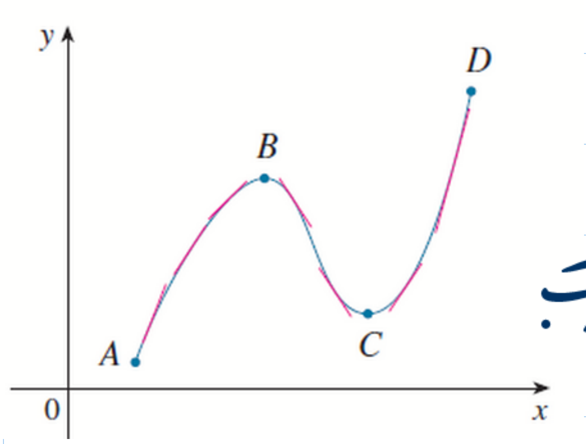
در فصل اول با توابع یکنوا و غیریکنوا آشنا شدید و یکنوایی تابع را با توجه به نمودارش بررسی می‌کردیم.



به نمودار مقابل و خط‌های مماس رسم شده دقت کنید:

در بازه‌هایی که تابع صعودی است شیب خط‌های مماس مثبت

و در بازه‌هایی که تابع نزولی است شیب خط‌های مماس منفی است.

۱) آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

به عبارت دیگر برای بررسی یکنوایی تابع مشتق‌پذیر f، از آن مشتق می‌گیریم و مشتق را با رسم جدول، تعیین علامت می‌کنیم. به این جدول تعیین علامت، جدول تغییرات تابع می‌گوییم. اگر علامت مشتق در بازه‌ای مثبت باشد، تابع در آن بازه اکیداً صعودی و اگر علامت مشتق در بازه‌ای منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است و بعکس.

مثال: یکنوایی تابع $y = x^3 - 3x^2 + 2$ را بررسی کنید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \; \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(2, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی و در بازه $(0, 2)$ تابع نزولی است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ در بازه $[a,b]$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ را بدست آورید.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

تابع در $[-1, 1]$ صعودی اکید $\Rightarrow a = -1$ و $b = 1 \Rightarrow b - a = 1 + 1 = 2$

نکته: در توابع پیوسته اگر مشتق تابع در نقاطی جدا از هم در یک بازه صفر شود باز هم تابع روی آن بازه می‌تواند اکیداً صعودی یا نزولی باشد.

مثال: یکنوایی تابع $f(x)=x^3$ را بررسی کنید.

$$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

تابع در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

مثال: به ازای چند مقدار صحیح m تابع $f(x)=-x^3+mx^2-12x+1$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است؟

$$f'\leq 0 \Rightarrow f'(x)=\underbrace{-3}_{<0}x^2+2mx-12\leq 0$$

$$\Delta\leq 0 \Rightarrow (2m)^2-4(-3)(-12)\leq 0$$

$$4m^2-144\leq 0 \Rightarrow m^2\leq 36 \Rightarrow -6\leq m\leq 6$$

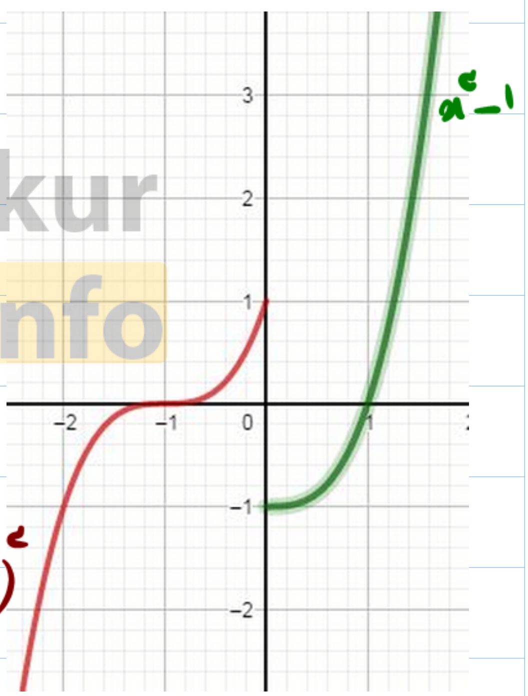
$$m\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$$

نکته: آزمون یکنوایی برای توابع پیوسته برقرار است. پس در توابع کسری، در بازه‌هایی می‌توانیم از این آزمون استفاده کنیم که شامل ریشه مخرج نباشد. در توابع چندضابطه‌ای هم در نقاط مرزی همین نکته را داریم.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\geq 0 \\ (1+x)^3 & x<0 \end{cases}$ در کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(0,2)$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x>0 \\ \text{موجود نیست} & x=0 \\ 3(x+1)^2 & x<0 \end{cases}$$



تابع در $(-\infty,0)$ اکیداً صعودی است ولی برای رسیدن به شاخه سبز باید نزول کند. تابع در $(0,+\infty)$ هم اکیداً صعودی است. پس تابع فقط در بازه $(0,2)$ که شامل صفر نیست، صعودی است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{5}{x^2-2x}$ روی کدام بازه نزولی است؟

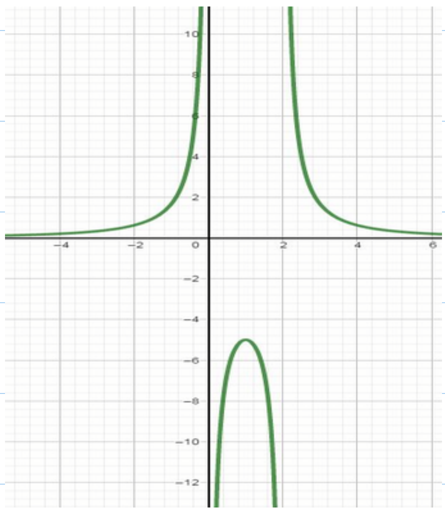
۱) $(1,3)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(2,4)$

$$f'(x)=\frac{0-5(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{-10x-10}{(x^2-2x)^2}$$

$-10x-10=0 \Rightarrow x=1$ و $x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f		$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

باید بازه ای را انتخاب کنیم که مشتق در آن یک علامت داشته باشد و شامل ریشه مخرج نباشد که فقط گزینه ۴ بازه $(2,4)$ هر دو ویژگی را دارد.



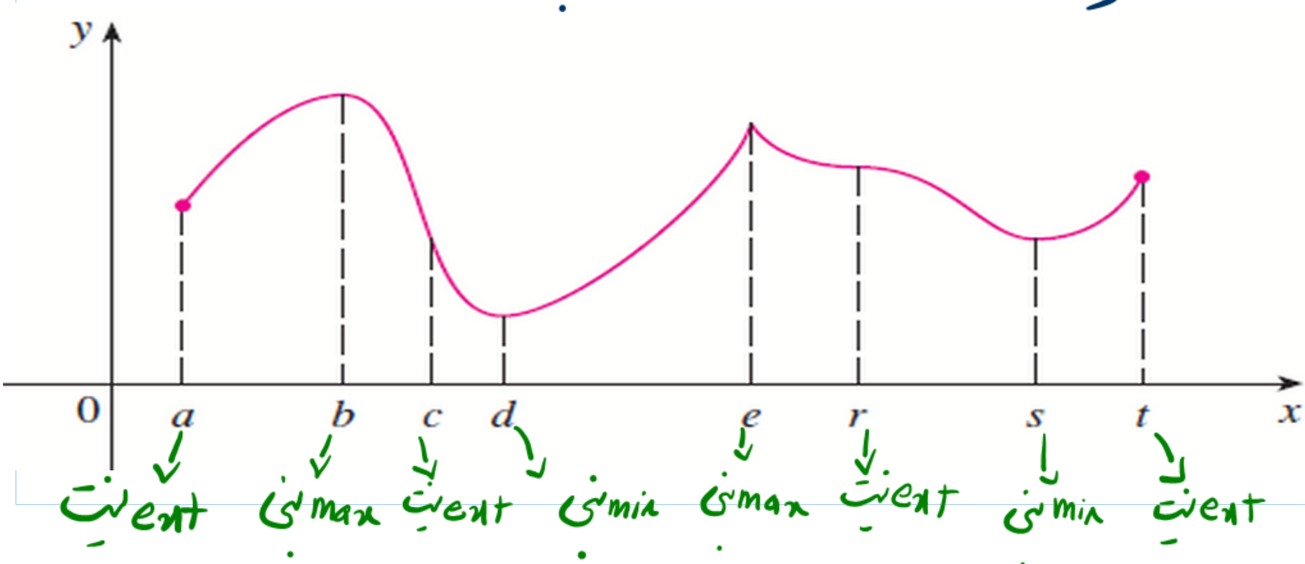
۲) اکسترمم های نسبی تابع :

الف) تابع f در نقطه ای به طول c **ماکزیمم نسبی** دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی f می نامیم.

ب) تابع f در نقطه ای به طول c **مینیمم نسبی** دارد، هرگاه یک همسایگی از آن مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی f می نامیم.

به عبارت دیگر اگر عرض نقطه ای نسبت به نقاط اطرافش کوچکتر یا مساوی باشد به آن min نسبی و اگر بزرگتر یا مساوی باشد به آن max نسبی می گوییم.

مثال: در نمودار زیر کدام یک از نقاط مشخص شده اکسترمم نسبی هستند؟



چند نکته درباره اکسترمم های نسبی :

فرض کنید $x=c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد در این صورت :

۱) نقطه ابتدا و انتهای دامنه نمی‌تواند نقطه اکسترمم تابع باشد.

۲) f می‌تواند در این نقطه پیوسته نباشد.

۳) f می‌تواند در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

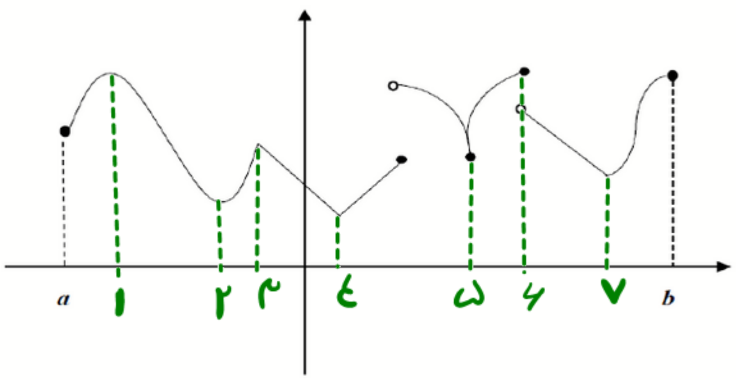
۴) اگر f در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه : $f'(c)=0$.

۵) نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع f قرار دارد یعنی مختصات این نقطه در معادله تابع صدق می‌کند.

