

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

دنباله‌ی حسابی

❖ دنباله‌ی حسابی (عددی): دنباله‌ای است که به جز جمله اول آن، هر جمله‌اش برابر است با جمله قبلی آن به اضافه یک مقدار ثابت. این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله نامیده با d نشان می‌دهیم به عبارت دیگر دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که تفاضل هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی است.

مثال: $a_n = 3n - 2$ جمله عمومی یک دنباله حسابی است، زیرا:

$$a_{n+1} - a_n = (3(n+1) - 2) - (3n - 2) = 3$$

مثال: $b_n = n^2$ جمله عمومی یک دنباله حسابی نیست، زیرا:

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \quad \text{به } n \text{ وابسته است}$$

❖ جمله عمومی دنباله حسابی که قدر نسبت آن d و جمله اول آن a باشد برابر است با:

$$a_n = a + (n-1)d$$

مثال: جمله چندم دنباله $1, 4, 7, \dots$ برابر با 100 است؟

حل: چون $a = 1$ و $d = 3$ می‌باشد و $a_n = 100$ بنابراین:

$$100 = 1 + (n-1)(3) \Rightarrow 100 = 1 + 3n - 3 \Rightarrow 3n = 102 \Rightarrow n = 34$$

بنابراین جمله سی و چهارم برابر با 100 می‌باشد.

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $a_6 - a_4 = 10$ و $a_8 + a_6 = 54$ ، a_{81} را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} a_6 - a_4 = 10 \\ a_8 + a_6 = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 5d) - (a + 3d) = 10 \\ (a + 7d) + (a + 5d) = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2d = 10 \\ 2a + 12d = 54 \end{cases} \Rightarrow d = 5, a = 2$$

$$\Rightarrow a_{81} = a + 80d \Rightarrow a_{81} = 2 + 80 \times 5 = 402$$

❖ مجموع n جمله اول دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

❖ مجموع n جمله اول دنباله حسابی که جمله اول آن a_1 و جمله n ام آن a_n باشد

برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $S_n = 4n^2 - n$ ، جمله هفتم این دنباله را بیابید.

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم که $a_v = S_v - S_{v-1}$ پس:

$$a_v = (4(v^2) - v) - (4(v^2) - v) = 51$$

❖ اگر a_m و a_n دو جمله از یک دنباله حسابی باشد آنگاه $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

❖ اگر a_m, a_n, a_p, a_l چهار جمله از یک دنباله حسابی و $m+n = p+l$ آنگاه

$$a_m + a_n = a_p + a_l$$

❖ در هر دنباله حسابی متناهی مجموع هر دو جمله متساوی الفاصله از طرفین باهم برابر است.

❖ اگر در یک دنباله حسابی متناهی تعداد جملات فرد باشد مجموع هر دو جمله متساوی الفاصله از طرفین مساوی دو برابر جمله وسط آن است و مجموع همه جملات آن برابر است با:

مقدار جمله وسط ضربدر تعداد آنها

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$ را بیابید.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20 \Rightarrow (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) = 20$$

$$\Rightarrow 2(a_1 + a_5) = 20 \Rightarrow a_1 + a_5 = 10$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2} \times 10 = 25$$

مثال: در دنباله حسابی $1, 3, 7, \dots$ ، مجموع جملات بیست و یکم تا سی ام را بیابید.

حل:

روش اول: چون $d = 4, a = -1$ پس:

$$S_{30} - S_{10} = \frac{30}{2}(-2 + 29 \times 4) - \frac{10}{2}(-2 + 19 \times 4) = 970$$

روش دوم: چون $a_{21} = -1 + 20 \times 4 = 79$ ، پس مجموع خواسته شده برابر است با مجموع ده جمله اول دنباله حسابی که جمله اول آن 79 و قدر نسبت آن 4 می‌باشد، بنابراین:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(158 + 36) = 970$$

تمرین:

۱- در یک دنباله حسابی مجموع ده جمله اول 20 و مجموع یازده جمله اول آن 11 می‌باشد.

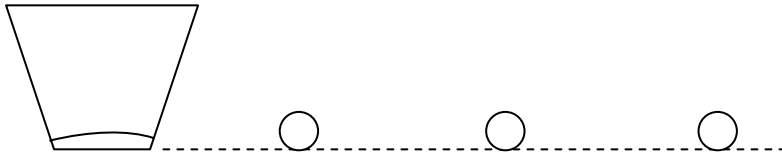
مجموع بیست و یک جمله اول این دنباله را بیابید.

۲- مجموع اعداد سه رقمی مضرب 7 را بدست آورید.

۳- در دنباله a_n داریم، $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = a_n + 5$ ، جمله صدم دنباله و مجموع یکصد جمله اول را بدست آورید.

۴- در یک دنباله جمله پنجم $-\frac{7}{2}$ و هر جمله از جمله بعدی $\frac{3}{2}$ بیشتر است مجموع بیست جمله اول آنرا بدست آورید.

۵- تعدادی توپ مطابق شکل به فاصله ۳ متر از یکدیگر واقع هستند و فاصله اولین توپ از یک سطل برابر ۳ متر است.



فردی از کنار سطل حرکت کرده و اولین توپ را برداشته و به کنار سطل برگشته و توپ را در سطل می‌اندازد و این عمل برای توپ‌های دیگر نیز تکرار می‌کند. اگر این فرد در مجموع ۱۲۰ متر پیموده باشد تعداد توپ‌هایی که در سطل انداخته است را بدست آورید.

۶- مجموع بیست جمله اول یک دنباله حسابی ۵۹۰ و مجموع بیست جمله بعدی ۱۷۹۰ می‌باشد مجموع جملات دهم تا سی‌ام را بدست آورید

۷- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d ، به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم مجموع ده جمله اول دنباله جدید چقدر از مجموع ده جمله دنباله قبلی بیشتر است.

۸- در یک دنباله عددی داریم $a_{13} + a_9 + a_7 + a_3 = 40$ ، s_{15} را بیابید.

۹- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله عددی می‌دهند. اگر طول وتر این مثلث ۱۵ سانتی‌متر باشد، مساحت آن را بیابید.

۱۰- مجموع کلیه اعداد طبیعی سه رقمی که بر ۲ و ۳ بخش پذیرند را بیابید.

۱۱- حداقل چند جمله اول دنباله $3, 7, 11, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۲۰۰ شود.

۱۲- در یک دنباله حسابی صد جمله‌ای مجموع جملات با شماره‌های فرد ۴۰۰ و مجموع جملات با شماره‌های زوج ۵۰۰ می‌باشد. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۱۳- در یک دنباله حسابی مجموع ۷ جمله اول ۸۰ و مجموع ۷ جمله دوم برابر با ۱۶۰ می‌باشد. مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

۱۴- در یک دنباله حسابی داریم $\frac{S_5}{S_7} = \frac{25}{9}$. اگر $a = 8$ باشد، S_8 را بیابید.

