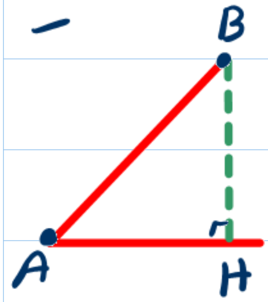
آنچه تا به حال درباره شیب دانسته‌ایم :

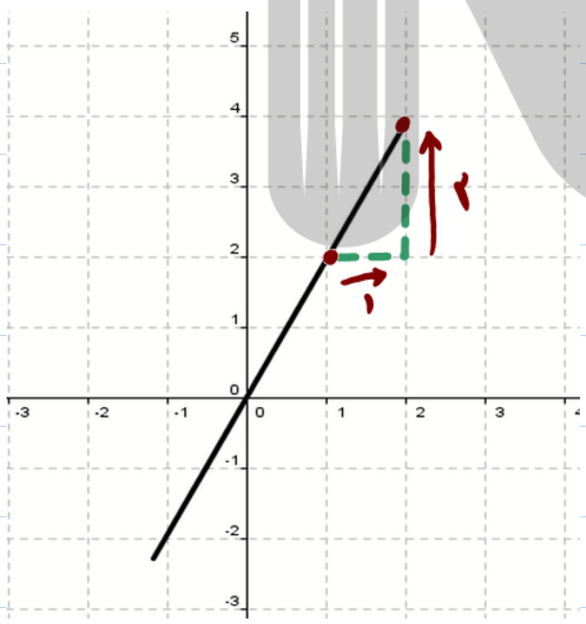
مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیبدار می‌گوییم.

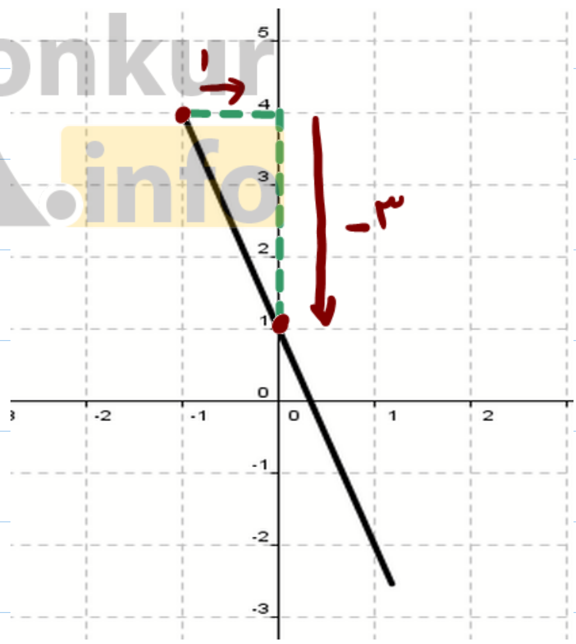


$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

شیب خط : وقتی می‌گوییم شیب خطی m است یعنی به ازای افزایش یک واحدی متغیر x

متغیر y به اندازه m واحد افزایش یا کاهش می‌یابد.





الف)

$m=2$

ب)

$m=-3$

نکته: الف) هرگاه روی محور xها از چپ به راست حرکت کنیم و روی خط به سمت بالا
برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه روی محور xها از چپ به راست حرکت کنیم و روی خط به پائین سر بخوریم
شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی محور xها باشد شیب خط صفر است (خط‌های افقی)

د) اگر خط موازی محور yها باشد شیب خط تعریف نشده است (خط‌های قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن:

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط d باشند، شیب این خط برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن:

اگر $A(x_1, y_1)$ نقطه‌ای از خط d با شیب m باشد آنگاه معادله این خط

از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات $\overset{x_1\ \ y_1}{(1,-6)}$ و $\overset{x_2\ \ y_2}{(-4,-2)}$ بگذرد.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2+6}{-4-1}=\frac{4}{-5}=-\frac{4}{5}\ \to\ y+6=-\frac{4}{5}(x-1)$$

$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}-\frac{6}{1}\ \longrightarrow\ y=-\frac{4}{5}x-\frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تانژانت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکر: الف) به معادله‌هایی به شکل $y=mx+h$ معادله استاندارد خط می‌گوییم که m شیب خط و h عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور yها) است.

ب) به معادله‌هایی به شکل $ax+by+c=0$ صورت کلی خط می‌گوییم که شیب از $-\frac{a}{b}$ به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

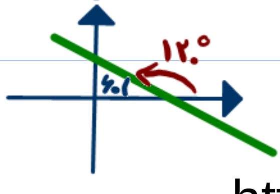
1) $x=1 \ \longrightarrow\ m:$ تعریف نشده

2) $y=\sqrt{3}x-4 \ \to\ m=\sqrt{3}$

3) $y=-2 \ \to\ m=0$

4) $4x+12y-10=0 \ \longrightarrow\ m=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$

5) $5x=3y+1 \to 3y=5x-1 \xrightarrow{\div 3} y=\frac{5}{3}x-\frac{1}{3} \to m=\frac{5}{3}$

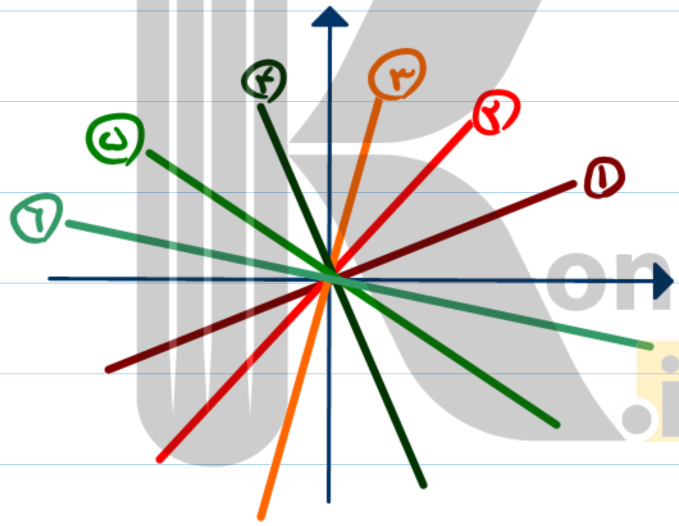
6) 

$$m=\tan 120^\circ=\tan(180-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

نکته: در خط‌های با شیب مثبت، هرچه خط به محور yها نزدیک‌تر شود، شیب آن بیشتر می‌شود و در خط‌های با شیب منفی، هرچه خط به محور yها نزدیک‌تر شود شیب آن افزایش می‌یابد.

مثال: شیب خط‌های داده شده، به ترتیب $\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -4, 2\}$ است.

هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$m_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $m_4 = -4$

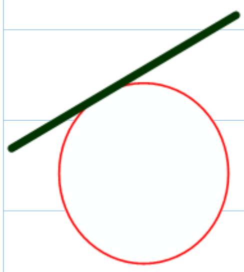
$m_2 = 1$ $\qquad$ $m_5 = -1$

$m_3 = 2$ $\qquad$ $m_6 = -\frac{1}{3}$

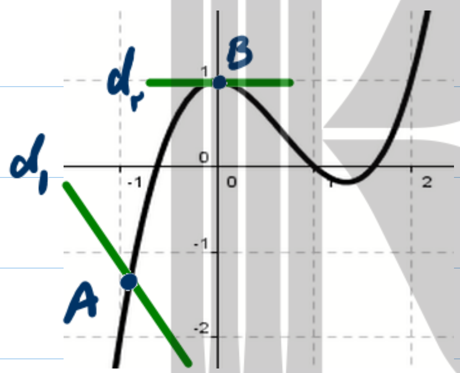
خط مماس بر منحنی :

در هندسه، خط مماس بر دایره، خطی تعریف می‌شود که دایره را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.



منظور، تابع زیر را در نظر بگیرید.



از لحاظ احساسی خط d_2 در B بر تابع مماس است ولی خط d_1 در A

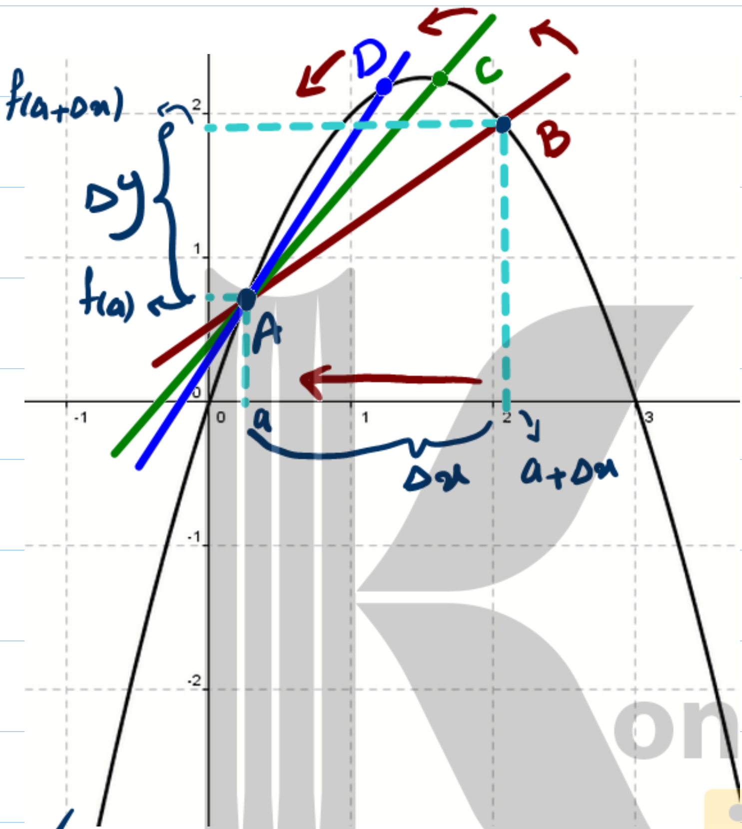
بر منحنی تابع مماس نیست.

تعریفی غیردقیق از خط مماس :

خط راستی است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می‌کند. به صورت غیردقیق

خطی تعریف می‌شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی‌نهایت به یکدیگر نزدیک‌اند می‌گذرد.

مثال: تابع $y=-x^2+3x$ را درنظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می‌گذرد را خط قاطع می‌گوئیم مانند: AB ، AC و AD .

فرض کنید نقطه A ثابت باشد و نقطه B را به نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر می‌کنیم.

این عمل معادل این است که $\Delta x \to 0$. ضمن ادامه این عمل، خط قاطع حول نقطه ثابت A گردش می‌کند. این خط قاطع دارای یک وضعیت حدی است.

