+۳}{x^۲-۳x-۱۰}\xrightarrow{f(c)=۱}c^۲-۸c+۳=c^۲-۳c-۱۰\quad\Rightarrow ۵c=۱۳\Rightarrow c=\frac{۱۳}{۵}=۲/۶$$

رابطهٔ $A=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m

$A=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۳,m),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$

دو زوج‌مرتب $(۳,m^۲)$ و $(۳,m+۲)$ مؤلفه‌های اول یکسان دارند، پس مؤلفه‌های دومشان هم باید مساوی باشند:

$m^۲=m+۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow m=-۱, m=۲$

(چون در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ داریم $a+c=b$، پس یکی از ریشه‌ها برابر -۱ و دیگری برابر $-\frac{c}{a}$ است!)

حالا رابطه را به ازای $m=۲$ و $m=-۱$ می‌نویسیم که ببینیم کدامشان تابع است:

$m=-۱ \Rightarrow A=\{(۳,+۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$ تابع است.

$m=۲ \Rightarrow A=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۳,۲),(-۲,۳),(۳,۴),(۲,۴)\}$ تابع نیست.

در یک تابع خطی $f(۰)=۲$ و $f(-۲)=۵$، مقدار $f(۴)$ برابر کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

چون $f(۰)=۲$ و $f(-۲)=۵$ معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۲)$ و $(-۲,۵)$ را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۲-۵}{۰-(-۲)}=\frac{-۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{-۳}{۲}x+۲ \Rightarrow f(x)=-\frac{۳}{۲}x+۲$$

حالا $f(۴)$ را پیدا می‌کنیم: $f(۴)=-\frac{۳}{۲}(۴)+۲=-۶+۲=-۴$

کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک تابع ثابت است؟

۱) $f(x)=\frac{\sqrt{۹x^۲}}{۳x}$ ۲) $f(x)=\frac{\sqrt{۴x^۲}}{|x|}$ ۳) $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}{x-۱}$ ۴) $f(x)=\frac{x-۲\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$

می‌دانیم تابع ثابت تابعی است که مقدارش همواره برابر یک عدد ثابت باشد، پس ضابطهٔ هر کدام از گزینه‌ها را ساده می‌کنیم:

(فقط یادتان هست که $\sqrt{a^۲}=|a|$)

۱ $f(x)=\frac{\sqrt{۹x^۲}}{۳x}=\frac{|۳x|}{۳x}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ ✗

۲ $f(x)=\frac{\sqrt{۴x^۲}}{|x|}=\frac{|۲x|}{|x|}=\frac{۲|x|}{|x|}=۲, x\neq ۰$ ✓

پس ۲ تابع ثابت است، یعنی در ۲ داریم $f(x)=۲$ و $x\neq ۰$.

بگذارید گزینه‌های دیگر را هم بررسی کنیم:

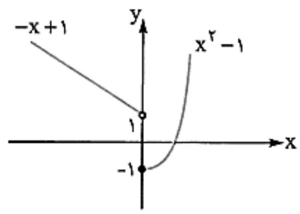
۳ $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}{x-۱}=\frac{\sqrt{(x-۱)^۲}}{x-۱}=\frac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & x<۱\end{cases}$ ✗

۴ $y=\frac{x-۲\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}=\frac{(\sqrt{x}-۱)^۲}{\sqrt{x}-۱}=\sqrt{x}-۱$ ✗

برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x\geq ۰\\ -x+۱ & x<۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $[-۱,+\infty)$

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 0 \\ -x+1 & x<0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

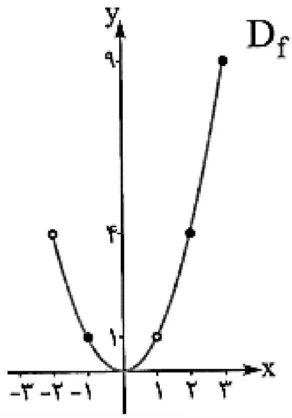


همان‌طور که روی شکل می‌بینیم، برد تابع

(یعنی تصویر نمودار تابع روی محور yها یا مجموعهٔ عرض نقاط نمودار) برابر است با: $[-1,+\infty)$

برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ و دامنهٔ $(-2,3]-\{1\}$ برابر کدام است؟

۱) $[0,9]$ ۲) $[0,9]-\{1\}$ ۳) $(4,9]$ ۴) $[0,9]-\{1,4\}$



بهترین راه برای پیداکردن برد رسم نمودار تابع است: $f(x)=x^2$ $\{1\}$ $D_f=(-2,3]-\{1\}$

با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با $[0,9]$. دقت کنید که شرط $x\neq 1$ در دامنه در این بازه تأثیری در برد ندارد؛ چون مقدار $y=1$ به ازای $x=-1$ به دست می‌آید و از طرف دیگر با این‌که دامنه در $x=-2$ باز است اما مقدار $y=4$ به ازای $x=2$ به دست می‌آید.

بازیکنی ۱۰ پنالتی زده و ۶تای آن‌ها را گل کرده است. اگر بعد از این، تمام پنالتی‌های خود را گل کند، ضابطهٔ تابعی که نشان‌دهندهٔ درصد پنالتی‌های گل‌شدهٔ او نسبت به تعداد پنالتی‌هایی که زده است، کدام است؟

۱) $f(n)=\dfrac{100n-400}{n}$ ۲) $f(n)=\dfrac{n-4}{n}$ ۳) $f(n)=\dfrac{100n+600}{n+10}$ ۴) $f(n)=\dfrac{n+6}{n+10}$

اگر تعداد کل پنالتی‌ها را n فرض کنیم، بازیکن ۱۰ پنالتی از این n پنالتی را زده و ۶تایش را گل کرده، پس بعد از این $n-10$ پنالتی می‌زند که قرار است تمام $n-10$ پنالتی گل شود، یعنی تعداد پنالتی‌های گل‌شده برابر است با $n-10+6=n-4$، از طرفی تعداد کل پنالتی‌ها برابر n است، پس نسبت پنالتی‌های گل‌شده به کل پنالتی‌ها برابر $\dfrac{n-4}{n}$ و درصد گل‌شدهٔ این پنالتی‌ها برابر است با: $f(n)=(\dfrac{n-4}{n})(100)=\dfrac{100n-400}{n}$

بازیکنی ۲۰ پنالتی زده که ۱۲تاش را گل کرده است. اگر او تمام پنالتی‌هایی که بعد از این می‌زند را گل کند، حداقل چند پنالتی دیگر باید بزند که درصد گل‌شدن پنالتی‌هایش از ۹۰ درصد بیشتر شود؟

۱) ۵۸ ۲) ۵۹ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

اگر تعداد پنالتی‌هایی را که بعد از این می‌زند x فرض کنیم، تعداد پنالتی‌های گل شده‌اش برابر $x+12$ و تعداد کل پنالتی‌هایی که زده برابر $x+20$ است، پس درصد پنالتی‌های گل‌شده از تابع $f(x)=(\dfrac{x+12}{x+20})100$ به دست می‌آید.

حالا باید داشته باشیم:

$$(\frac{x+12}{x+20})100>90 \Rightarrow 100x+1200>90x+1800 \Rightarrow 10x>600 \Rightarrow x>60$$

پس باید تعداد پنالتی‌هایی که بعد از این می‌زند، بیشتر از ۶۰تا باشد که حداقلش می‌شود ۶۱.

دو کارگر به نقاشی‌کردن یک ساختمان مشغول‌اند. اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، اولی کار نقاشی را در ۱۲۰ روز و دومی در ۶۰ روز تمام می‌کند. هر دو با هم کار کنند، ضابطهٔ تابعی که نشان‌دهندهٔ نسبت قسمت نقاشی‌شده به قسمت نقاشی‌نشده پس از x روز است، کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{x}{۴۰+x}$ ۲) $f(x)=\frac{۴۰x}{۴۰-x}$ ۳) $f(x)=\frac{x}{۴۰-x}$ ۴) $f(x)=\frac{۴۰x}{۴۰+x}$

کارگر اول کار را در ۱۲۰ روز تمام می‌کند پس هر روز $\frac{۱}{۱۲۰}$ کار را انجام می‌دهد و به همین ترتیب کارگر دوم در هر روز $\frac{۱}{۶۰}$ کار را انجام می‌دهد، پس وقتی با هم کار کنند هر روز $\frac{۱}{۱۲۰}+\frac{۱}{۶۰}=\frac{۱+۲}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۲۰}=\frac{۱}{۴۰}$ کار را انجام می‌دهند، بنابراین بعد از x روز $\frac{x}{۴۰}$ کار انجام می‌شود؛ بنابراین نسبت کار انجام‌شده به انجام‌نشده برابر است با:

$$f(x)=\frac{\frac{x}{۴۰}}{۱-\frac{x}{۴۰}}=\frac{\frac{x}{۴۰}}{\frac{۴۰-x}{۴۰}}=\frac{x}{۴۰-x}$$

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر، متعلق به یک تابع گویا نیست؟

۱) $f(x)=\frac{x^۲+\sqrt{۲}x-۱}{\sqrt{۳}-۲x}$ ۲) $f(x)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)$ ۳) $f(x)=\sqrt{x^۴+۲x^۲+۱}$ ۴) $f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x}+۱}$

می‌دانیم تابع گویا تابعی است که بتوان ضابطه‌اش را (قبل یا بعد ساده کردن) به شکل $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ نوشت که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب x هستند. (یعنی توان x در صورت و مخرج تابع باید اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد) در بین گزینه‌ها، سه گزینهٔ اول هر سه گویا هستند، چون:

۱) $f(x)=\frac{x^۲+\sqrt{۲}x-۱}{\sqrt{۳}-۲x}\Rightarrow$ توان x در صورت و مخرج صحیح و بزرگ‌تر یا مساوی صفر است

۲) $f(x)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)=x-۱\Rightarrow$ تابع، یک تابع خطی (با دامنهٔ $[۰,+\infty)$) است

۳) $f(x)=\sqrt{x^۴+۲x^۲+۱}=\sqrt{(x^۲+۱)^۲}=x^۲+۱\Rightarrow$ تابع، یک تابع چندجمله‌ای و گویا است

اما ۴ گویا نیست چون توان x در مخرج برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{|x|-۱}$ برابر کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{۱\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\varnothing$

در تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{|x|-۱}$ ریشه‌های مخرج تابع برابرند با: $|x|-۱=۰\Rightarrow x=۱,-۱$

پس دامنهٔ تابع برابر است با: $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$.

دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}}$ برابر کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{-1,0,1,2\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1,0,2\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0,-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{1\}$

دقت کنید که برای پیداکردن دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}}$ باید ریشهٔ تمام مخرج‌ها را (چه مخرج‌هایی که به‌طور مستقیم می‌بینیم و چه مخرج خود تابع) پیدا کنیم:

$$f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}} \Rightarrow$$

ریشهٔ مخرج‌های صورت کسر: $x=0, x=-1$

ریشهٔ مخرج‌های مخرج کسر: $x=0, x=2$

ریشهٔ مخرج کسر اصلی: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x-2} \Rightarrow x-2=-x \Rightarrow x=1$

پس ریشه‌های همهٔ مخرج‌ها برابرند با ۰، ۱-، ۲ و ۱ و دامنهٔ تابع برابر است با $\mathbb{R}-\{-1,0,1,2\}$.

تابع $f(x)=\dfrac{|x|+1}{2x-|x|+3}$ در چند نقطه از $\mathbb{R}$ **تعریف نشده** است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

تابع کسری در ریشه‌های مخرجش تعریف‌نشده است، پس در تابع $f(x)=\dfrac{|x|+1}{2x-|x|+3}$ باید ریشه‌های مخرج را پیدا کنیم، یعنی معادلهٔ $2x-|x|+3=0$ را حل کنیم. برای این کار باید یک بار x را $x\geq 0$ و بار دیگر $x<0$ فرض کنیم:

$x\geq 0 \quad 2x-|x|+3=0 \Rightarrow 2x-x+3=0 \Rightarrow x=-3$ ✗

$x<0 \quad 2x-|x|+3=0 \Rightarrow 2x+x+3=0 \Rightarrow x=-1$ ✓

پس تابع در یک نقطه، یعنی $x=-1$ تعریف نشده است.

اگر $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ برابر کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-2,3\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0,3\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0,-2,3\}$

تابع $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ برابر $g(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}}$ است، پس برای پیداکردن دامنهٔ تابع g باید ریشه‌های $x^2-x-6=0$ و $x^2-3x=0$ را پیدا کنیم: (دقت کنید که قبل از پیداکردن دامنه نباید تابع g را به شکل $\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-6}$ بنویسیم.)

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3, x=-2$$

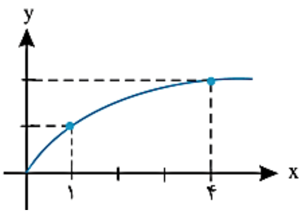
$$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

بنابراین دامنهٔ تابع g برابر است با $\mathbb{R}-\{0,-2,3\}$.

می‌دانیم تنها اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و ضابطه آن را به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

نمودار این تابع به کمک نقطه‌یابی به صورت زیر رسم می‌شود:

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



نتیجه

دامنه و برد تابع $y=\sqrt{x}$ برابر $[0,+\infty)$ است.

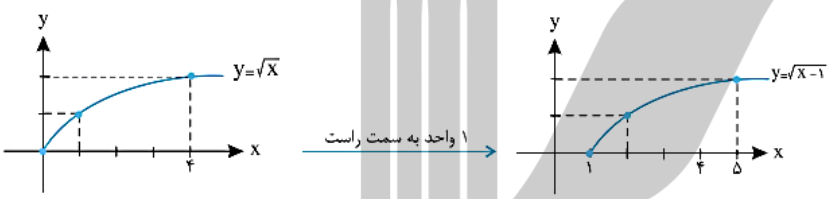
می‌دانیم $\sqrt{p(x)}$ به شرطی تعریف می‌شود که $p(x)\geq 0$ باشد. یعنی برای پیداکردن دامنهٔ یک تابع رادیکالی (*رادیکال با فرجهٔ ۲*) **باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم و نامعادلهٔ به دست آمده را حل کنیم.** دامنهٔ تابع برابر مجموعهٔ جواب این نامعادله است.