۶) در تابع ثابت تمام نقاط هم max نسبی هستند و هم min نسبی.

مثال : تابع مقابل در بازه $[a,b]$

چند نقطه اکسترمم نسبی دارد؟ ۷ نقطه

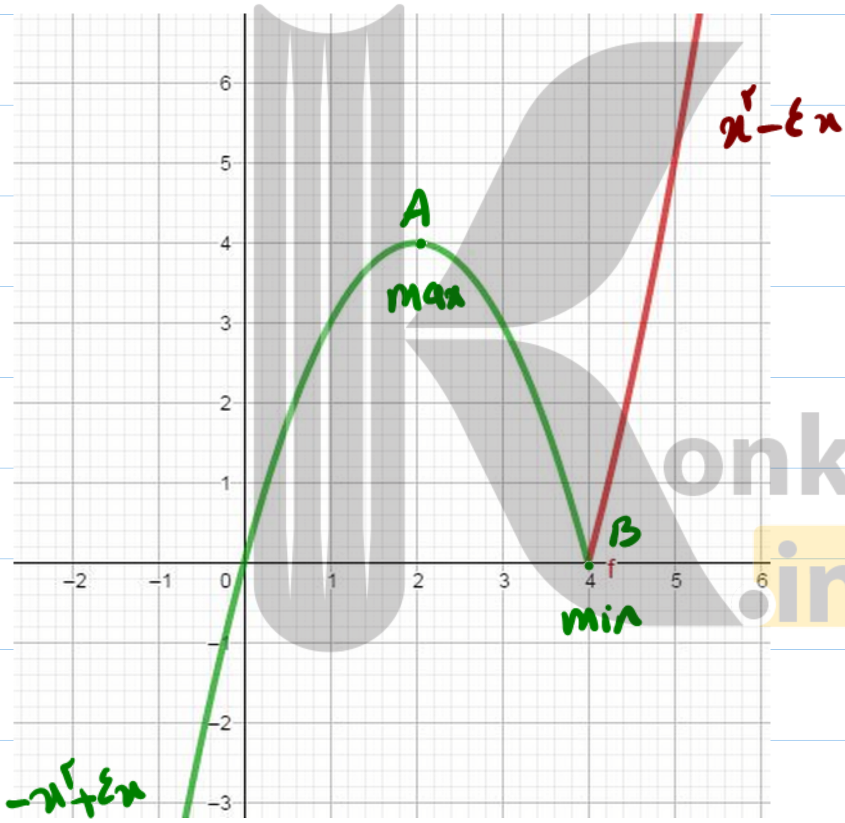


مثال کنکور ۹۸ تجربی:

در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2-4x & x \geq 4 \\ -x^2+4x & x < 4 \end{cases}$$



$A(2,4)$: نسبی max $\qquad B(4,0)$ نسبی min

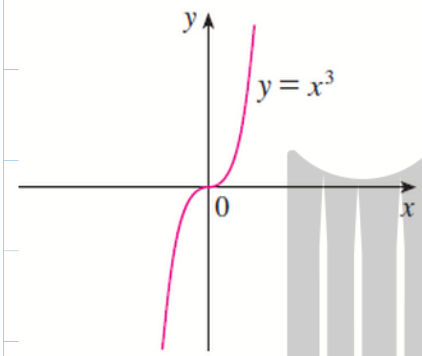
$$AB = \sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

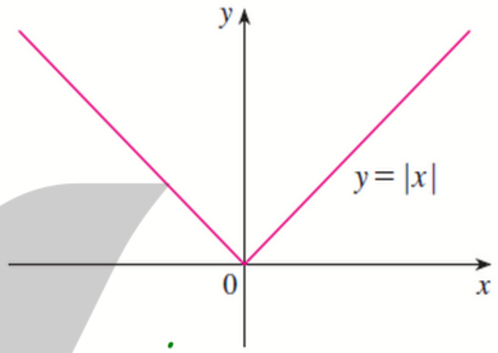
گزینه ۴

نقطه بحرانی :

نقطه‌ای به طول c از دامنه f است که در آن $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مانند :

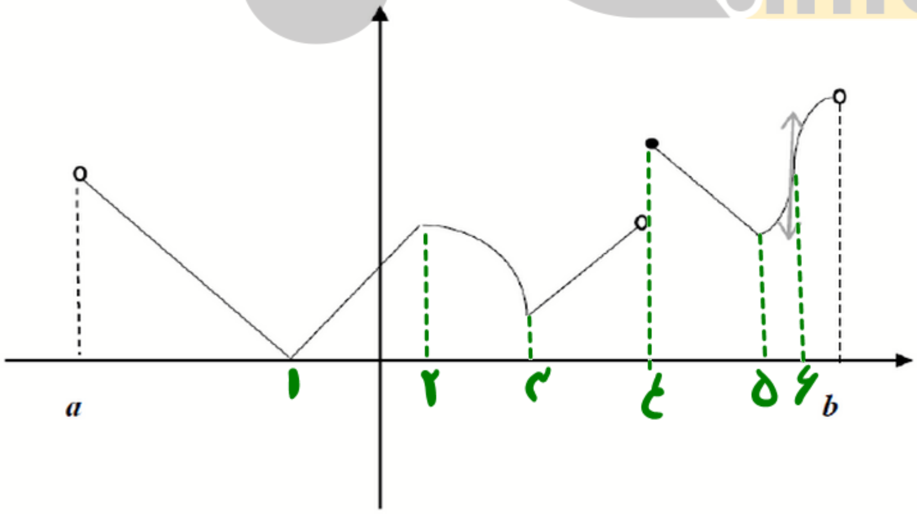




$f'(0)=0$ ، $x=0$ بحرانی

$f'(0)$ موجود نیست ، $x=0$ بحرانی

مثال : تابع f با نمودار زیر در بازه (a,b) چند نقطه بحرانی دارد؟



در ۶ نقطه

نکته : هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

ولی عکس آن درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی، اکسترمم نسبی نیست.

توجه : نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقاط بحرانی هستند.

مثال : تابع $f(x)=4x^3-12x$ در بازه $[0,4]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

$$f'(x)=12x^2-12=0 \Rightarrow 12(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

چون $x=-1$ در دامنه تابع نیست پس بحرانی نیست.

نقاط بحرانی $x=1$, $x=0$, $x=4$ است.

مثال : نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

1) $f(x)=x^2(x+2)^3$

$$f'(x)=2x(x+2)^3+3(x+2)^2x^2 = x(x+2)^2\big(2(x+2)+3x\big)=0$$

$$\Rightarrow x(x+2)^2(5x+4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-2,\ x=-\frac{4}{5}$$ نقاط بحرانی

$$2)\ g(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2} \qquad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$g'(x)=\frac{3x^2(1-x)^2-2(1-x)(-1)x^3}{(1-x)^4}$$

$$g'(x)=0 \Rightarrow x^2(1-x)\big(3(1-x)+2x\big)=0 \Rightarrow x^2(1-x)(-x+3)=0$$

$$x=0,\ x=1,\ x=3 \quad (x=1 \notin D_f) \Rightarrow$$ $x=0$ و $x=3$ بحرانی اند

$$g'(x)=\text{موجود نیست} \Rightarrow (1-x)^4=0 \Rightarrow x=1 \notin D_f$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases} x^3-3x & -2<x\leq 2 \\ x^3-18x & 2<x<4 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & -2<x<2 \\ \text{موجود نیست} & x=2 \\ 3x^2-18 & 2<x<4 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \in (-2,2)$$

$$\Rightarrow 3x^2-18=0 \Rightarrow x^2-6=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \begin{cases} \sqrt{6}\in(2,4) \\ -\sqrt{6}\notin(2,4) \end{cases}$$

f' در $x=2$ موجود نیست پس $\{-1,1,2,\sqrt{6}\}$ نقاط بحرانی اند.

4) $h(x) = x|x^2-1|$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$h(x) = \begin{cases} x(x^2-1) & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x(x^2-1) & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 - x & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^3 + x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \text{موجود نیست} & x = 1 \\ \text{موجود نیست} & x = -1 \\ -3x^2 + 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} > -1$ پس در این حالت نقاط بحرانی نیستند

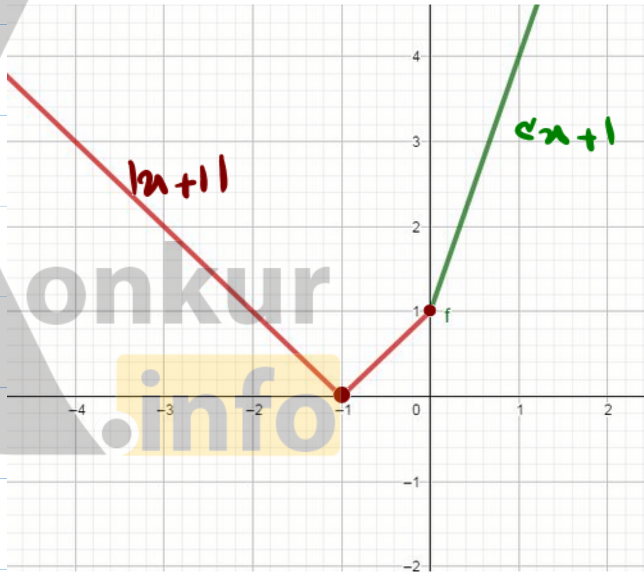
$\Rightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

در این ضابطه هر دو مقدار در بازه $(-1, 1)$ قرار دارند پس بحرانی اند.

بنابراین $\left\{ \pm 1 , \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ نقاط بحرانی اند.

ه) $f(x) = \left| 2x + |x| + 1 \right|$

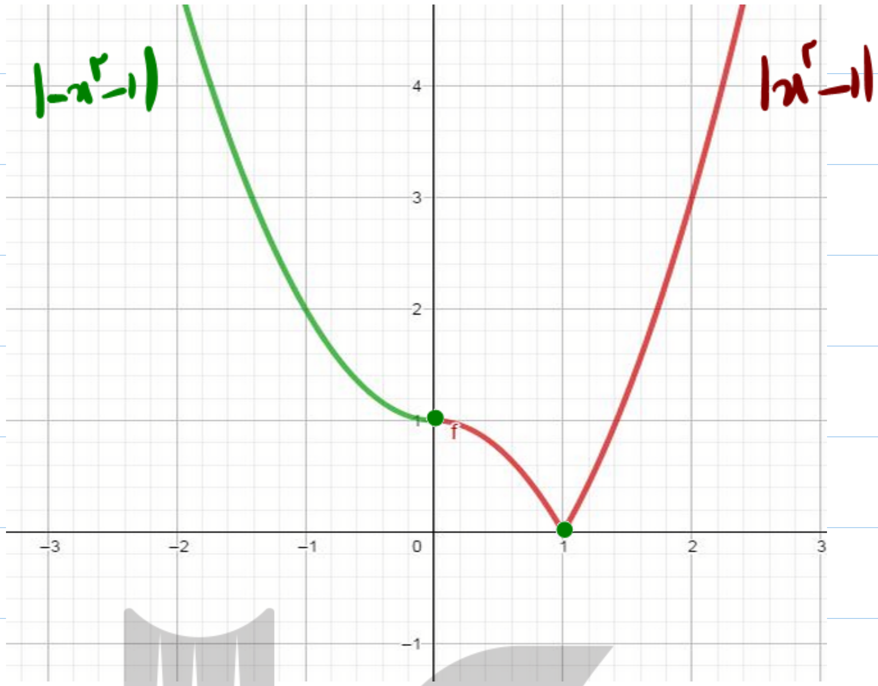
$$f(x) = \begin{cases} |\overbrace{2x+x}^{3x}+1| & x \geq 0 \\ |2x-x+1| & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 0 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$$



در $x=0$ و $x=-1$ مشتق موجود نیست پس این نقاط بحرانی اند.