۱۵- دو دنباله $1, 4, 7, \dots$ و $7, -2, 3, \dots$ چند جمله مشترک سه رقمی دارند؟

۱۶- اگر a_n جمله عمومی دنباله حسابی باشد، نشان دهید که:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

۱۷- در یک دنباله حسابی صد جمله‌ای، مجموع سه جمله اول ۲ و مجموع سه جمله آخر آن ۱۰ می‌باشد. مجموع همه‌ی جملات آن را بیابید.

۱۸- مقدار x را از رابطه‌ی $x + (x+2) + (x+4) + \dots + (x+50) = 26$ بیابید.

دنباله‌ی هندسی

❖ دنباله هندسی: دنباله‌ای است که به جز جمله اول آن، هر جمله‌اش برابر است با جمله قبلی آن ضربدر یک مقدار ثابت. این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله نامیده با q نشان می‌دهیم.

❖ اگر جمله اول و قدر نسبت آن مخالف صفر باشد می‌توان گفت دنباله هندسی دنباله‌ای است که خارج قسمت هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی است.

مثال: دنباله $1, -2, 4, -8, \dots$ هندسی است ولی دنباله $1, -2, -4, 8, 16, \dots$ هندسی نیست.

❖ جمله عمومی دنباله هندسی که جمله اول آن a و قدر نسبت آن q باشد برابر است با:

$$a_n = aq^{n-1}$$

مثال: دنباله $\dots, \frac{1}{2}, 1, 2$ چند جمله بزرگتر از 10^{-3} دارد؟

حل: چون $a = 2$ و $q = \frac{1}{2}$ پس $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ که طبق فرض باید $2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 10^{-3}$ باشد بنابراین:

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > \frac{1}{1000} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{1}{4000} \Rightarrow 2^n < 4000 \Rightarrow n < 12$$

در نتیجه یازده جمله بزرگتر از $\frac{1}{1000}$ دارد.

❖ اگر a_m و a_n دو جمله غیر صفر از یک دنباله هندسی باشد آنگاه $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$.

❖ اگر a_1, a_p, a_n, a_m چهار جمله از یک دنباله هندسی و $m+n = p+l$ آنگاه $a_m a_n = a_p a_l$.

❖ در هر دنباله هندسی متناهی حاصل ضرب هر دو جمله متساوی الفاصله از طرفین باهم برابر است.

❖ اگر در یک دنباله هندسی متناهی تعداد جملات فرد باشد حاصل ضرب همه جملات آن برابر است با مقدار جمله وسط به توان تعداد آن‌ها.

مثال: اگر در یک دنباله هندسی $a_7 = 12$ و $a_8 = 96$ باشد a_7 را بیابید.
حل:

$$\frac{a_8}{a_7} = q^r \Rightarrow \frac{96}{12} = q^r \Rightarrow q = 2$$

$$\frac{a_7}{a_8} = q^r \Rightarrow a_7 = 96 \times 4 \Rightarrow a_7 = 384$$

مثال: در یک دنباله هندسی داریم $a_8 = 1$ حاصلضرب جملات اول تا نهم آن را بیابید.
حل:

$$a_1 a_2 \dots a_9 = (a_8)^9 = 1^9 = 1$$

❖ **مجموع n جمله اول دنباله هندسی برابر است با:**

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

$$S_n = \frac{a - qa_n}{1-q}, \quad q \neq 1$$

$$S_n = na, \quad q = 1$$

مثال: در یک دنباله هندسی داریم $S_6 = 63$, $S_7 = 7$, جمله ششم چند برابر جمله دوم است.
حل:

$$\frac{S_6}{S_7} = \frac{63}{7} \Rightarrow \frac{\frac{a(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a(1-q^7)}{1-q}} = 9 \Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^7} = 9 \Rightarrow 1+q^7 = 9 \Rightarrow q = 2$$

در نتیجه:

$$\frac{a_6}{a_7} = q^r \rightarrow \frac{a_6}{a_7} = 16$$

مثال: حداکثر چند جمله ابتدای دنباله $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل کمتر از $1/497$ شود.

حل: چون $a = 1$ و $q = \frac{1}{3}$ و می‌خواهیم $S_n < 1/497$ باشد پس داریم:

$$\frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{3}} < 1/497 \Rightarrow \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) < \frac{1497}{1000} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n < \frac{499}{500} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^n > \frac{1}{500}$$

$$\Rightarrow 3^n < 500 \Rightarrow n < 6$$

پس می‌توان حداکثر 5 جمله آن را باهم جمع نمود.

❖ اگر در یک دنباله هندسی نامتناهی، $|q| < 1$ باشد مجموع همه جملات آن برابر است

با:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

مثال: مجموع همه جملات دنباله $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \dots$ را بیابید.

حل:

$$a = 1, q = -\frac{1}{4}, |q| < 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{4})} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

مثال: در یک دنباله هندسی نامتناهی جمله اول برابر با مجموع سایر جملات آن می باشد نسبت جمله پنجم به جمله اول این دنباله را بیابید.

حل: اگر جمله اول a و قدر نسبت q باشد داریم:

$$a = \frac{aq}{1-q} \Rightarrow 1 = \frac{q}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_5}{a_1} = q^4 = \frac{1}{16}$$

تمرین:

۱- حاصل $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$ را بدست آورید.

۲- حاصل عبارت $\frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^8}{1+3+3^2+3^3+\dots+3^4}$ را بدست آورید.

۳- حاصل $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{27} - \frac{1}{24} + \dots$ را محاسبه کنید.

۴- مطابق شکل بر روی محور نیم دایره‌هایی رسم شده است اگر قطر نیم دایره اول ۲ سانتیمتر باشد و هر بار ۳۰٪ از قطر در دنباله‌ی نیم دایره‌ها کم شود مجموع محیط نیم دایره‌ها را بدست آورید.

۵- اگر بدانیم سلول‌های بنیادی هر نیم ساعت دو برابر شوند پس از چند ساعت ده سلول به ۱۰۲۳۰ سلول تبدیل می‌شوند.

۶- در دنباله هندسی غیرنزولی $\dots, \frac{1}{4}, x, 2$ مجموع دوازده جمله اول را بدست آورید.

۷- مربعی به ضلع ۱ واحد داریم وسط اضلاع مربع را بهم وصل می‌کنیم مربع جدیدی حاصل می‌شود سپس وسط اضلاع مربع جدید را بهم وصل می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. مجموع محیط‌ها و مساحت‌های مربع‌های بوجود آمده را بدست آورید.

۸- فردی در یک کارگاه استخدام گردید و حقوق او A تومان در ماه اول تعیین شد مقرر گردید در پایان ماه اول حقوق او دو برابر شود و در پایان ماه دوم حقوق او بر ۳ تقسیم شود و این عمل برای ماه‌های بعد به ترتیب اجرا گردد این فرد در پایان سال مجموعاً چقدر حقوق دریافت کرده است.

۹- حاصل $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7)$ ازای $x = \sqrt{2}$ را بدست آورید.

۱۰- اگر $x-2$ و $x+2$ و $4x+2$ جملات متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند مجموع ۸ جمله‌ی بعدی را بدست آورید.