حتماً از پارسال یادتان هست که برای حل نامعادله‌ها، از روش مستقیم (*خواص نامساوی‌ها*)، تعیین علامت، رسم هندسی، خواص قدرمطلق و ... استفاده می‌کنیم.

مثال **با استفاده از انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را بیابید.**

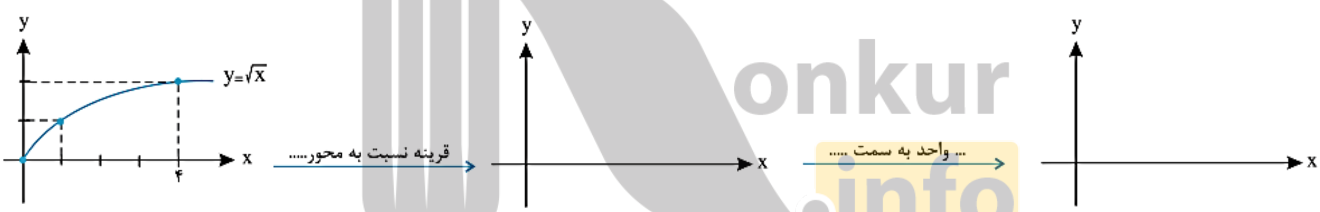
الف) $y=\sqrt{x-1}$ ب) $y=-\sqrt{x}+2$ پ) $y=\sqrt{x+3}$ ت) $y=\sqrt{x-1}+3$

پاسخ الف)

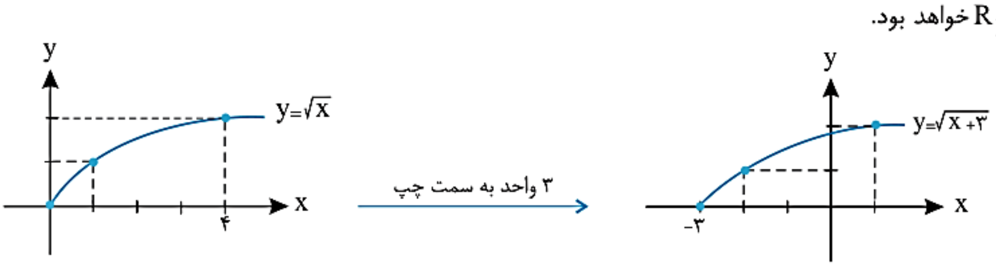


پس $D_y=[1,+\infty)$ و $R_y=[0,+\infty)$ می‌باشد.

ب)

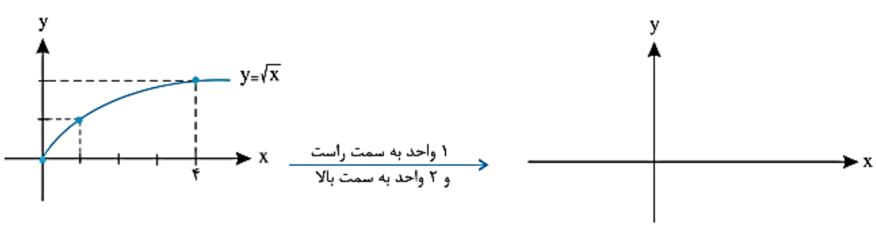


پ) بنابراین .... $=D_y$ و .... $=R_y$ خواهد بود.



پس .... $=D_y$ و .... $=R_y$ خواهد بود.

ت)



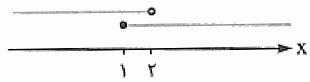
پس .... $=D_y$ و .... $=R_y$ می‌باشد.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲-x}}$ کدام است؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[۱,۲)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(۲,+\infty)$

در ضابطهٔ تابع دو رادیکال داریم، پس عبارت زیر رادیکال اولی را (یعنی $x-۱$) بزرگ‌تر یا مساوی صفر و عبارت زیر رادیکال دومی را (یعنی $x-۲$) را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم *(در دومی نگفتیم بزرگ‌تر یا مساوی صفر، چون عبارت در مخرج کسر است و نباید مساوی صفر شود)*:

$$\begin{cases} x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱ \\ ۲-x>۰ \Rightarrow x<۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap}$$



$$\Rightarrow D_f=[۱,۲)$$

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-x^۲|x|}$ برابر کدام است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[-۱,۱]$

باید نامعادلهٔ $x^۲-x^۲|x|\geq ۰$ را حل کنیم:

$$x^۲(۱-|x|)\geq ۰ \xrightarrow{x^۲\geq ۰} ۱-|x|\geq ۰ \Rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

(از پارسال داشتیم: $\begin{cases} |x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a \\ |x|\geq a \Leftrightarrow x\geq a \text{ یا } x\leq -a \end{cases}$)، پس دامنهٔ تابع برابر است با: $[-۱,۱]$.

دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x+|x-۳|}$ کدام است؟

۱) $[-۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳]$ ۳) $[-۶,+\infty)$ ۴) $[۳,+\infty)$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس باید نامعادلهٔ $۲x+|x-۳|\geq ۰$ را حل کنیم:
چون ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق (یعنی $x-۳$) برابر ۳ است، پس مجموعهٔ اعداد حقیقی را به دو بازهٔ $x\geq ۳$ و $x<۳$ تقسیم و نامعادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq ۳ \Rightarrow ۲x+|x-۳|\geq ۰ \Rightarrow ۲x+x-۳\geq ۰ \Rightarrow ۳x\geq ۳ \Rightarrow x\geq ۱ \\ \text{یا} \\ x<۳ \Rightarrow ۲x+|x-۳|\geq ۰ \Rightarrow ۲x-x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳ \end{cases} \xrightarrow{\cup} x\geq -۳$$

پس دامنهٔ تابع بازهٔ $[-۳,+\infty)$ است.

مثال **اگر دامنه تابع $y=\sqrt{x^۲-x+(a-۲)}$ برابر $\mathbb{R}$ شود، حدود a را بیابید.**

پاسخ هنگامی دامنهٔ تابع $y=\sqrt{x^۲-x+(a-۲)}$ برابر $\mathbb{R}$ است که عبارت $x^۲-x+(a-۲)$ همواره نامنفی باشد. یعنی $x^۲-x+(a-۲)\geq ۰$

پس باید Δ این عبارت همواره کوچکتر یا مساوی صفر و ضریب $x^۲$ مثبت باشد. پس داریم:

$\Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(a-۲)\leq ۰ \rightarrow$ ....

مثال **دامنه تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{۱-۲x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ ضابطهٔ تابع دارای دو رادیکال است که عبارت‌های زیر رادیکال هر یک، باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند، پس داریم:

$$\begin{cases} ۱-۲x\geq ۰ \rightarrow -۲x\geq -۱ \rightarrow x\leq .... \\ ۳-\sqrt{۱-۲x}\geq ۰ \rightarrow ۳\geq \sqrt{۱-۲x} \xrightarrow{\text{به توان۲}} ۹\geq ۱-۲x \rightarrow x\geq .... \end{cases}$$

حال اگر از دو عبارت بالا اشتراک بگیریم دامنهٔ تابع به صورت .... = D بدست می‌آید که در این دامنه...... عدد صحیح وجود دارد پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۲+|x|-x^۲}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

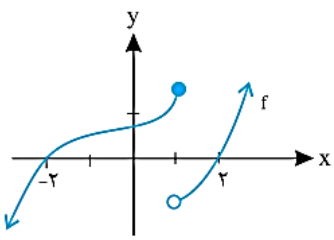
پاسخ برای تعیین دامنه زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$۲+|x|-x^۲\geq ۰ \xrightarrow{|x|=a} ۲+a-a^۲\geq ۰ \to a^۲-a-۲\leq ۰\to (a-۲)(a+۱)\leq ۰$$

$$\to (|x|-۲)(|x|+۱)\leq ۰ \to |x|-۲\leq ۰ \to |x|\leq ۲ \to -۲\leq x\leq ۲$$

پس $D=[-۲,۲]$ بنابراین در دامنه تابع ۳ عدد صحیح نامنفی وجود دارد پس گزینه (۴) صحیح است.

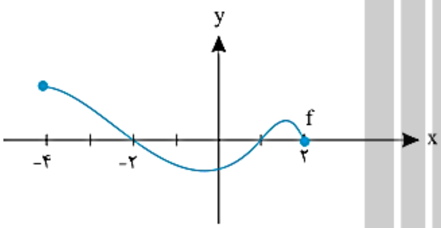
مثال اگر نمودار f به صورت زیر رسم شود، دامنهٔ تابع $y=۲\sqrt{-f(x)}+۱$ را بیابید.



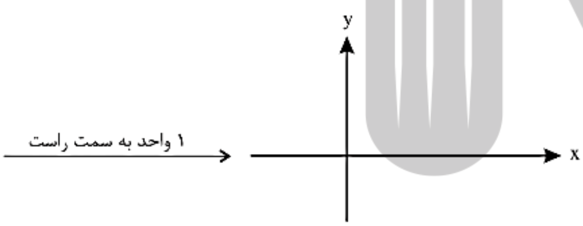
پاسخ با توجه به ضابطهٔ $y=۲\sqrt{-f(x)}+۱$ باید $f(x)\leq ۰$ باشد، بنابراین دامنه تابع آن قسمتی از نمودار f است که زیر محور xها و روی آن باشد، بنابراین:

$$D_y=(-\infty,-۲]\cup(۱,۲]$$

مثال اگر نمودار f به صورت زیر رسم شود، دامنهٔ تابع g با ضابطهٔ $y=\sqrt{xf(x-۱)}$ را بیابید.



پاسخ با توجه به نمودار f ابتدا نمودار $f(x-۱)$ را رسم می‌کنیم:



برای پیدا کردن دامنهٔ تابع دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $x\geq ۰$

اگر $x\geq ۰$ باشد باید $f(x-۱)\geq ۰$ باشد، پس قسمتی از نمودار $f(x-۱)$ که در آن $x\geq ۰$ و نمودار بالای محور xها و روی آن است را مشخص می‌کنیم، پس $D_۱=\cdots\cdots\cdots\cdots$

حالت دوم: $x\leq ۰$

اگر $x\leq ۰$ باشد باید $f(x-۱)\leq ۰$ باشد پس قسمتی از نمودار $f(x-۱)$ که در آن $x\leq ۰$ و نمودار .... و روی .... است را مشخص می‌کنیم، پس $D_۲=\cdots\cdots\cdots\cdots$

اجتماع $D_۱$ و $D_۲$ دامنهٔ تابع g می‌باشد، بنابراین:

$$D_g=D_۱\cup D_۲=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

رسم تابع با ضابطه $\sqrt{ax+b}$:

با توجه به این که اعداد نامنفی ریشه دوم دارند، ابتدا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{ax+b}$ را بدست می‌آوریم بدین ترتیب که زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم سپس به کمک نقطه‌یابی در دامنه بدست آمده تابع را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۶: هر یک از توابع زیر را رسم کنید، سپس برد آن‌ها را بدست آورید.

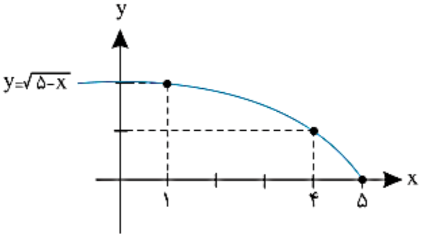
الف) $y=\sqrt{5-x}$ ‏ ‏ ‏ ب) $y=\sqrt{2x-3}-1$

پاسخ

الف) ابتدا دامنهٔ تابع را بدست می‌آوریم:

$5-x\geq 0\to x\leq 5\to D=(-\infty,5]$

x	۱	۴	۵
y	۲	۱	۰

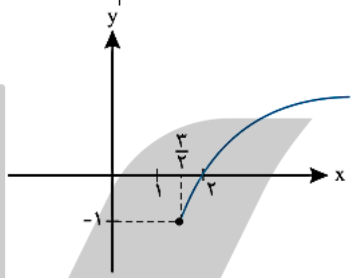


پس $R=[0,+\infty)$ می‌باشد.

ب)

$2x-3\geq 0\to x\geq \frac{3}{2}\to D=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

x	$\frac{3}{2}$	۲
y	-1	۰

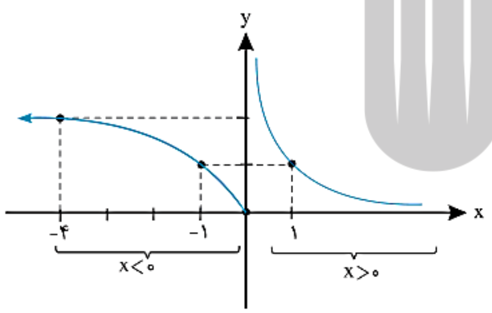


پس $R=[-1,+\infty)$ می‌باشد.

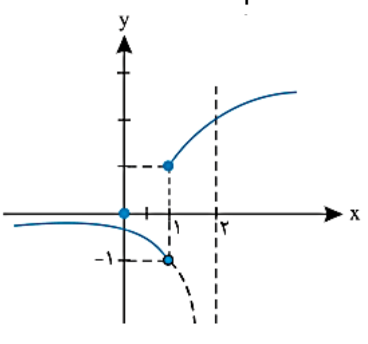
مثال ۱۷: هریک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کرده سپس برد آن را بیابید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ \sqrt{-x} & x\leq 0\end{cases}$ ‏ ‏ ‏ ب) $g(x)=\begin{cases}\sqrt{4x-3} & x\geq 1\\ \frac{1}{x-2} & x<1\end{cases}$

پاسخ



الف) باتوجه به نمودار رسم شده .... = R_y.



ب) با توجه به نمودار رسم شده .... = R_y.

نکته :برای رسم نمودار توابع رادیکالی به شکل $y=\sqrt{x-k}+h$ کافیست نمودار $y=\sqrt{x}$ را K واحد به سمت چپ و H واحد به سمت بالا انتقال دهیم .

