

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع نمایی به فرم $y = a^x$ در هر دو حالت $0 < a < 1$ ، $a > 1$ یک به یک و وارون پذیر است. وارون تابع $y = a^x$ تابع $y = \log_a x$ می باشد (می خوانیم لگاریتم x در مبنای a)

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y$$
$$a > 0, \quad a \neq 0, \quad y > 0$$

a مبنای لگاریتم است.

نکته: لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر صفر است.

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a^1 = 0$$

نکته: لگاریتم هر عددی در مبنای خودش برابر یک می باشد.

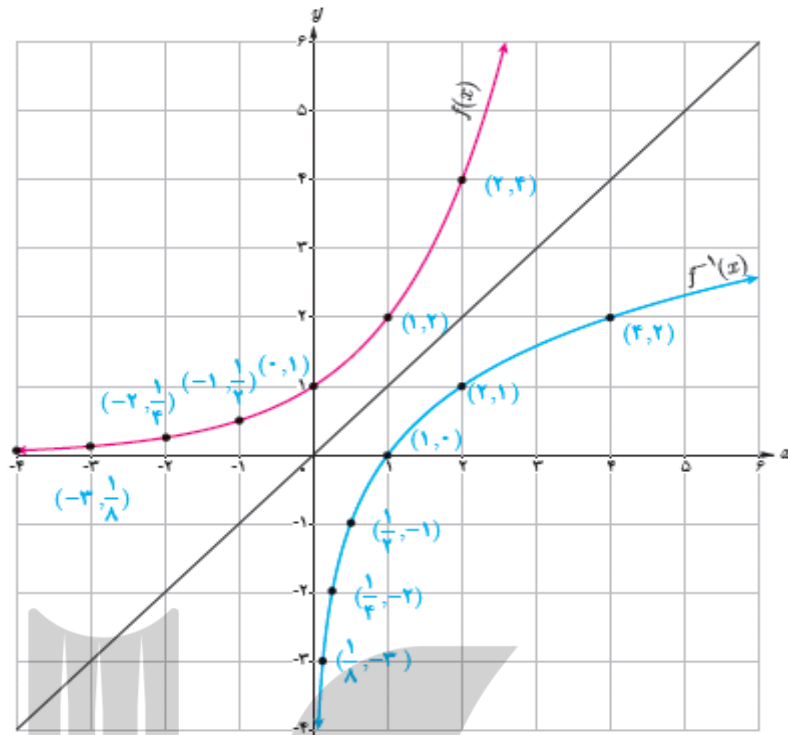
$$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a^a = 1$$

نکته: اگر مبنای لگاریتم 10 باشد می توانیم آن را ننویسیم.

$$\log_{10}^m = \log m$$

نمودار توابع لگاریتمی

همانطور که گفته شد تابع $y = \log_a x$ وارون تابع $y = a^x$ می باشد، پس نمودار تابع $y = \log_a x$ قرینه نمودار $y = a^x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم می باشد. به طور مثال داریم:



$$f(x) = 2^x$$

\Leftrightarrow

$$f^{-1}(x) = \log_2^x$$

مثال) مقدار x را در تساوی های زیر بیابید.

$$\log_{\sqrt{5}}^{(x+2)} = 6$$

(الف)

(حل)

$$\left(\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}\right)^6 = x + 2$$

$$2^5 = x + 2$$

$$x = 2^3$$

$$\log_{.2} \log_2 \log_3 x = -1$$

(ب)

(حل)

$$\log_{.2} \log_3 x = (.2)^{-1} = 5 \longrightarrow \log_3 x = 2^5 = 32 \longrightarrow x = 3^{32}$$

محاسبه دامنه و برد توابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ همزمان باید سه شرط زیر را داشته باشد.

$$g(x) > 0 \quad (1)$$

$$h(x) > 0 \quad (2)$$

$$h(x) \neq 1 \quad (3)$$

مثال) دامنه و برد تابع را بدست آورید.

$$f(x) = \log(-x + \sqrt{x})$$

محاسبه دامنه:

$$1) x > 0$$

$$2) -x + \sqrt{x} > 0 \rightarrow \sqrt{x} > x \rightarrow x > x^2 \rightarrow x^2 - x < 0$$

$$\rightarrow x(x-1) < 0$$

$$D_f = (0, 1)$$

محاسبه برد:

$$1 \cdot y = -x + \sqrt{x} \quad (\sqrt{x} = A) \rightarrow 1 \cdot y = -A^2 + A + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - 1 \cdot y = (A - \frac{1}{2})^2 \geq 0$$

$$1 \cdot y \leq \frac{1}{4} \rightarrow \log_1 \cdot \frac{1}{4} \geq y \rightarrow R_f = (-\infty, \log_1 \cdot \frac{1}{4})$$

نکته مهم: اگر در یک نامساوی، لگاریتمی با مبنای بزرگتر از یک به طرفینی بچسبانیم یا از طرفین

بکنیم، نامساوی تغییر نمیکند ولی اگر مبنای لگاریتم عددی مابین صفر و یک باشد، نامساوی تغییر

میکند.

به طور مثال:

$$1 \cdot 5 \geq 2 \rightarrow 5 \geq \log 2$$

$$(0.2)^3 \geq (0.02)^3 \rightarrow 3 \log_{.3} 0.2 \leq 3 \log_{.3} 0.02$$

قوانین لگاریتم

$$\log_a m + \log_a n = \log_a mn \quad (1)$$

$$\log_a m - \log_a n = \log_a m/n \quad (2)$$

$$\log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} \log_b a \quad (3)$$

$$\log_b a^m = m \log_b a \quad (4)$$

$$\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a \quad (5)$$

$$\log_b \frac{1}{a} = -\log_b a \quad (6)$$

$$\log_{\frac{1}{b}} a = -\log_b a \quad (7)$$

$$\log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a} = \log_b a \quad (8)$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (9)$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad (10)$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \quad (11)$$

$$a^{\log_a b} = 1 \quad (12)$$

نکته بسیار مهم

تبدیل لگاریتم ۲ به لگاریتم ۵ در مبنای ۱۰

$$\log_2 = \log_{10} \cdot \frac{10}{5} = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 5$$

$$\log_5 = \log_{10} \cdot \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2$$

معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات لگاریتمی ابتدا سعی میکنیم طرفین تساوی را بصورت لگاریتم هایی با مبناهای برابر بنویسیم سپس از لگاریتم ها صرف نظر میکنیم و ریشه های معادله را می یابیم. و در نهایت ریشه هایی قابل قبول است که هیچ یک از لگاریتم ها را بی معنی نکند.

مثال معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$1) \log_3 x\sqrt{x} + \log_{x\sqrt{x}} 3 = 2$$

پاسخ)

$$\log_3 x\sqrt{x} = A$$

$$A + \frac{1}{A} = 2 \rightarrow A^2 - 2A + 1 = 0 \rightarrow (A - 1)^2 = 0 \rightarrow \log_3 x\sqrt{x}$$

$$= 1 \rightarrow x\sqrt{x} = 3$$

$$x^3 = 9 \rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

$$2) (3x)^{\log 3 + \log x} = 10^4$$

پاسخ)

$$\rightarrow (3x)^{\log 3x} = 10^4 \quad \log(3x)^{\log 3x} = \log 10^4 = 4$$

$$\log 3x \times \log 3x = 4 \rightarrow \log 3x = 2 \rightarrow 3x = 100$$

$$\rightarrow x = \frac{100}{3} \rightarrow \log 3x \times \log 3x = 4 \rightarrow \log 3x = -2 \rightarrow 3x = 0.01$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{300}$$

نامعادلات لگاریتمی :

برای حل نامعادلات لگاریتمی ابتدا دامنه هر یک از توابع را می‌یابیم بعد به کمک قوانین لگاریتم محدود نامساوی را محاسبه میکنیم. در آخر بین تمام محدوده های به دست آمده اشتراک میگیریم.