۱۱- اگر اضلاع مثلثی تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، ثابت کنید ارتفاع‌های آن‌ها نیز تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

۱۲- حاصل ضرب صد جمله‌ی اول دنباله‌ی $1, 5, 25, \dots$ را بیابید.

۱۳- در یک دنباله هندسی $a_1 = 3$ و $a_5 = 96$ ، S_5 را بیابید.

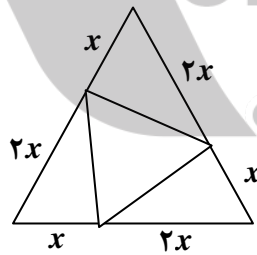
۱۴- در یک دنباله هندسی نامتناهی، جمله‌ی اول برابر با نصف مجموع جملات بعدی است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی نهم است؟

۱۵- اگر $a = 0.3232\dots$ و $b = 0.313131\dots$ باشد، ab را بیابید.

۱۶- اگر $a = 4.666\dots$ باشد، حاصل $42(a + \frac{1}{a})$ را بیابید.

۱۷- محیط دایره‌ای به شعاع واحد را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با نقاط بدست آمده یک ۶ ضلعی منتظم می‌سازیم و سپس وسط‌های اضلاع مجاور این ۶ ضلعی را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم تا ۶ ضلعی منتظم دیگری پدید آید. اگر این روند را مرتباً تکرار کنیم، مجموع مساحت همه‌ی ۶ ضلعی‌ها و محیط همه‌ی ۶ ضلعی‌های بدست آمده را بیابید.

۱۸- سه ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $3x$ را مطابق شکل به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری پدید آید. اگر این عمل را مرتباً تکرار کنیم، مجموع مساحت‌های همه‌ی مثلث‌ها را بیابید.



۱۹- مجموع چند جمله‌ی دنباله‌ی هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر ۱۰۲۶ است؟

۲۰- حداکثر چند جمله‌ی ابتدای دنباله‌ی $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل کمتر از $\frac{1}{24995}$ شود.

۲۱- در یک دنباله‌ی هندسی با جمله اول a و قدر نسبت q ، قدر نسبت را مربع می‌کنیم. نسبت مجموع n جمله‌ی اول تصاعد هندسی بدست آمده به مجموع n جمله‌ی اول تصاعد هندسی اولی را بیابید.

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

❖ اگر چند جمله‌ای درجه n ام $P(x)$ را بر چند جمله‌ای درجه m ام $K(x)$ که $m \leq n$ ، تقسیم کنیم؛ خارج قسمت تقسیم، چند جمله‌ای است مانند $Q(x)$ از درجه $n - m$ و باقی‌مانده صفر و یا چند جمله‌ای مانند $R(x)$ می‌باشد که درجه آن از m کمتر است و می‌توان نوشت:

$$P(x) = K(x)Q(x) + R(x)$$

که آن را تساوی تقسیم می‌نامیم.

مثال: اگر چند جمله‌ای درجه هفتم را بر یک چند جمله‌ای درجه پنجم تقسیم کنیم خارج قسمت چند جمله‌ای از درجه ۲ و باقی مانده صفر و یا چند جمله‌ای است که درجه آن حداکثر ۴ می‌باشد.
مثال: در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ باقی مانده برابر با $3x - 1$ می‌باشد $P(2)$ را بیابید.

حل: بنا به تساوی تقسیم داریم $P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (3x - 1)$ و در نتیجه

$$P(2) = (4 - 6 + 2)Q(2) + (6 - 1) \quad \text{بنابراین } P(2) = 5$$

تمرین: در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 - 4x$ ، باقی‌مانده $5x + 2$ می‌باشد، $P(0)$ و $P(-2)$ را بدست آورید.

❖ اگر $P(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند برای اینکه تساوی $P(x) = q(x)$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید P و q هم درجه باشند و ضرایب هم درجه P و q با هم برابر باشند و برای اینکه تساوی $P(x) = 0$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد باید ضرایب کلیه جملات P صفر باشد.

مثال: a و b را چنان بیابید تا تساوی $\frac{a}{3x-1} + \frac{b}{3x+1} = \frac{1}{9x^2-1}$ به ازای هر مقدار x ($x \neq \pm \frac{1}{3}$) برقرار باشد.

حل:

$$\frac{a}{3x-1} + \frac{b}{3x+1} = \frac{1}{9x^2-1} \Rightarrow \frac{a(3x+1) + b(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{1}{9x^2-1} \Rightarrow a(3x+1) + b(3x-1) = 1$$

$$\Rightarrow 3(a+b)x + a - b = 1 \Rightarrow a + b = 0, \quad a - b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

مثال: a و b را چنان بیابید تا تساوی $(a^2 - 4)x^2 + (a - b)x + b - 2 = 0$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد.

حل: باید $a^2 - 4 = 0$ و $a - b = 0$ و $b - 2 = 0$ باشد که از اینجا داریم: $a = b = 2$

مثال: بدون انجام عمل تقسیم، باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ را بر $x^2 + 1$ بیابید.

حل: می‌دانیم خارج قسمت و باقی مانده به ترتیب به صورت $Q(x) = ax + b$ و $R(x) = cx + d$ می‌باشند بنابراین داریم:

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = (x^2 + 1)(ax + b) + (cx + d)$$

در نتیجه:

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = ax^3 + bx^2 + (a + c)x + b + d$$

بنابراین:

$$a = 1, b = -2, a + c = 5, b + d = -1 \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 4, d = 1$$

$$\therefore Q(x) = x - 2, R(x) = 4x + 1$$

تمرین:

بدون انجام عمل تقسیم، خارج قسمت و باقی مانده تقسیم $x^3 + 1$ را بر $x^2 - 3$ بیابید.

❖ اگر در تقسیم P بر K باقی مانده صفر شود گوئیم P بر K بخش پذیر است و K را یک مقسوم علیه (یک عامل یا یک فاکتور) Q گوئیم.

مثال: $x - 2$ یک فاکتور $x^2 - 5x + 6$ می‌باشد زیرا: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

تمرین:

۱- آیا $x - 1$ یک فاکتور $x^3 - 2x^2 + x$ می‌باشد.

۲- عبارت $x^2 - 4x^2 + 3x - 12$ یک فاکتور درجه اول و یک فاکتور درجه دوم دارد آنها را بیابید.

❖ در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ داریم:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

❖ باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ برابر است با: $P(a)$.

❖ چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است اگر و تنها اگر $P(a) = 0$.

مثال: باقی مانده تقسیم $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ را بر $x + 1$ بدست آورید.

حل:

$$R = P(-1) \Rightarrow R = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4(-1) - 5 \Rightarrow R = -12$$

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

مثال: a, b را طوری بیابید تا $x^2 - 2x^2 + ax + b$ بر $x^2 + x - 2$ بخش پذیر باشد.
 حل: چون $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ و $P(x) = x^2 - 2x^2 + ax + b$ می باشد، باید
 $P(-2) = 0$ و $P(1) = 0$ ، در نتیجه:

$$(-2)^2 - 2(-2)^2 + a(-2) + b = 0, (1)^2 - 2(1)^2 + a(1) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = 16, a + b = 1$$

$$\Rightarrow a = -5, b = 6$$

مثال: اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x-2$ و $x-3$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم $P(x)$ را بر $x^2 - 5x + 6$ بیابید.