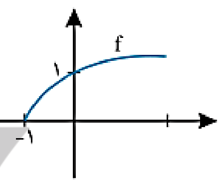
تست آموزشی

دامنه و برد تابع $y=\sqrt{-۲x+۷}$ از روی نمودار آن برابر است با:

۱) $\begin{cases} D_f=\left(-\infty,\dfrac{۷}{۲}\right] \\ R_f=[۰,+\infty) \end{cases}$
۲) $\begin{cases} D_f=\left[\dfrac{۷}{۲},+\infty\right) \\ R_f=[۰,+\infty) \end{cases}$
۳) $\begin{cases} D_f=\left(-\infty,\dfrac{۷}{۲}\right] \\ R_f=R \end{cases}$
۴) $\begin{cases} D_f=\left[\dfrac{۷}{۲},+\infty\right) \\ R_f=R \end{cases}$

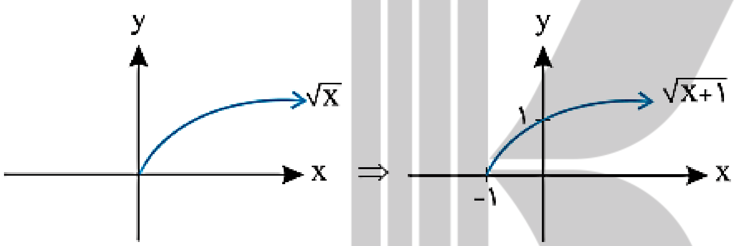
$$\begin{cases} D_f:-۲x+۷\geq ۰\to x\leq \dfrac{۷}{۲}\to D=\left(-\infty,\dfrac{۷}{۲}\right] \\ R_f:\sqrt{-۲x+۷}\geq ۰\to R=[۰,+\infty) \end{cases}$$

با انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ به نمودار



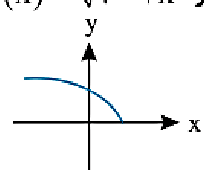
رسیده‌ایم، مقدار $f(۸)$ چیست؟

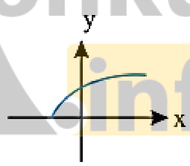
۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۸
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۳

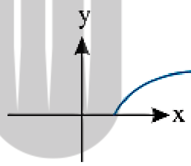


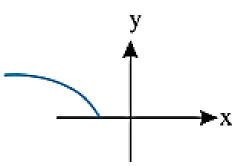
$$f(x)=\sqrt{x+۱}\longrightarrow f(۸)=\sqrt{۸+۱}=۳$$

نمودار $f(x)=\sqrt{۲-۳x}$ به کدام صورت است؟

۱)


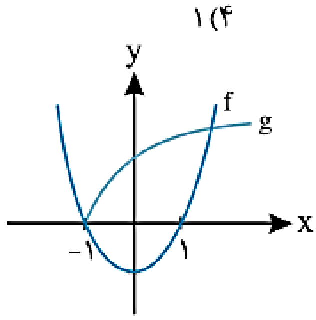
۲)


۳)


۴)


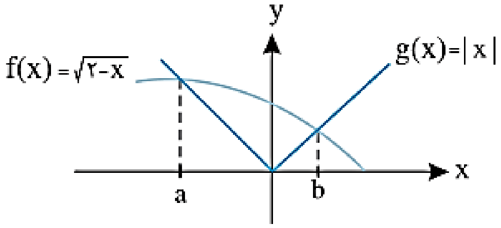
معادله $x^۲-۱=\sqrt{x+۱}$ چند جواب دارد؟

۱) ۰
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۱



این دو نمودار همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند پس معادله دارای دو جواب می‌باشد.

با توجه به شکل زیر فاصله بین b,a چقدر است؟



۱) ۲   ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) ۳   ۴) $\frac{۷}{۲}$

b,a ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{۲-x}=|x|$ است.

$$\sqrt{۲-x}=|x| \rightarrow ۲-x=x^۲ \rightarrow x^۲+x-۲=۰ \rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=۱ \end{cases} \rightarrow b=۱, a=-۲ \rightarrow b,a \text{ فاصله‌ی } =۳$$

دامنه‌ی تعریف تابع $y=\sqrt{x^۲-|x|-۲}$ کدام گزینه است؟

۱) $x\le -۲$ یا $x\ge ۲$ ۲) $-۱<x<۱$ ۳) $-۲<x<۲$ ۴) R

$$x^۲-|x|-۲\ge ۰ \longrightarrow (|x|-۲)\underbrace{(|x|+۱)}_{\text{همواره مثبت}}\ge ۰ \longrightarrow |x|-۲\ge ۰ \longrightarrow |x|\ge ۲ \longrightarrow \begin{cases} x\ge ۲ \\ x\le -۲ \end{cases}$$

دامنه تابع $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۱-x}}-\sqrt{\frac{-۱-x}{۳x-۲}}$ کدام است؟

۱) $\left[۰,\frac{۲}{۳}\right)$ ۲) $\left[-۱,\frac{۲}{۳}\right]$ ۳) $[۰,۱)$ ۴) $[-۱,۱)$

$\sqrt{x} : x\ge ۰$ $\boxed{۱}$

$\sqrt{۱-x} : ۱-x>۰ \rightarrow x<۱$ $\boxed{۲}$

$\sqrt{\frac{-۱-x}{۳x-۲}} : \frac{-۱-x}{۳x-۲}\ge ۰ \rightarrow -۱\le x<\frac{۲}{۳}$ $\boxed{۳}$

حال اگر از $\boxed{۱}$ و $\boxed{۲}$ و $\boxed{۳}$ اشتراک بگیریم: $D=\left[۰,\frac{۲}{۳}\right)$

اگر دامنه تعریف تابع $y=\sqrt{(x-۲)(x^۲+ax+b)}$ بازهٔ $[۱,+\infty)$ باشد مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۵   ۴) ۵-

برای آن که دامنه‌ی تابع به صورت $[۱,+\infty)$ باشد باید جدول تعیین‌علامت به صورت

x		۱		۲	
$(x-۲)(x^۲+ax+b)$	-	۰	+	۰	+

باشد بنابراین ۱ و ۲ ریشه‌های $x^۲+ax+b=۰$ هستند:

$$x^۲+ax+b=۰ \xrightarrow{x=۱} ۱+a+b=۰ \rightarrow a+b=-۱$$

$$x^۲+ax+b=۰ \xrightarrow{x=۲} ۴+۲a+b=۰ \rightarrow ۲a+b=-۴ \rightarrow a=-۳, b=۲$$

پس $b-a=۵$ است.

به ازای کدام مجموعه مقادیر a دامنه تابع $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{x^2+a}$ به صورت $(-\infty,0)$ می‌باشد؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\varnothing$

دامنهٔ تابع f به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases}-x\ge 0\to x\le 0\\ x^2+a\ne 0\to x^2\ne -a\to x\ne \pm\sqrt{a}\end{cases}$$

با توجه به این که دامنه تابع f بازهٔ $(-\infty,0)$ است پس $a=0$ می باشد.

برد تابع $y=\sqrt{ax-3|x|}$ به صورت $R_f=\{b\}$ است. a^2-b کدام است؟ (دامنه f بیش از یک عضو دارد)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۹ ۴) -9

چون برد تابع $y=\sqrt{ax-3|x|}$ مجموعه $\{b\}$ می‌باشد لذا این تـابع یـک تـابع ثابت است. از طرفی صفر جزء دامنهٔ تابع است پس $f(0)=b$ می‌باشد لذا $b=0$ از طرفی برای هر x مثبت و هر x منفی تابع باید تابع ثابت صفر باشد. بنابراین:

$$\begin{array}{l} x>0:\sqrt{ax-3x}=0\to a=3\\ x<0:\sqrt{ax+3x}=0\to a=-3\end{array}\to a^2-b=9-0=9$$

اگر توابع $f(x)=\sqrt{(x-a)^2(x-b)}$ و $g(x)=|x-a|\sqrt{x+2}$ باهم برابر باشند مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -3 ۲) -5 ۳) -7 ۴) -9

برای آن که دو تابع g,f باهم برابر باشند باید $D_f=D_g$ باشد.

$$D_g=[-2,+\infty)\to D_f=[-2,+\infty)$$

پس دو حالت زیر را داریم:

x		$-2=a=b$	
$(x-a)^2(x-b)$	$-$	○	$+$

x		$-2=b$		a	
$(x-a)^2(x-b)$	$-$	○	$+$	○	$+$

$$\to\begin{cases}b=-2\\ a\ge -2\end{cases}\to a+b\ge -4$$

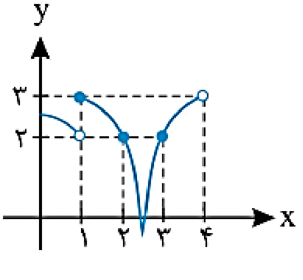
اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+6}$ بازه‌ی $[-2,3]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) -2

عبارت ax^2+bx+6 باید در بازهٔ $[-2,3]$ نامنفی باشد. پس با توجه به جدول تعیین علامت باید -2 و 3 ریشه‌های عبارت باشند:

$$ax^2+bx+6=(x+2)(3-x)=-x^2+x+6\longrightarrow a=-1,b=1\longrightarrow a+b=0$$

مطابق شکل، نمودار تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در دامنه‌ی تعریفش رسم شده است. دامنه‌ی تابع $y=\frac{1}{\sqrt{2-f(x)}}$، کدام است؟



۱) $(-\infty,4)$
۲) $(1,2)$
۳) $(2,3)$
۴) $R-[2,3]$

با توجه به ضابطه‌ی f داریم: با توجه به نمودار رسم شده در فاصله‌ی $۲ < x < ۳$ ، نمودار تابع f پایین‌تر از خط $y = ۲$ قرار می‌گیرد.

$$۲ - f(x) > ۰ \longrightarrow f(x) < ۲$$

دامنه‌ی تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a - |x+b|}}$ بازه‌ی $(-۱,۳)$ است. مقدار b کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

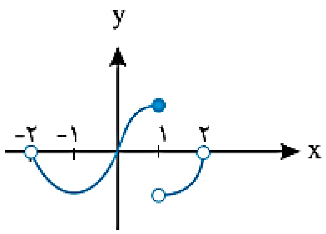
$$a - |x+b| > ۰ \longrightarrow |x+b| < a \longrightarrow -a < x+b < a \longrightarrow -a-b < x < a-b$$

از طرفی طبق فرض، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(-۱,۳)$ است پس داریم:

$$\begin{cases} -a-b = -۱ \\ a-b = ۳ \end{cases} \rightarrow a = ۲, b = -۱$$

نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{(x^۲ - ۱)f(x)}$ کدام است؟

۱) $[-۱,۰] \cup \{۱\}$
۲) $[-۱,۰]$
۳) $[-۱,۱]$
۴) $(-۲,۰] \cup [۱,۲)$



	-۲ تا -۱	-۱	-۱ تا ۰	۰	۰ تا ۱	۱	۱ تا ۲
$x^۲-۱$	+	۰	−		−	۰	+
$f(x)$	−		−	۰	+		−
$(x^۲-۱)f(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	−

جواب

پس $D = [-۱,۰] \cup \{۱\}$

اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{ax^۲ + ۳x + a}$ تنها شامل یک مقدار حقیقی باشد، آن مقدار چه‌قدر است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

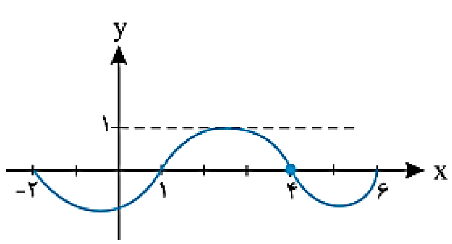
باید $\Delta = ۰$ و $a < ۰$ باشد پس داریم:

$$\Delta = (۳)^۲ - ۴(a)(a) = ۰ \rightarrow ۹ - ۴a^۲ = ۰ \rightarrow a = \pm\frac{۳}{۲} \xrightarrow{a<۰} a = -\frac{۳}{۲}$$

$$f(x) = \sqrt{-\frac{۳}{۲}x^۲ + ۳x - \frac{۳}{۲}} \rightarrow f(x) = \sqrt{-\frac{۳}{۲}(x-۱)^۲} \rightarrow D_f = \{۱\}$$

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است دامنه تابع $y = \sqrt{f(۳-|x|)}$ کدام است؟

۱) $[۱,۴]$
۲) $[-۲,۲]$
۳) $[-۳,۳]$
۴) $[-۱,۳]$



$$f(۳-|x|) \geq ۰ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار } f} ۱ \leq ۳ - |x| \leq ۴ \rightarrow \begin{cases} ۳ - |x| \geq ۱ \rightarrow |x| \leq +۲ \rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \\ ۳ - |x| \leq ۴ \rightarrow |x| \geq -۱ \quad \text{بدیهی است} \end{cases}$$

توابع پله ای – جزء صحیح:

تعریف تابع پله‌ای: به توابعی که بتوان دامنهٔ آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد، به طوری که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌گویند.

یکی از توابع پله‌ای معروف تابع جزء صحیح است. ابتدا جزء صحیح اعداد را تعریف می‌کنیم و خواص آن را بررسی می‌نمائیم سپس به معرفی این تابع می‌پردازیم.

تعریف جز صحیح: برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش داده و آن را جزء صحیح x یا براکت x می‌خوانند.

مثال جزء صحیح اعداد زیر را حساب کنید.

الف) $-۲/۳$ ب) $-۴\sqrt{۲}$ پ) -۵ ت) ۰ ث) $۲\sqrt{۳}$ ج) ۷

پاسخ

الف) بزرگترین عدد صحیحی که از $-۲/۳$ بزرگتر نباشد عدد -۳ است. $(-۲ > -۲/۳ > -۳)$ پس: $[-۲/۳] = -۳$

ب) می‌دانیم $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ است پس $-۴\sqrt{۲} \simeq -۵/۶$ بنابراین بزرگترین عدد صحیحی که از $-۴\sqrt{۲}$ بزرگتر نباشد عدد -۶ است یعنی $[-۴\sqrt{۲}] = -۶$

پ) بزرگترین عدد صحیحی که از -۵ بزرگتر نباشد (یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از -۵ کوچکتر یا مساوی باشد) عدد -۵ است، پس $[-۵] = -۵$

ت) با توجه به قسمت «پ» $[۰] = ۰$ است.