مثال) نامعادله زیر را حل کنید.

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$$

محاسبه دامنه :

$$\log_{x-1} 9 : x - 1 > 0 \rightarrow x > 1 \quad (i) \quad \& \quad x - 1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2$$

$$\log_2 \log_{x-1} 9 : \log_{x-1} 9 > 0 \rightarrow \log_{x-1} 9 > \log_{x-1} 1$$

$$\bullet < x - 1 < 1 \rightarrow 1 < x < 2 \rightarrow 9 < 1 \text{ غ ق ق}$$

$$x - 1 > 1 \rightarrow x > 2 \quad (ii) \rightarrow 9 > 1 \text{ ق ق}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 : \log_2 \log_{x-1} 9 > 0 \rightarrow \log_2 \log_{x-1} 9 > \log_2 1$$

$$\log_{x-1} 9 > 1 \rightarrow \log_{x-1} 9 > \log_{x-1} (x-1) \rightarrow 9 > x-1$$

$$\rightarrow 10 > x \quad (iii)$$

حل نامعادله :

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \log_{x-1} 9 > \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\log_2 \log_{x-1} 9 < 1 \rightarrow \log_2 \log_{x-1} 9 < \log_2 2$$

$$\log_{x-1} 9 < 2 \rightarrow \log_{x-1} 9 < \log_{x-1} (x-1)^2$$

$$9 < (x-1)^2 : x-1 > 3 \rightarrow x > 4 \quad (iii)$$

$$9 < (x-1)^2 : x-1 > -3 \rightarrow x < -2 \quad (iii)$$

مجموعه جواب اشتراک هر 4 بازه میباشد :

$$(i) \cap (ii) \cap (iii) \cap (iii) = (4, 10)$$

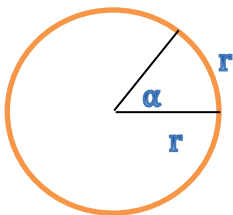
مثلاث

تا کنون زاویه ها را بر حسب درجه اندازه گیری می کردیم. استفاده از واحد «درجه» در هندسه بسیار متداول است. یک درجه را $\frac{1}{360}$ ام محیط یک دایره می نامیم و با علامت $^{\circ}$ نمایش می دهیم. حال می خواهیم اندازه یک زاویه را بر حسب واحد جدیدی به نام **رادیان** بیان کنیم.

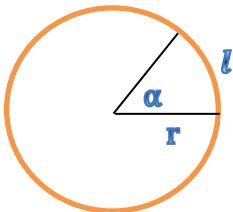
رادیان

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه **زاویه ای مرکزی** است که طول کمان روبه رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می شد.

در دایره مقابل اندازه زاویه α برابر یک رادیان می باشد.



نکته: اندازه زاویه α بر حسب رادیان در دایره ای به شعاع r برابر است با:



$$\alpha = \frac{\text{طول کمان روبه رو به زاویه ی } \alpha}{\text{شعاع دایره}} = \frac{l}{r}$$

نکته: اگر D زاویه ای بر حسب **درجه** و R اندازه آن بر حسب **رادیان** باشد، داریم:

$$R = \frac{D\pi}{180}$$

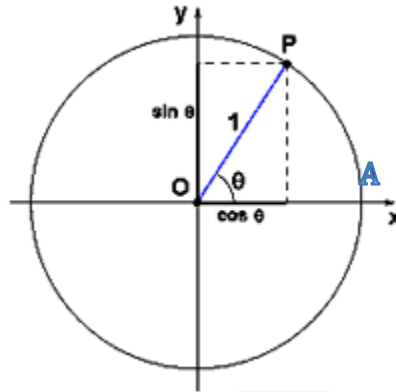
یعنی برای تبدیل یک زاویه بر حسب درجه به رادیان، آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می کنیم.

به طور مثال اندازه زاویه 30° بر حسب رادیان برابر است با:

$$R = \frac{30 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

دایره مثلثاتی:

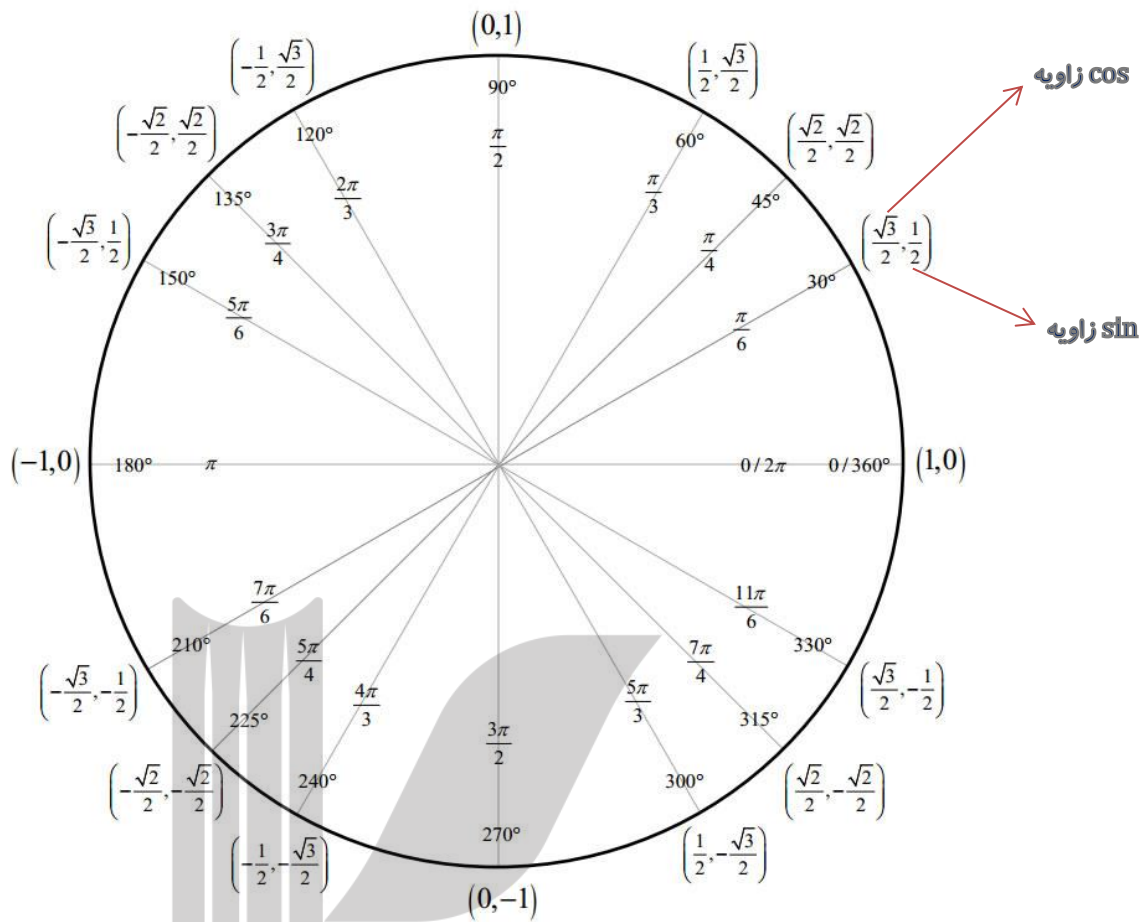
دایره مثلثاتی دایره ای است به شعاع واحد جهت مثبت آن در خلاف جهت عقربه های ساعت و جهت منفی زاویه ها در آن ، جهت حرکت عقربه های ساعت می باشد.