و) $g(x) = \left| x|x| - 1 \right|$

$$g(x) = \begin{cases} |x(x)-1| & x \geq 0 \\ |x(-x)-1| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} |x^2-1| & x \geq 0 \\ |-x^2-1| & x < 0 \end{cases}$$



$\{0,1\}$ در $x=1$ مشتق موجود نیست. در $x=0$ مشتق صفر است. پس

نقاط بحرانی هستند.

v) $f(x)=(x-2)\,x^{\frac{2}{3}}$

$$f(x)=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{5x^{\frac{2}{3}}}{3}-\frac{4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

$f'(x)$ موجود نیست $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \Rightarrow x=0$ پس $\{0,\frac{4}{5}\}$ نقاط بحرانی اند.

۸) $f(x)=\sqrt[3]{3x-x^3}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{3-3x^2}{3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$f'(x)$: موجود نیست $\Rightarrow 3\sqrt[3]{(3x-x^3)^2}=0 \Rightarrow 3x-x^3=0$

$\Rightarrow x(3-x^2)=0 \Rightarrow x=0$ یا $3-x^2=0 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

پس $\{\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}\}$ نقاط بحرانی اند.

۹) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$D_f: 4-x^2\geq 0 \Rightarrow -x^2\geq -4 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow -2\leq x\leq 2$

$\Rightarrow D_f=[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0$$

۲- و ۲ نقاط ابتدا و انتهای دامنه اند و ریشه مخرج هم هستند پس بحرانی اند

مجموعه نقاط بحرانی با طول های: $\{0, \pm 2\}$

1.) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

$D_f: \; x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -1$

$D_f=(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

پس تابع در $x=1$ و $x=-1$ نقطه بحرانی دارند.

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

پس $\{0, \pm 1\}$ مجموعه طول های نقاط بحرانی است.

آزمون مشتق اول برای تشخیص اکسترمم های نسبی :

فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر است :

الف) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، max نسبی دارد.

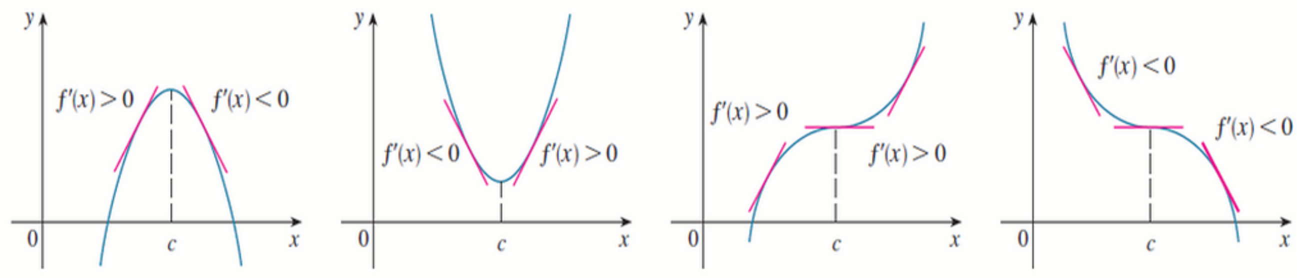
x		c	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

ب) اگر جدول تغییرات f به شکل زیر باشد، تابع در $x=c$ ، min نسبی دارد.

x		c	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد آنگاه f در c ، max یا min نسبی ندارد.

به شکل زیر دقت کنید :



(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^5-5x^3$ را بیابید.

$$f'(x)=5x^4-15x^2=0 \Rightarrow 5x^2(x^2-3)=0 \begin{cases} 5x^2=0 \to x=0 \\ x^2-3=0 \to x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0	1	$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

مثال: فاصله نقطه min نسبی تابع $y=x^3-12x+12$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$y'=3x^2-12=0 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$	

$A(2,-4)$ min نسبی $O(0,0)$

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

مثال: تابع $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x}$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$y'=\frac{1(x^2-2x)-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}=\frac{x^2-2x-2\underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2-1}}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

$$y'=0 \rightarrow -x^2-2x+2=0 \Rightarrow \Delta=4-4\times(-1)(2)=4+8=12$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{-2}=\begin{cases}-1+\sqrt{3}\\-1-\sqrt{3}\end{cases}$$

$y'=$ موجود نباشد $:\ (x^2-2x)^2=0 \rightarrow x=0,2$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$		$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$	
			min				max				

گزینه ۳

مثال کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

$$f'(x)=\frac{\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2(x^3+x+x^2+1-x^3-2x^2+3x)}{(x^2+1)^2}==\frac{2(-x^2+4x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad : \quad -x^2+4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-4(-1)(1)=20$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{20}}{-2}=\frac{-4\pm2\sqrt{5}}{-2}=2\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{4+5+4\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}-3}{4+5+4\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{10+6\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{25-10\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30}{25-20}$$

$$= \frac{-5+5\sqrt{5}}{5} = -1+\sqrt{5}$$

گزینه ۱

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=x-\sqrt{2x-1}$ را بدست آورید.

$$y'=1-\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{2x-1}} \qquad D_f=[\tfrac{1}{2},+\infty)$$

$$y'=0 : \quad \sqrt{2x-1}-1=0 \to \sqrt{2x-1}=1 \to 2x-1=1 \Rightarrow x=1$$

$y'=$ ناموجود : $\sqrt{2x-1}=0 \Rightarrow 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2}$

x		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y			$\searrow$	0 min	$\nearrow$	

min نسبی : $(1,0)$

مثال: طول نقطه max نسبی تابع $f(x)=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-1)^2$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)^2+2(x-1)x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{2(x-1)\sqrt[3]{x^2}}{1}=\frac{2(x-1)^2+6(x-1)x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$=\frac{2(x-1)(x-1+3x)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(4x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'=0 \rightarrow 2(x-1)(4x-1)=0 \rightarrow x=1,\frac{1}{4}$$

$f'=$ ناموجود $\rightarrow 3\sqrt[3]{x}=0 \rightarrow x=0$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{4}$		1	$+\infty$
$2(x-1)(4x-1)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
f'	$-$	ن	$+$		$-$		$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

گزینهٔ ۱

مثال: اگر $(1,1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باشد، a,b را بیابید.

$(1,1) \xrightarrow[\text{در تابع صدق می‌کند}]{\text{روی نمودار تابع است، نقطه}} f(1)=1+a+b+1=1 \rightarrow a+b=-1$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f'(1)=4+2a+b=0$

$\rightarrow 2a+b=-4$

$$-\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \quad a=-3$$

$-3+b=-1 \rightarrow b=2$

مثال: تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ فاقد اکسترمم نسبی است. حدود a را بیابید.

$$f'(x)=3x^2+2ax+1$$

f' باید همواره مثبت یا همواره نامنفی باشد.

ولی چون ضریب x^2، ۳ مثبت است پس f' همواره مثبت است:

$$f'\geq 0 : \quad \Delta\leq 0 : \quad 4a^2-12\leq 0 \to a^2\leq 3$$

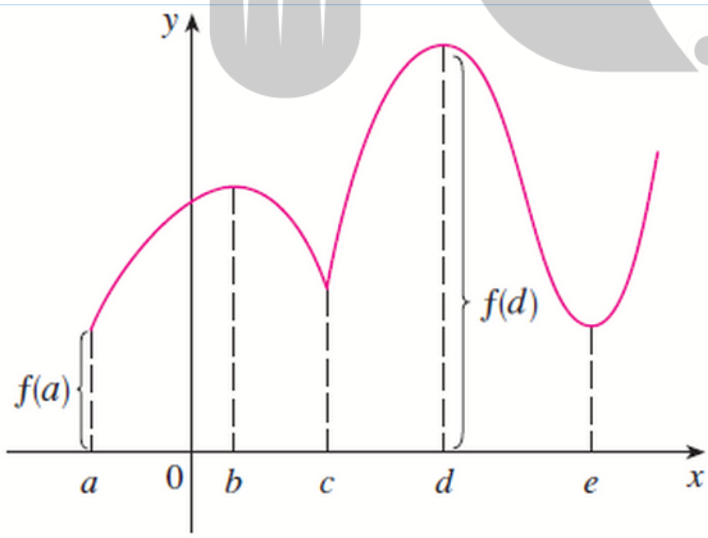
$$\Rightarrow -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$$

۴) اکسترمم های مطلق تابع :

الف) تابع f در $x=c \in D_f$ ، ماکزیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f داشته باشیم : $f(c) \geq f(x)$. $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می گوییم.

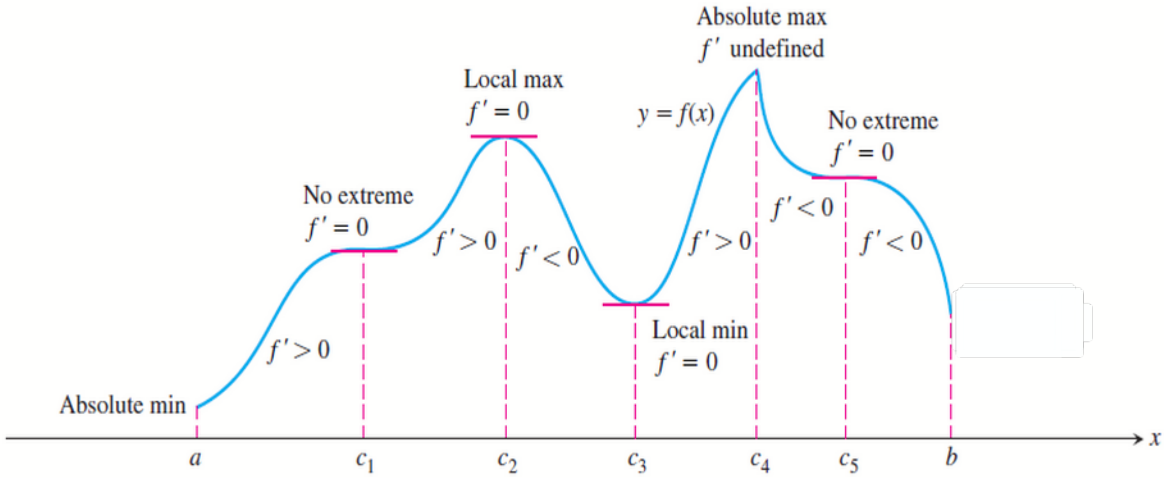
ب) تابع f در $x=c \in D_f$ ، مینیمم مطلق دارد، هرگاه برای هر x از دامنه f داشته باشیم : $f(c) \leq f(x)$. $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f می گوییم.