ث) می‌دانیم $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$ پس داریم $۲\sqrt{۳} \simeq ۳/۴$ بنابراین: $[۲\sqrt{۳}] = ۳$

ج) با توجه به قسمت «پ» و «ت» $[۷] = ۷$ است.

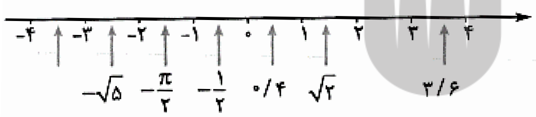
نتیجه

۱: اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $[x] = x$ است.

۲: مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره کوچکتر مساوی آن است: $\forall \in \mathbb{R}: [x] \le x$

① اگر عددی صحیح باشد، جزءصحیحش برابر خودش است، مثلاً: $[-\sqrt{۹۰۰}] = -\sqrt{۹۰۰} = -۳۰$ و $[۱۰۰۰] = ۱۰۰۰$ و $[-۲] = -۲$ و $[۲] = ۲$

② اگر عدد صحیح نباشد و آن را روی محور اعداد در نظر بگیریم، جزءصحیح عدد برابر عدد صحیح سمت چپش است، مثلاً:



$$[-\sqrt{۵}] = -۳\ ,\ [-\frac{\pi}{۲}] = -۲\ ,\ [-\frac{۱}{۲}] = -۱\ ,\ [۰/۴] = ۰\ ,\ [\sqrt{۲}] = ۱\ ,\ [۳/۶] = ۳$$

مثال معادله $x = [۳x] - [۴x] + ۴$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ سمت راست معادلهٔ داده شده، مجموع و تفاضل چند عدد صحیح است که حاصل آن همیشه برابر با یک عدد صحیح می‌باشد بنابراین سمت چپ تساوی یعنی x نیز باید یک عدد صحیح باشد. پس داریم:

$$x \in \mathbb{Z} \to ۳x \in \mathbb{Z} \to [۳x] = ۳x$$

$$x \in \mathbb{Z} \to ۴x \in \mathbb{Z} \to [۴x] = ۴x$$

بنابراین داریم:

$$x = ۳x - ۴x + ۴ \to ۲x = ۴ \to x = ۲$$

پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

مثال اگر $x=-\frac{۱۱}{۳}$ باشد، حاصل $[x]-[۲x]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۴

پاسخ بزرگترین عدد صحیحی که از $-\frac{۱۱}{۳}$ بیشتر نباشد عدد -۴ است. یعنی: $\left[-\frac{۱۱}{۳}\right]=........$

از طرفی $۲x=-\frac{۲۲}{۳}$ و بزرگترین عدد صحیحی که از $-\frac{۲۲}{۳}$ بیشتر نباشد عدد -۸ است، پس: $\left[-\frac{۲۲}{۳}\right]=....$

پس داریم: $\left[-\frac{۱۱}{۳}\right]-\left[-\frac{۲۲}{۳}\right]=....$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

حاصل $|[-x]|+[۲x]+[x^۲]$ به ازای $x=۱/۴$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حاصل هر کدام را جداگانه حساب و بعد با هم جمع می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}[x^۲]=[(۱/۴)^۲]=[۱/۹۶]=۱\\ [۲x]=[۲(۱/۴)]=[۲/۸]=۲\\ |[-x]|=|[-۱/۴]|=|-۲|=۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۱+۲+۲=۵$$

نتیجه ۳: هرگاه $n\in\mathbb{Z}$ و $n\le x<n+۱$ آن‌گاه $[x]=n$ و بالعکس.

مثال جاهای خالی را پر کنید.

الف) $\sqrt{۲}<x<\sqrt{۳}\rightarrow[x]=.....$

ب) $-۱<x<۲/۵\rightarrow[x]=.....$

پ) $۲/۳<x<۳/۴\rightarrow[x]=.....$

پاسخ

الف) $\sqrt{۲}<x<\sqrt{۳}\xrightarrow[\sqrt{۳}\simeq۱/۷]{\sqrt{۲}\simeq۱/۴}۱<x<۲\rightarrow[x]=.....$

ب)

$$-۱<x<۲/۵\rightarrow\begin{cases}-۱<x<۰\rightarrow[x]=...\\ ۰\le x<۱\rightarrow[x]=...\\ ۱\le x<۲\rightarrow[x]=...\\ ۲\le x<۲/۵\rightarrow[x]=...\end{cases}$$

پ)

$$۲/۳\le x<۳/۴\rightarrow۳\begin{cases}۲/۳\le x<۳\rightarrow[x]=...\\ ۳\le x<۳/۴\rightarrow[x]=...\end{cases}$$

مثال مجموعه جواب معادله $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۲$ را بیابید.

پاسخ $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۲\rightarrow۲\le x+\frac{۱}{۲}<۳\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}۲-\frac{۱}{۲}\le x<۳-\frac{۱}{۲}\rightarrow............$

مثال جواب معادلهٔ $\left[\frac{1-x}{x}\right]=2$ کدام است؟

۱) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ ۲) $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ ۳) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ ۴) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$

پاسخ $\left[\frac{1-x}{x}\right]=2 \rightarrow 2\le\frac{1-x}{x}<3 \rightarrow 2\le\frac{1}{x}-\frac{x}{x}<3 \rightarrow 2\le\frac{1}{x}-1<3 \xrightarrow{+1} \dots\le\frac{1}{x}<\dots \xrightarrow{\text{معکوس گردد}} \dots\dots\dots\dots$

پس گزینهٔ .... صحیح است.

مثال اگر $\left[x^2+x\right]=-1$ باشد، آن‌گاه $\left[x^{20}\right]$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ $\left[x^2+x\right]=-1 \rightarrow -1\le x^2+x<0$

$$\begin{cases} x^2+x\ge -1 \rightarrow x^2+x+1\ge 0 & (\text{عبارت } x^2+x+1 \text{ همواره نامنفی است چون } \Delta<0 \text{ و ضریب } x^2 \text{ مثبت است}) \\ x^2+x<0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -1<x<0 \end{cases}$$

بنابراین $-1<x<0$ می‌باشد.

$-1<x<0 \xrightarrow{\text{به توان ۲۰ (توان زوج)}} 0<x^{20}<1$

پس $\left[x^{20}\right]=\dots$ یعنی گزینهٔ .... صحیح است.

نتیجه ۴: برای هر عدد حقیقی x داریم: $[x]\le x<[x]+1$ و یا به عبارتی $0\le x-[x]<1$.

مثال معادلهٔ $[x]=x+|x-2|$ چند ریشه دارد؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) بی‌شمار

پاسخ $x+|x-2|=[x] \rightarrow x-[x]=-|x-2|$

طبق نتیجه ۴: می‌دانیم $0\le x-[x]<1$ از طرفی $-|x-2|\le 0$ می‌باشد بنابراین تساوی در صورتی صحیح است که $-|x-2|=0$ پس $x=2$، بنابراین گزینهٔ .... صحیح است.

نکته اگر $m\in\mathbb{Z}$ باشد، آن‌گاه: $[x+m]=[x]+m$

اثبات اگر $[x]=n$ در نظر بگیریم، داریم: $n\le x<n+1 \rightarrow n+m\le x+m<n+m+1 \rightarrow [x+m]=n+m=[x]+m$

مثال معادلهٔ $[x]+[x+3]-[4+x]=2$ چند جواب دارد؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 1 ۴) بی‌شمار

پاسخ $[x]+[x+3]-[4+x]=2 \rightarrow [x]+[x]+3-4-[x]=2 \rightarrow [x]=3 \rightarrow 3\le x<4$ بی‌شمار جواب دارد

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

نتیجه برای هر عدد حقیقی x داریم: $\left[x+[x]\right]=2[x]$

مثال مجموعه جواب معادله $\left[2[x]+x\right]=-9$ کدام است؟

۱) $[-3,-2)$ ۲) $\left[-3,-\frac{2}{3}\right)$ ۳) $\left[-3,\frac{-5}{3}\right)$ ۴) $\left[-3,-\frac{3}{2}\right)$

پاسخ $\left[2[x]+x\right]=-9 \rightarrow \dots\dots+[x]=-9 \rightarrow \dots\dots[x]=-9 \rightarrow [x]=\dots \rightarrow \dots$

نکته

الف) اگر $x \in \mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=0$ و بالعکس

ب) اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$ و بالعکس

اثبات ب

$$[x]=n \xrightarrow{x\notin z} n<x<n+1 \xrightarrow{\times(-)} -n-1<-x<-n \to [-x]=-n-1$$

$$[x]+[-x]=n+(-n-1)=-1$$

مثال معادلهٔ $5[x]+2[-x]=3$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ برای حل معادله دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $x \in \mathbb{Z}$:

$$5[x]+2[-x]=3 \to 5x-2x=3 \to 3x=3 \to x=1$$

حالت دوم $x \notin \mathbb{Z}$:

$$5[x]+2[-x]=3 \to 3[x]+2([x]+[-x])=3 \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} 3[x]+(-2)=3 \to [x]=\frac{5}{3}$$

اما $[x]$ نمی‌تواند برابر با یک عدد غیرصحیح باشد پس معادله فقط یک جواب صحیح دارد.

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته

اگر $n \in z$ باشد، آن‌گاه:

۱) $[x]>n \to x \ge n+1$

۲) $[x]\ge n \to x \ge n$

۳) $[x]<n \to x<n$

۴) $[x]\le n \to x<n+1$

مثال مجموعه جواب نامعادله $[x]>3$ کدام است؟

۱) $[4,+\infty)$ ۲) $[3,+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(-\infty,3)$

پاسخ

$$[x]>3 \to x \ge 4$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

مثال مجموعه جواب نامعادله $[x^2]<2$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[-\sqrt{2},2]$ ۳) $(-\infty,\sqrt{2})$ ۴) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

پاسخ

$$[x^2]<2 \to x^2<2 \to -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

$$[x+y]\ge[x]+[y]$$

$$[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\\ \text{یا}\\ [x]+[y]+1\end{cases}$$

$$x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=0$$
$$x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1$$

اگر $[x]^۲-[x]=۰$ باشد، حاصل $[x^۲]$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) یک　　۲) دو　　۳) سه　　۴) چهار

اول مقدار $[x]$ را از روی $[x]^۲-[x]=۰$ حساب می‌کنیم:

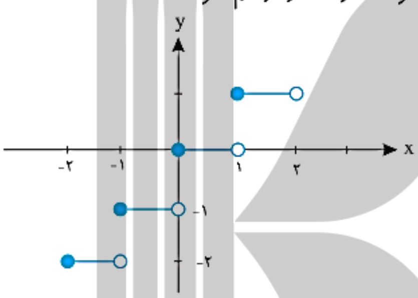
$$[x]^۲-[x]=۰ \Rightarrow [x]([x]-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}[x]=۰ \Rightarrow ۰\le x<۱\\ \text{یا}\\ [x]=۱ \Rightarrow ۱\le x<۲\end{cases} \xrightarrow{\cup} ۰\le x<۲$$

پس محدودهٔ x برابر است با $۰\le x<۲$، در نتیجه محدودهٔ $x^۲$ عبارت است از $۰\le x^۲<۴$ و اگر عددی در بازهٔ $[۰,۴)$ باشد، جزءصحیحش ممکن است برابر ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، یعنی $[x^۲]$ ممکن است چهار مقدار مختلف داشته باشد.

تعریف تابع جز صحیح: **تابعی که به ازای هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و ضابطهٔ آن را به صورت $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند.**

این تابع را با توجه به تعریف جزء صحیح می‌توان به صورت تابع پله‌ای زیر نوشت و آن را رسم کرد:

$$f(x)=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ ۲ & ۲\le x<۳\\ ۱ & ۱\le x<۲\\ ۰ & ۰\le x<۱\\ -۱ & -۱\le x<۰\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



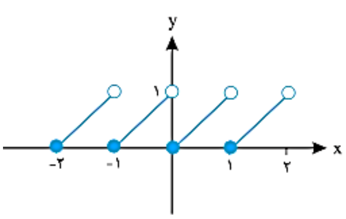
نتیجه

دامنهٔ تابع $f(x)=[x]$ برابر با $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ است.

دوتابع معروف:

۱) تابع $y=x-[x]$:

نمودار این تابع به صورت زیر رسم می‌شود:



$$f(x)=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ x-۱ & ۱\le x<۲\\ x-۰ & ۰\le x<۱\\ x+۱ & -۱\le x<۰\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

نتیجه

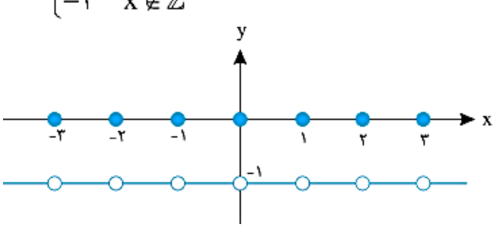
دامنهٔ تابع $f(x)=x-[x]$ برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[۰,۱)$ می‌باشد.