حل: با توجه به فرض داریم $P(2) = 2$ و $P(3) = 7$ و طبق تساوی تقسیم
 $P(x) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + (ax + b)$ بنابراین $P(2) = 2a + b$ و $P(3) = 3a + b$ در نتیجه:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = -8 \Rightarrow R = 5x - 8$$

تمرین:

- ۱- در تقسیم $9 - 4x^2 + 5x^3 - x^4$ بر $x^2 - x$ باقی مانده $R(x)$ می باشد $R(-1)$ را بیابید.
- ۲- a, b را چنان بیابید تا $4 + bx + ax^2 + x^3$ بر $(x-2)^2$ بخش پذیر باشد.
- ۳- a را چنان بیابید تا باقی مانده تقسیم $4 + ax + x^2$ بر $x+2$ ، عدد ۵ باشد.
- ۴- باقی مانده تقسیم یک چند جمله ای درجه دوم بر x و $x+1$ و $x-1$ به ترتیب ۱، ۲، ۳ می باشد باقی مانده تقسیم آن را بر $x-4$ بیابید.
- ۵- چند جمله ای درجه سوم بیابید که باقی مانده تقسیم آن بر هر یک از عبارتهای $x+1$ ، $x-1$ و $x-2$ برابر با ۴۸ و بر $x-3$ بخش پذیر باشد.

❖ باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $ax + b$ ($a \neq 0$) برابر است با $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

مثال: نشان دهید $2x+3$ یک فاکتور $12 - 8x - 3x^2 + 2x^3$ می باشد سپس نشان دهید دو فاکتور درجه اول دیگر نیز دارد.

حل: باید نشان دهیم عبارت $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$ به ازای $x = -\frac{3}{2}$ صفر است.

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 8\left(-\frac{3}{2}\right) - 12 = -\frac{27}{2} + \frac{27}{2} + 12 - 12 = 0$$

برای بدست آوردن فاکتورهای دیگر، $g(x)$ را بر $2x+3$ تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 & 2x + 3 \\ \underline{2x^3 + 3x^2} & x^2 - 4 \\ -8x - 12 & \\ \underline{-8x - 12} & 0 \end{array}$$

بنابراین:

$$2x^2 + 3x^2 - 8x - 12 = (2x + 3)(x^2 - 4) \Rightarrow 2x^2 + 3x^2 - 8x - 12 = (2x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

در نتیجه فاکتورهای مورد نظر $x - 2$, $x + 2$ می باشد.

تمرین:

۱- نشان دهید نمودار $y = 9x^2 - 18x^2 - x + 2$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{1}{3}$ قطع می کند سپس سایر نقاط تقاطع نمودار با محور x ها را بیابید.
۲- a , b را چنان بیابید تا چند جمله‌ای $x^2 + ax + b$ بر $4x^2 - 9$ بخش پذیر باشد.

❖ برای بدست آوردن باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $ax^n + b$ می توان در عبارت $P(x)$ به جای همه x^n ها عدد $-\frac{b}{a}$ را قرار داد و

ماصل را ساده نمود.

مثال: باقی مانده تقسیم $x^{1389} + 3x^7 - 4x + 1$ را بر $x^2 + 1$ بیابید.
حل: چون $-\frac{b}{a} = -1$ و $x^{1389} + 3x^7 - 4x + 1 = (x^2)^{694} + 3(x^2)^3 x - 4x + 1$ می باشد پس:
 $R = (-1)^{694} + 3(-1)^3 x - 4x + 1 \Rightarrow R = -x$

تمرین:

- نشان دهید $x^2 - 4$ بر $x^6 - 3x^2 + 6x - 16$ بخش پذیر است.
- a , b را چنان بیابید تا $4ax^2 + b$ بر $x^6 - 3x^2 + 1$ بخش پذیر باشد.
- اگر $5 + ax^2 + 2x^4 + x^{14}$ بر $x^2 + 1$ بخش پذیر باشد باقی مانده تقسیم آن را $x - 1$ بیابید.
- a , b را چنان بیابید تا $5x - 2$ بر $x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$ بخش پذیر باشد.
- اگر $x^{2n} + x^{2n+1} + ax^{2n+2}$ ($n \in N$) بر $x + 2$ بخش پذیر باشد، a را بیابید.
- باقی مانده تقسیم $3x^4 - 7x^2 + x^{21} - 1$ بر $x^2 + 1$ بیابید.
- a , b را چنان بیابید تا $4 + bx + ax^2 + x^2$ بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر باشد.
- اگر به چند جمله‌ای $P(x)$ عبارت $8x - 1$ را اضافه کنیم باقی مانده تقسیم آن بر $x^2 - 9$ برابر با $5x + 2$ می شود، $P(-3)$ را بیابید.
- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای‌های $f(x)$, $g(x)$ بر $x^2 + x + 3$ به ترتیب $x - 2$, $x + 7$ باشد باقی مانده تقسیم $f(x)g(x)$ بر $x^2 + x + 3$ را بیابید.
- باقی مانده تقسیم $x^{10} - 1$ را بر $x^2 + x + 1$ بیابید.
- ثابت کنید که $x^n - a^n$ بر $x - a$ ($n \in N$) بخش پذیر است و سپس نشان دهید که:
الف) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$
ب) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$

۱۲- ثابت کنید $31^2 - 71^2$ بر 40 بخش پذیر است.

۱۳- باقی مانده تقسیم‌های زیر را بیابید. ($n \in \mathbb{N}$)

الف) $x^n - a^n$ بر $x + a$

ب) $x^n + a^n$ بر $x - a$

ج) $x^n + a^n$ بر $x + a$

۱۴- حاصل عبارت $x^{19} + \dots + x^2 + x + 1$ را به ازای $x = 2$ بیابید.

۱۲- به ازای چه مقدار b دو چند جمله‌ای $x^5 + 4x - 5$ و $x^6 + x^2 + 5x + b$ در تقسیم بر $x + 2$ هم باقی مانده می‌باشند.

۱۳- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x + 1$ برابر با 9 باشد باقی مانده تقسیم $P(x^2)$ را بر $x^2 - x + 1$ بیابید.

۱۴- اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای و $x^2 - 16 = f(x) + 2f(-x)$ باشد باقی مانده تقسیم $f(x)$ را بر $x - 2$ بیابید.

۱۵- نشان دهید عدد $2^{64n} - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) بر 17 بخش پذیر است.

۱۶- نشان دهید عدد $5^{4n} - 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) بر 621 بخش پذیر است.

۱۷- اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای و $f(x) = 72x^2 + 8 + P(3x)$ و باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ برابر 5 باشد $P(1)$ را بیابید.