در نمودار های زیر داریم :



در $x=a$ ، min مطلق داریم.

در $x=d$ ، max مطلق داریم.



min مطلق

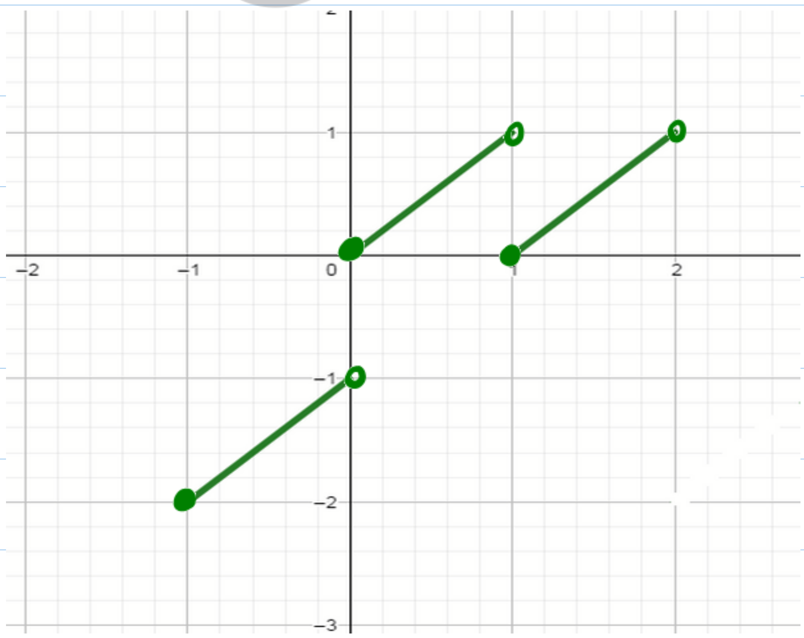
max نسبی

min نسبی

max مطلق و نسبی

مثال: مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=x-[x]^2$ را روی بازه $[-1,2)$ بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\leq x<0 \\ x & 0\leq x<1 \\ x-1 & 1\leq x<2 \end{cases}$$

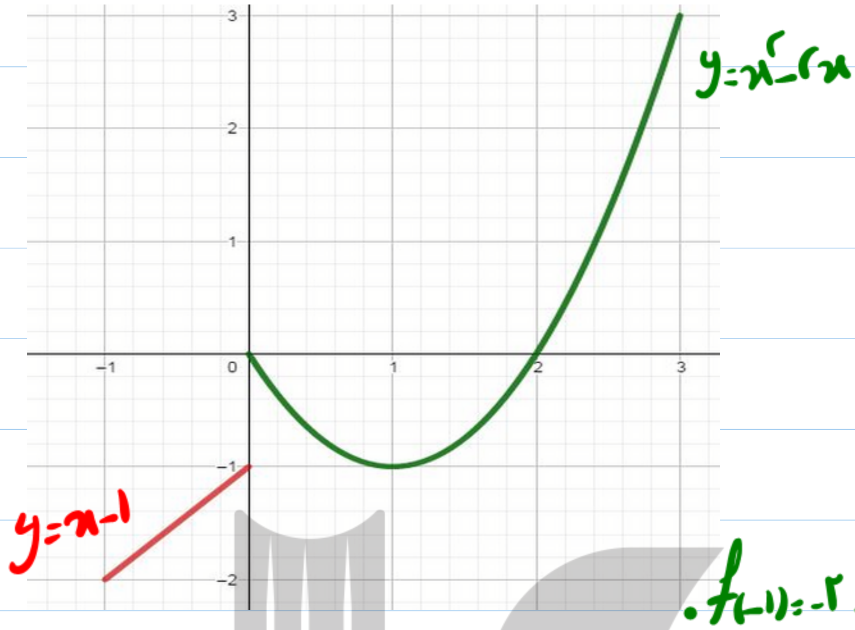


max مطلق ندارد.

$x=-1$ ، min مطلق داریم

که مقدار آن $f(-1)=-2$ است.

مثال: مقادیر max, min مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & 0\le x\le 3 \\ x-1 & -1\le x<0 \end{cases}$ را بیابید.



max مطلق در $x=3$ ؛

مقدار $f(3)=3$.

min مطلق در $x=-1$ با مقدار $f(-1)=-2$.

قضیه: اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه max و min مطلق دارد.

روش یافتن اکسترمم های مطلق توابع پیوسته در بازه $[a,b]$:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازه $[a,b]$ می یابیم. سپس مقدار تابع را در نقاط بحرانی حساب می کنیم. بیشترین مقدار max مطلق و کمترین مقدار min مطلق تابع f در بازه هستند.

مثال کنکور تجربی ۹۸

مقادیر max و min مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2-15x$ را روی بازه $[-4,4]$ کدام است؟

۱) -18 و 24 ۲) -45 و 27 ۳) -36 و 27 ۴) -27 و 36

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x-5)(x+3) = 0 \begin{cases} x = 5 \notin D_f \\ x = -3 \checkmark \end{cases}$$

پس تابع ۳ نقطه بحرانی در $x=-4$ ، $x=-3$ و $x=3$ دارد.

x	-4	-3	3
y	$\frac{68}{3}$	27	-45

max مطلق   min مطلق

$$f(-4) = \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2 - 15(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{-64-48+180}{3} = \frac{68}{3}$$

$$f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 - 15(-3) = -9 - 9 + 45 = 27$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3^3) - (3)^2 - 15(3) = 9 - 9 - 45 = -45$$

گزینه ۲

مثال: حداکثر مقدار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ در بازه $[-\frac{1}{2}, 1]$ چقدر از کمترین مقدار آن در این بازه بیشتر است؟

۱) $\frac{16}{21}$ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{19}{21}$

$$f'(x) = \frac{-(2x-1) \times 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$ بحرانی

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{3}$	1
	min		max

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{1+2+4}{4}}=\frac{4}{7}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\frac{1-2+4}{4}}=\frac{4}{3}\ ,\quad f(1)=\frac{1}{1-1+1}=1$$

$$\max-\min=\frac{4}{3}-\frac{4}{7}=\frac{28-12}{21}=\frac{16}{21}$$

گزینه ۱

مثال: مقادیر max، min مطلق تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ را بیابید.

$$f'(x)=1\times\frac{\sqrt{4-x^2}}{1}+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\times x=\frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$D_f:\ 4-x^2\geq 0\rightarrow x^2\leq 4\rightarrow -2\leq x\leq 2\rightarrow D_f=[-2,2]$$

$$f'(x)=0\rightarrow -2x^2+4=0\rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
y	0	-2	2	0
		min	max	

$f(2) = f(-2) = 0$

$f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{4-2} = -2$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4-2} = 2$

مقدار max مطلق $= 2$ ، مقدار min مطلق $= -2$

مثال: حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{5}$ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) $5\sqrt{5}$

D_f : ① $x \geq 0$

② $5-x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$

$D_f = ① \cap ② = [0, 5]$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{5-x}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}$

$$\xrightarrow[\text{۲}]{\text{به توان}} \quad 4(5-x)=x \rightarrow 20-4x=x \rightarrow -5x=-20 \rightarrow x=4$$

x	0	4	5
y	$\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$
	min	max	

$$f(0)=0+\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

$$f(4)=2\times 2+1=5$$

$$f(5)=2\sqrt{5}+0=2\sqrt{5}$$

$$\max \times \min = 5\sqrt{5}$$

گزینه ۴

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x}$ در فاصله $[-1,1]$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

$$f(x)=(2x-1)x^{\frac{1}{3}}=2x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8x-1)=\frac{8x-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 8x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{8}$$

$f'(x)=$ ناموجود : $3\sqrt[3]{x^2}=0 \rightarrow x=0$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
y	3	0	$-\frac{3}{8}$	1
	max		min	

$f(-1) = -3\times(-1) = 3$ $\qquad$ $f(0) = (-1)\times 0 = 0$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}-1)\times\frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$ $\qquad$ $f(1) = 1\times 1 = 1$

گزینهٔ ۲

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع f روی بازه (a,b)، در روش بالا به‌جای $f(a)$، $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و به‌جای $f(b)$، $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. اگر بیشترین یا کمترین مقدار، در این مقادیر حدی اتفاق افتد آنگاه تابع در این بازه max یا min مطلق نخواهد داشت. در مورد بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$، $(-\infty,a)$ و $(-\infty,a]$، $(a,+\infty)$، $[a,+\infty)$ و $(-\infty,+\infty)$ هم به این شکل عمل می‌کنیم.

مثال: تابع $f(x)=x^3-3x^2$ در بازه $[-1,4)$ مفروض است. اکسترمم‌های مطلق آن را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x = 0 \to x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$f(0)=0 \quad , \quad f(2)=8-12=-4 \quad , \quad f(-1)=-1-3=-4$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} x^3 - 3x^2 = 64 - 48 = 16$$

x	-1	0	2	4 (حد)
y	-4	0	-4	16

چون مقدار max در حد تابع وقتی $x \to 4^-$

اکسترمات پس max مطلق ندارد ولی min مطلق دارد: $f(-1)=f(2)=-4$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$ روی بازه $(0,+\infty)$ چقدر است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۹

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3-16}{x^2} = 0 \to 2x^3-16=0 \to x^3=8 \to x=2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 + \frac{16}{0^+} = 0+\infty = +\infty$$

فاقد max مطلق است.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

در $x=2$، min مطلق دارد:

$f(2) = 4+8=12$: گزینه ۲

بهینه سازی :

هدف از بهینه سازی پیدا کردن بیشترین یا کم ترین مقدار یک تابع است .