نکته ۱: مبدا حرکت زاویه ها نقطه A می باشد.

نکته ۲: همانطور که در شکل بالا می بینید \sin زاویه θ برابر اندازه تصویر پاره خط OP بر محور y ها و \cos زاویه θ برابر اندازه تصویر پاره خط OP بر محور x ها می باشد.





طول کمان

۱) اگر l طول کمان روبه رو به زاویه θ بر حسب **درجه**، در دایره ای به شعاع r باشد، داریم:

$$l = \frac{\theta}{360} \times (2\pi r)$$

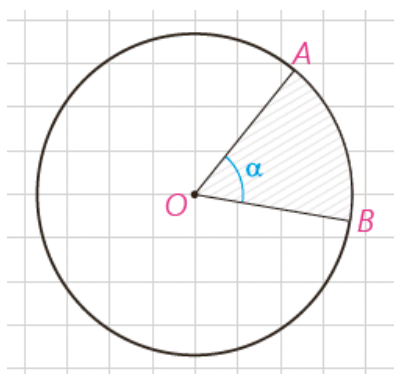
۲) اگر l طول کمان روبه رو به زاویه θ بر حسب **رادیان**، در دایره ای به شعاع r باشد، داریم:

$$l = r\theta$$

نکته: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب **درجه** مساوی α باشد، مساحت قطاع

برابر است با $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ و اگر α بر حسب **رادیان** باشد، مساحت قطاع برابر است با $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$

می باشد.

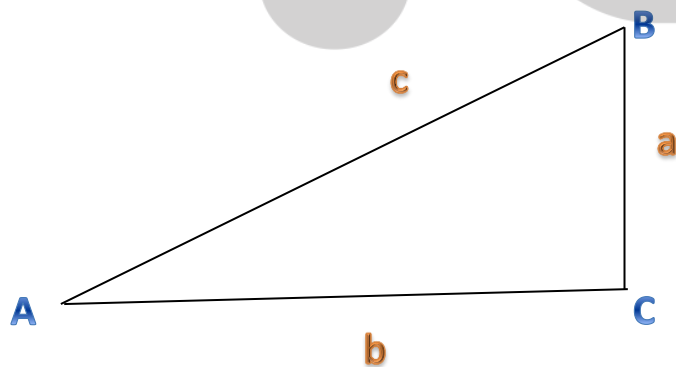


نکته: جدول زیر را به خاطر بسپارید:

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°	درجه	نسبت مثلثاتی
								زاویه (x)	
2π	3π/2	π	π/2	π/3	π/4	π/6	0		
0	-1	0	1	√3/2	√2/2 یا 1/√2	1/2	0	Sin(x)	
1	0	-1	0	1/2	√2/2 یا 1/√2	√3/2	1	Cos(x)	
0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	√3	1	√3/3 یا 1/√3	0	Tan(x)	
تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	√3/3 یا 1/√3	1	√3	تعریف نشده	Cot(x)	

نسبت های مثلثاتی

• نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه



$$\sin_{\hat{A}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos_{\hat{A}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan_{\hat{A}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot_{\hat{A}} = \frac{b}{a}$$

• نسبت های مثلثاتی زاویای متمم

به دو زاویه ای که مجموع آن ها برابر ۹۰ درجه باشد ، زاویای متمم می گویند.

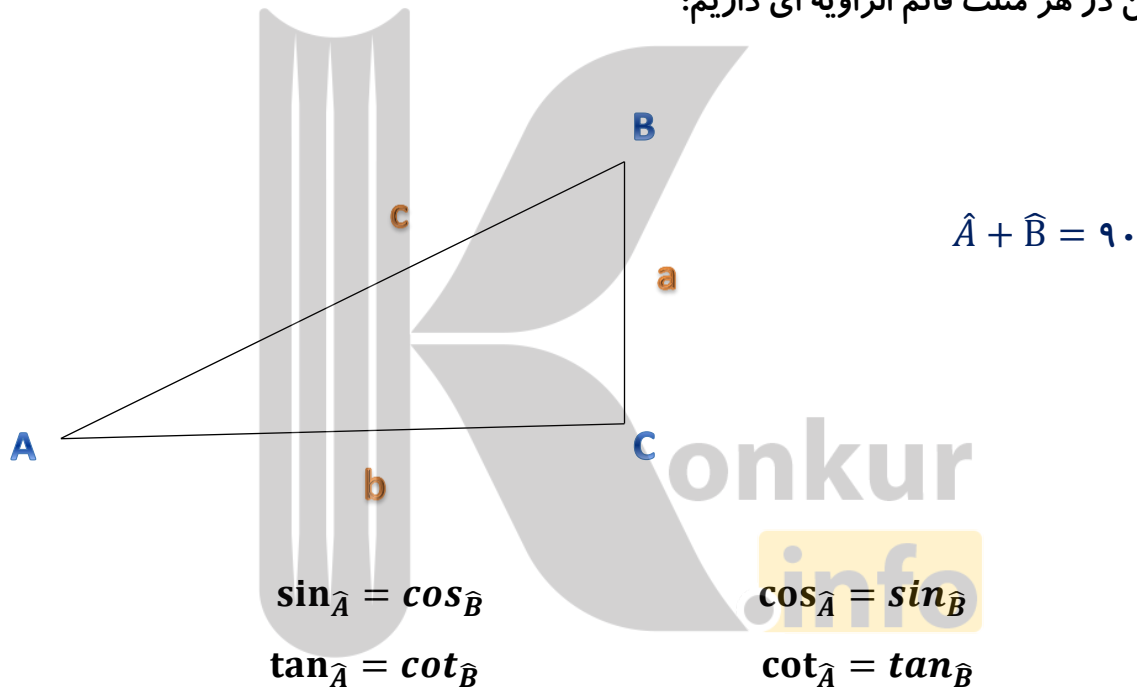
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

همچنین در هر مثلث قائم الزاویه ای داریم:



• نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم $\frac{\pi}{2}$ رادین اختلاف دارند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل

به دو زاویه ای که مجموعشان برابر ۱۸۰ درجه باشد، زوایای مکمل می گویند.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم π رادیان اختلاف دارند.

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی دو زاویه قرینه

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

• نسبت های مثلثاتی زوایای هم انتها

زاویه هایی مانند α و $2\pi + \alpha$ که انتهای کمان های آن ها بر هم منطبق می شود را زوایای هم انتها گویند.