❖ بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی و مثلث فیباچ - پاسکال:

اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد $(a + b)^n$ به دو جمله‌ای کاشانی معروف می‌باشد که بسط آن به صورت زیر است:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

❖ این بسط:

✓ دارای $n + 1$ جمله است

✓ مجموع توان‌های a , b در هر جمله n است.

✓ اگر آن را بر مسب توان‌های نزولی n مرتب کنیم ضریب اولین جمله 1 و

ضریب جملات بعدی برابر است با ضریب جمله قبلی ضربدر توان a تقسیم

بر تعداد جملات قبل از آن.

✓ ضریب جملات در جدول زیر موسوم به مثلث فیباچ پاسکال آمده است.

			۱																			
				۱		۱																
					۱		۱															
						۲		۱														
							۳		۱													
								۴		۱												
									۴		۱											
										۵		۱										
											۵		۱									
												۱۰		۱								
													۱۰		۱							
														۵		۱						
															۵		۱					
																۱۰		۱				
																	۱۰		۱			
																		۵		۱		
																			۵		۱	
																				۱		۱

مثال: بسط $(x+y)^3$ را بنویسید.

حل:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

مثال: بسط $(2x-3)^4$ را بنویسید.

حل:

$$\begin{aligned} (2x-3)^4 &= (2x)^4 + 4(2x)^3(-3) + 6(2x)^2(-3)^2 + 4(2x)(-3)^3 + (-3)^4 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81 \end{aligned}$$

تمرین:

۱- بسط عبارت‌های $(x-y)^4$, $(3x-1)^3$, $(x-1)^5$ را بنویسید.

۲- بسط عبارت $(x+\frac{2}{x})^3$ را بدست آورید.

❖ برای بدست آوردن مجموع ضرایب یک چند جمله‌ای کافی است به جای متغیرها عدد یک قرار داده و مامل را بدست آوریم.

مثال: مجموع ضرایب $3x^4 - 2x^3 + xy^2 + 7y - 2$ را بیابید.

حل: حاصل عبارت را به ازای $x=1$, $y=1$ بدست می‌آوریم در نتیجه داریم:

$$\text{مجموع ضرایب} = 3 - 2 + 1 + 7 - 2 = 7$$

مثال: مجموع ضرایب بسط $(2x^3 + 3x^2 - 6)^{11}$ را بیابید.

حل:

$$\text{مجموع ضرایب} = (2+3-6)^{11} = (-1)^{11} = -1$$

❖ بسط دو جمله‌ای کاشانی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

که جمله $(k+1)$ ام آن به صورت $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ می‌باشد.

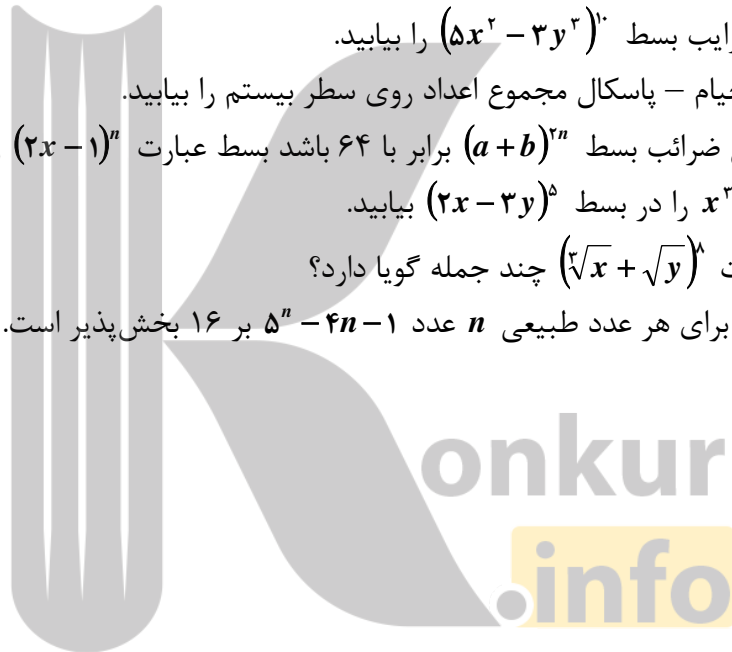
مثال: جمله سوم بسط $(2x-y)^7$ را بیابید.

حل:

$$\binom{7}{2}(2x)^2(-y)^5 = \frac{7!}{2! \times 5!}(4x^2)(-y)^5 = -60x^2y^5$$

تمرین:

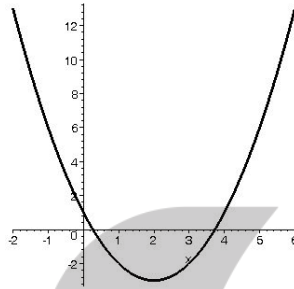
- ۱- مجموع ضرایب بسط $(5x^2 - 3y^2)^{10}$ را بیابید.
- ۲- در مثلث خیام - پاسکال مجموع اعداد روی سطر بیستم را بیابید.
- ۳- اگر مجموع ضرایب بسط $(a+b)^{2n}$ برابر با ۶۴ باشد بسط عبارت $(2x-1)^n$ را بنویسید.
- ۴- ضریب x^2y^2 را در بسط $(2x-3y)^5$ بیابید.
- ۵- بسط عبارت $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^8$ چند جمله گویا دارد؟
- ۶- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عدد $5^n - 4n - 1$ بر ۱۶ بخش پذیر است.



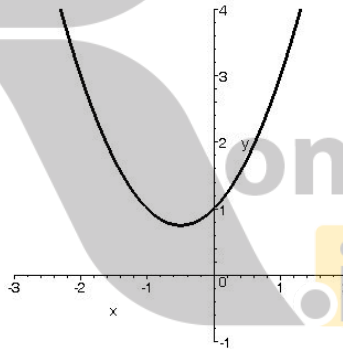
معادلات

❖ ریشه‌های معادله $f(x)=0$ برابر است با طول‌های نقاط مشترک نمودار تابع $y = f(x)$ با محور x ‌ها.

مثال: تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ را تعیین کنید.
حل: چون نمودار $y = x^2 - 4x + 1$ به صورت زیر می‌باشد بنابراین معادله دارای دو ریشه مثبت می‌باشد.



مثال: نشان دهید معادله $x^2 + x + 1 = 0$ ریشه ندارد.
حل: با توجه به نمودار تابع که به صورت زیر می‌باشد معادله فوق ریشه ندارد.



❖ ریشه‌های معادله $f(x)=g(x)$ برابر است با طول‌های نقاط مشترک نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$.

مثال: معادله $x^2 = x$ چند ریشه دارد.
حل: نمودار $y = x$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
با توجه به نمودار فوق معادله دو ریشه دارد.

مثال: معادله $4x + \cos x = 0$ چند ریشه دارد؟

حل: $4x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -4x$

حال نمودار $y = \cos x$ و $y = -4x$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار یک ریشه منفی دارد.