در اکثر سوالات بهینه سازی ، ضابطه تابع به ما داده نمی شود و باید با توجه به داده های مسأله تابع هدف را بسازیم . مراحل زیر را برای حل اینگونه سوالات انجام می دهیم :

۱ـ درصورت لزوم شکل مناسبی رسم می کنیم .

۲ـ اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از شرط سوال (رابطه کمکی) آن را برحسب یک متغیر می نویسیم .

۳ـ از تابع هدف مشتق می گیریم و مساوی صفر قرار می دهیم . مقدار اکسترمم تابع هدف را محاسبه می کنیم .

مثال : اگر x و y دو عدد مثبت باشند که $xy=6$ ، مقدار مینیمم عبارت $P=2x+3y$ را محاسبه کنید .

رابطه کمکی : $xy=6 \rightarrow y=\frac{6}{x}$

$p = 2x + 3 \times \frac{6}{x} \Rightarrow p(x) = 2x + \frac{18}{x}$ تابع هدف

$p'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18}{x^2} = 2 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \xRightarrow{x>0} x = 3$

$y = \frac{6}{3} = 2$ $\quad P_{min} = 2 \times 3 + 3 \times 2 = 6 + 6 = 12$

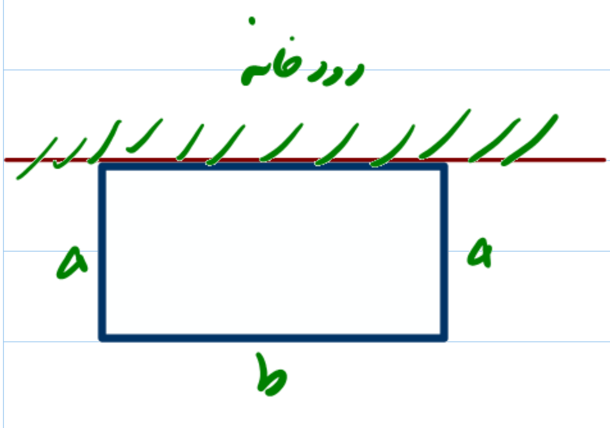
مثال: اگر $x + y = 4$ باشد، ماکزیمم $x^3 y$ را بیابید.

$y = 4 - x \quad : \quad P = x^3 y \Rightarrow P(x) = x^3(4 - x) = 4x^3 - x^4$

$$P'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x) = 0 \begin{cases} 4x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{min} \\ 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{max} \end{cases}$$

$y = 4 - 3 = 1 \quad : \quad P_{max} = 3^3 \times 1 = 27$

مثال: بیشترین مساحت مستطیلی که بوسیله یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه یک رودخانه می‌توان محصور کرد، چند متر مربع است؟



$48 = 2a + b$ رابطه قید

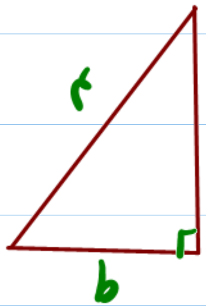
$\rightarrow b = 48 - 2a$

تابع هدف : $S = a \times b = a(48-2a) = 48a - 2a^2$

$S'(a) = 48 - 4a = 0 \rightarrow 4a = 48 \rightarrow a = 12 \;;\; b = 48 - 24 = 24$

$S_{max} = 12 \times 24 = 288$

مثال : طول وتر مثلث قائم الزاویه‌ای برابر ۴ است. بیشترین مقدار مساحت آن را بیابید.



رابطه فیثاغورس : $a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - a^2$

$\Rightarrow b = \sqrt{16 - a^2}$

$S = \frac{1}{2} ab \Rightarrow S = \frac{1}{2} a \sqrt{16 - a^2}$

$S'(a) = \frac{1}{2}\sqrt{16-a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{16-a^2}} \times \frac{1}{2} a$

$S'(a) = \frac{16 - a^2 - a^2}{2\sqrt{16-a^2}} = \frac{16 - 2a^2}{2\sqrt{16-a^2}} = \frac{8 - a^2}{\sqrt{16-a^2}}$

$S'(a) = 0 \rightarrow 8 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$ و $b = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$

$S_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{8} \times \sqrt{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

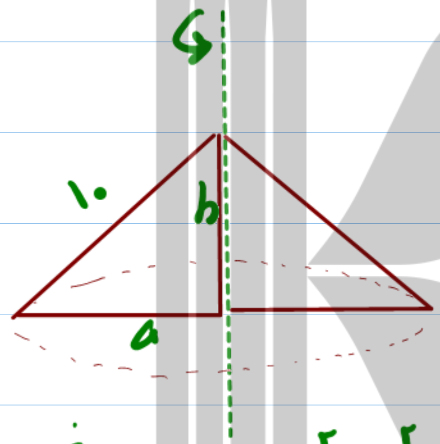
مثال: کنکور تجربی ۹۹

از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

اگر یک مثلث قائم الزاویه را حول یک ضلع قائم دوران دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود

که شعاع قاعده و ارتفاعش برابر اضلاع قائم مثلث اند:



تابع هدف: $V=\frac{1}{3}\pi a^2 b$

رابطه کمکی: $a^2+b^2=100 \to a^2=100-b^2$: رابطه فیثاغورس

$$V=\frac{1}{3}\pi(100-b^2)b=\frac{1}{3}\pi(100b-b^3)$$

$$V'(b)=\frac{1}{3}\pi(100-3b^2)=0 \to 3b^2=100 \to b^2=\frac{100}{3}$$

$$a^2=100-\frac{100}{3}=\frac{200}{3}$$

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}}}=\sqrt{2}$$ گزینه ۴

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۹ :

کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+7}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

نقطهٔ $B(x,y)$ را روی تابع در نظر می‌گیریم. فاصله $A(5,0)$ تا B را تابع هدف

می‌گیریم که باید min شود :

رابطه کمکی $y=\sqrt{2x+7}$ $\qquad AB=\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}$

تابع هدف $AB=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-8x+32}$

$$(AB)'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow x=4$$

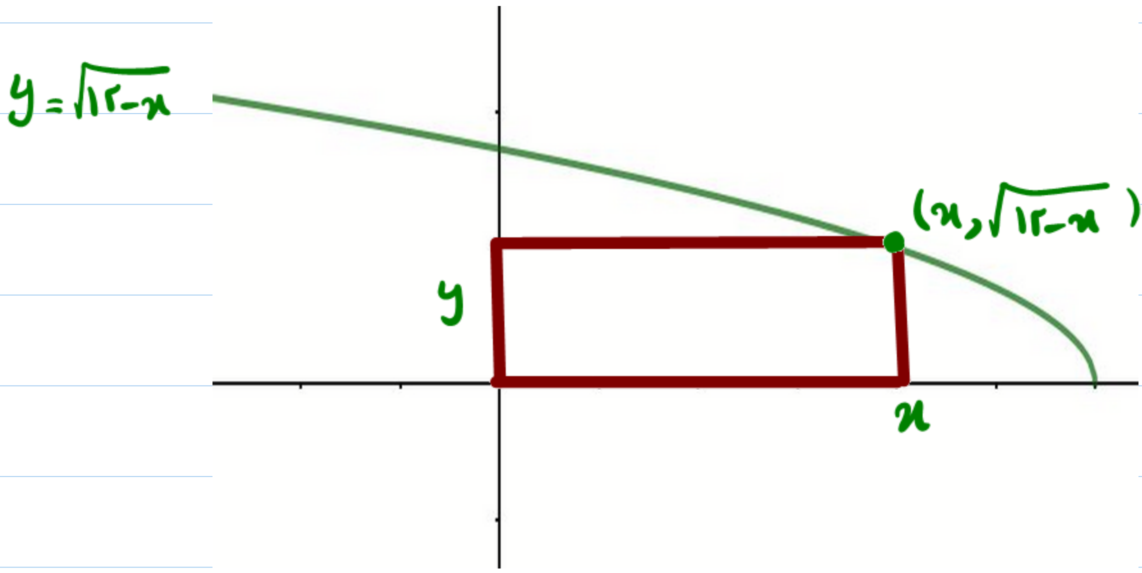
$$(AB)_{min}=\sqrt{4^2-8\times4+32}=\sqrt{16}=4$$

گزینه ۱

مثال: کنکور تجربی ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



$$S = xy = x\sqrt{12-x} = \sqrt{12x^2-x^3}$$

$$S'_{(x)} = \frac{24x-3x^2}{2\sqrt{12x^2-x^3}} \rightarrow S'=0 \longrightarrow 24x-3x^2=0$$

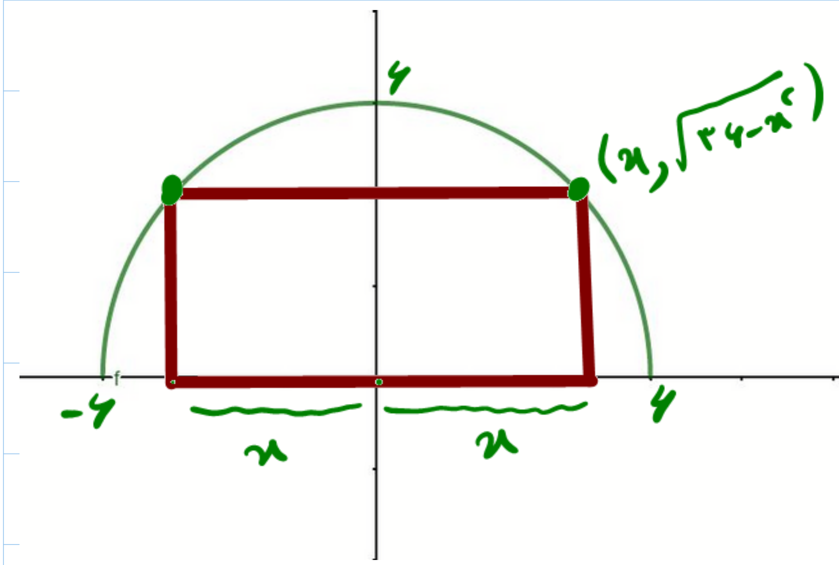
$$3x(8-x)=0 \quad \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=8 \ \checkmark & . \ y=\sqrt{12-8}=\sqrt{4}=2 \end{cases}$$

$$S_{max} = 8\times 2 = 16$$ گزینه ۲

مثال: کنکور تجربی خارج ۹۸

بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶



معادله دایره $x^2+y^2=36$

$y^2=36-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{36-x^2}$

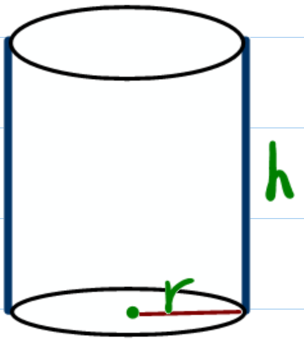
$S=2x\times y=2x\sqrt{36-x^2}=2\sqrt{36x^2-x^4}$