۲) تابع $y=[x]+[-x]$:

با توجه به خاصیت گفته شده داریم:

$$y=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

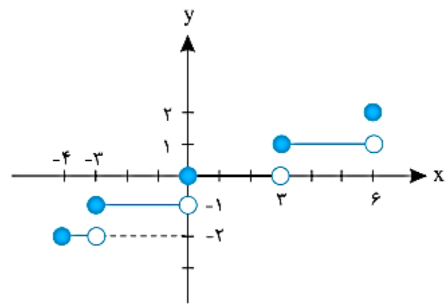
بنابراین نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:



مثال نمودار تابع $y=\left[\frac{x}{۳}\right]$ را در فاصلهٔ $[-۴,۶]$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا این تابع را با توجه به فاصلهٔ $[-۴,۶]$ به صورت زیر به یک تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} -۴\le x<-۳ \longrightarrow \left[\frac{x}{۳}\right]=-۲ \\ -۳\le x<۰ \longrightarrow \left[\frac{x}{۳}\right]=-۱ \\ ۰\le x<۳ \longrightarrow \left[\frac{x}{۳}\right]=۰ \\ ۳\le x<۶ \longrightarrow \left[\frac{x}{۳}\right]=۱ \\ x=۶ \longrightarrow \left[\frac{x}{۳}\right]=۲ \end{cases}$$



دوره تناوب تابع [AX+B] برابر است با :

$$T=\frac{1}{|a|}$$

در این مثال دوره تناوب (طول پاره خط ها) برابر است با :

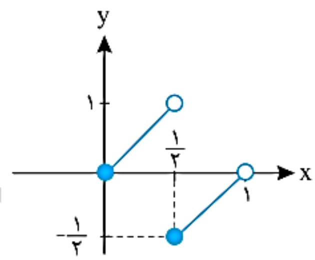
$$T=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

مثال نمودار تابع $y=x-[۲x]$ را در فاصلهٔ $(۰,۱)$ را رسم کنید.

پاسخ

$$۰\le x<۱ \to ۰\le ۲x<۲$$

$$\begin{cases} ۰\le x<\frac{۱}{۲} \to [۲x]=۰ \\ \frac{۱}{۲}\le x<۱ \to [۲x]=۱ \end{cases} \longrightarrow y=x-[۲x]=\begin{cases} x & \to ۰\le x<\frac{۱}{۲} \\ x-۱ & \to \frac{۱}{۲}\le x<۱ \end{cases}$$



نکته

تابع $y=[ax+b]$ یک تابع پله‌ای است که طول هر پله آن $\left|\frac{۱}{a}\right|$ بوده و از نقطه $\left(-\frac{b}{a},۰\right)$ شروع و ارتفاع هر پله آن یک است.

تذکر

در تابع $y=[ax+b]$ اگر $a>۰$ باشد پله‌ها افزایشی و اگر $a<۰$ باشد پله‌ها کاهشی است.

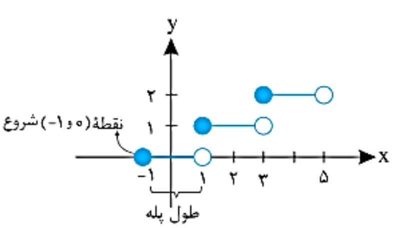
مثال هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=\left[\frac{x+۱}{۲}\right]$

ب) $y=\left[\frac{-x+۱}{۳}\right]$

پاسخ

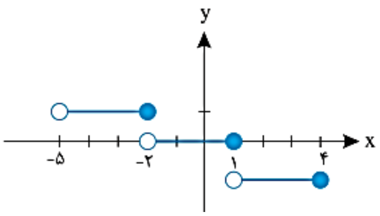
الف) در تابع $y=\left[\frac{x+۱}{۲}\right]=\left[\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\right]$ چون $a=\frac{۱}{۲}>۰$ پس یک تابع پله‌ای افزایشی است که از نقطهٔ $(-۱,۰)$ شروع می‌شود، طول هر پله $\left|\frac{۱}{a}\right|=\left|\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\right|=۲$ بوده و ارتفاع هر پله یک است:



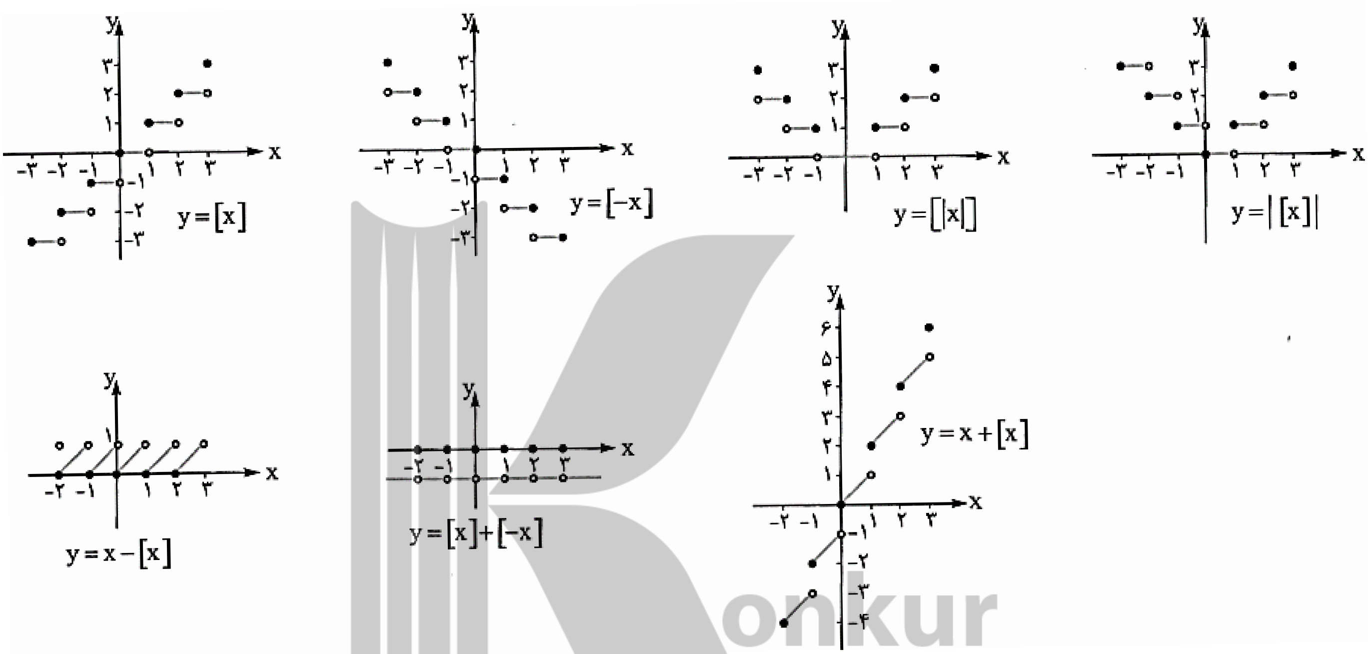
ب) در تابع $y=\left[\frac{-x+۱}{۳}\right]=\left[-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}\right]$ چون $a=-\frac{۱}{۳}<۰$ پس یک تابع پله‌ای کاهشی است که از نقطهٔ $\left(-\frac{b}{a},۰\right)=(۱,۰)$ شروع می‌شود.

ب) در تابع $y=\left[\frac{-x+1}{3}\right]=\left[-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right]$ چون $a=-\frac{1}{3}<0$ پس یک تابع پله‌ای کاهشی است که از نقطهٔ $(1,0)=\left(-\frac{b}{a},0\right)$ شروع می‌شود،

طول هر پله $3=\left|\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right|=\left|\frac{1}{a}\right|$ بوده و ارتفاع هر پله یک است:



بهتر است این نمودارهای پرکاربرد و مهم در این مبحث را به خوبی به یاد داشته باشید :



تست آموزشی

می‌دانیم $2=\left(a+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$، جزء صحیح عدد a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -2 ۴) -1

$$(1+\sqrt{2})(a+\sqrt{5})=2\Rightarrow a+\sqrt{5}=\frac{2}{1+\sqrt{2}}\xrightarrow{\text{گویاکردن}} a+\sqrt{5}=2(\sqrt{2}-1)\to a=2(\sqrt{2}-1)-\sqrt{5}\simeq 0/8-2/2\simeq -1/4$$
$$\to [a]=-2$$

اگر $\left[x+2[x]\right]=4$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}\le x\le\frac{7}{3}$ ۲) $0\le x\le 1$ ۳) $1\le x\le 2$ ۴) معادله جواب ندارد.

$$\left[x+2[x]\right]=4\longrightarrow 3[x]=4\longrightarrow [x]=\frac{4}{3}\longrightarrow \text{غیرممکن}$$

اگر $a+[b]=۴/۲$ و $b-[a]=۲/۴$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است)

۱) ۵ ۲) ۵/۶ ۳) ۴/۶ ۴) ۳/۶

$$a+[b]=۴/۲ \longrightarrow [a+[b]]=[۴/۲] \to [a]+[b]=۴$$
$$b-[a]=۲/۴ \longrightarrow [b-[a]]=[۲/۴] \to [b]-[a]=۲$$
$$\longrightarrow \begin{cases}[a]=۱\\ [b]=۳\end{cases} \longrightarrow a=۱/۲, b=۳/۴ \longrightarrow a+b=۴/۶$$

اگر $|۲x-۳|<۱۱$ باشد، $\left[\frac{x}{۳}\right]$ چند مقدار صحیح خواهد داشت؟ ([ ] تابع جزء صحیح است)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

$$|۲x-۳|<۱۱ \to -۱۱<۲x-۳<۱۱ \to -۸<۲x<۱۴ \to -۴<x<۷ \to -\frac{۴}{۳}<\frac{x}{۳}<\frac{۷}{۳} \to -۱/۳<\frac{x}{۳}<۲/۳$$
$$\to \left[\frac{x}{۳}\right]=-۲,-۱,۰,۱,۲$$

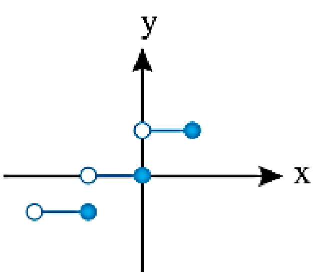
مجموعهٔ $A=\left\{\left[۳x+\frac{۱}{۲}\right] \,\middle|\, |x+۱|<۲\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

$$[x^۲+۴x]=-۴ \longrightarrow -۴\le x^۲+۴x<-۳ \begin{cases} x^۲+۴x\ge -۴ \longrightarrow x^۲+۴x+۴\ge ۰ \longrightarrow (x+۲)^۲\ge ۰ \\ \longrightarrow \text{به ازای هر } x \text{ همواره برقرار است} \quad (۱) \\ x^۲+۴x<-۳ \longrightarrow x^۲+۴x+۳<۰ \\ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} -۳<x<-۱ \quad (۲) \end{cases}$$

اگر از (۱) و (۲) اشتراک بگیریم مجموعه جواب به صورت $(-۳,-۱)$ می‌باشد پس $a=-۳$ و $b=-۱$ است و $b-a=۲$ می‌باشد.

نمودار کدام تابع زیر به صورت مقابل است؟



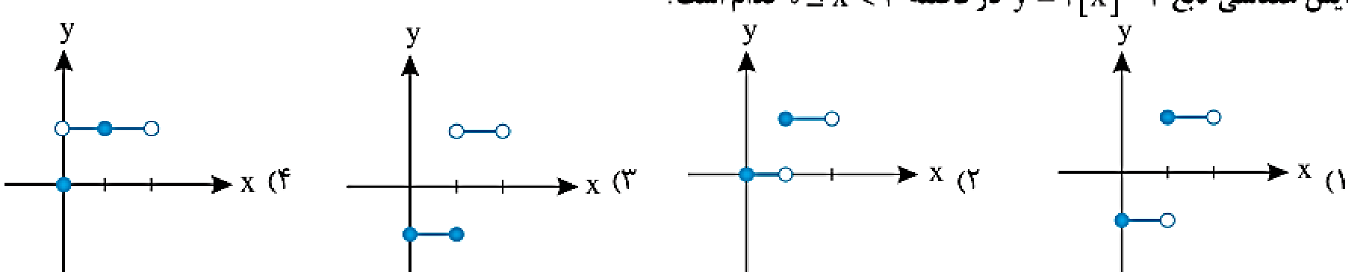
۱) $-[x]$

۲) $[-x]$

۳) $-[-x]$

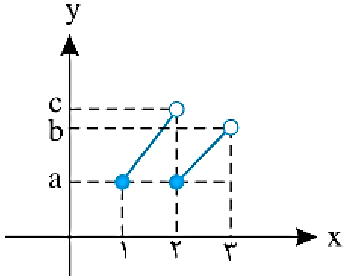
۴) $۱+[x]$

نمایش هندسی تابع $y=۲[x]-۱$ در فاصلهٔ $۰\le x<۲$ کدام است؟



$$y=۲[x]-۱=\begin{cases}۲(۰)-۱ & ۰\le x<۱\\ ۲(۱)-۱ & ۱\le x<۲\end{cases}=\begin{cases}-۱ & ۰\le x<۱\\ ۱ & ۱\le x<۲\end{cases}$$

نمودار تابع $y=\frac{x}{[x]}$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۳/۵

۳) ۴

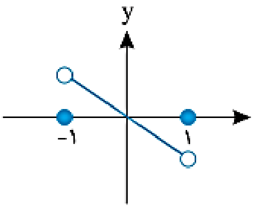
۴) ۳

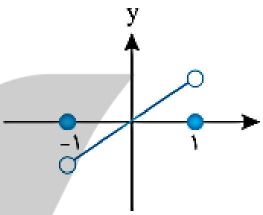
$1\le x<2 \longrightarrow [x]=1 \longrightarrow y=x \xrightarrow{1\le x<2} 1\le y<2 \longrightarrow a=1, c=2$

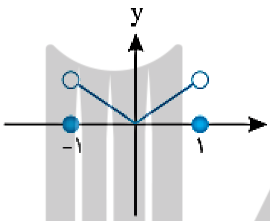
$2\le x<3 \longrightarrow [x]=2 \longrightarrow y=\frac{x}{2} \xrightarrow{2\le x<3} 1\le y<\frac{3}{2} \longrightarrow a=1, b=\frac{3}{2}$

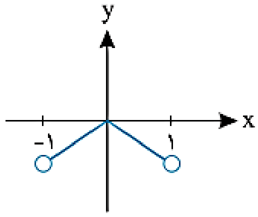
پس $a+b+c=4/5$

نمودار تابع $y=x\left[[x]-x\right]$ در بازهٔ $[-1,1]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

$$y=\begin{cases}0 & x=-1\\ x[-1-x] & -1<x<0\\ x[-x] & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases} \rightarrow y=\begin{cases}0 & x=-1\\ -x & -1<x<0\\ -x & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی بالا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{x+[x]+[-x]}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$

۲) $\mathbb{R}-\{0\}$

۳) $\mathbb{R}-\{0,1\}$

۴) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

می‌دانیم که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in\mathbb{Z}\\ \frac{1}{x-1} & x\notin\mathbb{Z}\end{cases} \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

معادله‌ی $x=[x]+\frac{1}{4}$ در بازه‌ی $[-2,4]$، چند ریشه دارد؟ ($[\ ]$ علامت جزء صحیح است)

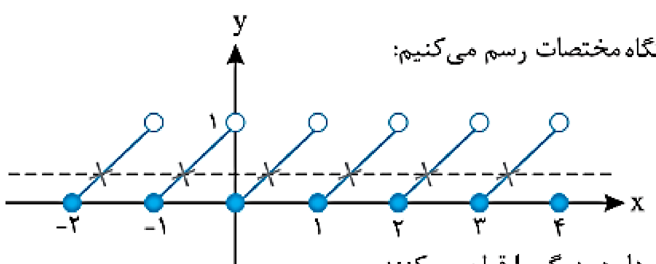
۱) ۶

۲) ۴

۳) ۲

۴) صفر

نمودارهای دو تابع $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{1}{4}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



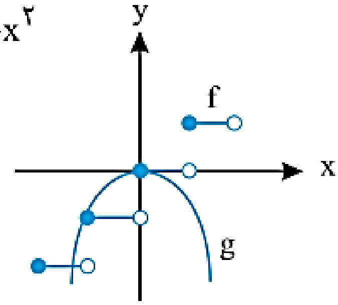
با توجه به نمودارهای رسم شده در بازه‌ی $[-2,4]$ در ۶ نقطه این دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند.