❖ معادله $ax + b = 0$ با شرط $a \neq 0$ دارای یک ریشه برابر با $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

مثال: معادله $3x^2 - 4x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow 3x - 1 = 0, \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, \quad x = 1$$

❖ اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) عبارت $b^2 - 4ac$ را دلتا (Δ) بنامیم آنگاه:

الف) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه ندارد.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد معادله دارای ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

ج) اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه متمایز می‌باشد که از دستورات

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
 بدست می‌آید.

مثال: m را چنان بیابید تا معادله $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

حل:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(1)(m - 1) = 0 \Rightarrow 9 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{13}{4}$$

مثال: ریشه‌های معادله $3x^2 - 7x = 1$ را بیابید.

$$3x^2 - 7x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(-1) \Rightarrow \Delta = 61 \Rightarrow x_1 = \frac{7 + \sqrt{61}}{6}, \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{61}}{6}$$

تمرین:

۱- تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x(1-x) = 3$ را بیابید.

۲- حدود t را چنان بیابید تا $(t-1)x^2 - 2tx + t + 2 = 0$ دارای دو ریشه متمایز باشد.

❖ اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد آنگاه:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\alpha^2 + \beta^2 \quad \text{الف)} \quad \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \text{ب)} \quad \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{ج)}$$

حل:

$$\alpha + \beta = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{2}{2} = 1$$

الف) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(1) = \frac{21}{4}$

ب) $T = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow T^2 = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow T^2 = \frac{5}{2} + 2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{9}{2}}$

ج) $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{65}{8}$

تمرین: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 2 = 0$ باشد a را چنان بیابید تا $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = a$ باشد.

❖ اگر مجموع دو عدد S و حاصل ضرب آنها P باشد این دو عدد (در صورت وجود)

ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ می‌باشند.

مثال: دو عدد بیابید که مجموع آنها ۱ و حاصل ضربشان -۳ باشد.

حل:

$S = 1$, $P = -3$

$x^2 - x - 3 = 0$, $\Delta = 1 + 12$, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

تمرین: اگر مجموع دو عدد -۱ و حاصل ضرب آنها نیز -۱ باشد تفاضل آن دو را بیابید.

❖ معادله درجه دومی که ریشه‌هایش α و β باشد عبارت است از $x^2 - Sx + P = 0$

که در آن $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های $5 - 3\sqrt{2}$, $5 + 3\sqrt{2}$ باشد

حل: داریم:

$S = (5 - 3\sqrt{2}) + (5 + 3\sqrt{2}) = 10$ و $P = (5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) = 7$

بنابراین معادله به صورت $x^2 - 10x + 7 = 0$ می‌باشد.

تمرین:

۱- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$ باشد.

۲- معادله درجه دومی بیابید که ریشه‌های $\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ باشد.

❖ برای تشکیل معادله‌ای که بین هر یک از ریشه‌هایش و هر یک از ریشه‌های معادله مفروضی، رابطه $y = f(x)$ برقرار باشد (x ریشه معادله داده شده و y ریشه معادله فواسته شده) می‌توان از این رابطه x را برمسب y پیدا نموده و در معادله داده شده قرار داده و آن را ساده کنیم.

مثال: معادله درجه دومی بیابید که هر یک از ریشه‌هایش نصف هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 - 7x + 1 = 0$ باشد.

حل: چون طبق فرض داریم $y = \frac{x}{2}$ بنابراین $x = 2y$ و در نتیجه $3(2y)^2 - 7(2y) + 1 = 0$ و معادله موردنظر عبارت است از $12y^2 - 14y + 1 = 0$.

❖ نمودار $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) یک سهمی است که خط به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ ممور تقارن آن و نقطه $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ رأس آن می‌باشد اگر $a > 0$ باشد، نقطه S نقطه مینیمم نمودار و اگر $a < 0$ باشد نقطه S ماکزیمم نمودار می‌باشد.

مثال: کم‌ترین مقدار عبارت $x^2 - 5x + 2$ را بیابید.

حل:

$$\text{کمترین مقدار} = \frac{4(1)(2) - (-5)^2}{4(1)} = \frac{-17}{4}$$

مثال: t را چنان بیابید تا بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 6x + t$ برابر با ۸ باشد.

حل: به ازای $x = -\frac{6}{-2} = 3$ تابع بیشترین مقدار را دارد بنابراین باید $f(3) = 8$ باشد پس داریم:

$$-9 + 18 + t = 8 \Rightarrow t = -1$$

تمرین:

۱- در معادله $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها ۵ واحد کمتر از ریشه دیگر آن می‌باشد، m را بیابید.

۲- به ازای چه مقدار t هر یک از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + t = 0$ ، ۲ واحد کمتر از هر یک از ریشه‌های معادله $x^2 + x - 2 = 0$ می‌باشد.

۳- k را چنان بیابید تا حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x+k)(x^2 - 7x - 4) = 0$ برابر با ۲۵ باشد.

۴- a را چنان بیابید تا نقطه ماکزیمم نمودار $y = -x^2 + ax - 2$ روی نیم ساز ربع سوم باشد.

۵- a را چنان بیابید تا نمودار $y = ax^2 - (3a+1)x + 2$ دارای مینیمی برابر با ۲- در ناحیه چهارم باشد.

۶- معادله درجه دومی بنویسید که مجموع معکوسات دو ریشه آن ۱- و مجموع مربعات ریشه‌های آن ۳ باشد.

۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - \sqrt{1389}x + 1 = 0$ باشد حاصل عبارت $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2\beta + \frac{2}{\beta}$ را بیابید.

۸- به ازای چه مقادیری از m نمودار $y = x^2 - 25x + m$ محور x ها را قطع نمی‌کند.

۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ و $\alpha < \beta$ باشد حاصل عبارت $5\alpha^2 + \beta^2$ را بیابید.

۱۰- m را چنان بیابید تا نمودار $y = (x-2)(x^2 + mx + 1)$ بر محور x ها مماس باشد.

۱۱- حدود k را چنان بیابید تا هر دو ریشه معادله $kx^2 - (k-1)x + k - 2 = 0$ منفی باشد.

۱۲- m را چنان بیابید تا معادله $3x^2 - 5mx + m^2 = 7m$ دارای ریشه‌های مختلف‌العلامه باشد.

۱۳- بدون حل معادله $1389x^2 + 2010x + 1431 = 0$ تعداد و علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

❖ **معادله** $(a \neq 0, ax^2 + bx + c = 0)$ را معادله دو مجذوری گوئیم، برای حل این‌گونه معادلات معمولاً از تغییر متغیر $x^2 = t$ ($t \geq 0$) استفاده می‌کنیم.

مثال: معادله $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$4x^4 - 3x^2 - 1 = 0, x^2 = t \Rightarrow 4t^2 - 3t - 1 = 0, \Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow t_1 = \frac{3+5}{8}, t_2 = \frac{3-5}{8}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

❖ بعضی از معادلات را مانند معادلات دو مجذوری می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب به معادله ساده‌تری تبدیل نمود و به کمک آن جواب‌های معادله را بدست آورد.