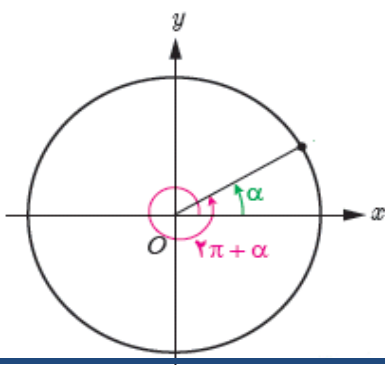
$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

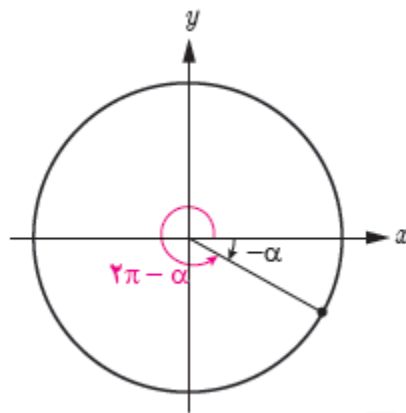
$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

دقت شود که k هر عدد صحیحی می تواند باشد.



با استدلالی مشابه از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند، نسبت های مثلثاتی زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ نیز با هم برابرند.



مثال: نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را بدست آورید.

a) $\frac{-7\pi}{6}$

b) 390°

c) $\frac{11\pi}{6}$

پاسخ)

a)

$$\sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = \tan\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = \cot\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

b)

$$\sin(390^\circ) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(390^\circ) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(390^\circ) = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(390^\circ) = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

c)

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

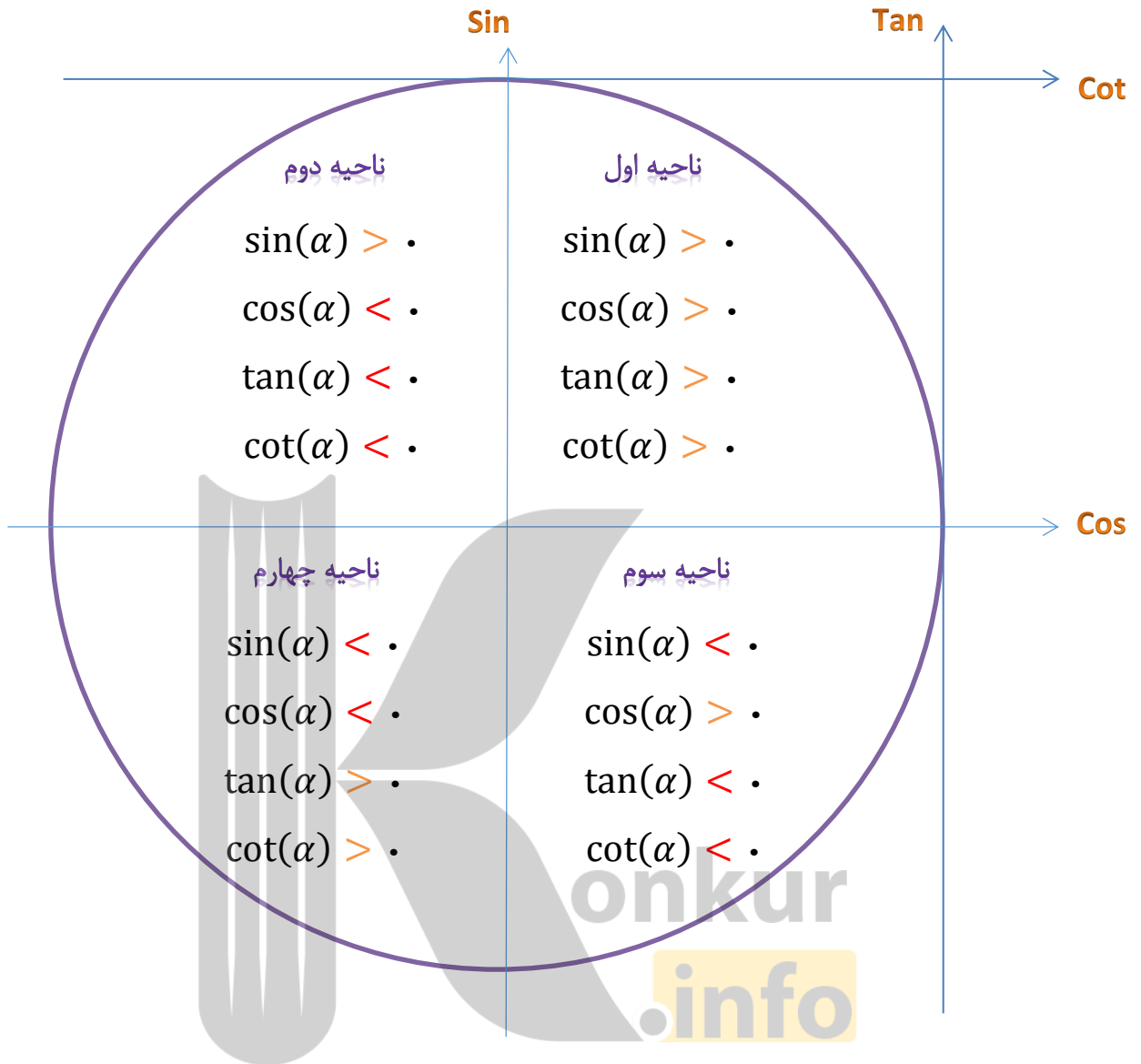
$$\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$



نکته: هر گاه انتهای کمان زاویه ای در ناحیه ی

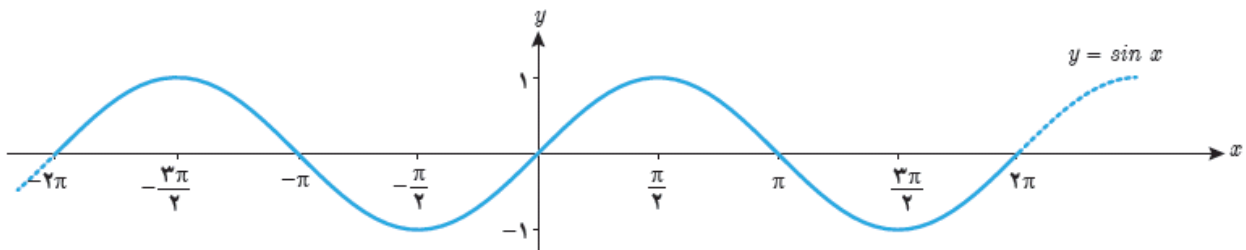
- **اول** باشد، همه ی نسبت های مثلثاتی آن زاویه **مثبت** اند.
- **دوم** باشد، فقط **sin مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** هستند.
- **سوم** باشد، **sin** و **cos منفی** و **tan** و **cot مثبت** اند.
- **چهارم** باشد، فقط **cos مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** اند.



توابع مثلثاتی

• sin

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع $\sin x$ همواره x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است. به طور مثال منظور از $\sin 4^\circ$ سینوس ۴ رادیان و منظور از $\sin 4^\circ$ سینوس ۴ درجه است.