معادله‌ی $x^{۲}+[x]=۰$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

نمودار دو تابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=-x^{۲}$ را رسم می‌کنیم.

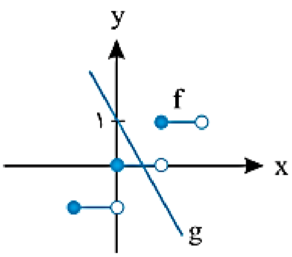
$$x^{۲}+[x]=۰\longrightarrow[x]=-x^{۲}$$



با توجه به نمودارهای رسم شده معادله سه جواب دارد.

ریشه معادله $۲x+[x]=۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$



$$۲x+[x]=۱\longrightarrow[x]=۱-۲x$$

حـال نمـودار دو تـابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=۱-۲x$ را رسم می‌کنیم.

این دو نمودار همدیگر را در فاصلـه‌ی $(۰,۱)$ قطع کرده‌اند پس:

$$۰<x<۱\longrightarrow[x]=۰\longrightarrow۱-۲x=۰\longrightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

نمودار تابع $y=[۳x]$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ از چند قسمت تشکیل شده است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$$\begin{cases}y=[۳x]=-۳\\-۱\le x<-\frac{۲}{۳}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}y=[۳x]=-۲\\-\frac{۲}{۳}\le x<-\frac{۱}{۳}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=[۳x]=-۱\\-\frac{۱}{۳}\le x<۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=[۳x]=۰\\۰\le x<\frac{۱}{۳}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=[۳x]=۱\\\frac{۱}{۳}\le x<\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}y=[۳x]=۲\\\frac{۲}{۳}\le x<۱\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=[۳x]=۳\\x=۱\end{cases}$$

برد تابع $y=[x]+[-x]$ کدام است؟

۱) $\{-۱\}$ ۲) ۰ ۳) $\{-۱,۰\}$ ۴) $\{۱,۰\}$

معادله‌ی $۲x-[۲x]=[x]+[-x]$ در بازه‌ی $\left(۱,\frac{۷}{۲}\right)$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

$$\begin{cases}۲x-[۲x]=[x]+[-x]\\۰\le۲x-[۲x]<۱\\[x]+[-x]=۰ \text{ یا } -۱\end{cases}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=۲ \text{ یا } ۳$$

دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{([x]-\sqrt{2})(3-[x])}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $[\sqrt{2},3]$

۲) $[1,3)$

۳) $[2,4)$

۴) $[1,3]$

$([x]-\sqrt{2})(3-[x])\geq 0 \longrightarrow \sqrt{2}\leq [x]\leq 3 \xrightarrow{\text{عدد صحیح است } [x]} [x]=2$ یا $3 \rightarrow 2\leq x<4 \rightarrow D_f=[2,4)$

تست ارزشیابی

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{ax^۲+cx+b}{x^۲+bx+c}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-۳,۲\}$ باشد، $b+c$ برابر کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) -۷ ۴) ۷

اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x^۲+ax+۹}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، تمام حدود a کدام است؟

۱) $a<۶$ ۲) $-۶<a<۶$ ۳) $a\le ۶$ ۴) $-۶\le a\le ۶$

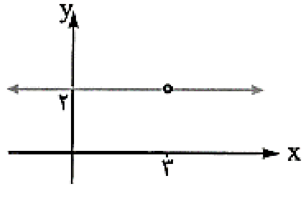
برای این‌که تابع $y=\dfrac{x}{x^۲+x+m}$ همواره معین باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\ge -\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $m\le -\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $m<\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $m>\dfrac{۱}{۴}$

به ازای چند مقدار a، دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x-۵}{x^۲+ax+۴}$ به صورت $\mathbb{R}-\{x_۱\}$ است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

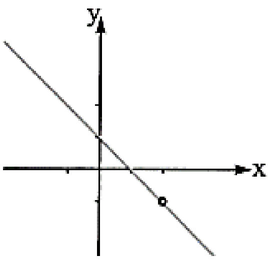
اگر نمودار روبه‌رو متعلق به تابع $f(x)=\dfrac{ax-۶}{x+b}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) -۱ ۲) ۱

۳) -۵ ۴) ۵

نمودار روبه‌رو متعلق به کدام تابع است؟



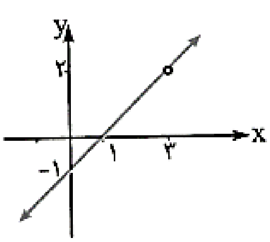
۱) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$

۲) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2-x}$

۳) $f(x)=\dfrac{-x^2+3x-2}{2-x}$

۴) $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+2}{x-2}$

اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+c}$ باشد، مقدار $a+b+c$ برابر کدام است؟



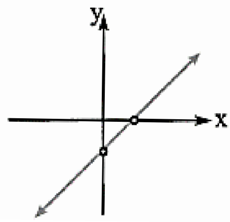
۱) ۲

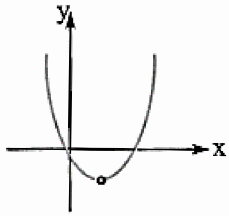
۲) −۲

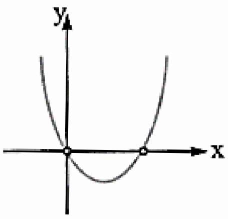
۳) ۴

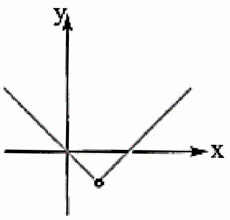
۴) −۴

کدام‌یک نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(x^۲-۲x)^۲}{x^۲-۲x}$ را مشخص می‌کند؟

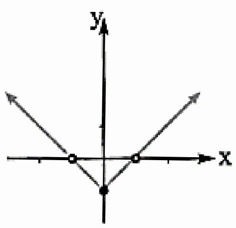
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

کدام ضابطه متعلق به تابع شکل روبه‌رو است؟



۱) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{|x|+۱}$

۲) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{|x|-۱}$

۳) $f(x)=\dfrac{x^۲+۲|x|+۱}{|x|-۱}$

۴) $f(x)=\dfrac{x^۲-۲|x|+۱}{|x|-۱}$

دو تابع f و g مفروض‌اند. در کدام گزینه دو تابع مساوی‌اند؟

۱) $f(x)=\dfrac{x^۲}{x}, g(x)=x$

۲) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲}}{|x|}, g(x)=۱$

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲, g(x)=x$

۴) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}, g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

کدام‌یک از توابع **f** و **g** در $\mathbb{R}$ با ضوابط زیر مساوی‌اند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x^2 - x} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = [\dfrac{x^2}{x^2+1}] \\ g(x) = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x} \\ g(x) = 1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}} \\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}} \end{cases}$

وارون تابع :

حتما می‌دانید که یک تابع مثل یک ماشین عمل می‌کند. ماشینی که هر عضو از دامنه را تنها به یک عضو از هم‌دامنه مرتبط می‌کند.
در بسیاری از موارد، دو ماشین عملی عکس یکدیگر انجام می‌دهند. یعنی ماشین اول ورودی را به خروجی تبدیل کرده و ماشین دوم، خروجی ماشین اول را می‌گیرد و دوباره ورودی را تولید می‌کند.
برای برخی توابع هم چنین چیزی وجود دارد. یعنی می‌توان تابعی دیگر ایجاد کرد که عکس تابع اصلی عمل کرده و خروجی را به ورودی تبدیل کند.

به چنین تابعی، تابع معکوس یا تابع وارون می‌گویند. به زبان ریاضی داریم: $f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$

با توجه به تعریف f و f^{-1}، اعضای دامنهٔ f، به جای اعضای برد f^{-1} و اعضای برد f، به جای اعضای دامنهٔ f^{-1} قرار می‌گیرند:

$$f=\{(۲،۴)،(-۱،۴)،(۵،۳)،(-۳،۱)\}\Rightarrow f^{-1}=\{(۴،۲)،(۴،-۱)،(۳،۵)،(۱،-۳)\}$$

$$\begin{cases} D_f=\{-۳،-۱،۲،۵\} \\ R_f=\{۱،۳،۴\} \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-1}}=\{۱،۳،۴\}=R_f \\ R_{f^{-1}}=\{-۳،-۱،۲،۵\}=D_f \end{cases}$$

در حالت کلی، نکتهٔ زیر را می‌توان در نظر گرفت:

نکته اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، آن‌گاه:

۱) برد تابع f^{-1} = دامنهٔ تابع f $(D_f=R_{f^{-1}})$

۲) دامنهٔ تابع f^{-1} = برد تابع f $(R_f=D_{f^{-1}})$

آیا معکوس هر تابعی، خود یک تابع است؟

اگر کمی دقت کنید، متوجه می‌شوید که معکوس هر تابعی، یک تابع نیست. مثال زیر را ببینید.

$$f=\{(1,8)(7,13)(4,6)(10,10)(5,6)\}$$

برای به دست آوردن معکوس تابع f، باید در هر زوج مرتب، جای مؤلفه اول و دوم را عوض کنیم. در اینصورت، معکوس تابع f به صورت زیر است:

$$f^{-1}=\{(8,1)(13,7)(6,4)(10,10)(6,5)\}$$

تابع نیست. دلیل آن هم وجود دو زوج (۶،۴) و (۶،۵) است.
پس در تابع اصلی نباید مؤلفه دوم هیچ دو زوج مرتبی یکسان باشد. این همان تعریف تابع یک به یک است.

پس زمانی وارون یک تابع، خود تابع است که، تابع اصلی یک به یک باشد. به تابعی که معکوسش هم تابع است، معکوس پذیر می‌گویند.
در بحث تابع، توابع معکوس پذیر (یک به یک) اهمیت زیادی دارند.

$$\begin{cases} \text{تابع وارون پذیر نیست.} \Rightarrow \text{وارون تابع، تابع نیست.} \Rightarrow \text{وارون دارد.} \Rightarrow \text{تابع یک‌به‌یک نیست.} \\ \text{تابع وارون‌پذیر است.} \Rightarrow \text{وارون تابع، تابع است.} \Rightarrow \text{وارون دارد.} \Rightarrow \text{تابع یک‌به‌یک است.} \end{cases}$$

برای این‌که ببینیم تابعی یک‌به‌یک هست یا نه:

۱ اگر بتوانیم مثال نقض بزنیم یعنی نشان دهیم که برای دو مقدار متفاوت x، یک مقدار یکسان برای y به دست می‌آید، آن‌گاه تابع یک‌به‌یک نیست.

۲ اگر نمودار تابع را رسم کنیم و هر خط موازی محور xها (*همان خط‌های افقی*) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، تابع یک‌به‌یک است.

نکته اگر یک تابع به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شده باشد (مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب متمایز، باید متمایز باشند)، هنگامی تابع یک‌به‌یک است که مؤلفه‌های دوم آن دوبه‌دو متمایز باشند و اگر دو زوج‌مرتب دارای مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز برابر باشند.

اگر تابع $f=\{(-۲،۲)،(m،۳)،(-۱،۳)،(۲m،a)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار a کدام است؟

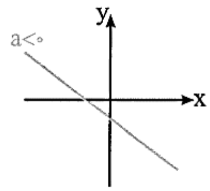
۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۱

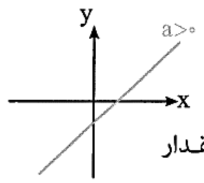
در تابع یک‌به‌یک اگر دو زوج‌مرتب با مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشیم، آن‌گاه مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابرند. بنابراین:

$$(-۱،۳)\in f\ ،\ (m،۳)\in f \xrightarrow{\text{f یک‌به‌یک است}} m=-۱\Rightarrow f=\{(-۲،۲)،(-۱،۳)،(-۲،a)\}$$

از طرفی f تابع است، بنابراین اگر دو زوج‌مرتب با مؤلفه‌های اول مساوی داشته باشیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم باید با هم برابر باشند.

$(-۲،a)\in f\ ،(-۲،۲)\in f \xrightarrow{\text{f تابع است}} a=۲\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.





نکته در تابع خطی $f(x) = ax + b$:

۱) اگر $a \neq ۰$ باشد، آن‌گاه با توجه به نمودار، f تابعی یک‌به‌یک است:
(هر خط به موازات محور x ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.)

۲) اگر $a = ۰$، آن‌گاه ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = b$ درمی‌آید که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، مقدار تابع برابر عدد ثابت b است. پس در این حالت f تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

نکتهٔ مهم هر تابعی که اکیداً یکنوا باشد، حتماً تابعی یک‌به‌یک است.