مثال: معادله $(x^2 - 1)^2 - 2x^2 - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله را چنین می‌نویسیم

$$(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) - 3 = 0$$

حال اگر $x^2 - 1 = t$ باشد داریم:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 3, t = -1$$

$$x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

❖ اگر $y = f(x)$ باشد، ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ را صفرهای تابع $y = f(x)$ گوئیم.

مثال: صفرهای تابع $f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$ را بیابید.

$$2x^6 + 3x^2 - 5 = 0, \quad x^2 = t \Rightarrow$$

$$2t^3 + 3t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1, t = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{5}{2}}$$

❖ اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ($a_n \neq 0$) یک چند جمله‌ای از درجه n

باشد و از روی آن چند جمله‌ای $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را بسازیم

ریشه‌های این دو چند جمله‌ای وارون یک‌دیگرند و چند جمله‌ای $Q(x)$ را وارونه چند

جمله‌ای $p(x)$ گوئیم.

مثال: وارونه چند جمله‌ای $P(x) = 3x^2 - 7x + 2$ چند جمله‌ای $Q(x) = 2x^2 - 7x + 3$ می‌باشد.

تمرین:

۱- هریک از معادلات زیر را با انتخاب تغییر متغیر مناسب حل کنید.

(الف) $x^2(2x^2 - 5) = -3$ (ب) $x^6 - x^2 - 2 = 0$

(ج) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (د) $\left(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{2}\right) - 6 = 0$

(ه) $x^2 + x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -2$ (و) $(x^2 - x)^2 - 4x^2 + 4x + 3 = 0$

۲- صفرهای هر یک از توابع زیر را بیابید.

(الف) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ (ب) $g(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{15}{4}$

❖ برای حل معادلات شامل عبارات گویا، طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک

مخرج کسرها ضرب نموده و معادله ماصل را حل می‌کنیم جواب‌هایی از این معادله

که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکنند جواب معادله اصلی می‌باشد.

مثال: معادله $\frac{3}{x-2} + \frac{4x+3}{x+2} = 6$ را حل کنید.

حل: کوچکترین مضرب مشترک $x-2$ و $x+2$ برابر است با: $(x+2)(x-2)$
طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$(x+2)(x-2)\left(\frac{3}{x-2} + \frac{4x+3}{x+2}\right) = 6(x+2)(x-2) \Rightarrow$$

$$3(x+2) + (4x+3)(x-2) = 6(x+2)(x-2) \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3, \quad x = -4$$

تمرین:

۱- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

ب) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x}{10} = \frac{1}{x-1}$

الف) $\frac{x}{x-1} + \frac{x^2+x}{x^2-1} = 5$

د) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x+2} = 7$

ج) $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{2x-5}{x+2} = \frac{18}{x^2-4}$

ه) $\frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{3}{x^2-7x+2}$

۲- به ازای چه مقدار a یکی از ریشه‌های معادله $\frac{a}{x-1} + \frac{4}{x+2} = 11$ برابر با ۳ می‌باشد.

۳- به ازای چه مقدار a و b معادله $\frac{a}{x^2+x+1} - \frac{b}{x^2+3} = 4$ دارای مجموعه جواب $\{1, -1\}$ می‌باشد.

❖ برای حل معادلات گنگ، با توان مناسب طرفین معادله، آن را به یک معادله چند جمله‌ای تبدیل می‌کنیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم، جواب‌هایی از این معادله که در معادله اصلی صدق کند، مجموعه جواب معادله می‌باشد.

مثال: معادله $\sqrt{x-2} - 3 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\sqrt{x-2} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow x-2 = 9 \Rightarrow x = 11$$

چون $x = 11$ در معادله اصلی صدق می‌کند، قابل قبول است.

مثال: معادله $\sqrt{x-1} + x = 3$ را حل کنید.

حل:

$$\sqrt{x-1} + x = 3 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Rightarrow x-1 = (3-x)^2 \Rightarrow x-1 = 9-6x+x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = 5$$

$x = 2$ در معادله صدق می‌کند ولی $x = 5$ در معادله صدق نمی‌کند بنابراین مجموعه جواب معادله $\{2\}$ می‌باشد.

تمرین:

۱- مجموعه جواب هر یک از معادلات زیر را بیابید.

الف) $x + \sqrt{x} = 0$ ب) $\sqrt{2x-3} - x = -1$

ج) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x-2} = 1$ د) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+2}} = 0$

هـ) $(x^2-9)\sqrt{x-3} = 0$ و) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5} = \sqrt{2x-7}$

ز) $\sqrt{x-2} + 1 = 0$

۲- عددی بیابید که جذر آن با معکوسش برابر باشد.

۳- آیا عدد صحیحی وجود دارد که با ۳ برابر جذرش برابر باشد.

۴- معادله $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = 3$ را حل کنید.

۵- آیا معادله $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{1-x}$ جواب دارد؟

۶- معادله $(x-1)^2 + \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-x} = 0$ را حل کنید.

❖ اگر $a \in R$ و نقطه نظیر آن (روی محور $x'ox$ ، A باشد فاصله نقطه A تا مبدأ را قدر

مطلق عدد a نامیده و آن را با نماد $|a|$ نمایش می‌دهیم.

مثال: $|3|$ برابر است با ۳، زیرا فاصله نقطه نظیر این عدد تا مبدأ ۳ است.

مثال: $|\sqrt{2}|$ برابر با $\sqrt{2}$ می‌باشد، زیرا فاصله نقطه نظیر این عدد تا مبدأ $\sqrt{2}$ است.

❖ می‌توان نشان داد که:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

مثال: هر یک از عبارات $|2-\sqrt{3}|$ ، $|\sin x - 1|$ ، $|2 - \cos x|$ ، $|x-5|$ را بدون قدر مطلق بنویسید.

حل:

$$2 - \sqrt{3} > 0 \text{ است پس } |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin x - 1 \leq 0 \text{ می‌باشد بنابراین } |\sin x - 1| = -(\sin x - 1) = 1 - \sin x$$

$$2 - \cos x > 0 \text{ در نتیجه } |2 - \cos x| = 2 - \cos x$$

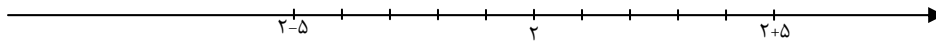
با توجه به اینکه برای $x \geq 5$ ، $x - 5 \geq 0$ و برای $x < 5$ ، $x - 5 < 0$ می‌باشد بنابراین:

$$|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & x \geq 5 \\ 5 - x, & x < 5 \end{cases}$$

❖ برای هر دو عدد حقیقی a, b ، $|a-b|$ را فاصله a تا b گوئیم، واضح است که

$$|a-b| = |b-a|$$

مثال: $|x-2| = 5$ یعنی فاصله x تا ۲ برابر با ۵ می‌باشد که نمایش هندسی آن به صورت



می‌باشد یعنی $x = 7$ یا $x = -3$

مثال: مجموعه اعدادی که فاصله آن‌ها از عدد -3 کمتر از 0.1 است را به صورت قدر مطلق بنویسید.