همین وضعیت حدی است که ما می‌خواهیم خط مماس بر نمودار در نقطه A باشد.

حال اگر شیب خط قاطع AB را $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در نظر بگیریم. با ادامهٔ این عمل حدی شیب

خط قاطعی که به نقطهٔ A بسیار بسیار نزدیک است به صورت : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ خواهد بود.

تعریفِ دقیقِ خط مماس :

فرض کنید تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ

$A(a,f(a))$ عبارت است از خطی که از نقطهٔ A می‌گذرد و دارای شیبی است

که از محاسبهٔ حد زیر بدست می‌آید :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{y_2}{f(a+\Delta x)} - \overset{y_1}{f(a)}}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

تذکر مهم : اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$ آنگاه خط مماس ، خط

$x = a$ تعریف می‌شود .

نکته : اگر هیچیک از حالت های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در A وجود ندارد.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+3$ را در نقطه‌ای به طول -2 بنویسید.

$$a=x=-2 \longrightarrow f(-2)=(-2)^2+3=4+3=7 \rightarrow A(-2,7)$$

نقطهٔ تماس

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-\overset{7}{f(-2)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left((-2+\Delta x)^2+3\right)-7}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4-4\Delta x+\Delta x^2+3-7}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x-4)}{\cancel{\Delta x}}=0-4=-4$$

$$y-7=-4(x+2)$$

$$y=-4x-8+7 \longrightarrow y=-4x-1 \quad :$$

معادله خط مماس در نقطه $A(-2,7)$

در جلسه قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

تعریف مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد مشتق تابع f در نقطه $x=a$ را با $f'(a)$ نشان می دهیم

و این گونه تعریف می کنیم:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع f در $x=a$ است. به حد بالا شیب منحنی در a هم گفته می شود.

نکته: اکثر اوقات از h به جای Δx استفاده می شود و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود:

$$f'(a)=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: اگر $f(x)=3x^2+12$ باشد، مشتق تابع f را در نقطه $x=a$ بیابید.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{3(a+h)^2+12}^{f(a+h)}-\overbrace{(3a^2+12)}^{f(a)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(a^2+2ah+h^2)+\cancel{12}-3a^2-\cancel{12}}{h}$$

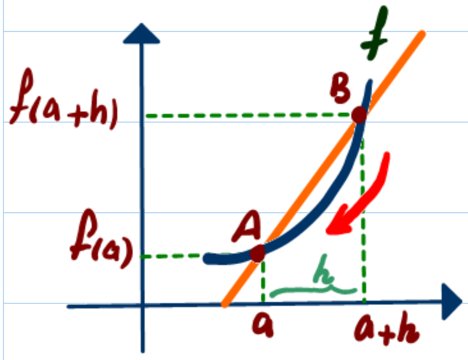
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3a^2}+6ah+3h^2-\cancel{3a^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6ah}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+6a)}{h}$$

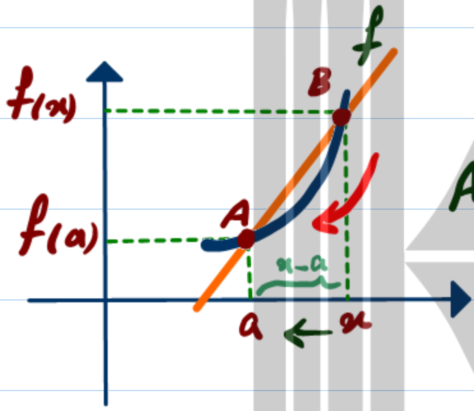
$$=3\times 0+6a=6a$$

$$f'(a)=6a$$

حال می‌خواهیم با تغییری در نمادگذاری‌ها تعریفی دیگر از مشتق ارائه دهیم. به شکل‌های زیر دقت کنید



$$\text{شیب خط مماس در } A = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



$$\text{شیب خط مماس در } A = f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریفی دیگر برای مشتق:

اگر $a \in D_f$ باشد، مشتق تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

مثال: برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ ؛ $f'(5), f'(8)$ را محاسبه کنید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}$$

$$f(5)=-5^2+10\times 5=-25+50=25$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x^2-10x+25)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}-(x-5)=0$$

$$f'(8)=\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}$$

$$f(8)=-8^2+10\times 8=-64+80=16$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-(x^2-10x+16)}{x-8}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{-\cancel{(x-8)}(x-2)}{\cancel{x-8}}=\lim_{x\to 8}-(x-2)$$

$$=-(8-2)=-6$$

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-5)$ را در نقطه $x=5$ محاسبه کنید.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-1)\dots\cancel{(x-5)}-0}{\cancel{x-5}}$$

$$f(5)=(5-1)(5-2)\dots\cancel{(5-5)}$$

$$=\lim_{x\to 5}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=4\times3\times2\times1=24$$

مثال: اگر $f(2)=5$ و $f'(2)=-3$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x^2-4}$ را بیابید.

از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(f(x)-f(2)\right)\left(f(x)+f(2)\right)}{(x-2)(x+2)}$$

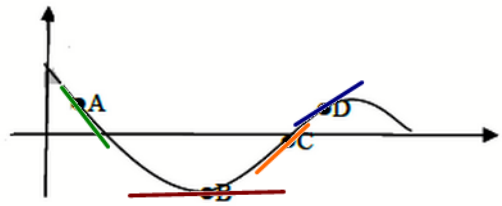
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+f(2)}{x+2}$$

$$=f'(2)\times\frac{f(2)+f(2)}{2+2}=-3\times\frac{2\times5}{4}=-3\times\frac{5}{2}$$

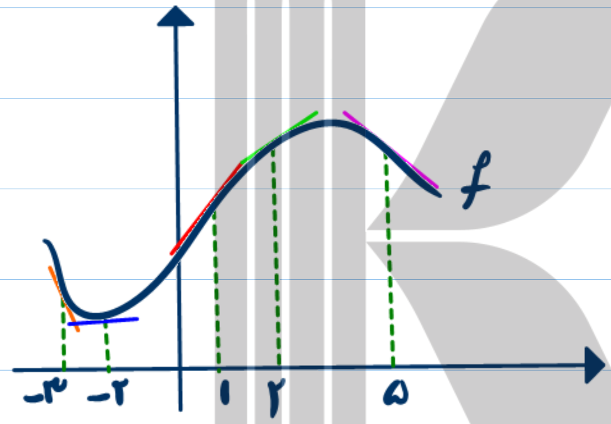
$$=-\frac{15}{2}$$

مثال: نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲-
نقطه	C	B	D	A



مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.



الف) $f'(1) > f'(2)$ درست زیرا خط قرمز به محور yها نزدیک‌تر

ب) $f'(5) > f'(-2)$ درست زیرا خط صورتی به محور xها نزدیک‌تر

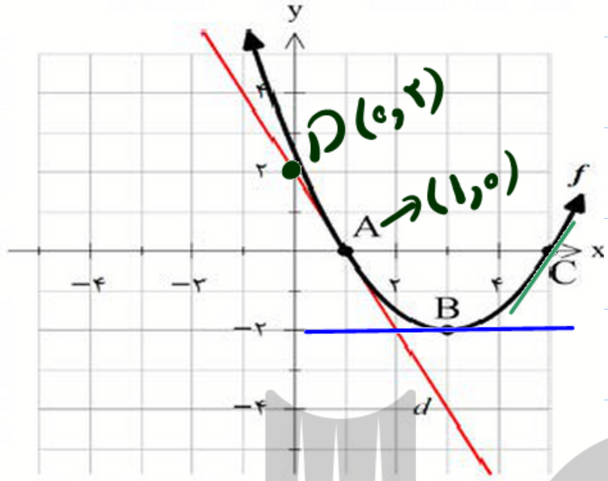
پ) $f'(-2) < f'(5)$ نادرست زیرا $0 \nless$ عدد منفی

ت) $f'(-3) < f'(-2) < f'(2) < f'(1)$ درست.

مثال: در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=1$ بر نمودار مماس شده است:

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=1$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



الف) $f'(1) =$ شیب خط مماس بر f در نقطه A

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2-0}{0-1} = -2 \to f'(1)$$

ب) یک عدد مثبت

$$m_C > m_B$$

0

۱ اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$3\times 4-2\times 2+1=12-4+1=9$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}$$

$3x^2-2x-8 \;\big|\; x-2$

روش هورنر

	3	-2	-8
2	3	$2\times 3-2=4$	$2\times 4-8=0$

باقیمانده

خارج قسمت: $3x+4$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(3x+4)}{\cancel{x-2}}=3\times 2+4=10$$