نکته اگر ضابطهٔ تابع داده شده باشد، برای بررسی یک‌به‌یک بودن تابع باید درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنیم:

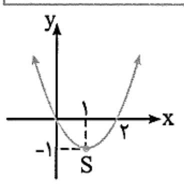
$$x_۱, x_۲ \in D_f \quad , \quad f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

یک‌به‌یک بودن تابع $f(x) = |x|$ را بررسی کنید.

$$D_f = \mathbb{R} \ , \ f(x_۱) = |x_۱| \ , \ f(x_۲) = |x_۲| \ , \ f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow |x_۱| = |x_۲| \Rightarrow x_۱ = \pm x_۲$$

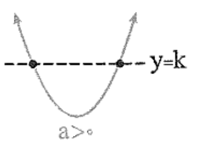
بنابراین تابع f یک‌به‌یک نمی‌باشد. به عنوان مثال، دو زوج‌مرتب $(۱,۱)$ و $(-۱,۱)$ در تابع f قرار دارند.

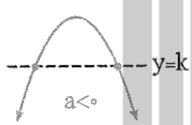
محدود کردن دامنه و ساختن یک تابع یک به‌یک



نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x$ به‌صورت مقابل است:

خطی مانند $y = ۱$ (هر خط به‌صورت $y = k$ و $k > -۱$)، نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند. پس f تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ تابع، تابعی یک‌به‌یک از آن ساخت که وارون آن، یک تابع باشد. مثلاً می‌توان دامنهٔ آن را $[۱,+\infty)$ در نظر گرفت تا تابع f روی این بازه، تابعی یک‌به‌یک شود.





نکته با توجه به سهمی، هیچ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲، روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست.

خط $x = -\frac{b}{۲a}$، محور تقارن سهمی است. اگر نمودار f را در یکی از بازه‌های $(-\infty, -\frac{b}{۲a}]$ یا $[-\frac{b}{۲a}, +\infty)$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، آن‌گاه f تابعی یک‌به‌یک خواهد شد.

تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ یک‌به‌یک نیست. بزرگ‌ترین بازه‌هایی که این تابع در آن یک‌به‌یک است، برابرند با: $[-\frac{b}{۲a}, +\infty)$ و $(-\infty, -\frac{b}{۲a}]$.

تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۴x - ۱$ روی کدام‌یک از بازه‌های زیر، تابعی یک‌به‌یک است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $[۱,۵)$ ۴) $(-۳,۳)$

خط $x = -\frac{b}{۲a} = ۲$، محور تقارن نمودار f است. f روی بازه‌های $[۲,+\infty)$ و $(-\infty,۲]$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن‌ها یک‌به‌یک است:

۱) f روی $[۰,+\infty)$ تابعی یک‌به‌یک نیست. $\Rightarrow [۰,+\infty) \not\subseteq [۲,+\infty)$

۲) f روی $(-\infty,۰)$ تابعی یک‌به‌یک است. $\Rightarrow (-\infty,۰) \subseteq (-\infty,۲]$

۳) f روی $[۱,۵)$ تابعی یک‌به‌یک نیست. $\Rightarrow [۱,۵) \not\subseteq [۲,+\infty), (-\infty,۲]$

۴) f روی $(-۳,۳)$ یک‌به‌یک نیست $\Rightarrow (-۳,۳) \not\subseteq (-\infty,۲]\ ,\ [۲,+\infty)$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

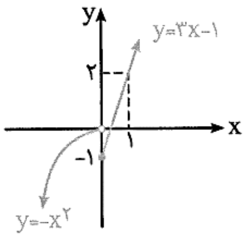
تابع $f(x) = x^۲ + ۲x$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ یک‌به‌یک است. بزرگ‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) ۲   ۲) صفر   ۳) -۱ ۴) -۲

طول رأس سهمی $f(x) = x^۲ + ۲x$ برابر $x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-(۲)}{۲(۱)} = -۱$ است، پس تابع در بازه‌های $(-\infty, -۱]$ و $[-۱, +\infty)$ یک‌به‌یک است، یعنی تابع در هر بازه به صورت $(-\infty, a]$ که در آن $a \leq -۱$ است وارون‌پذیر است؛ پس بزرگ‌ترین مقدار a برابر -۱ است.

اگر $f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ باشد، دامنهٔ وارون تابع f کدام است؟

۱) $[۰,-۱]$ ۲) $[-۱,+\infty]$ ۳) $[-\infty,۰]$ ۴) $\mathbb{R}$



روش اول: برد تابع f، دامنهٔ $f^{-۱}$ است. برد تابع دوضابطه‌ای f را هم می‌توان با رسم نمـودار و هم می‌توان از روی ضابطهٔ آن تعیین کرد.

نمودار f از تابع خطی $y=۳x-۱$ برای $x\geq ۰$ و تابع درجه دوم $y=-x^۲$ برای $x<۰$ تشکیل شده است.

اگر نمودار را روی محور yها تصویر کنیم، برد تابع به‌دست می‌آید. تصویر نمودار روی محور yها، شامل تمام نقاط روی محور yها است، بنابراین:

$R_f=\mathbb{R}\Rightarrow D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}\Rightarrow$ گزینهٔ (۴) صحیح است.

روش دوم: برای تعیین برد از روی ضابطه، برد هر یک از ضابطه‌ها را با توجه به دامنه به‌دست می‌آوریم. اجتماع آن‌ها برد تابع f است:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq ۰\ ,\ y=۳x-۱: x\geq ۰\Rightarrow ۳x\geq ۰\Rightarrow ۳x-۱\geq -۱\Rightarrow y_۱\geq -۱\Rightarrow R_۱=[-۱,+\infty) \\ x<۰\ ,\ y=-x^۲: x<۰\Rightarrow x^۲>۰\Rightarrow -x^۲<۰\Rightarrow y_۲<۰\Rightarrow R_۲=(-\infty,۰)\end{array}\right\}\Rightarrow R_f=R_۱\cup R_۲=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

نکته: اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ و بر عکس. به عبارت دیگر اگر نمودار f از نقطهٔ (a,b) بگذرد، آن‌گاه نمودار $f^{-۱}$ از نقطهٔ (b,a) می‌گذرد.

اگر f تابعی با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۵x$ باشد، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) $f^{-۱}(۱۰)=۲$ ۲) $f^{-۱}(-۴)=-۱$ ۳) $f^{-۱}(۱)=۶$ ۴) $f^{-۱}(-۱)=-۱$

بررسی گزینه‌ها: ۱) اگر تساوی $f^{-۱}(۱۰)=۲$ درست باشد، آن‌گاه باید تساوی $f(۲)=۱۰$ نیز برقرار باشد. داریم:

$f(x)=x^۲+۵x\Rightarrow f(۲)=۲^۲+۵(۲)=۱۴\neq ۱۰$

پس تساوی $f^{-۱}(۱۰)=۲$ برقرار نمی‌باشد.

۲) اگر $f^{-۱}(-۴)=-۱$، آن‌گاه $f(-۱)=-۴$. داریم:

$f(-۱)=(-۱)^۲+۵(-۱)=-۴\Rightarrow f^{-۱}(-۴)=-۱$ ✓

۳) اگر $f^{-۱}(۱)=۶$ باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم $f(۶)=۱$، اما داریم:

$f(۶)=۶^۲+۵(۶)=۶۶\neq ۱$

۴) اگر $f^{-۱}(-۱)=-۱$، آن‌گاه $f(-۱)=-۱$ اما داریم:

$f(-۱)=-۴\neq -۱$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

اگر $f(x)=۳-\sqrt{۲x+۵}$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۰)$ کدام است؟

۱) $۳-\sqrt{۵}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) تعریف نشده است.

اگر $f^{-۱}(۰)=b$ باشد، آن‌گاه $f(b)=۰$ است، بنابراین داریم:

$f(x)=۳-\sqrt{۲x+۵}\Rightarrow f(b)=۳-\sqrt{۲b+۵}=۰$

$\Rightarrow ۳=\sqrt{۲b+۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}۹=۲b+۵\Rightarrow ۲b=۴\Rightarrow b=۲\Rightarrow$ گزینهٔ (۲) صحیح است.

تابع با ضابطهٔ $f(x)=(a-۱)x^۲+ax-۲$ روی $\mathbb{R}$، تابعی یک‌به‌یک می‌باشد. $f^{-۱}(۴)$ کدام است؟

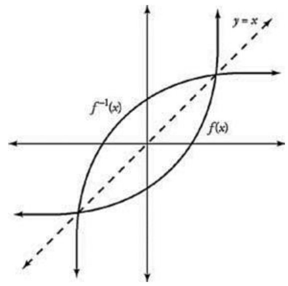
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

هیچ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲، روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نمی‌باشد. برای آن‌کـه f روی $\mathbb{R}$، تـابعی یک‌بـه‌یک باشـد، بایـد $a-۱=۰$ شـود تـا عامل $x^۲$ حذف و f تبدیل به یک تابع خطی غیرثابت شود:

$a-۱=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=x-۲$

فرض کنیم $f^{-۱}(۴)=b$ باشد، در این‌صورت داریم:

$f(b)=۴\xrightarrow{f(x)=x-۲}f(b)=b-۲=۴\Rightarrow b=۶\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.



نمودار تابع وارون:
نمودار تابع وارون رابطه بسیار جالبی با نمودار تابع اصلی دارد. نمودار تابع وارون و تابع اصلی نسبت به خط قرینه‌اند.
زیرا وقتی جای مؤلفه x و y را در یک زوج مرتب عوض می‌کنید، در واقع آن را نسبت به خط y=x قرینه کرده‌اید. به عبارت دیگر، دو نقطه (x,y) و (y,x) نسبت به خط y=x قرینه هستند.

نکته برای مشخص کردن طول نقطهٔ (نقاط) تلاقی نمودار توابع f و f^{-1} باید معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کنیم اما اگر f تابعی اکیداً صعودی و نمودار f و f^{-1} همدیگر را قطع کنند، آن‌گاه نقطهٔ تلاقی روی خط $y=x$ است. به عبارت دیگر با حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)=x$، می‌توان طول نقطهٔ تلاقی نمودار f و f^{-1} را تعیین کرد. یعنی می‌توان به جای حل معادلهٔ $f(x)=f^{-1}(x)$، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کرد.

نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، نمودار f^{-1} را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱، صفر ۲) ۲، صفر ۳) ۲، ۳ ۴) ۱، ۲

f تابعی اکیداً صعودی است، بنابراین با حل معادلهٔ $f^{-1}(x)=f(x)=x$، طول نقطهٔ تلاقی نمودار توابع f و f^{-1} به‌دست می‌آید:

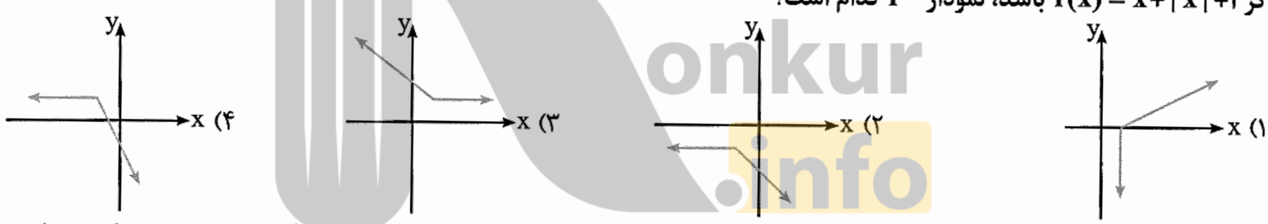
$$f(x)=x \Rightarrow \sqrt{x}=x \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} x=x^۲ \Rightarrow x-x^۲=۰ \Rightarrow x(۱-x)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۱ \Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

خط به معادلهٔ $۳x+۴y=۱۲$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. کدام نقطهٔ زیر روی نمودار تابع جدید قرار دارد؟

۱) $(۳,-۱)$ ۲) $(-\frac{۳}{۲},۶)$ ۳) $(-۲,۴)$ ۴) $(۶,-۲)$

در معادلهٔ $۳x+۴y=۱۲$، اگر به جای x، y و به جای y، x قرار دهیم، ضابطهٔ نمودار تابع جدید به‌دست می‌آید. بنابراین ضابطهٔ نمودار تابع جدید به‌صورت $۴x+۳y=۱۲$ است. از بین نقاط داده‌شده، فقط مختصات نقطهٔ $(-\frac{۳}{۲},۶)$ در معادلهٔ $۴x+۳y=۱۲$ صدق می‌کند و در نتیجه گزینهٔ (۲) صحیح است.

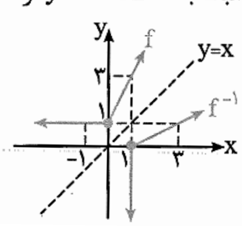
اگر $f(x)=x+|x|+۱$ باشد، نمودار f^{-1} کدام است؟



نمودار تابع $f(x)=x+|x|+۱$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کرده و سپس قرینهٔ نمودار تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا نمودار f^{-1} به‌دست آید:

ریشهٔ درون قدرمطلق

x	-۱	۰	۱
y	۱	۱	۳



$\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

نکتهٔ مهم برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع وارونِ تابع پیوستهٔ f، باید برد تابع f را به‌دست آوریم.
اگر f تابعی اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد، می‌توان در دو حالت زیر برد تابع f را به‌دست آورد:
حالت اول: اگر f تابعی اکیداً صعودی روی بازهٔ (a,b) باشد، آن‌گاه برد تابع f، بازهٔ $(f(a),f(b))$ خواهد بود.
حالت دوم: اگر f تابعی اکیداً نزولی روی بازهٔ (a,b) باشد، آن‌گاه برد تابع f، بازهٔ $(f(b),f(a))$ است.
به عنوان مثال، تابع $f(x)=|x|-|x-۲|$ روی بازهٔ $(۰,۲)$ اکیداً صعودی است، برد این تابع برابر است با:
$$f(۰)=-۲\ ,\ f(۲)=۲ \Rightarrow R_f=(-۲,۲)$$

تذکر اگر ابتدا یا انتهای بازه یا هر دو بی‌نهایت باشند، از $+\infty$ و $-\infty$ در ابتدا، انتها یا در هر دو استفاده می‌کنیم.
به عنوان مثال، اگر بخواهیم برد تابع وارون‌پذیر $f(x)=۲+\sqrt{x}$ را به‌دست آوریم، داریم: (f تابع پیوسته و اکیداً صعودی است.)
$$D_f=[۰,+\infty) \Rightarrow f(۰)=۲ \Rightarrow f(x)\ge f(۰)=۲ \Rightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

محاسبه معکوس تابع از روی ضابطه

اگر تابع به صورت ضابطه نمایش داده شده باشد، چگونه می‌توان معکوس آن را به دست آورد؟

مراحل انجام این کار به شرح زیر است:

مرحله اول: در تابع اصلی به جای x ، y و به جای y ، x قرار می‌دهیم.