نکته ۲: تابع $\sin x$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود یعنی داریم:

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

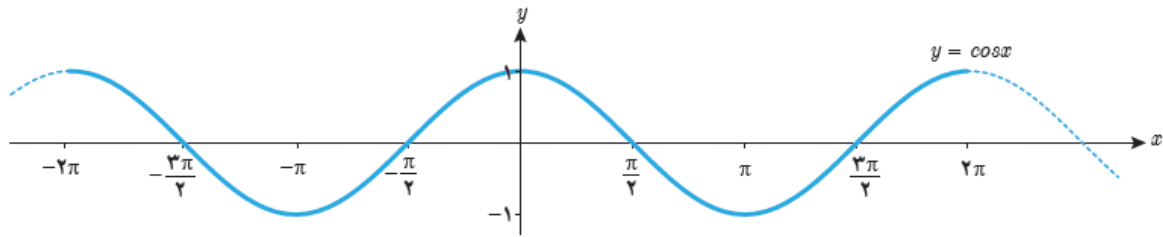
نکته ۳: دامنه تابع \sin کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) و برد آن بازه بسته $[-1, 1]$ می‌باشد.

نکته ۴: تابع \sin محور x ها را در ضرایب صحیح π قطع می‌کند.

نکته ۵: گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی می‌گویند.

COS •

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع $\cos x$ همواره x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.

نکته ۲: تابع $\cos x$ در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود یعنی داریم:

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

نکته ۳: دامنه تابع \cos کل اعداد حقیقی (\mathbb{R}) و برد آن بازه بسته $[-1, 1]$ می‌باشد.

نکته ۴: تابع \cos محور x را در ضرایب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند.

نکته ۵: گاهی به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی می‌گویند.

نکاتی در مورد رسم نمودار توابع مثلثاتی به کمک انتقال:

۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(x - \theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۲) برای رسم نمودار تابع $y = f(x + \theta)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - a$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا پایین دهیم.

۵) برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

۶) برای رسم نمودار تابع $y = f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

۷) برای رسم نمودار تابع $y = f(ax)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

۸) برای رسم نمودار تابع $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را a برابر کنیم.

۹) برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

۱۰) برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{k}f(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

۱۱) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در سمت چپ محور x ها قرار دارد را حذف و سمت راست محور x ها را در سمت چپ قرینه کنیم.

۱۲) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در زیر محور y ها قرار دارد را حذف و قرینه آن را در بالای محور y ها رسم کنیم.

اتحاد های مثلثاتی

$$\triangleright \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\triangleright \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\triangleright \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\triangleright \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\triangleright \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\triangleright \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\triangleright \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\triangleright \tan x \times \cot x = 1$$

$$\triangleright 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cos \alpha \neq 0)$$

$$\triangleright 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad (\sin \alpha \neq 0)$$

به کمک روابط بالا می توانیم اتحاد های کمکی زیر را استخراج کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \times \cos x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \times \cos x}$$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(x + y) = \sin x \times \cos y + \cos x \times \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \times \cos y - \cos x \times \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \times \cos y - \sin x \times \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \times \cos y + \sin x \times \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$

چند اتحاد پر کاربرد و مهم

$$\sin(2x) = 2 \sin x \times \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

از رابطه بالا دو اتحاد مهم زیر بدست می آید که به فرمول های توان شکن معروف اند:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

نکته تستی: با استفاده از اتحاد های مجموع و تفاضل به رابطه مهم زیر می رسیم:

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

مثال: اگر $k^2 - \frac{1}{4} = \sin 5^\circ \cos 5^\circ$ مقدار k بر حسب k کدام می تواند باشد؟

$$\sqrt{2} |k| \quad (1) \quad |k| \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} |k| \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} |k| \quad (4)$$

(آزمون ۲۴ بهمن ۹۳ کنون)

پاسخ

$$\sin 10^\circ = \sin(5^\circ + 5^\circ) = \sin 5^\circ \cos 5^\circ + \cos 5^\circ \sin 5^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 5^\circ + \cos 5^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{(\sin 5^\circ + \cos 5^\circ)^2})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{2 \sin 5^\circ \cos 5^\circ}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{1 + 2(k^2 - \frac{1}{4})})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} |k|) = |k|$$

مثال (۲) اگر $f(\tan x) = \tan 3x$ ، آن گاه حاصل $f(2)$ کدام است؟

$$\frac{13}{11} \quad (1) \quad \frac{2}{11} \quad (2)$$

$$\frac{-13}{11} \quad (3) \quad \frac{-2}{11} \quad (4)$$

(آزمون ۲۴ بهمن ۹۳ کنون)

پاسخ

$$\tan 3x = \tan(2x + x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - (\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}) \tan x} = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$f(\tan x) = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x} \Rightarrow f(2) = \frac{6 - 8}{1 - 12} = \frac{2}{11}$$

حد و پیوستگی

مفهوم حد و فرایند های حدی

همسایگی

اگر x یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x را یک همسایگی x می نامیم.

یعنی اگر $x \in (a, b)$ آنگاه بازه (a, b) یک همسایگی x است.



اگر نقطه x را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a, b) - \{x\}$ را همسایگی محذوف x می نامیم.



همسایگی راست x .

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x, x + r)$ را یک همسایگی راست x می نامیم.



همسایگی چپ x .

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x - r, x)$ را یک همسایگی چپ x می نامیم.

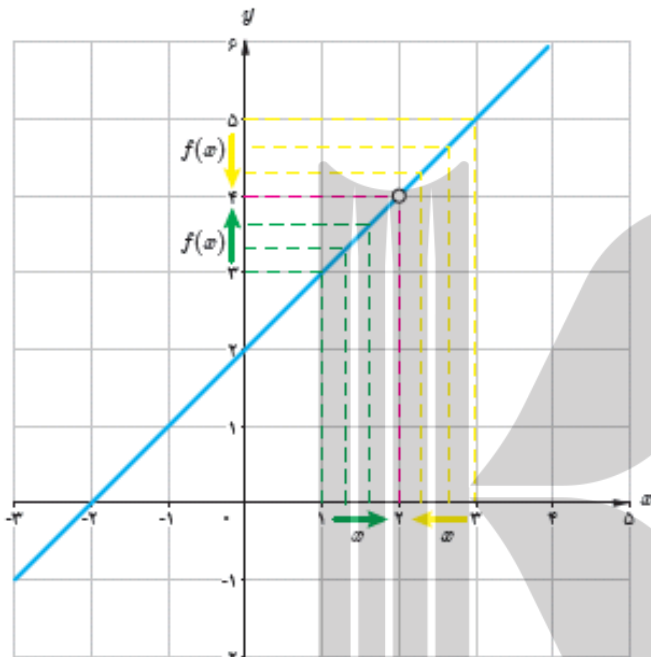


تعریف حد تابع

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد. می‌گوییم **حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است** و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

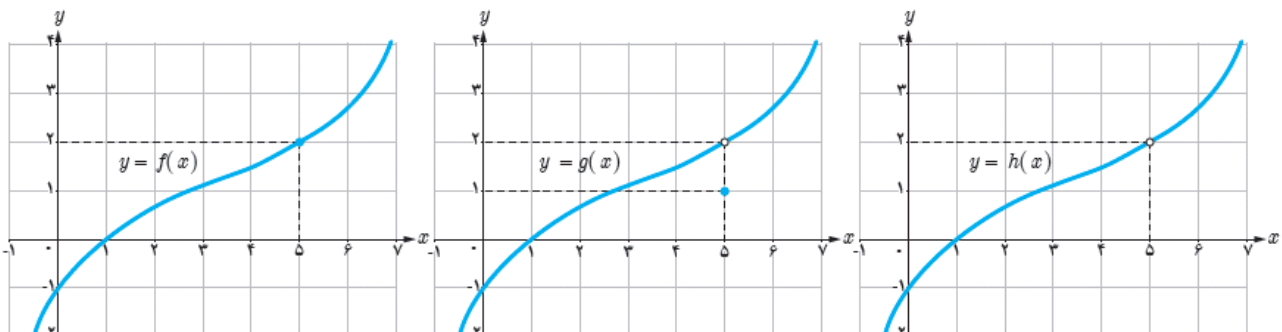
عدد L را حد تابع f در نقطه a می‌نامیم.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

تابع $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید که نقطه (۲، ۴) از آن جدا شده باشد. همانطور که در نمودار این تابع مشاهده می‌کنید وقتی که x را با مقادیر بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم. مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم:

نکته: نمودار سه تابع f, g, h را در نظر بگیرید.



بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه چند حالت وجود دارد که در زیر به سه مورد آن اشاره می‌کنیم:

۱. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد و حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مانند تابع f که حدش با مقدارش در نقطه 5 برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2$$

۲. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

مانند تابع g که حدش با مقدارش در نقطه 5 برابر نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

$$g(5) = 1$$

۳. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف نشده باشد ولی در نقطه a حد داشته باشد.

مانند تابع h که در نقطه 5 تعریف نشده است ولی در این نقطه دارای حد می باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 2$$

با توجه به نکته بالا نتیجه می گیریم که وجود یا عدم وجود مقدار تابع در نقطه دلخواه a ، تاثیری بر حد تابع در نقطه a ندارد.

حد های یک طرفه

نمودار تابعی مانند $f(x)$ را در نظر بگیرید:

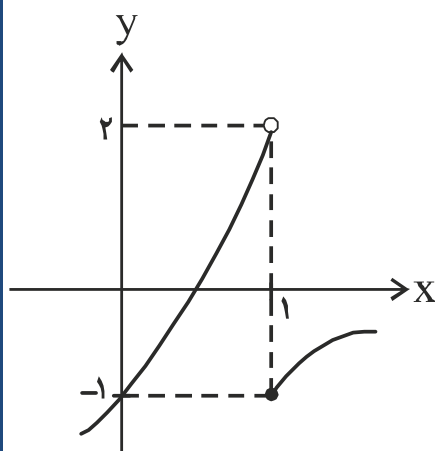
در این تابع می بینیم که اگر متغیر x را با مقادیر کوچک تر از 1

به 1 نزدیک کنیم مقادیر $f(x)$ به عدد 2 نزدیک می شوند و اگر

متغیر x را با مقادیر بزرگ تر از 1 به 1 نزدیک کنیم، مقادیر $f(x)$ به

عدد -2 نزدیک می شوند. در این صورت می گوئیم **حد تابع f در**

نقطه 1 وجود ندارد ولی تابع در این نقطه دارای حدود چپ و راست می باشد.

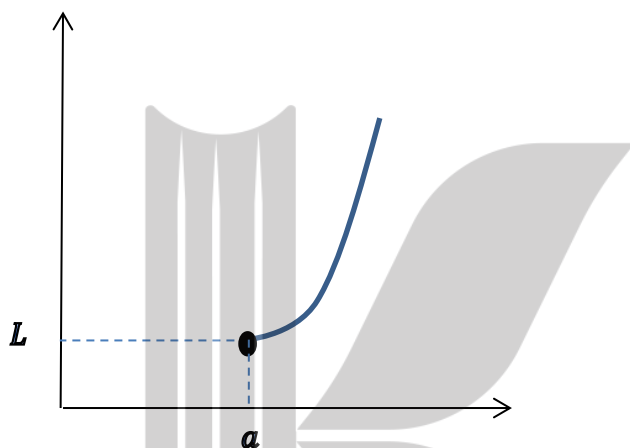


حد راست

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم **حد راست** تابع f در نقطه $x = a$ برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

در این صورت می‌نویسیم:

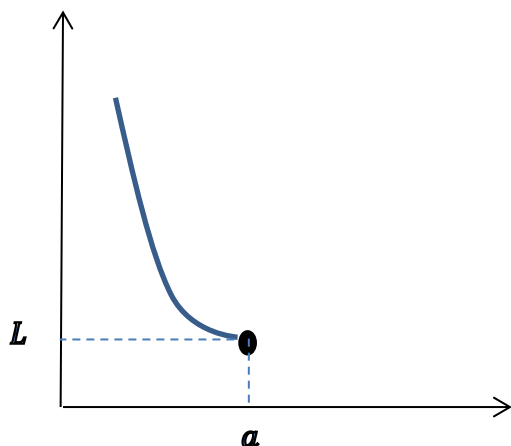


حد چپ

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم **حد چپ** تابع f در نقطه $x = a$ برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

در این صورت می‌نویسیم:

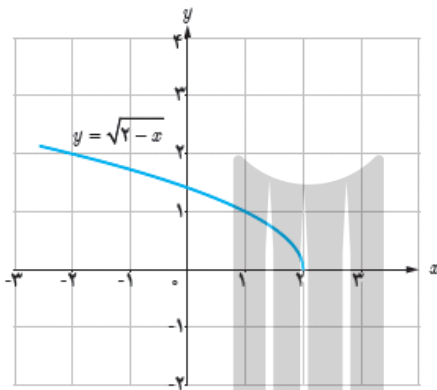


نکته: حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.

با توجه به نکته بالا می توان گفت که حد تابع f در نقطه $x = a$ موجود نیست اگر:

۱. حد چپ و راست در نقطه a موجود ولی دو مقدار متفاوت داشته باشند.

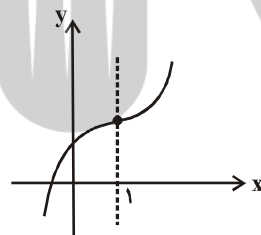
۲. یکی از حد های چپ یا راست وجود نداشته باشد (تابع در همسایگی چپ یا راست تعریف نشده باشد).



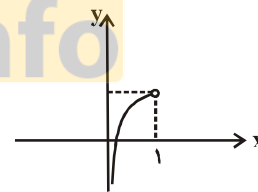
به طور مثال تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه $x = 2$ حد ندارد چون در هیچ همسایگی راست 2 تعریف نشده است.

مثال ۱:

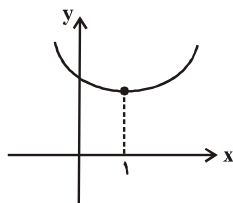
کدام یک از نمودارهای زیر نشان دهنده ی تابعی است که در نقطه ی $x = 1$ حد راست دارد ولی حد چپ ندارد؟



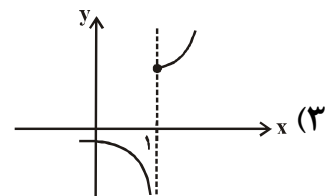
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

پاسخ)

در گزینه‌های «۲» و «۴» تابع موردنظر در $x=1$ دارای حد راست و چپ می‌باشد. در گزینه‌ی «۱» تابع حد چپ دارد و حد راست ندارد و در گزینه‌ی «۳» تابع حد راست ولی حد چپ ندارد.