$S'(x)=2\,\dfrac{72x-4x^3}{2\sqrt{36x^2-x^4}}=0 \rightarrow 72x-4x^3=0$

$4x(18-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{18}\ \checkmark \\ x=-\sqrt{18} \end{cases}$ $\quad y=\sqrt{36-18}=\sqrt{18}$

$S_{max}=2\times\sqrt{18}\times\sqrt{18}=2\times18=36$ گزینه ۴

مثال: می‌خواهیم یک قوطی استوانه شکل بسازیم که گنجایش آن 2π لیتر باشد. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا هزینه فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟



$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow r^2 h = 2$

$\Rightarrow h = \frac{2}{r^2}$ رابطه کمکی

$S_{\text{کل}} = S_{\text{قاعده‌ها}} + S_{\text{جانبی}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$S_{\text{کل}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{2}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$ تابع هدف

$S'(r) = 2\pi\left(\frac{2r}{1} - \frac{2}{r^2}\right) = 0$

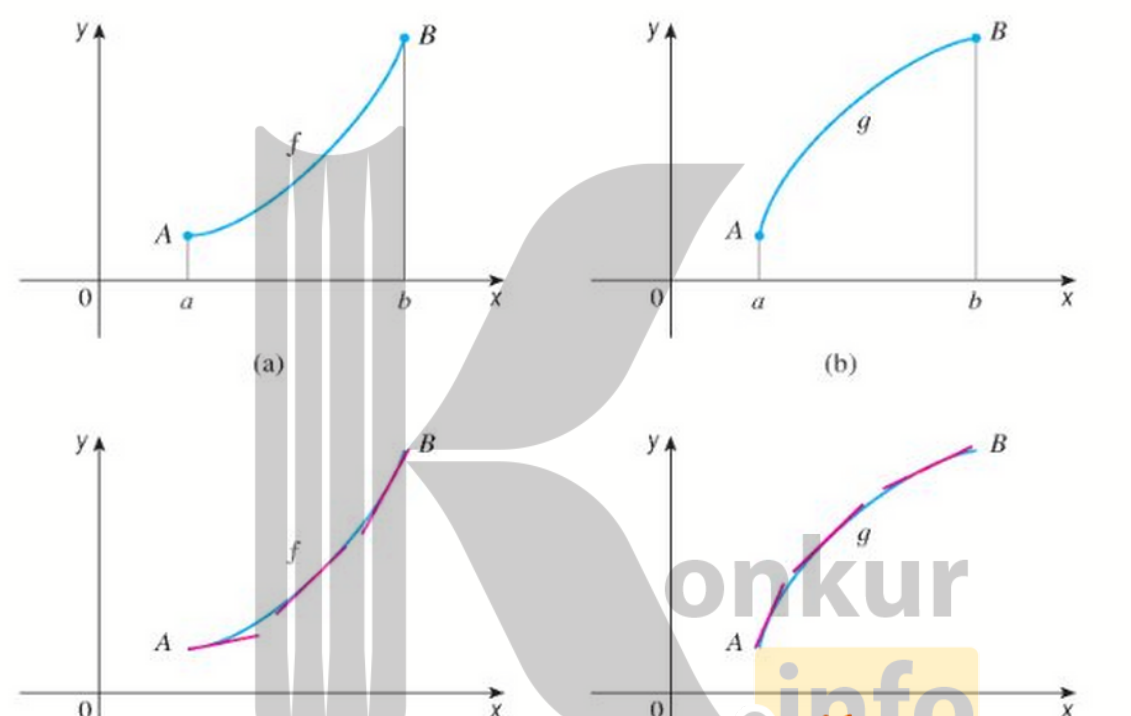
$\frac{2r^3 - 2}{r^2} = 0 \rightarrow 2r^3 - 2 = 0 \rightarrow r^3 = 1 \rightarrow r = 1$

$h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$

جهت تقعر:

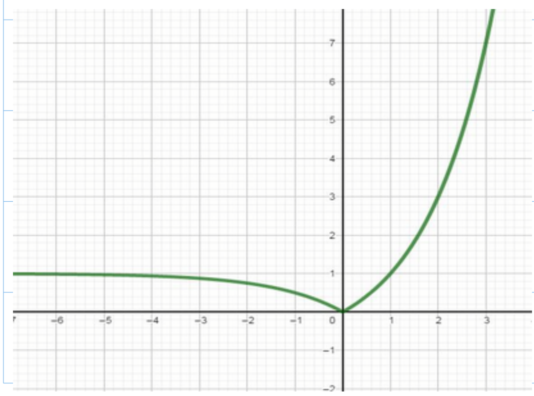
اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، زیر منحنی قرار گیرند، می‌گوییم **تقعر رو به بالا** است.

اگر در یک بازه، همه خط‌های مماس بر منحنی، بالای منحنی قرار گیرند، می‌گوییم **تقعر رو به پایین** است.



تقعر رو به بالا   تقعر رو به پایین

مثال: جهت تقعر تابع $f(x)=|2^x-1|$ را تعیین کنید.



در $(0,+\infty)$ تقعر رو به بالا

در $(-\infty,0)$ تقعر رو به پایین

یافتن جهت تقعر بدون رسم نمودار :

به شکل های تعریفِ بالا در حالت تقعر رو به پایین دقت کنید. شیب خط مماس بر منحنی از چپ به راست در حال کاهش است و می دانیم شیب مماس بر منحنی یعنی مشتق. پس مشتق تابع در حال کاهش است. به عبارت دیگر مشتق آن نزولی است و اگر یک تابع نزولی باشد، مشتق آن منفی است پس داریم :

$$f' \text{ نزولی} \Rightarrow \text{مشتق } f' \text{ منفی است} \Rightarrow (f')' < 0 \Rightarrow f'' < 0$$

برای تقعر رو به بالا هم به نتیجه مشابهی می رسیم.

قضیه : فرض کنید f'' به ازای هر نقطه از بازه باز I موجود باشد :

۱- اگر برای هر x از I : $f''(x) > 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

۲- اگر برای هر x از I : $f''(x) < 0$ باشد آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

۳- اگر برای هر x از I : $f''(x) = 0$ باشد آنگاه آزمون بی نتیجه است.

نکته : برای تعیین جهت تقعر تابع f باید مشتق دوم را تعیین علامت کنیم.

مثال : جهت تقعر تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ را مشخص کنید.

$$f'(x)=\frac{1(1+x^2)-2x\times x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\times 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(1+x^2)\left(-(1+x^2)-2(1-x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}\qquad 2x(x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

مثال: به ازای چه مقادیری از a، تقعر منحنی $f(x)=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالاست؟

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+3x$$

$$f''(x)=\underbrace{12}_{+}x^2+6ax+3>0 \xrightarrow{\div 3} 4x^2+2ax+1>0$$

$$\Delta<0: \quad \Delta=4a^2-4\times4\times1<0 \to 4a^2-16<0 \to a^2<4$$

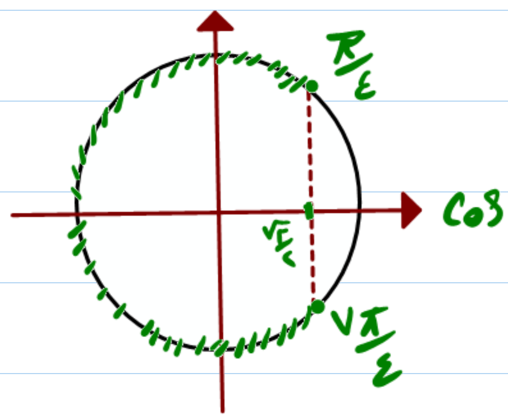
$$\Rightarrow -2<a<2$$

مثال: مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع $f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x$ و $0\leq x\leq 2\pi$ رو به بالاست، در چه بازه‌ای است؟

$$f'(x)=2x-2\sqrt{2}\sin x \quad : \quad f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x>0$$

$$-2\sqrt{2}\cos x>-2 \Rightarrow \cos x<\frac{-2}{-2\sqrt{2}} \to \cos x<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



تقعر رو به بالا $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ در بازه

نقطه عطف :

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف نمودار تابع f می‌گوییم هرگاه :

۱) تابع در این نقطه خط مماس داشته باشد.

۲) جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کند.

نکته : وقتی می‌گوییم تابع f در $(c, f(c))$ خط مماس دارد، یعنی در این نقطه مشتق متناهی دارد یا در این نقطه پیوسته است و مشتق نامتناهی دارد.

مثال: نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} - 10\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+2) = \frac{10}{9}\,\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$x=-2$

$x=0$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$+$	
f	$\frown$	$\smile$	$\smile$	

تابع در $x=-2$ نقطه عطف دارد زیرا تابع در این نقطه مماس قابل رسم است

و مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد.

۲) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

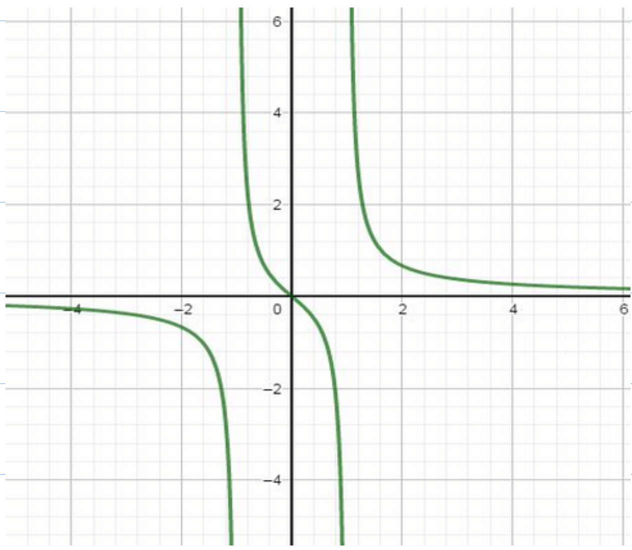
$$g'(x)=\frac{x^2-1-2x\times x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

$$g''(x)=\frac{-2x(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(-x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2-1)\left(-(x^2-1)-2(-x^2-1)\right)}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{\overset{\to 0}{2x}(x^2+3)}{\underset{\to \pm 1}{(x^2-1)^3}}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g''		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
g		$\frown$	||	$\smile$	عطف	$\frown$	||	$\smile$	

در $x=0$ نقطه عطف دارد.



چند نکته درباره نقطه عطف:

۱- خط مماس بر نمودار تابع در نقطه عطف تابع از نمودار تابع عبور می‌کند.

۲- لزومی ندارد تابع در نقطه عطف مشتق دوم داشته باشد. مثلاً تابع $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$.