$m=f'(2)=10$

شیب

$A(2,f(2)) \Rightarrow A(2,9)$

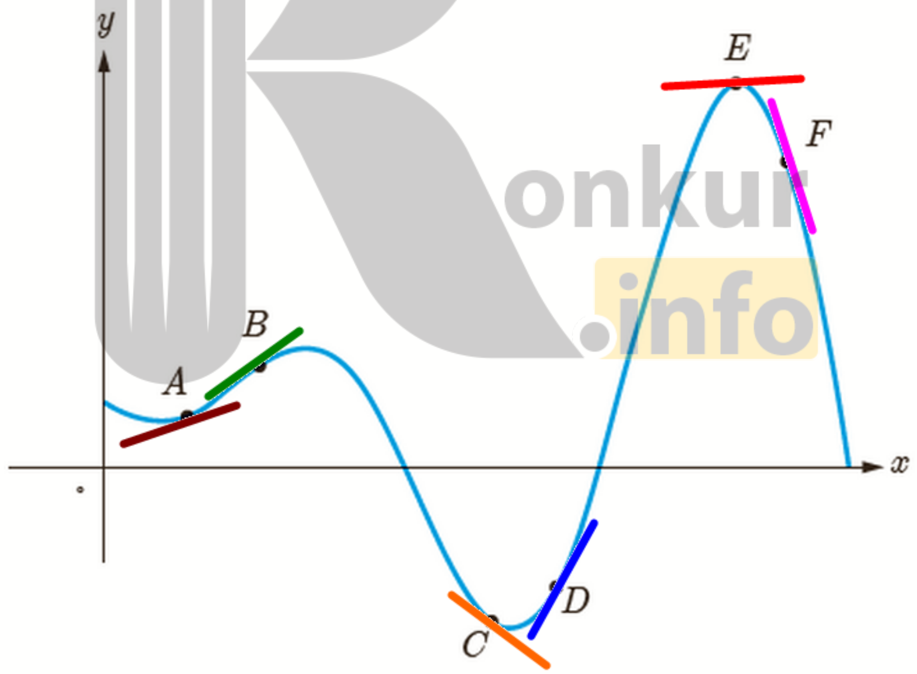
$$y-9=10(x-2)$$

$$y=10x-20+9 \Rightarrow y=10x-11$$

معادله خط مماس در A

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲



۳ برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A : m_1

ب) شیب نمودار در نقطه B : m_2

پ) شیب نمودار در نقطه C : m_3

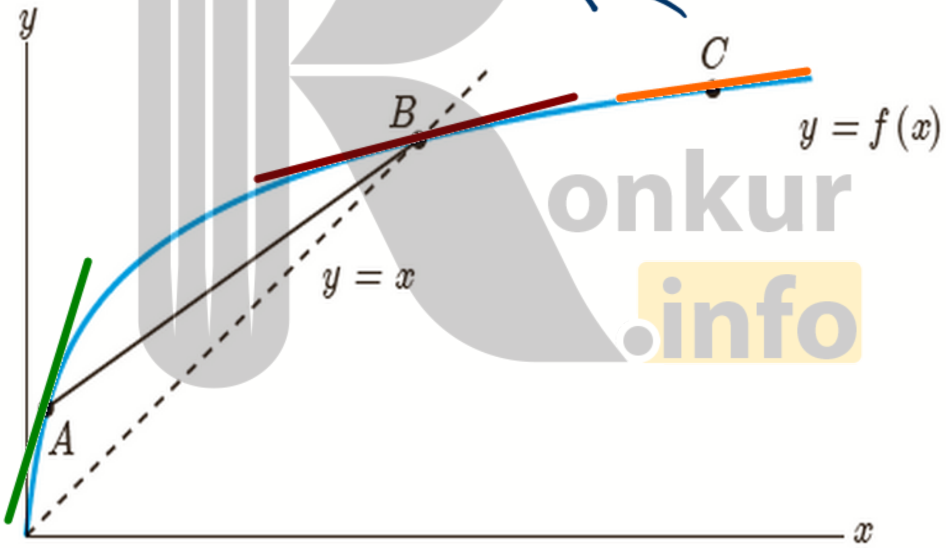
ت) شیب خط AB : m_4

ث) شیب خط $y=2$: $m_5 = 0$

ج) شیب خط $y=x$: $m_6 = 1$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 ، m_2 ، ... و m_6 در نظر بگیرید.

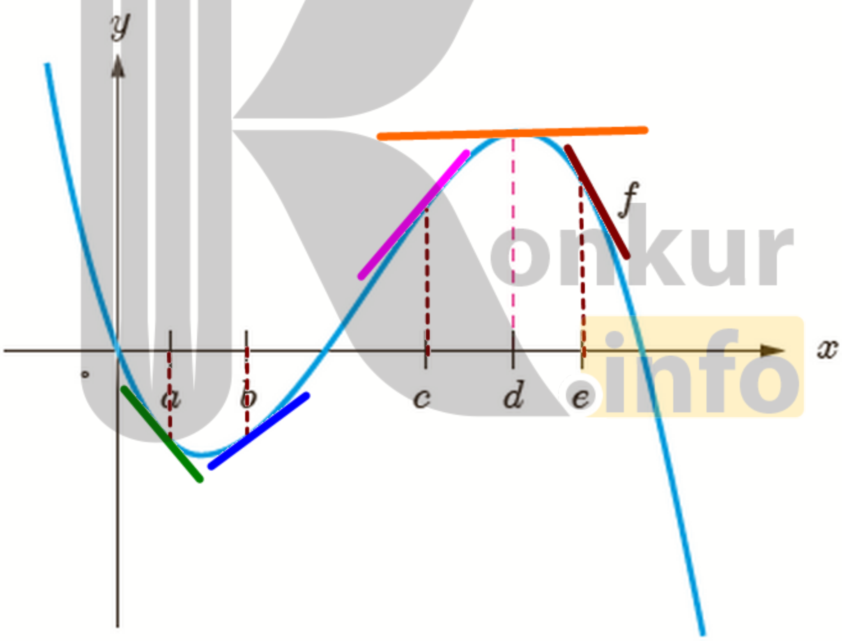
هرچه به طرف yها نزدیک‌تر، شیب بیشتر



$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a, b, c, d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲



۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

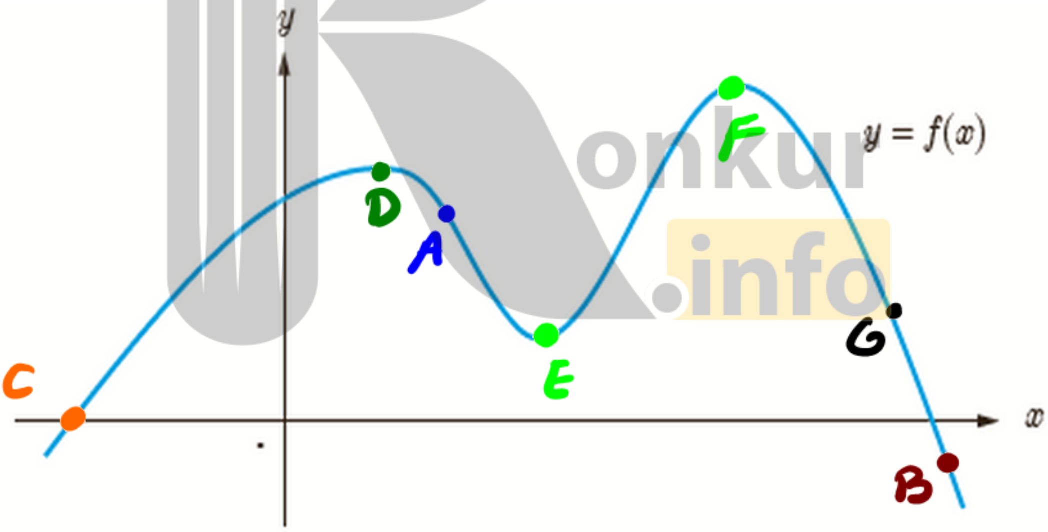
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=x^۳-۲$ ، $f'(-۱)$ را به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^۳-۲-(-۳)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^۳+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^۲-x+1)}{\cancel{x+1}}$$

$$=(-1)^۲-(-1)+1=1+1+1=۳$$

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. نادرست

ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) نادرست

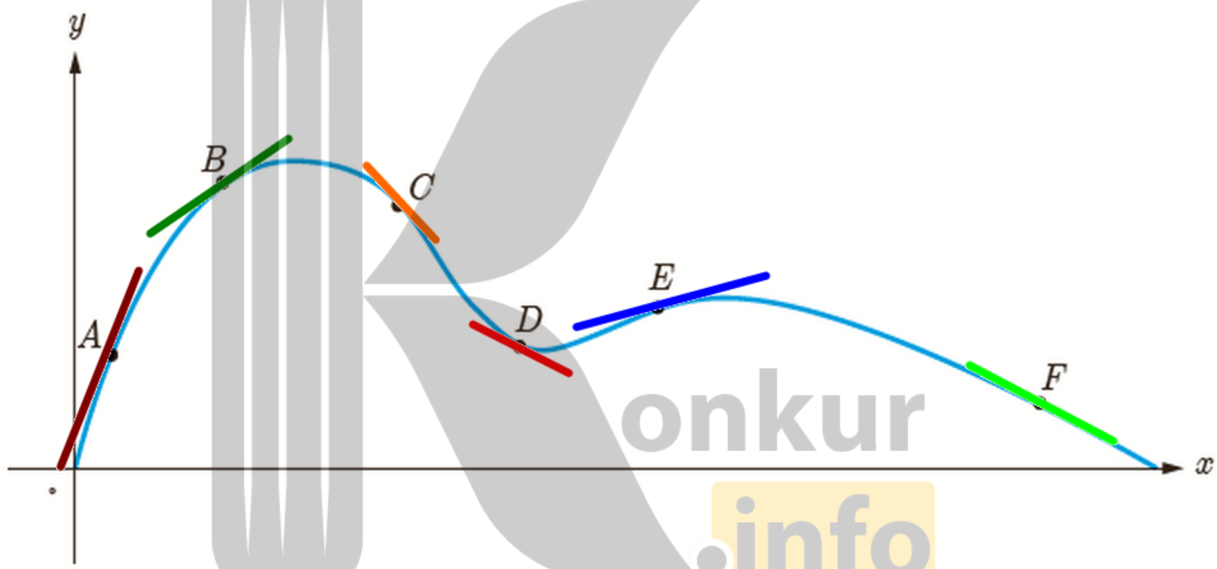
پ) $m_E<m_B<m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط F، D و C منفی است. درست

ث) $m_F<m_D<m_C$ نادرست

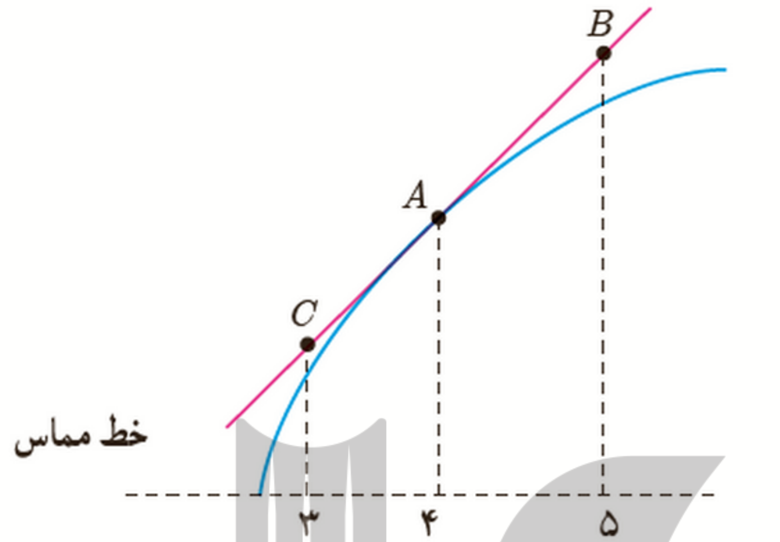
درست این قسمت: $m_C<m_D<m_F$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$ درست



۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A, B و C را بیابید.

m مماس



$A(۴, f(۴)) \longrightarrow A(۴, ۲۵)$

معادله خط مماس بر f در A:

$y - ۲۵ = ۱/۵(x - ۴)$

$y = ۱/۵x - ۶ + ۲۵ \longrightarrow y = ۱/۵x + ۱۹$

$x_B = ۵ \xrightarrow[B]{\text{روی خط مماس}} y_B = ۱/۵ \times ۵ + ۱۹ = ۷/۵ + ۱۹ = ۲۶/۵$