مثال ۲: حد چپ تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در نقطه‌ی $x = \frac{-1}{10}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱۱
(۲) -۹
(۳) -۱۰
(۴) -۱۱

پاسخ)

گزینه‌ی «۳»

وقتی $x \rightarrow \left(\frac{-1}{10}\right)^-$ ، یعنی $x < \frac{-1}{10}$ پس $\frac{1}{x} > -10$ ، لذا:

$$\left[\frac{1}{x} \right] = -10$$

نکته مهم: حد تابع $f(x) = [x]$ در نقطه a در دو حالت زیر بررسی می‌شود،

۱. اگر a عددی صحیح باشد، f در a حد ندارد چون:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a - 1$$

همانطور که می‌بینید حدود چپ و راست موجود ولی نا برابر هستند پس تابع جز صحیح در هر نقطه صحیح، حد ندارد.

۲. اگر a عددی غیر صحیح باشد، f در a حد دارد و حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a]$$

نکته: اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آن ها در a وجود داشته باشد آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند یعنی:

$$\text{اگر } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ آنگاه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند، مقدار حد آن ها نیز در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

به طور مثال مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ در نقطه $x=0$ برابر صفر است چون در این ناحیه تابع f با تابع $g(x)=0$ برابر است.

قضایای حد

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر نقطه دلخواه برابر مقدار ثابت c است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

قضیه ۲: هر چند جمله ای مانند $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله ای در نقطه a برابر است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b.$$

قضیه ۳: اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$$

قضیه ۴: فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد ($f(x) > 0$) آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

قضیه ۵: اگر تابع f در نقطه a حد داشته باشد و حد آن نیز برابر L باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right| = |L|$$

مثال ۱: اگر f و g در اطراف $x = a$ تعریف شده و هر دو در این نقطه دارای حد باشند و

$\lim_{x \rightarrow a} (f^2 + g^2)(x)$ کدام می‌تواند $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = -6$ و $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = 1$ آن‌گاه حاصل

باشد؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ)

گزینه‌ی «۲»

اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 L_2 = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 3, L_2 = -2 \\ \text{یا} \\ L_2 = 3, L_1 = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2 + g^2)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} g^2(x) = 9 + 4 = 13$$

مثال ۲: اگر $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x - 2 & x > 0 \\ 5x + 1 & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ)

گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f\left(\frac{1-x^2}{2x}\right) = f\left(\frac{0^+}{-2}\right) = f(0^-) = 5(0) + 1 = 1$$

حد توابع مثلثاتی

برای هر عدد حقیقی a داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

برای محاسبه حد توابع گویا در نقطه $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) در حالتی که حد صورت و مخرج در نقطه $x = a$ برابر صفر باشد، نمی‌توانیم از قضایای حد و جانشینی نقطه در تابع استفاده کنیم زیرا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بر می‌خوریم. در این گونه موارد باید ابتدا صورت و مخرج را به عامل‌های مناسب تجزیه کنیم و بعد از ساده‌سازی کسر، به محاسبه حد با استفاده از قضایای حد، پردازیم.

مثال ۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2}{x - \sqrt{3x-2}}$ کدام است؟

۴ (۲) ۱) صفر

۸ (۴) ۳) -۴

پاسخ)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2}{x - \sqrt{3x-2}} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2 (x + \sqrt{3x-2})}{(x - \sqrt{3x-2})(x + \sqrt{3x-2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2 (x + \sqrt{3x-2})}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2 (2+2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4(x-2)}{x-1} = 0$$

مثال ۲: حد کسر $\frac{\sqrt[3]{x-1} + x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 1} + x^3 - 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ برابر با کدام است؟

۱ (۱)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲)

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (۳)

(۴) وجود ندارد.

پاسخ)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} + x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 1} + x^3 - 1} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم برای این منظور با استفاده از اتحادها داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} + (x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x^2 - 1} + (x-1)(x^2 + x + 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}(1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}(x+1))}{\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x-1)^2}(x^2 + x + 1))} \\ = \frac{1+0}{\sqrt[3]{2}+0} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

مثال ۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \sin 8x}$ کدام است؟

-۱ (۱)

۴ (۲)

۱ (۳)

-۴ (۴)

پاسخ)

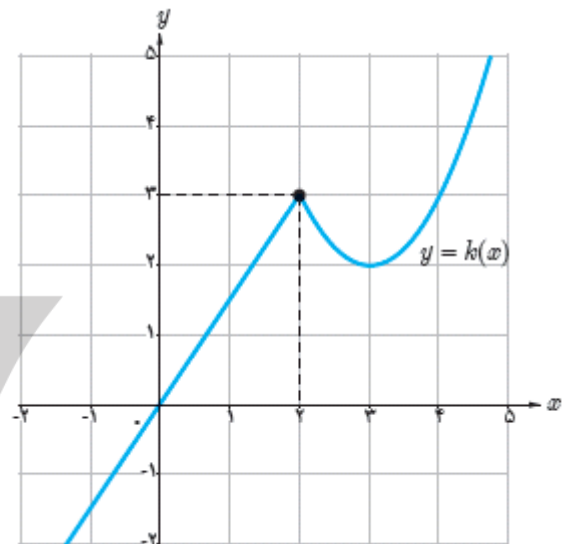
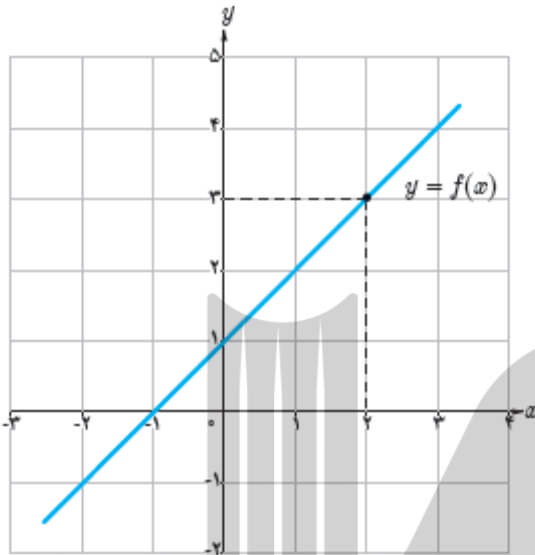
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x \sin x}{2x \sin 4x \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{2x \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos 4x} = -1$$