۳- در نقطه عطف، اگر مشتق دوم وجود داشته باشد، برابر صفر است.

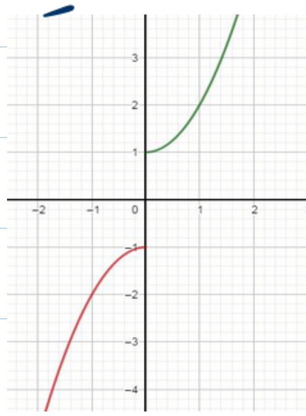
۴- هر نقطه که مشتق دوم تابع در آن صفر باشد لزوماً نقطه عطف نیست. مثلاً تابع $y=x^4$ در $x=0$.

$f'(x)=4x^3$; $f''(x)=12x^2$; $f''(0)=0$

$12x^2>0$ است پس f'' اطراف $x=0$ تغییر علامت نمی‌دهد پس $x=0$ عطف نیست.

۵- هر نقطه که جهت تقعر نمودار تابع در آن تغییر کند، لزوماً نقطه عطف نیست. این نقطه ممکن است نقطه ناپیوستگی یا مشتق ناپذیری باشد.

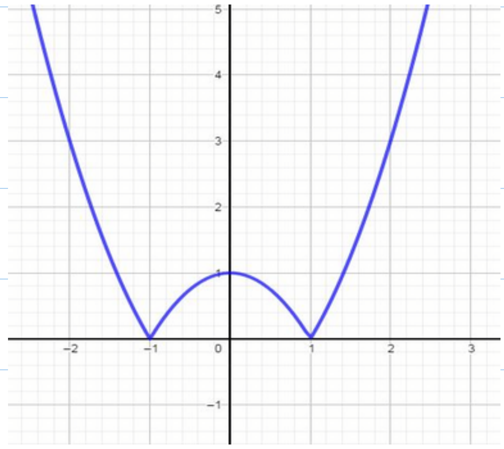
مثلاً:



$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 0 \\ -x^2-1 & x<0 \end{cases}$$

$x=0$ عطف نیست زیرا در این نقطه تابع پیوسته نیست.

$g(x) = |x^2-1|$



$x=-1$ و $x=1$ عطف نیستند زیرا در این نقاط دو نیم‌مماس بر تابع رسم می‌شود

مثال: کنکور ریاضی ۹۷

خط راستی بر نمودار تابع $y=x^3-2x^2+3x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند.

شیب این خط کدام است؟ ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پس در نقطه عطف بر تابع مماس رسم شده است.

عطف $y'=3x^2-4x+3$: $y''=6x-4=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

شیب خط مماس در نقطه عطف : $y'(\frac{2}{3})=3(\frac{2}{3})^2-4\times\frac{2}{3}+3$

$=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+3=\frac{-4}{3}+3=\frac{5}{3}$ گزینه ۴

مثال: اگر $A(1,-11)$ نقطه عطف نمودار تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$f(1)=-11$ نقطه عطف روی تابع : $f(1)=1+a+b=-11 \Rightarrow a+b=-12$ ①

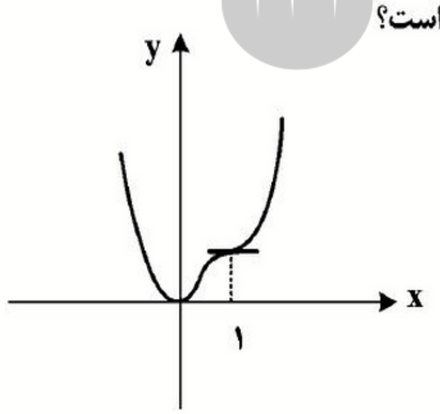
$f''(1)=0$: $f'(x)=3x^2+2ax+b$: $f''(x)=6x+2a$

$f''(1)=6+2a=0 \to a=-3 \xRightarrow{①} -3+b=-12 \Rightarrow b=-9$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$: $f(-1)=-1-3+9=5$ گزینه ۳

مثال: کنکور ریاضی ۹۸

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ است. a کدام است؟



۱) -8
۲) -7
۳) -5
۴) -4

در $x=1$ نقطه عطف داریم پس $f''(1)=0$.

در $x=1$ مماس افقی داریم پس $f'(1)=0$.

در $x=0$ ، min نسبی داریم پس $f'(0)=0$.

$f'(0)=0$: $f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$

$\Rightarrow f'(0)=0+0+0+c=0 \rightarrow c=0$

$f'(1)=0$: $f'(1)=12+3a+2b+0=0 \rightarrow 3a+2b=-12$

$f''(1)=0$: $f''(x)=36x^2+6ax+2b$

$f''(1)=36+6a+2b=0 \rightarrow 3a+b=-18$

$$-\begin{cases} 3a+2b=-12 \\ 3a+b=-18 \end{cases}$$
$$b=6$$

$3a+6=-18 \rightarrow 3a=-24 \rightarrow a=-8$

گزینه ۱

رسم نمودار توابع :

برای رسم نمودار یک تابع مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱- دامنه تابع را می‌یابیم .

۲- مجانب‌های تابع را درصورت وجود بدست می‌آوریم .

۳- مشتق اول تابع را پیدا می‌کنیم و جدول تغییرات تابع را می‌یابیم .

۴- مشتق دوم تابع را پیدا می‌کنیم و جهت تقعر تابع را می‌یابیم .

۵- محل برخورد نمودار تابع را با محورهای مختصات درصورت امکان تعیین می‌کنیم .

۶- با استفاده از اطلاعات بدست آمده، نمودار تابع را رسم می‌کنیم .

نکته : اگر محاسبات زیادی داشت یا بدیهی بود، از برخی مراحل صرف‌نظر می‌کنیم .

مثال : نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ را رسم کنید .

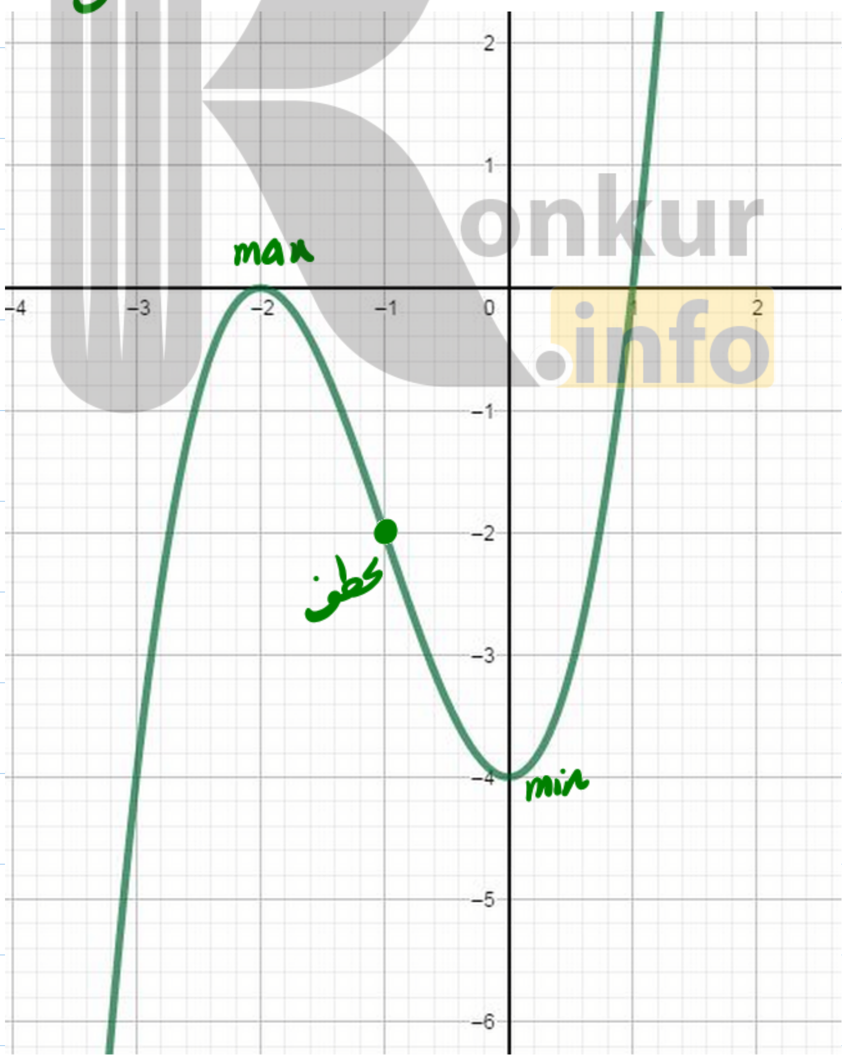
$D = \mathbb{R}$: فاقد مجانب

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	
			max		min		

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$	-2	$\smile$	
			عطف		



چند نکته درباره نمودار تابع درجه سوم :

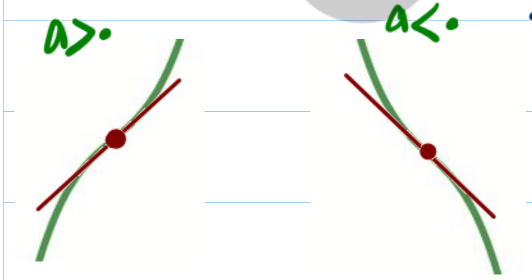
اگر صورت کلی تابع درجه ۳ ، $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشد :

۱- اگر $a>0$ باشد ، نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود و اگر $a<0$ باشد نمودار از ناحیه دوم شروع و به ناحیه چهارم ختم می‌شود.

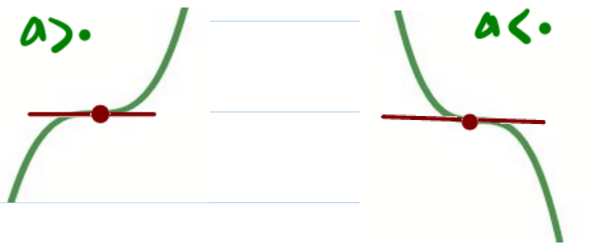
۲- مشتق اول تابع درجه سوم به صورت $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ است که یک تابع درجه دوم است. ریشه‌ی مشتق به شرطی که f در آن‌ها تغییر علامت دهد نقاط اکسترمم نسبی f هستند.

$$\Delta_{f'} = 4b^2-4(3a)(c)=4(b^2-3ac)$$

الف) اگر $\Delta_{f'}<0$ باشد، f فاقد اکسترمم نسبی است.

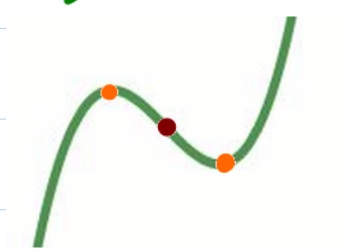


ب) اگر $\Delta_{f'}=0$ باشد، f فاقد اکسترمم نسبی است ولی در ریشه‌ی مشتق، مماس افقی بر تابع قابل رسم است.