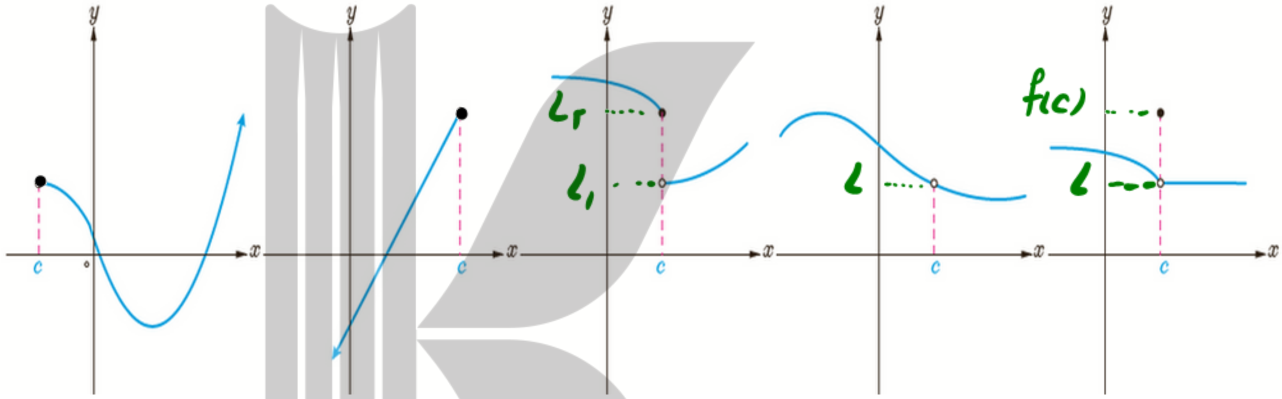
$x_C = ۳ \xrightarrow[C]{\text{روی خط مماس}} y_C = ۱/۵ \times ۳ + ۱۹ = ۴/۵ + ۱۹ = ۲۳/۵$

یادآوری :

تعریفِ پیوستگی : تابع f را در $x=c$ پیوسته گوئیم هرگاه : $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$

یعنی مقادیرِ $f(c)$ و $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود و باهم برابر باشند.

مثال :



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث)

الف) $\lim_{x\to c^-} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

ب) $\lim_{x\to c^+} f(x)$ موجود نیست پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در $x=c$ پیوسته نیست

پ) $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$ پس $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد پس تابع در c پیوسته نیست

ت) $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد ولی $f(c)$ موجود نیست پس تابع در c پیوسته نیست.

ث) $\lim_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجودند ولی باهم برابر نیستند پس تابع در c پیوسته نیست

مشتق یک طرفه :

$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ یا $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را مشتق راست تابع f در $x=a$ می‌نامیم و با $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم.

$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ یا $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را مشتق چپ تابع f در $x=a$ می‌نامیم و با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال : مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases}4x+1 & x\geq 2\\ x^2+5 & x<2\end{cases}$ را در $x=2$ بیابید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x+1-\overset{4\times2+1}{9}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+5-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2^-}x+2=4$$

دقت کنید مقدار $f(2)$ برای مشتق چپ و راست از ضابطه اول بدست می‌آید.

حال می‌خواهیم وارد بحث مشتق‌پذیری شویم، یعنی بدانیم که تابع در چه نقطه‌ای مشتق دارد و در چه نقطه‌ای مشتق ندارد.

تعریف: تابع f را در a مشتق‌پذیر می‌گوییم اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد.

تذکر: وجود $f'(a)$ به این معناست که مشتق‌های چپ و راست موجود، متناهی و برابر باشند.

قضیه: اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است.

اثبات: بنا به فرض f در a مشتق‌پذیر است پس $f'(a)$ وجود دارد یعنی:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ وجود دارد

شرط موجود بودن $f'(a)$ برقرار است زیرا در غیر این صورت حد بالا بی‌معناست.

حد مقابل را در نظر بگیرید:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\left((x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=0\times f'(a)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0\rightarrow \lim_{x\to a}f(x)-\underbrace{\lim_{x\to a}f(a)}_{\to f(a)}=0\rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

نتیجه: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد در a مشتق‌پذیر هم نیست.

تذکر: عکس قضیه بالا درست نیست. یعنی اگر f در $x=a$ پیوسته باشد لزوماً در a مشتق‌پذیر نیست.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<3 \\ 8-x & x\geq 3 \end{cases}$ را در $x=3$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}(8-x) = 5 \quad , \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3}(2x-1) = 5 \quad , \quad \underline{f(3)=5}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 5$$ پس تابع f در 3 پیوسته است

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{8-x-5}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-1-5}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

$$f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

پس تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}3x & x\geq 1\\ x^3 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$\lim\limits_{x\to1^+} 3x = 3$, $\lim\limits_{x\to1^-} x^3 = 1$, $f(1)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)$ وجود ندارد

پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست لذا مشتق‌پذیر هم نخواهد بود.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+1 & x\geq 2\\ x^2+b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد، a و b را بیابید.

شرط پیوستگی: $\lim\limits_{x\to2^+} ax+1 = 2a+1$, $\lim\limits_{x\to2^-} x^2+b = 4+b$, $f(2)=2a+1$

$$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b=2a-3$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{ax+1-(2a+1)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{ax+\cancel{1}-2a-\cancel{1}}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{a(x-2)}{x-2}=a$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+\overset{2a-3}{b}-(2a+1)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+\cancel{2a}-3-\cancel{2a}-1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=2+2=4$$

$$f'_+(2)=f'_-(2)\Rightarrow a=4 \longrightarrow b=2\times4-3=8-3=5$$

$a=4$, $b=5$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$. نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

تابع در $x=0$ پیوسته است $\longrightarrow$ $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

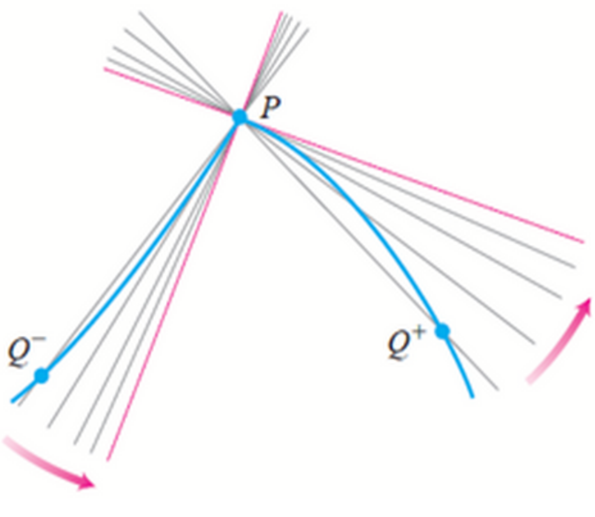
$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow$ $f'(0)$ موجود نیست.

مشتق ناپذیری

دسته اول: همانطور که در جلسه قبل دیدیم تابع در نقاطی که در آن ها پیوسته نیست مشتق پذیر نیست.

دسته دوم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد، چنانچه مشتق های چپ و راست موجود، متناهی و نابرابر باشند و یا حداکثر یکی از مشتق های چپ و راست نامتناهی باشد، f در a مشتق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه **گوشه ای** یا زاویه دار می گوییم.

تذکر: در نقاط گوشه ای دو نیم مماس بر تابع قابل رسم است.



مثال: به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=2$ بررسی کنید.

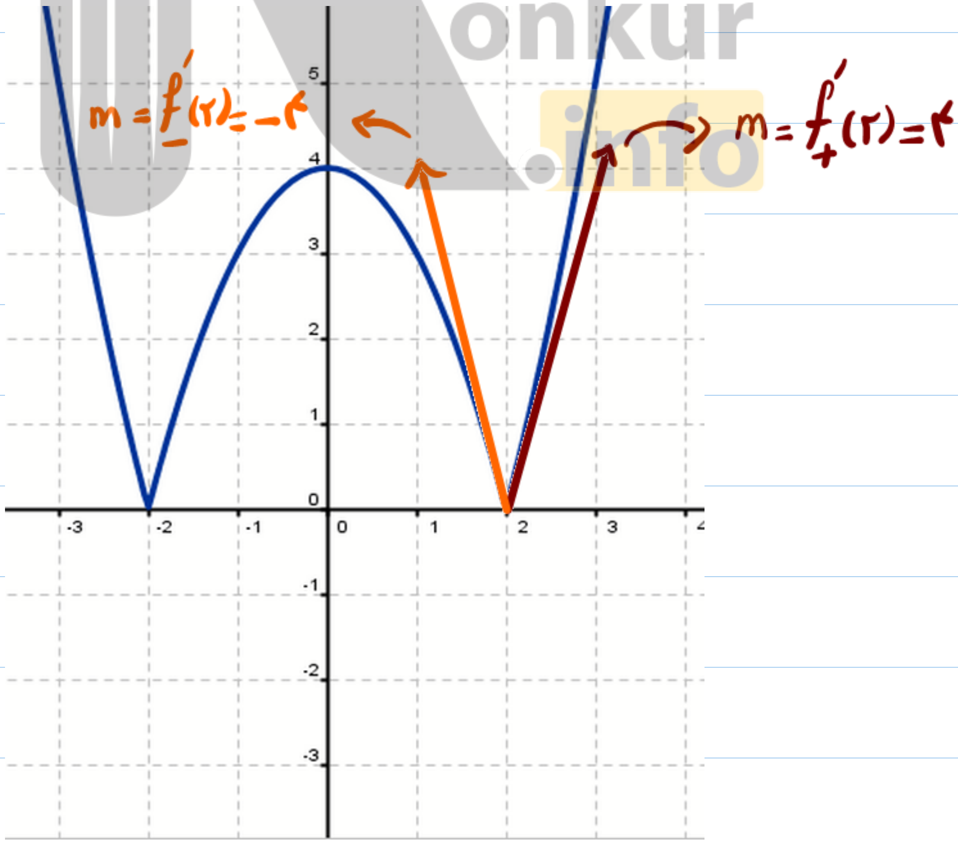
$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4|-\overset{f(2)}{0}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

x^2-4	$+$	-2	$-$	2	$+$
		0		0	

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)}{x-2}=\lim -\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=-4$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2)$ پس تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست و این نقطه یک نقطه گوشه‌دار است.



مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ در $x=0$ نقطه گوشه‌ای دارد.