پیوستگی

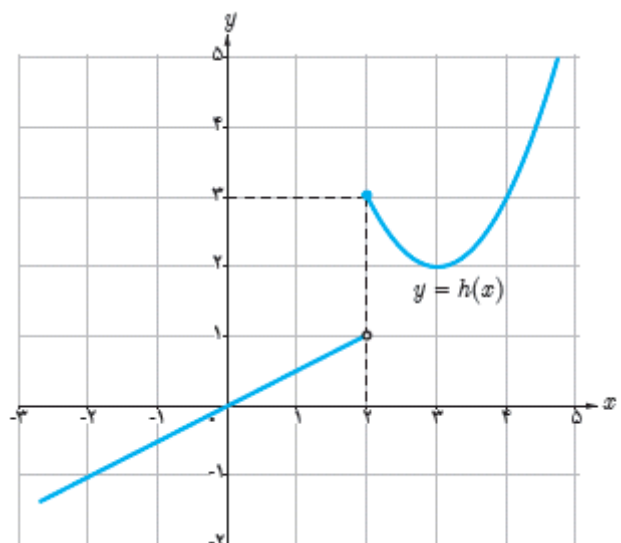
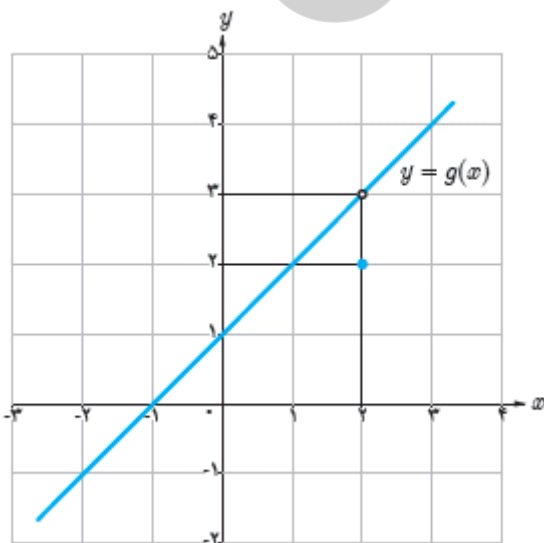
گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

به توابع زیر دقت کنید:



همان طور که مشاهده می کنید در نمودار دو تابع بالا در نقطه $x=2$ هیچ **گسستگی** وجود ندارد، یعنی حد توابع با مقدار آن ها در نقطه $x=2$ با هم برابر می باشند. در این حالت اصطلاحاً می گوییم، تابع در $x = 2$ **پیوسته** است. اما دو تابع زیر را در نظر بگیرید:



همان طور که میبینید در دو تابع بالا در نقطه $x=2$ گسستگی وجود دارد یعنی حد تابع با مقدار تابع در نقطه $x=2$ برابر نمی باشد، در این حالت می گوئیم: تابع f در نقطه $x=2$ **ناپیوسته** است.

بنابراین برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a باید شرایط زیر همزمان برقرار باشند:

۱- تابع f در a **تعریف شده** باشد،

۲- حد تابع f در a موجود باشد (حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند).

۳- مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

نکته: همه ی توابع چند جمله ای، توابع $\sin x$ و $\cos x$ و $\sqrt[n]{x}$ به شرط آن که n عددی فرد باشد، a^x ، $|x|$ در هر نقطه ای پیوسته می باشند.

پیوسته از راست

گوئیم تابع f از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

پیوسته از چپ

گوئیم تابع f از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

نکته: دقت کنید وقتی می گوئیم تابع f در نقطه a پیوسته است، یعنی هم از راست پیوسته است و هم از چپ.

نکته: در مورد پیوستگی تابع $f(x) = [ax]$ در نقطه x می توان گفت:

۱- اگر $ax \in \mathbb{Z}$ ، تابع f در x **ناپیوسته** است. در این حالت اگر $a > 0$ باشد تابع f در x .

پیوستگی راست دارد و اگر $a < 0$ تابع f در x پیوستگی چپ دارد.

۲- اگر $ax \notin \mathbb{Z}$ ، تابع f در x پیوسته است.

مثال ۱: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a[-x] + x^2, & x > 2 \\ 5, & x = 2 \\ \frac{|4-x^2|}{bx-2b}, & x < 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی ۲ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

[]، علامت جزء صحیح است.

$$\frac{-17}{15} \quad (2) \qquad -\frac{7}{15} \quad (1)$$

$$\frac{17}{30} \quad (4) \qquad \frac{11}{30} \quad (3)$$

پاسخ)

تابع f در ۲ پیوسته است، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$f(2) = 5 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (a[-x] + x^2) = a[-(2^+)] + 4 = -3a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|4-x^2|}{bx-2b} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x||2+x|}{b(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{-b(2-x)} = -\frac{4}{b}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{b} = 5 \Rightarrow b = -\frac{4}{5} \quad \text{و} \quad -3a + 4 = 5 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$a+b = \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-17}{15}$$

مثال ۲: اگر تابع $f(x) = \frac{|x| - \sin x + 5}{\sqrt{3x^2 + 6x + m}}$ در \mathbb{R} پیوسته باشد، آن‌گاه m چند مقدار طبیعی نمی‌تواند اختیار کند؟

$$2 \quad (2) \qquad 3 \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (4) \qquad 1 \quad (3)$$

پاسخ)

اگر در نظر بگیریم $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ، $g(x) = |x| \sin \pi + 5$ می‌باشد که به صورت مجموع چند تابع

پیوسته است پس g پیوسته خواهد بود از طرفی $h(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + m}$ است که می‌بایست در R پیوسته باشد بنابراین باید عبارت زیر رادیکال همواره مثبت باشد.

$$3x^2 + 6x + m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 36 - 12m < 0 \Rightarrow m > 3 \\ a = 3 \end{cases}$$

بنابراین m نمی‌تواند اعداد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ را بپذیرد.

مثال ۳: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 9ax + 3b & ; [x] \leq 2 \\ x^3 - 27 & \\ \frac{3}{x} & ; [x] > 2 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

([] ، نماد جزء صحیح است.)

- | | |
|---------|--------|
| ۲۴ (۲) | ۳۰ (۱) |
| -۲۴ (۴) | ۲۷ (۳) |

پاسخ)

ابتدا تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 9ax + 3b & x < 3 \\ x^3 - 27 & \\ \frac{3}{x} & x \geq 3 \end{cases}$$



حال پیوستگی تابع را در $x=3$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9ax + 3b}{x^3 - 27} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9a(x + \frac{b}{3a})}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}$$

برای این که حاصل حد چپ برابر ۱ شود چون به ازای $x=3$ مخرج صفر می‌شود حتماً باید صورت هم صفر شود.

$$3 + \frac{b}{3a} = 0 \Rightarrow b = -9a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9a(x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}$$

$$= \frac{9a}{27} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = 1$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -27 \Rightarrow a - b = 30.$$

پیوستگی روی بازه

- تابع f را در بازه (a, b) پیوسته گوئیم هر گاه در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد.
- تابع f را در بازه $[a, b]$ پیوسته گوئیم هر گاه تابع f در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

- تابع f را در بازه $(a, b]$ پیوسته گوئیم هر گاه تابع f در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد و در b از چپ پیوسته باشد.

- تابع f را در بازه $[a, b)$ پیوسته گوئیم هر گاه تابع f در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته باشد.

نکته: توابع $\log_a x$ و $\sqrt[n]{x}$ (n عددی زوج است) روی هر نقطه از دامنه شان پیوسته می باشند.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x + 1 & x \notin Z \\ 3x^2 + 1 & x \in Z \end{cases}$ در چند نقطه به طول صحیح پیوسته است؟

۱ (۲) صفر (۱)

۳ (۴) ۲ (۳)

پاسخ)

فرض کنیم $k \in Z$ ، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k} (2x^3 + x + 1) = 2k^3 + k + 1 \\ f(k) &= 3k^2 + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow 2k^3 + k + 1 = 3k^2 + 1 \Rightarrow 2k^3 - 3k^2 + k = 0$$

$$\Rightarrow k(k-1)(2k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \in Z \text{ قابل قبول} \\ k = 1 \in Z \text{ قابل قبول} \\ k = \frac{1}{2} \notin Z \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

پس تابع داده شده در دو نقطه به طول صحیح، پیوسته است.

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
info

<https://konkur.info>