حل: اگر x عضوی از این مجموعه باشد داریم: $|x - (-3)| < 0.1$ به عبارتی $|x + 3| < 0.1$.

❖ چند ویژگی قدرمطلق:

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$a = b \Rightarrow |a| = |b|$$

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ یا } a = -b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

$$|-a| = |a|$$

$$|a-b| = |b-a|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

$$|a|^r = |a^r| = a^r$$

$$|a|^n = |a^n|, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

مثال: معادله $||2x-1|-3| = 8$ را حل کنید.

حل:

$$||2x-1|-3| = 8 \Rightarrow |2x-1|-3 = 8 \text{ یا } |2x-1|-3 = -8$$

اگر $|2x-1|-3 = 8$ باشد، داریم $|2x-1| = 11$. پس $2x-1 = 11$ یا $2x-1 = -11$. بنابراین $x = 6$ یا $x = -5$.

اگر $|2x-1|-3 = -8$ باشد، داریم $|2x-1| = -5$ که غیر ممکن است.

مثال: معادله $|x^2-1|-|x-1| = 0$ را حل کنید.

حل:

$$|x^2-1|-|x-1| = 0 \Rightarrow |x^2-1| = |x-1| \Rightarrow x^2-1 = x-1 \text{ یا } x^2-1 = -(x-1)$$

$$x^2 - 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1$$

$$x^2 - 1 = -(x-1) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = +1$$

مثال: معادله $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2|x - 2| + 7x = 16$ را حل کنید.

حل: چون $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$ و صفرهای $(x + 1)$ و $(x - 2)$ مساوی -1 و 2 می باشد داریم:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -(x+1) + 2(x-2) + 7x = 16 \Rightarrow x = \frac{23}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x+1 + 2(x-2) + 7x = 16 \Rightarrow x = \frac{21}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x+1 - 2(x-2) + 7x = 16 \Rightarrow x = \frac{9}{5} \end{cases}$$

با توجه به محدوده x تنها جواب قابل قبول $\frac{21}{11}$ می باشد.

تمرین:

۱- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x^2 - 4| = 2$ (ب) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x$

ج) $|2x - 1| - |x + 1| = 0$ (د) $2|x - 1| + 4|x - 7| + 9x = 20$

ه) $|x + 2| + |x - 3| = 1$ (و) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} + 2x = 0$

۲- نمودار $y = |x - 1|$ را رسم کنید.

۳- نمودار $y = 3|x - 1| - |x + 1|$ را رسم کنید.

۴- نمودار $y = |2x - 1| + |x - 3|$ را رسم کنید.

۵- نمودار $|x - 2| + |y - 1| = 2$ را رسم کنید.

❖ **پند ویزگی قدرمطلق:**

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x^r < a^r, (a > 0)$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a, x > a \Leftrightarrow x^r > a^r, (a \geq 0)$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

$$|a-b| \leq |a|+|b|$$

$$|a+b| \geq |a|-|b|$$

$$|a-b| \geq |a|-|b|$$

$$|a_1+a_2+\dots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$$

$$|a-b| \leq |a-c|+|b-c|$$

مثال: نامعادله $|2x-3| < 4$ را حل کنید.

حل:

$$|2x-3| < 4 \Rightarrow -4 < 2x-3 < 4 \Rightarrow -1 < 2x < 7 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{3}{x-2} < 1$ را بیابید.

حل:

$$-1 < \frac{3}{x-2} < 1 \Rightarrow \left| \frac{3}{x-2} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x-2}{3} \right| > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{3} > 1 \text{ یا } \frac{x-2}{3} < -1 \Rightarrow x > 5 \text{ یا } x < -1$$

بنابراین مجموعه جواب معادله عبارت است از:

$$\{x \mid x < -1 \text{ یا } x > 5\}$$

تمرین:

۱- نامعادلات زیر را حل کنید.

(ب) $|3x+2| < |x-2|$

(الف) $|x-1|-x < 2$

(د) $|x^2+x+1|-|x^2-x+5| < 0$

(ج) $|1-5x|-5 < 0$

(ه) $|4x-1|-3x-1 < 0$

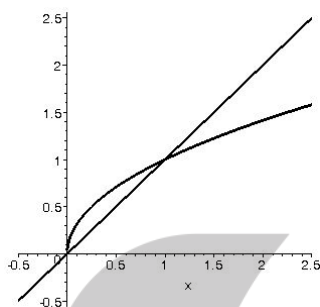
۲- مجموعه جواب نامعادله $|2x-3| < x$ را به صورت $|x-\alpha| < \beta$ نوشته‌ایم $2\alpha-2\beta$ را بیابید.

۳- مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} |x| < 2 \\ |2x-1| < |x| \end{cases}$ را بیابید.

❖ برای بدست آوردن مجموعه جواب نامعادله $f(x) < g(x)$ نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس طول نقاطی را پیدا می‌کنیم که نمودار $y = f(x)$ زیر نمودار $y = g(x)$ واقع باشد و در ضمن $f(x)$ و $g(x)$ با معنی باشد.

مثال: مجموعه جواب نامعادله $x < \sqrt{x}$ را بیابید.

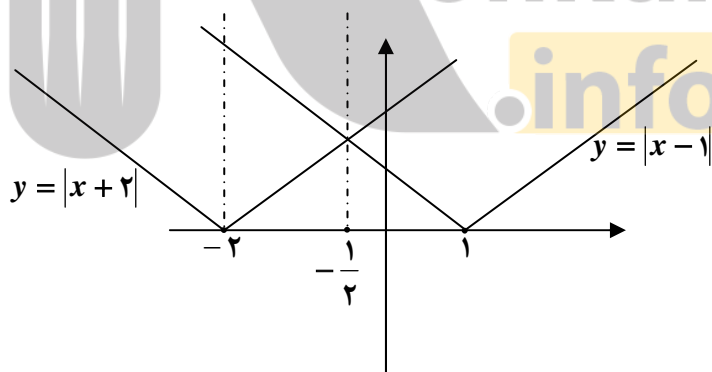
حل: نمودار توابع $y = x$ ، $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر می‌باشد که با توجه به نمودار مجموعه جواب مجموعه‌ی $(0, 1)$ می‌باشد.



مثال: مجموعه جواب نامعادله $|x-1| - |x+2| < 0$ را بیابید.
حل:

$$|x-1| - |x+2| < 0 \Rightarrow |x-1| < |x+2|$$

نمودار $y = |x-1|$ و $y = |x+2|$ به صورت زیر می‌باشد که با توجه به نمودار مجموعه جواب $(-\frac{1}{2}, \infty)$ می‌باشد



تمرین:

مجموعه جواب نامعادلات زیر را به روش هندسی بیابید.

- (الف) $\sqrt{x^2} - x < 0$
 (ب) $|x-1| < 3$
 (ج) $|x+1| + |x-2| < 4$
 (د) $\sqrt{x-1} - x > 0$
 (ه) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} > 0$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>