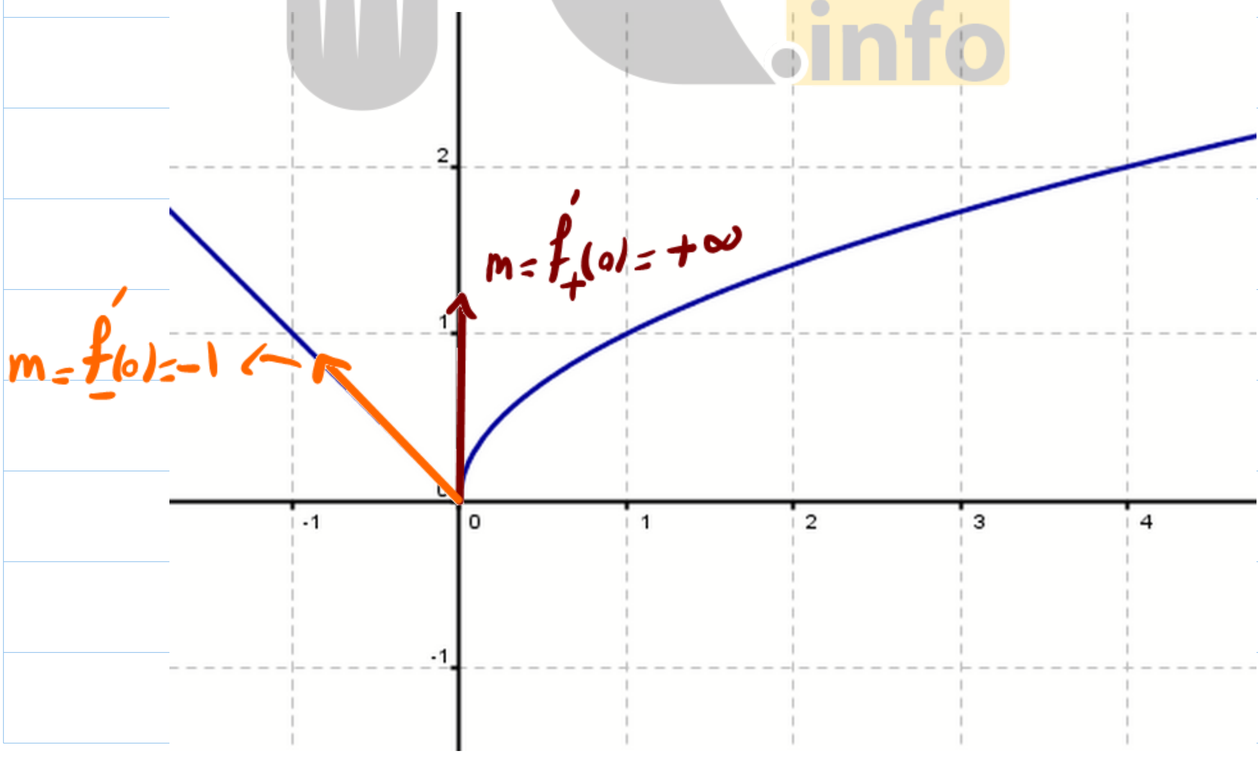
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\overset{f(0)}{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x}=-1$$

نامتناهی

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ پس f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست ولی دارای نقطه گوشه‌ای است



مثال : معادله نیم‌مماس‌های قابل رسم بر تابع $f(x)=|x|\sqrt{x+3}$ را در $x=0$ بدست آورید.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|\sqrt{x+3}-\overset{f(0)}{0}}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{x+3}}{x}=\sqrt{3}$$

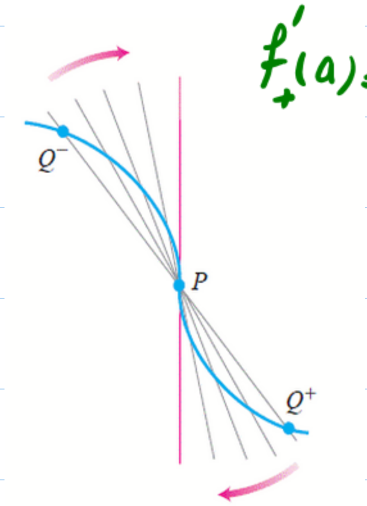
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sqrt{x+3}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sqrt{x+3}}{x}=-\sqrt{3}$$

نیم مماس راست : $y-0=\sqrt{3}(x-0)\longrightarrow y=\sqrt{3}x$ $\quad A(0,0)$

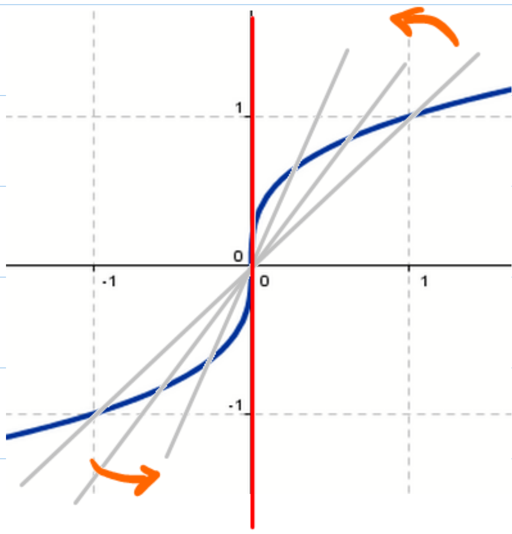
نیم مماس چپ : $y-0=-\sqrt{3}(x-0)\longrightarrow y=-\sqrt{3}x$

دسته سوم : اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در a نامتناهی و هم علامت باشند، f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست.

نکته : در این حالت تابع در این نقطه دارای مماس قائم با معادله $x=a$ است.



$f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$



$f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty$

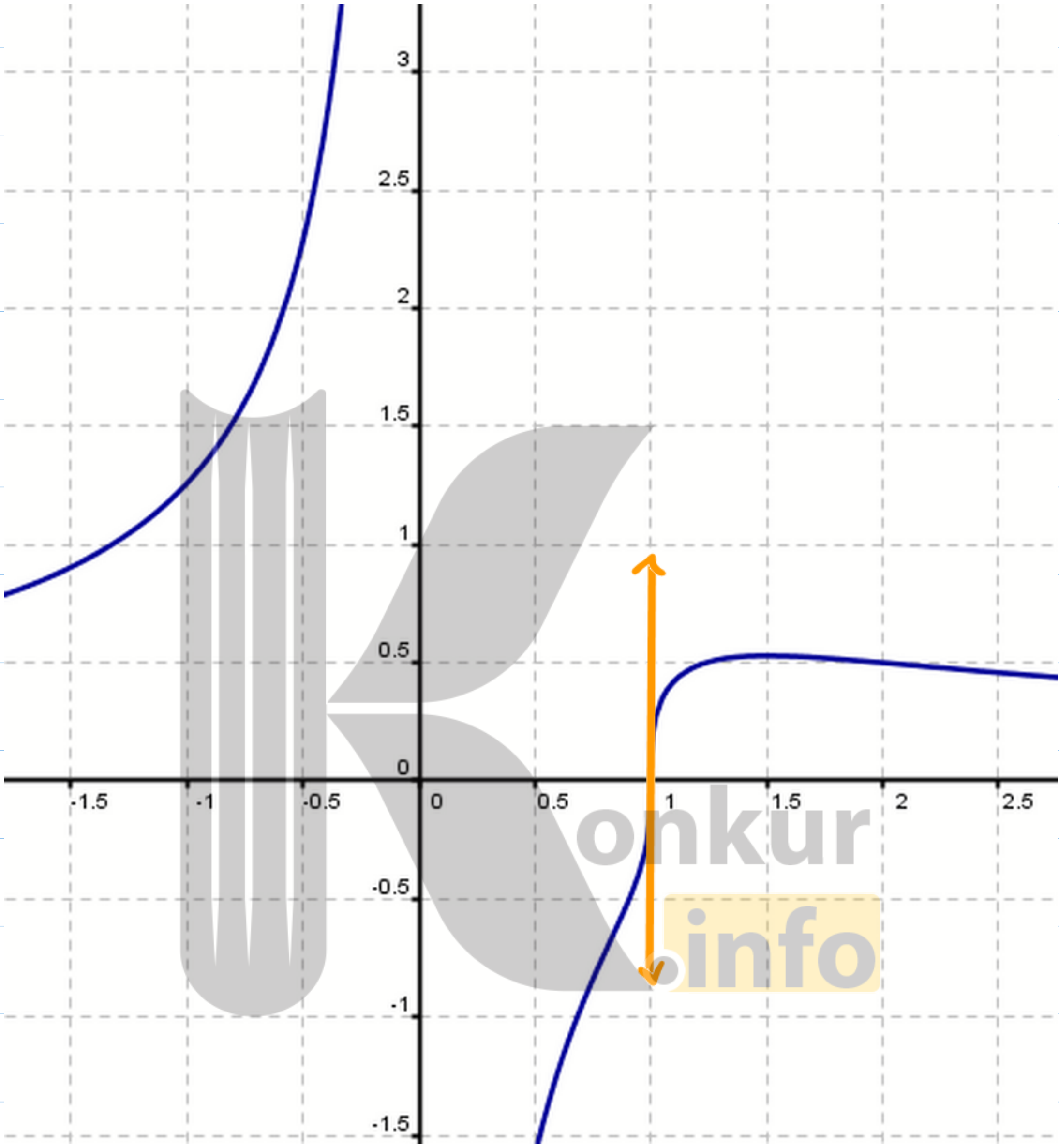
مثال: مشتق پذیری تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x(x-1)}\times\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{\sqrt[3]{(x-1)^3}}}{x\cancel{(x-1)}\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{1\times 0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

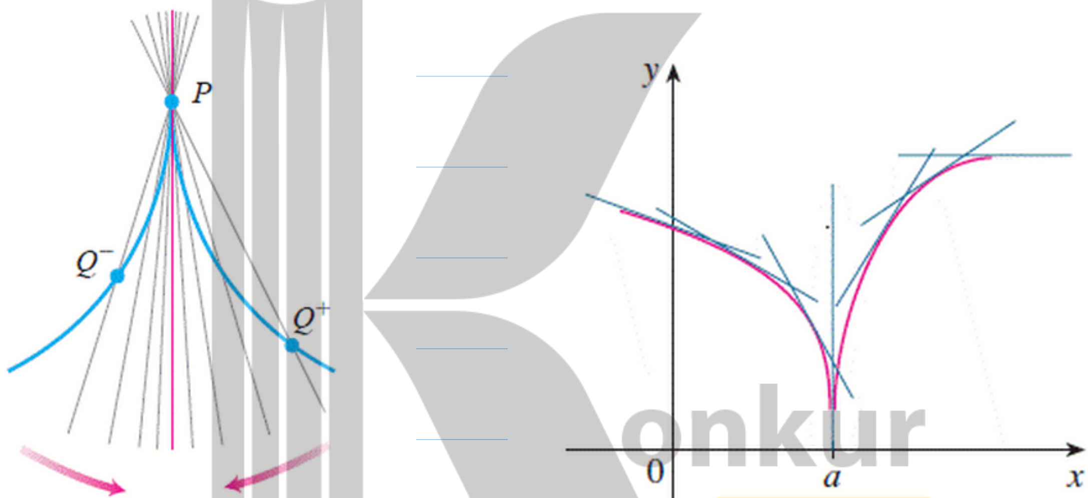
به طریق مشابه: $f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)}{x(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{1\times 0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

پس تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

دسته چهارم: اگر f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در a نامتناهی و غیرهم علامت باشند، f در a مشتق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه **بازگشت** گفته می‌شود.