مرحله دوم: تابع را طوری مرتب می‌کنیم که در یک طرف یک y تنها و در طرف دیگر عبارتی مبتنی بر x باشد.

$$y = 2x + 3 \to y - 3 = 2x \to x = \frac{y-3}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \longrightarrow x = \sqrt{y+1} \to x^2 = y + 1 \to y = x^2 - 1 \to f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x-6}$$

$$x = \frac{y-3}{y-6} \to y - 3 = x(y-6) \to y - 3 = xy - 6x \to 6x - 3 = xy - y \to$$

$$6x - 3 = y(x-1) \to y = \frac{6x-3}{x-1}$$

معکوس توابع معروف

در زیر لیستی از معکوس توابع معروف آورده شده است:

تابع اصلی	تابع معکوس
$f(x) = ax + b$	$f^{-1} = \frac{x-b}{a}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f^{-1} = x^n$
$f(x) = log_a x$	$f^{-1} = a^x$
$f(x) = \frac{ax+b}{cs+d}$	$f^{-1} = \frac{dx-b}{a-cx}$

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x) = \frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۵}$ را پیدا کنید.

همان‌طور که گفتیم اول به جای $f(x)$ می‌گذاریم y:

$$y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۵}$$

حالا x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۲}{۳}x = y + \frac{۱}{۵} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}(y + \frac{۱}{۵}) \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}y + \frac{۳}{۱۰}$$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۱۰}$$

ضابطهٔ $y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۱۰}$ یا $f^{-۱}(x) = \frac{۳}{۲}x + \frac{۳}{۱۰}$، ضابطهٔ تابع وارون f است.

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x) = \frac{۲x+۳}{x-۵}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x) = \frac{x-۵}{۲x+۳}$ ۲) $f^{-۱}(x) = \frac{۳x+۲}{۵x-۱}$ ۳) $f^{-۱}(x) = \frac{۵x+۳}{x-۲}$ ۴) $f^{-۱}(x) = \frac{۵x-۱}{۲x-۳}$

کارهایی را که گفتیم به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{۲x+۳}{x-۵} \Rightarrow y = \frac{۲x+۳}{x-۵} \Rightarrow yx - ۵y = ۲x + ۳ \Rightarrow yx - ۲x = ۵y + ۳ \Rightarrow x(y-۲) = ۵y + ۳$$

$$\Rightarrow x = \frac{۵y+۳}{y-۲} \xrightarrow{\text{وارون}} y = \frac{۵x+۳}{x-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۵x+۳}{x-۲}$$

دقت کنید که وقتی x را برحسب y پیدا می‌کنیم تا وقتی که جای x و y را عوض نکرده‌ایم، هنوز با خود تابع سروکار داریم و ضابطهٔ تابع وارون از جایی شروع می‌شود که جای x و y را عوض کنیم.

ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\begin{cases}۳x & x\geq ۰\\ \dfrac{x}{۲} & x<۰\end{cases}$ را پیدا کنید

برای هر کدام از ضابطه‌ها، ضابطهٔ تابع وارون را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$x\geq ۰ \Rightarrow y=۳x \Rightarrow x=\frac{y}{۳} \xrightarrow{\text{تابع وارون}} y=\frac{x}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۳}$$

$$x<۰ \Rightarrow y=\frac{x}{۲} \Rightarrow x=۲y \xrightarrow{\text{تابع وارون}} y=۲x \Rightarrow f^{-۱}(x)=۲x$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت مقابل است:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{۳} & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$$

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\geq ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x+۱) & x<۰\\ \frac{۱}{۴}(x-۱) & x\geq ۰\end{cases}$

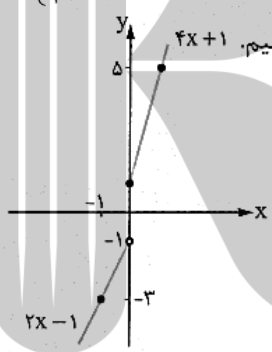
۲) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x-۱) & x<۰\\ \frac{۱}{۴}(x+۱) & x\geq ۰\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x-۱) & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}(x+۱) & x\geq ۱\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x+۱) & x<-۱\\ \frac{۱}{۴}(x-۱) & x\geq ۱\end{cases}$

باید برای هر کدام از ضابطه‌های تابع، برد و ضابطهٔ وارون را حساب کنیم. برای پیداکردن برد بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\geq ۰\end{cases} \Rightarrow$$



حالا با توجه به نمودار می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x<۰ \Rightarrow y=۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases}\text{برد}: y<-۱\\ y=۲x-۱ \Rightarrow x=\dfrac{y+۱}{۲} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\dfrac{۱}{۲}(x+۱)\end{cases}\\ x\geq ۰ \Rightarrow y=۴x+۱ \Rightarrow \begin{cases}\text{برد}: y\geq ۱\\ y=۴x+۱ \Rightarrow x=\dfrac{y-۱}{۴} \xrightarrow{\text{وارون}} y=\dfrac{۱}{۴}(x-۱)\end{cases}\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع وارون به صورت روبه‌رو است:

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}(x+۱) & x<-۱\\ \dfrac{۱}{۴}(x-۱) & x\geq ۱\end{cases}$$

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}+۳$ را به‌دست آورید.

به جای $f(x)$، y قرار می‌دهیم و سپس x را بر حسب y می‌نویسیم: $y=\sqrt{x}+۳ \Rightarrow \sqrt{x}=y-۳$

برای حذف رادیکال، دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، داریم: $x=(y-۳)^۲$

به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x قرار می‌دهیم: $f^{-1}(x)=(x-۳)^۲$

می‌دانیم دامنهٔ تابع $y=(x-۳)^۲$ برابر $\mathbb{R}$ است اما دامنهٔ $f^{-1}(x)=(x-۳)^۲$ برابر $\mathbb{R}$ نمی‌باشد. برای تعیین دامنهٔ f^{-1}، باید برد f را به‌دست بیاوریم:

همواره : $\sqrt{x}\geq ۰ \xrightarrow{+۳} \sqrt{x}+۳\geq ۳ \Rightarrow f(x)\geq ۳ \Rightarrow R_f=[۳,+\infty)=D_{f^{-1}}$

برد f را به‌صورت مقابل نیز می‌توانیم به‌دست بیاوریم. f تابعی اکیداً صعودی است:

داریم: $D_f=[۰,+\infty) \Rightarrow R_f=[f(۰),+\infty)=[۳,+\infty)$

نکتهٔ تستی تعیین ضابطهٔ تابع وارون، در تست‌های کنکور زیاد مطرح می‌شود. برای حل این‌گونه تست‌ها می‌توان از عددگذاری و رد گزینه‌ها استفاده کرد. برای این‌کار، مقدار تابع را به ازای یک a دلخواه به‌دست می‌آوریم (b). در تابع‌های داده‌شده به جای x، b قرار می‌دهیم، هر کدام که حاصل برابر a نشود، جواب تست نمی‌باشد.

تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-|۲-x|$ روی بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ,\ x\leq ۲$

۲) $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ,\ x\geq ۲$

۳) $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}(x-۲)\ ,\ x\leq ۲$

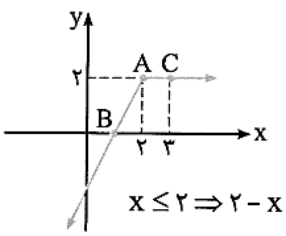
۴) $f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}(x-۲)\ ,\ x\geq ۲$

روش اول: با رسم نمودار تابع قدرمطلقی از درجهٔ اول $y=x-|۲-x|$ به کمک نقطه‌یابی، ابتدا بازه‌ای که نمودار در آن بازه وارون‌پذیر است را مشخص می‌کنیم:

$x=۲ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow A(۲,۲)$ (ریشهٔ داخل قدرمطلق)

دو نقطهٔ کمکی در دو طرف نقطهٔ A مشخص می‌کنیم:

نقاط کمکی: $B(۱,۰)\ ,\ C(۳,۲)$



با توجه به نمودار، f روی بازهٔ $(-\infty,۲]$ اکیداً صعودی و در نتیجه وارون‌پذیر است.

باید برد تابع f را به‌دست آوریم تا دامنهٔ f^{-1} به‌دست آید. با تصویر کردن نمودار تابع روی محور y ها، بازهٔ $(-\infty,۲]$ به‌دست می‌آید که این بازه، برد تابع است. پس دامنهٔ f^{-1} برابر $(-\infty,۲]$ است و ضابطهٔ f^{-1} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$x\leq ۲ \Rightarrow ۲-x\geq ۰ \Rightarrow |۲-x|=۲-x=-x+۲ \Rightarrow y=x-(-x+۲)$

$\Rightarrow y=۲x-۲ \Rightarrow ۲x=y+۲ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(y+۲) \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)\ ,\ x\leq ۲ \Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

روش دوم: از عددگذاری برای رد گزینه‌ها استفاده می‌کنیم. می‌دانیم اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ می‌باشد. عدد دلخواهی از بازهٔ $(-\infty,۲)$، مثلاً $x=۰$ را انتخاب می‌کنیم و $f(۰)$ را به‌دست می‌آوریم:

$f(۰)=۰-|۲-۰|=-۲ \Rightarrow f^{-1}(-۲)=۰$

پس $x=-۲$ باید در دامنهٔ f^{-1} قرار داشته باشد که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. با قرار دادن عدد -۲ در ضابطهٔ گزینه‌های (۱) و (۳) داریم:

$f^{-1}(-۲)=\frac{۱}{۲}(-۲+۲)=۰ \Rightarrow$ برقرار است.

$f^{-1}(-۲)=\frac{۱}{۲}(-۲-۲)=-۲ \Rightarrow$ برقرار نیست.

$\Rightarrow$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\ge 0\\ \frac{1}{2}x-4 & x<0\end{cases}$ **در صورت وجود کدام است؟**

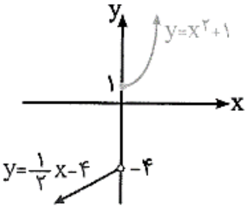
۱) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\ge 1\\ \frac{1}{2}x+4 & x<-4\end{cases}$

۲) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x-1} & x\ge 1\\ 2x+8 & x<0\end{cases}$

۳) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\ge 1\\ 2x+8 & x<-4\end{cases}$

۴) f وارون‌پذیر نمی‌باشد.

روش اول: نمودار تابع دوضابطه‌ای f به‌صورت مقابل است:



هر خط به موازات محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین f تابعی یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. برای محاسبهٔ f^{-1}، باید ضابطهٔ وارون هر یک از ضابطه‌ها را جداگانه به‌دست آوریم. البته توجه داشته باشید که برای هر ضابطه باید برد آن را نیز مشخص کنیم، زیرا برد آن، دامنهٔ وارون آن می‌باشد.

با توجه به نمودار، برد تابع $y=x^2+1$ برای $x\ge 0$، مجموعهٔ $[1,+\infty)$ و برد تابع $y=\frac{1}{2}x-4$ برای $x<0$، مجموعهٔ $(-\infty,-4)$ می‌باشد.

$$x\ge 0\Rightarrow y=x^2+1\Rightarrow y\ge 1\Rightarrow D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون در این حالت داریم:

$$y=x^2+1\Rightarrow x^2=y-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{y-1}\xrightarrow{x\ge 0}x=\sqrt{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}\ ,\ x\ge 1 \qquad (1)$$

$$x<0\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-4\Rightarrow y<-4\Rightarrow D_{f^{-1}}=(-\infty,-4)$$

$$y=\frac{1}{2}x-4\xrightarrow{\times 2}2y=x-8\Rightarrow x=2y+8\Rightarrow f^{-1}(x)=2x+8\ ,\ x<-4 \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\ge 1\\ 2x+8 & x<-4\end{cases}\Rightarrow$$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

روش دوم: ابتدا با رسم نمودار، مشخص می‌کنیم که تابع وارون‌پذیر است یا خیر. چون تابع وارون‌پذیر است، پس گزینهٔ (۴) نادرست است. مقدار $f(1)$ برابر ۲ است. اگر به جای x در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳)، عدد ۲ قرار دهیم، حاصل گزینه‌های (۱) و (۳) برابر ۱ می‌شوند، بنابراین گزینهٔ (۲) نادرست است. از عدد دلخواه دیگری استفاده می‌کنیم:

$$f(-2)=-5\xrightarrow{f^{-1}(x)=2x+8}f^{-1}(-5)=-10+8=-2 \quad ✓$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

نکات مهم تابع معکوس

نکته ۱: دامنه تابع معکوس برابر است با برد تابع اصلی. $D_{f^{-1}}=R_f$

نکته ۲: برد تابع معکوس برابر است با دامنه تابع اصلی. $R_{f^{-1}}=D_f S=3$

نکته ۳: ترکیب هر تابع با معکوسش برابر است با تابع همانی $fof^{-1}(x)=x$

نکته ۴: تابعی که خودش با معکوسش برابر است، تابع پیچ نامیده می شود. $f(x)=x\rightarrow f^{-1}(x)=x$

نکته ۵: معکوس معکوس یک تابع برابر است با خود تابع $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

نکته ۶: معکوس ترکیب دو تابع برابر است به صورت زیر است: $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$