نکته: در نقطه بازگشت مماس قائم بر تابع قابل رسم است.



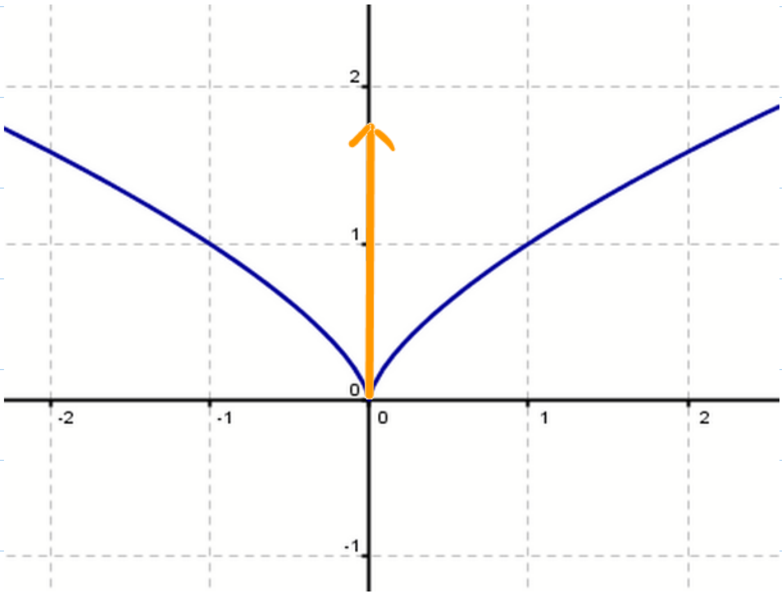
$f'_-(a)=+\infty$, $f'_+(a)=-\infty$ $f'_-(a)=-\infty$, $f'_+(a)=+\infty$

مثال: نشان دهید تابع $y=\sqrt[3]{x^2}$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\times\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

به طور مشابه

$$f'_-(a)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

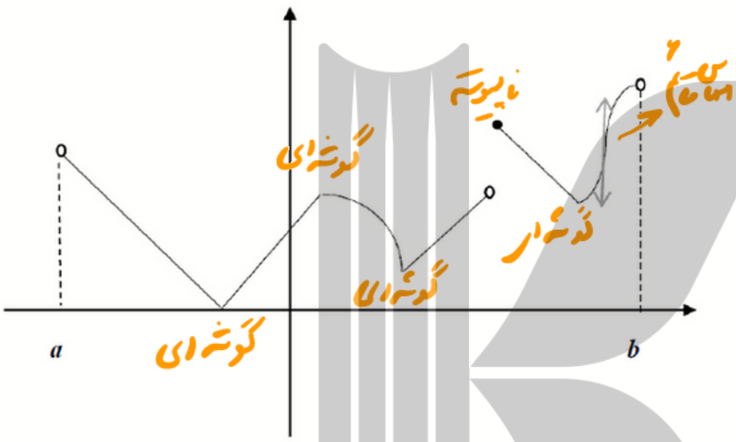


$y=\sqrt[3]{x^2}$

مثال: نمودار تابع f با دامنه (a,b) به شکل مقابل است. این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

۱) چهار نقطه ۲) پنج نقطه

۳) شش نقطه ۴) هفت نقطه

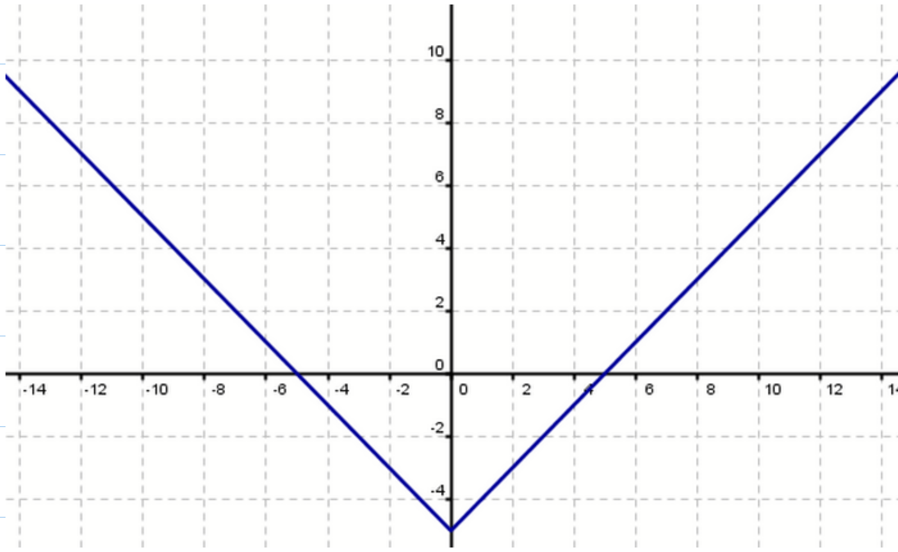


مثال: توابع زیر در چند نقطه مشتق پذیر نیستند.

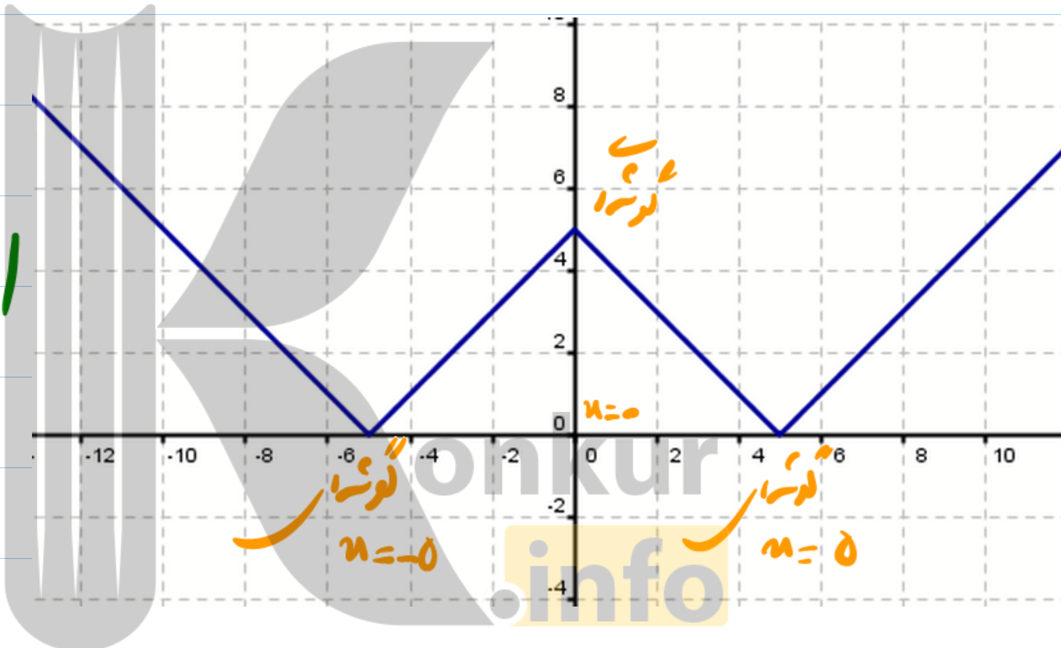
الف) $f(x)=||x|-5|$

ب) $g(x)=|2x-|x-3||$

الف) $f_1(x)=|x|-5$



$f(x)=\big||x|-5\big|$



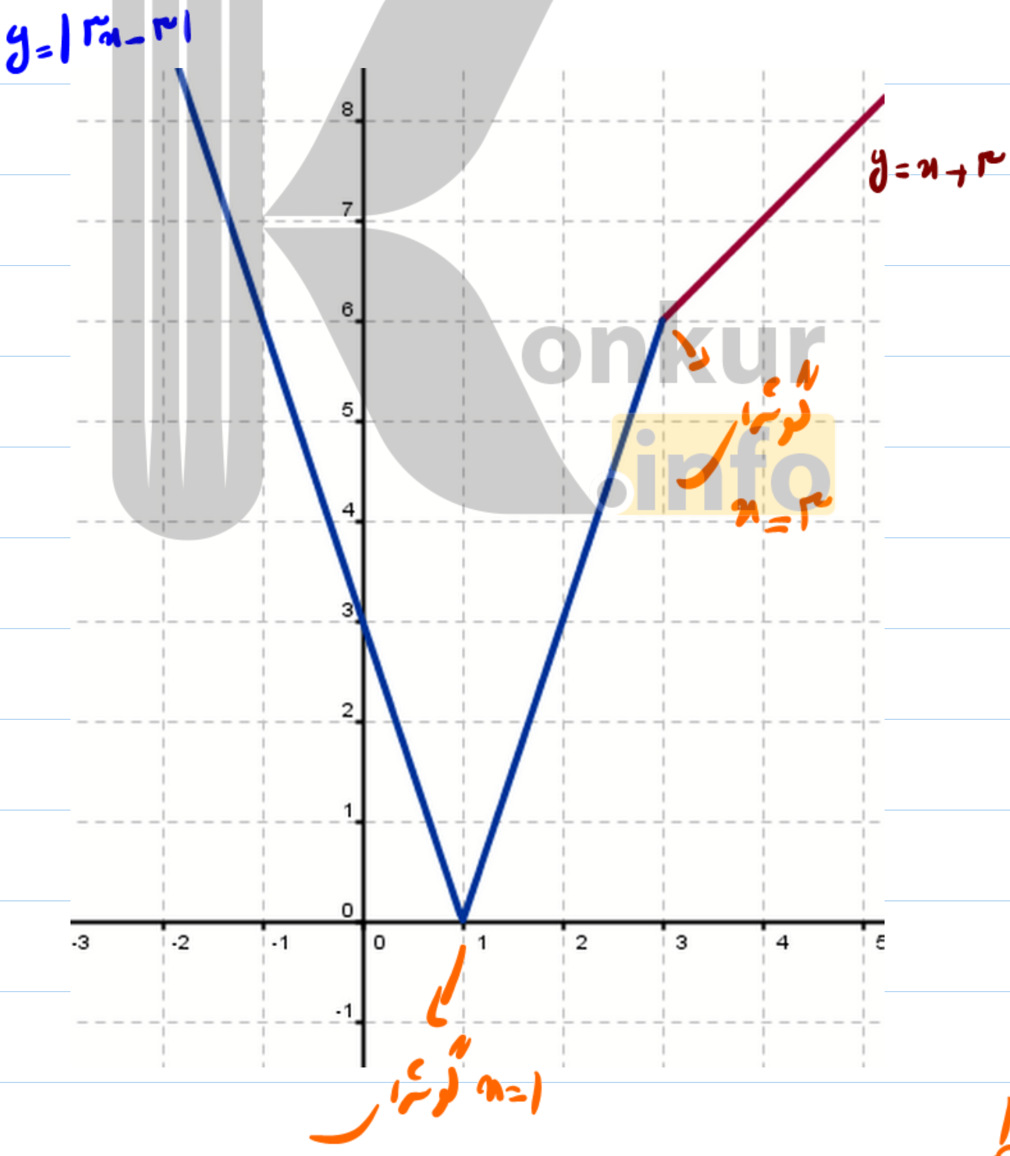
در سه نقطه

ب) $g(x) = \left| 2x - |x-3| \right|$

$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x+3| = x+3$

$x < 3 \rightarrow g(x) = \left| 2x - (-(x-3)) \right| = |2x + x - 3| = |3x-3|$

$$g(x) = \begin{cases} |3x-3| & x \leq 3 \\ x+3 & x > 3 \end{cases}$$



در دو نقطه

تابع مشتق :

تعریف: تابع مشتق f که با f' نمایش داده می‌شود تابعی است که دامنه‌اش مجموعه همه نقاطی است که تابع در آنها مشتق‌پذیر است و مقدار آن در نقطه x از دامنه‌اش برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال : تابع مشتق، $f(x) = \sqrt{x}$ را بدست آورید .

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\underbrace{\sqrt{x+h}}_{0}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

همانطور که تا حال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، عملی زمان بر است. مانند آنچه در مثال قبل برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بدست آوردیم، می‌توانیم قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آنها مشتق توابع را بیابیم.

قواعد مشتق گیری

۱.مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال:

$f(x)=5 \rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=\sqrt{7} \rightarrow f'(x)=0$

۲.مشتق تابع $f(x)=ax^n$ برابر است با حاصل ضرب ،ضریب عددی در توان متغیر در متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی: $f'(x)=anx^{n-1}$

مثال:

$y=x \rightarrow y'=1\times1\times x^{1-1}=1\times1\times x^0=1\times1\times1=1$

$y=4x \rightarrow y'=4x^0=4$

$y=7x^5 \rightarrow y'=35x^4$

$y=2x^{\frac{1}{4}} \rightarrow y'=\frac{2}{4}x^{\frac{1}{4}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$

حالت خاص:

$(x)'=1$

$(ax)'=a$

۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

مثال : $f(x)=9x^6-2x^2+\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}+7x-\sqrt{2}$

$f'(x)=54x^5-4x+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+7+0$

$f'(x)=54x^5-4x+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}+7$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود اولی یعنی : $(f\times g)'(x)=f'g+g'f$

مثال : $f(x)=(\sqrt{7}x+2)(x^3+6x^2+x)$

$f'(x)=(\sqrt{7})(x^3+6x^2+x)+(3x^2+12x+1)(\sqrt{7}x+2)$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

مثال : $f(x)=\frac{7x^3-9}{x^4+2x}$

$f'(x)=\frac{(21x^2)(x^4+2x)-(4x^3+2)(7x^3-9)}{(x^4+2x)^2}$

حالت خاص :

۱) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

۲) $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

۳) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال :

$$y = \frac{10}{x} \rightarrow y' = -\frac{10}{x^2}$$

$$y = \frac{2x+6}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{\overbrace{2(-4)}^{-8} - \overbrace{6(3)}^{-18}}{(3x-4)^2} = \frac{-26}{(3x-4)^2}$$

۶.مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود رادیکال یعنی اگر $f(x)=\sqrt{u}$ که u تابع برحسب x باشد آنگاه $f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال :

$$f(x) = \sqrt{3x^2-x+1} \rightarrow f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x+1}}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$h(x) = \sqrt{(x^3+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}$$

$$h'(x) = \frac{(3x^2+2)(1-9x+\frac{1}{x}) - (-9-\frac{1}{x^2})(x^3+2x)}{2\sqrt{(x^3+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}}$$

حالت خاص $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷.مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود رادیکال به توان دو یعنی اگر $f(x)=\sqrt[3]{u}$ که u تابع برحسب x باشد آنگاه

$$f'(x)=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال:

$$f(x)=\sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x)=\frac{\frac{2-(-8)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص:

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی :

$$(au^n)'=anu^{n-1}u'$$

مثال:

$$y=6(3x^4-7x+1)^5$$

$$y'=30(3x^4-7x+1)^4(12x^3-7)$$

$$y = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}x^2\right)^3$$

$$y' = 3\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2}\,x^2\right)^2 \times \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{2}\,x\right)$$

۹. مشتق توابع مثلثاتی:

مشتق سینوس یک کمان برابر است با مشتق کمان در کسینوس همان کمان.

مشتق کسینوس یک کمان برابر است با منهای مشتق کمان در سینوس همان کمان.

مشتق تانژانت یک کمان برابر است مشتق کمان در یک بعلاوه مربع تانژانت همان کمان.

$$(\sin u)' = u'\cos u$$

$$(\cos u)' = -u'\sin u$$

$$(\tan u)' = u'(1+\tan^2 u)$$

مثال:

$$y = \sin(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y' = \left(4 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos(4x + 5\sqrt{x})$$

$$y = \cos\left(\frac{2x+1}{x^2-4x}\right)$$

$$y' = -\frac{2(x^2-4x)-(2x-4)(2x+1)}{(x^2-4x)^2}\sin\left(\frac{2x+1}{x^2-4x}\right)$$

$y = \tan(2x + \frac{1}{x})$

$y' = (2 - \frac{1}{x^2})(1 + \tan^2(2x + \frac{1}{x}))$

مثال : مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱) $f(x) = (x^2+1)^3(5x-1)$

$f'(x) = 3(x^2+1)^2(2x)(5x-1) + (5)(x^2+1)^3$

۲) $g(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

۳) $f(x) = (\frac{x^2}{3x-1})^5$

$f'(x) = 5(\frac{x^2}{3x-1})^4 \times \frac{2x(3x-1)-(3)x^2}{(3x-1)^2}$

۴) $g(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

$$g'(x)=\left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\right)(x^{۳}+۱)+(۳x^{۲})(\sqrt{۳x+۲})$$

۵) $f(x)=\dfrac{۴\sin\frac{x}{۲}}{x^{۲}+\sqrt{x}}$ $\quad \frac{x}{۲} \to \frac{۱}{۲}x$

$$f'(x)=\frac{\left(۴\times\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}\right)(x^{۲}+\sqrt{x})-\left(۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)\left(۴\sin\frac{x}{۲}\right)}{(x^{۲}+\sqrt{x})^{۲}}$$

۶) $g(x)=\sin^{۳}(۵x)$

$$g'(x)=۳\sin^{۲}(۵x)\times ۵\cos ۵x$$

۷) $g(x)=۳\tan^{۲}x+\cos x^{۲}$

$$g'(x)=۶\tan x(۱+\tan^{۲}x)+(-۲x)\sin x^{۲}$$

۸) $g(x)=\dfrac{۱-\sin x}{\cos x}$

$$g'(x)=\frac{(-\cos x)(\cos x)-(-\sin x)(۱-\sin x)}{\cos^{۲}x}$$

مثال: اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(۳f+۲g)'(۱)$ برابر .... است.

نکته: $(kf)'=kf'$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)$$

$$=۳\times۳+۲\times۵=۹+۱۰=۱۹$$

مثال: اگر $f(x)=۳x^۲-۲x+۱$ باشد، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

یادآوری نوشتن معادله خط مماس بر f در نقطه‌ای روی آن :

۱- تکمیل مختصات نقطه تماس : $(A, f(A))$

۲- $m_{\text{مماس}}=f'(A)$

۳- معادله خط مماس : $y-f(A)=m(x-A)$

$$f'(x)=۶x-۲ \rightarrow f'(۲)=۶(۲)-۲=۱۰ \rightarrow m=f'(۲)=۱۰$$

$$x=۲ \rightarrow y=f(۲)=۳(۲)^۲-۲(۲)+۱=۱۲-۴+۱=۹ \rightarrow (۲,۹)$$

$$y-۹=۱۰(x-۲) \rightarrow y=۱۰x-۲۰+۹ \rightarrow y=۱۰x-۱۱$$

مثال: اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۱$، $g(۲)=-۳$ و $g'(۲)=۲$، مقادیر $(fg)'(۲)$ و $(f+g)'(۲)$ را به دست آورید.

$$(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+g'(۲)f(۲)=۱\times(-۳)+۲\times۳=-۳+۶=۳$$

$$(f+g)'(۲)=f'(۲)+g'(۲)=۱+۲=۳$$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ x^2-1 & x\geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

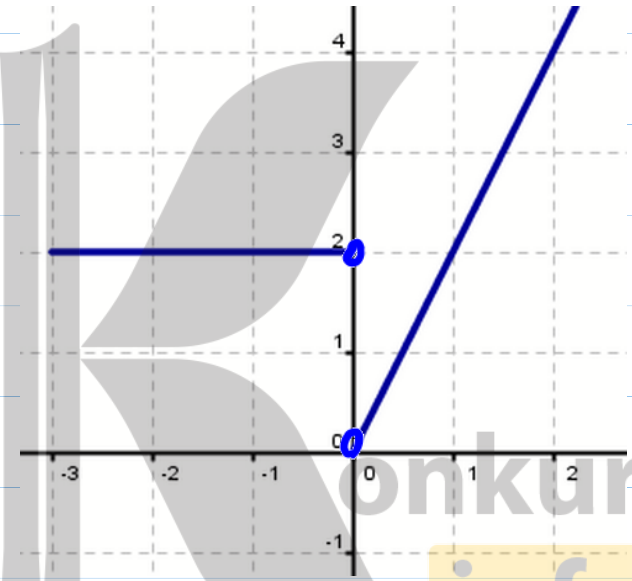
ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ \text{وجود ندارد} & x=0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$$

$f'_+(0)=2\times 0=0$ و $f'_-(0)=2 \Rightarrow 2\neq 0$ تابع در صفر مشتق‌پذیر نیست

$f'(x)$

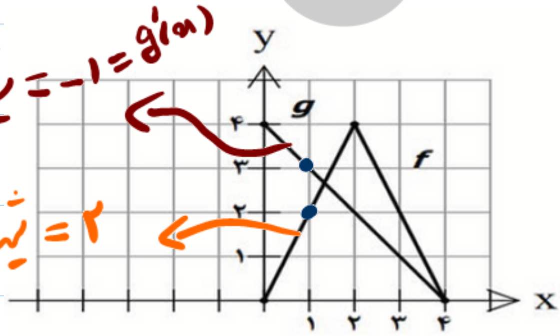


مثال: نمودار تابع g,f را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

اگر $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد ، $h'(1)$ را بیابید.

شیب $= -1 = g'(x)$

$f'(x) =$ شیب $= 2$



$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع f و g شکل دو خط و یک خط است ، شیب خط‌ها همان تابع مشتق می‌شود.

نتیجه: $g(x)=ax+b \longrightarrow g'(x)=a$

$$h'(1)=\frac{2\times 3-(-1)\times 2}{3^2}=\frac{6+2}{9}=\frac{8}{9}$$

مثال: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$، کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ✓ ۴) $\frac{5}{6}$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4)=\frac{\frac{1}{4}(5-8)+2\times 3}{(5-8)^2}=\frac{-\frac{3}{4}+6}{9}=\frac{\frac{-3+24}{4}}{9}=\frac{\frac{21}{4}}{9}$$

$$=\frac{21}{4\times 9}=\frac{7}{12}$$

مثال: مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$، در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$ ✓

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-x)^3\left((2x+2)(x^2-x)-4(2x-1)(x^2+2x)\right)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)-4(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^4}$$

$$f'(2)=\frac{(6)(2)-4(3)(8)}{2^4}=\frac{12-72}{16}=\frac{-60}{16}=\frac{-15}{4}$$

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & ; x\leq -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & ; x>-2\end{cases}$، در $x=-2$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ✓ ۴) $\frac{2}{3}$

شرط پیوستگی:
$$\lim_{x\to -2^+} -\frac{1}{2}x^2+bx+c=-2-2b+c$$

$$\lim_{x\to -2^-}\sqrt{5-2x}=\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3=f(-2)$$

$$\Rightarrow -2-2b+c=3 \longrightarrow -2b+c=5 \qquad (1)$$

برابری مشتق چپ و راست:
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x<-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$$

$$f'_+(-2)=-(-2)+b=2+b$$

$$f'_-(-2) = \frac{-2}{2\sqrt{5+4}} = \frac{-1}{3}$$

$$f'_+(-2) = f'_-(-2) \Rightarrow 2+b = -\frac{1}{3} \rightarrow b = -\frac{1}{3} - 2 = \frac{-7}{3}$$

شرط پیوستگی

$$(1) \rightarrow -2b + c = 5 \rightarrow -2\left(-\frac{7}{3}\right) + c = 5$$

$$c = 5 - \frac{14}{3} \rightarrow c = \frac{1}{3}$$

مثال: مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[\overset{m}{3}]{\left(\frac{2x - x^2}{3x+5}\right)^{2 \rightarrow n}}$ ، در نقطهٔ $x = -2$ ، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ✓

نکته:

$$\left(\sqrt[m]{u^n}\right)' = \frac{n u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$f'(x) = \frac{2\,\frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x - x^2)}{(3x+5)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x - x^2}{3x+5}\right)^{3-2}}}$$

$$f'(-2) = \frac{2\,\frac{6(-1) - 3(-8)}{1}}{3\sqrt[3]{\frac{-8}{-1}}} = \frac{2(-6+24)}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2 \times 18}{6} = 6$$

مشتق تابع مرکب : (قاعده زنجیری)

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه : $(fog)'(x) = g'(x) f'(g(x))$

نماد دیگر : $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال : اگر $f(x) = x^3 - x + 1$ و $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار $(gof)'(1)$ را بیابید.

$(gof)'(1) = f'(1)\, g'(f(1))$

$f'(x) = 3x^2 - x \rightarrow f'(1) = 3 - 1 = 2 \quad , \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$

$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$

$(gof)'(1) = 2 \times (-2) = -4$

مثال : اگر $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) -2 ✓ ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

$(fog)'(2) = 6 \rightarrow g'(2)\, f'(g(2)) = 6 \qquad (1)$

$g'(x) = \dfrac{-2-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \dfrac{-3}{1} = -3$

$$g(2)=\frac{2\times 2+1}{2-1}=5$$

$$\xrightarrow{(1)} \quad (-3)\,f'(5)=6 \rightarrow f'(5)=\frac{6}{-3}=-2$$

مشتق مرتبه دوم :

اگر تابع مشتق $y'=f'(x)$ مشتق پذیر باشه ، مشتق مرتبه دوم را با $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از مشتق اول یعنی $f'(x)$ یک بار دیگر مشتق می‌گیریم .

مثال : مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x)=5x^4-6x^3+\sqrt{2}x$

$$f'(x)=20x^3-18x^2+\sqrt{2}$$

$$f''(x)=60x^2-36x$$

ب) $f(x)=\sqrt{3x+1} \rightarrow f(x)=(3x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}-1}(3)=\frac{3}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=(\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})(3x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(3)=-\frac{9}{4}(3x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{4(3x+1)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{(3x+1)^3}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

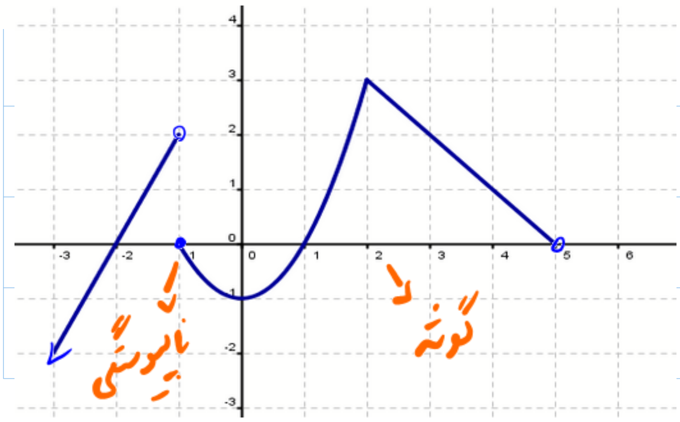
الف) تابع f روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

پ) مشتق پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ ، $(a,b]$ ، $(-\infty,b)$ ، $(-\infty,b]$ و $(a,+\infty)$ ، $[a,+\infty)$ به طور مشابه تعریف می‌شود.

کار در کلاس

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.



$[-1,1]$: مشتق پذیر

$(2,5)$: مشتق پذیر

$[-2,0]$ مشتق پذیر نیست زیرا در $x=-1$ مشتق پذیر نیست

آهنگ متوسط و لحظه‌ای تغییر

اگر ماشینی مسافت ۱۸۰ کیلومتر را در ۲ ساعت طی کند سرعت متوسط آن $\frac{180}{2} = 90$ کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمانی به طور متوسط در هر ساعت ۹۰ کیلومتر مسافت طی می‌کند. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود.

یا وقتی می‌گوییم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه $[0,6]$ ماه، دو سانتی‌متر بر ماه است یعنی در طی این ۶ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی‌متر در هر ماه است.

به جز مثال‌های بالا، در مطالعه پدیده‌های گوناگون، کمیت‌های وجود دارند که تغییر یکی وابسته به تغییرات دیگری است مانند تغییرات دما در زمان‌های مختلف، تغییر مساحت یک دایره وقتی شعاع آن تغییر می‌کند یا تغییر جمعیت در زمان‌های مختلف.

اگر رابطه بین دو متغیر x و y به صورت $y = f(x)$ باشد، نسبت تغییرات y (متغیر وابسته) به تغییرات x (متغیر مستقل) را آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x می‌گوییم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

تعریف: آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

شیب خط قاطع

تذکر: اگر بازه را به صورت $[x_1, x_1+\Delta x]$ بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط تغییر به شکل زیر می شود

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

تعریف: آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در $x=x_1$ برابر است با مشتق تابع f در x_1.

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

شیب خط مماس

مثال: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(7)-f(2)}{7-2}=\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{2+2}}{5}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

مثال: جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t)=-2t^2+10t$ می باشد. سرعت لحظه ای این جسم را در $t=2$ به دست آورید.

$$f'(t)=-4t+10 \longrightarrow f'(2)=-4(2)+10=-8+10=2$$

مثال: یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی $[۳,۴]$ چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t=۳$ چقدر است؟

الف) $\dfrac{x(۴)-x(۳)}{۴-۳}=\dfrac{\sqrt{۴}+۲(۴)^۳-(\sqrt{۳}+۲(۳)^۳)}{۱}=۲+۱۲۸-\sqrt{۳}-۵۴$
$=۷۶-\sqrt{۳}$

ب) $x'(t)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲ \to x'(۳)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۶(۳)^۲=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۵۴$

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

سرعت متوسط $=\dfrac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\dfrac{(۵^۲-۵+۱۰)-(۰^۲-۰+۱۰)}{۵}=\dfrac{۳۰-۱۰}{۵}=\dfrac{۲۰}{۵}=۴$

$f'(t)=$ سرعت متوسط $=۴ \to ۲t-۱=۴ \to ۲t=۵ \to t=۲/۵$

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازهٔ $[۵ , ۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$ ✓

آهنگ متوسط $=\dfrac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\dfrac{\sqrt{۲۱-۳۶+۲۴}-\sqrt{۲۱-۲۵+۲۰}}{۱}=۳-۴=-۱$

$f'(x)=\dfrac{\overset{-۲(x-۲)}{-۲x+۴}}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=-۱ \to \sqrt{۲۱-x^۲+۴x}=x-۲$

به توان ۲ $\longrightarrow 21 - x^2 + 4x = x^2 - 4x + 4$

$\longrightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(2)(-17) = 64 + 136 = 200$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} < \begin{matrix} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \; \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \; \times \end{matrix}$$

مثال: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳ ۲) ۰/۰۴ ✓ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۶

آهنگ متوسط $= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - \left(\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1}\right)}{4}$

$$= \frac{3 + \frac{1}{5} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{5}}{4} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

آهنگ لحظه‌ای: $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + \frac{-1}{(x+1)^2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25 - 8}{50} = \frac{17 \times 2}{50 \times 2} = \frac{34}{100}$$

۰/۳۴ − ۰/۳ = ٪۴