پ) اگر $\Delta_{f'} > 0$ باشد، f دارای یک min نسبی و یک max نسبی است.

$a>0$



$a<0$

۳- مشتق دوم تابع درجه سوم به صورت $f''(x)=6ax+2b$ است. پس تابع همواره

یک نقطه عطف دارد: $6ax+2b=0 \Rightarrow 6ax=-2b \Rightarrow x=\frac{-2b}{6a}$

$$\Rightarrow x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}$$

۴- در حالتی که f، دو ext نسبی دارد، نقطه عطف وسط پاره‌خطی است که دو ext نسبی

را به هم وصل می‌کند.

مثال: اگر مجموع مقادیر min, max نسبی تابع $f(x)=x^3-3x^2+x-m$ مساوی دو باشد،

m را بیابید.

$$\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=y_{\text{عطف}} \Rightarrow \frac{2}{2}=y_{\text{عطف}} \Rightarrow y_{\text{عطف}}=1$$

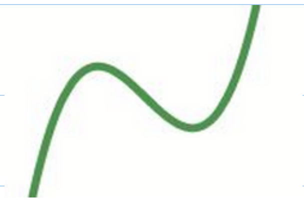
$$x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=-\frac{-3}{3\times 1}=1$$

عطف $(1,1)$

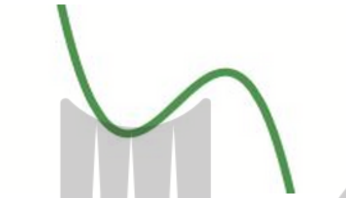
$(1,1) \xrightarrow{\text{در تابع}} f(1)=1-3+1-m=1 \Rightarrow m=-2$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

نمودار از ناحیه سوم شروع و به ناحیه اول ختم می‌شود: $a=\frac{1}{3}>0$

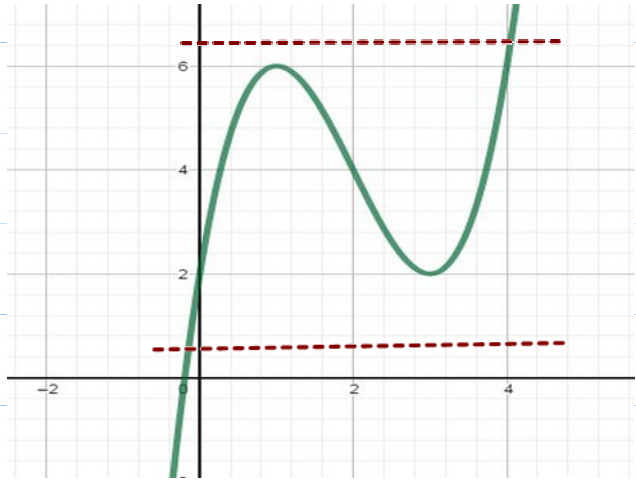
فاقد اکسترمم است ولی $\Delta_{f'}=4-4\times1\times1=0$: $f'(x)=x^2-2x+1$

در عطف مماس افقی است. پس گزینه ۱ درست است.

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ به ازای چه مقادیری از m، معادله $f(x)=m$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

$f'(x)=3x^2-12x+9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-4x+3=0 \to x=1,3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	
			max		min		



$m<2$ یا $m>6$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{2x-1}{1-x}$ را رسم کنید. $\left(f(x)=\frac{2x-1}{-x+1}\right)$

$D=\mathbb{R}-\{1\}$

$x=1$ مجانب قائم:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{2x-1}{1-x}=\frac{2}{-1}=-2 \implies y=-2$ مجانب افقی

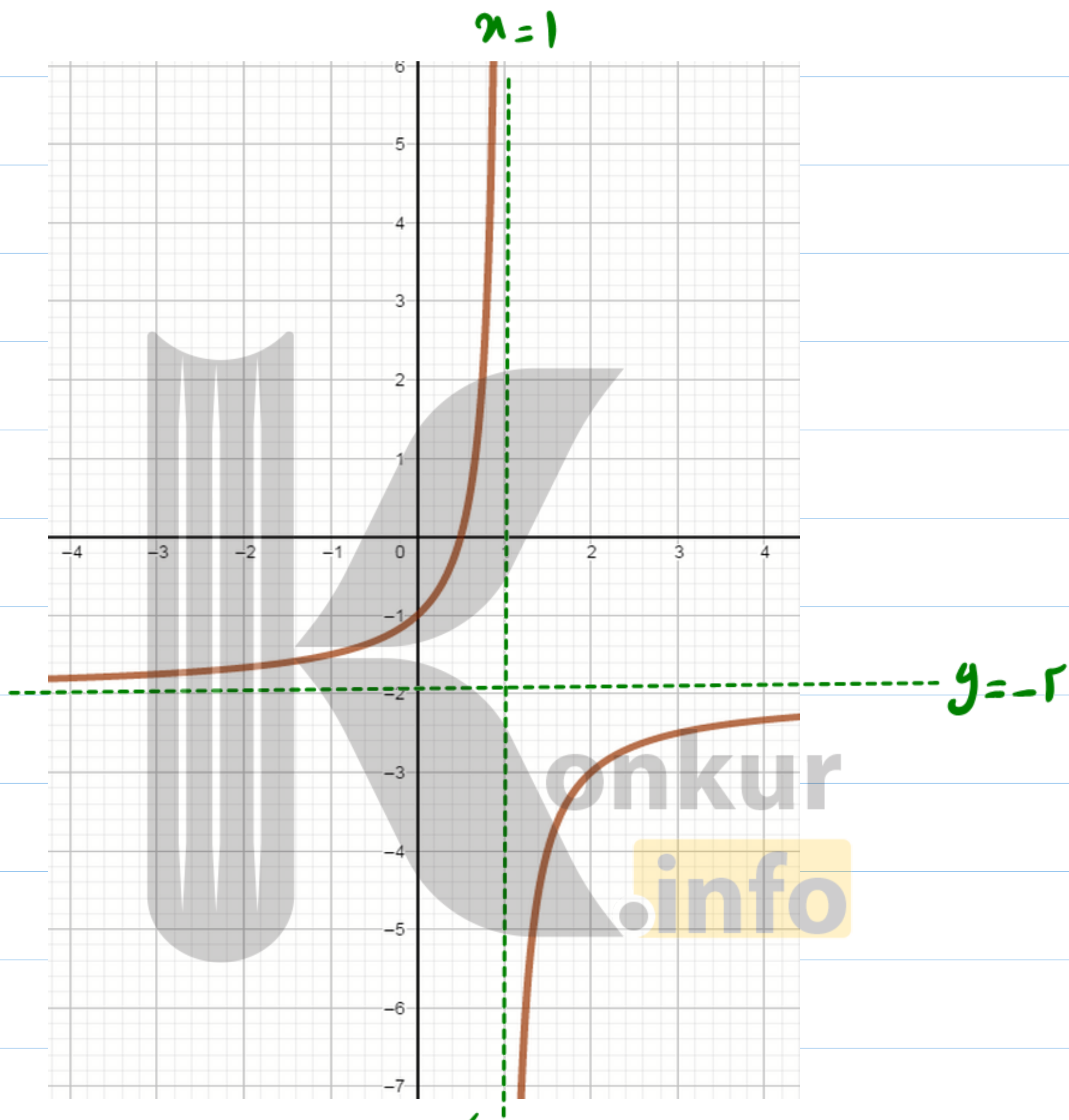
$f'(x)=\frac{2(1)-(-1)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2-1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

نقطه کمکی

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	$\|\|$		$+$		
f	-2	$\nearrow$	$+\infty \ \|\| \ -\infty$	$\nearrow$	-3		-2

محل برخورد با محور y ها: $x=0 \to y=\frac{2\times0-1}{1-0}=-1$

محل برخورد با محور x ها: $y=0 \to 2x-1=0 \to x=\frac{1}{2}$

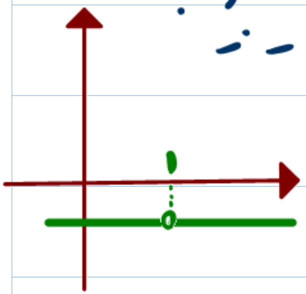


نکته: توابع به فرم کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم، به شرطی $c\neq0$ باشد

(اگر $c=0$ باشد تابع خطی می‌شود) و $ad-bc\neq0$ باشد. اگر $ad-bc=0$ باشد

تابع ثابت $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ می‌شود)

مثال: اگر نمودار تابع $y=\frac{ax+2}{2x+b}$ به صورت زیر باشد، a, b را بیابید.



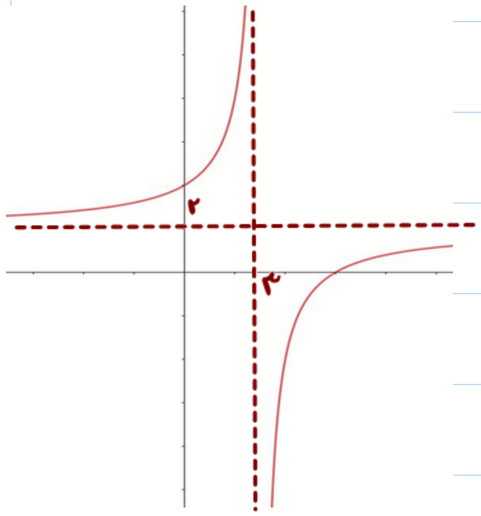
نمودار تابع ثابت است پس: $ab-2(2)=0 \Rightarrow ab=4$

$x=1$ ریشه مخرج است پس $2\times1+b=0 \Rightarrow b=-2$

$a(-2)=4 \Rightarrow a=-2$

تذکر: تابع هموگرافیک فاقد اکسترمم نسبی و نقطه عطف است و دارای یک مجانب قائم $x=-\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی $y=\frac{a}{c}$ است، نقطه تلاقی مجانب‌ها یعنی نقطه $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ مرکز تقارن تابع است.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+4}{bx+1}$ به صورت زیر است. a, b را بیابید.

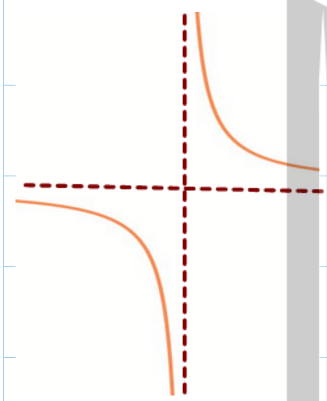


$x=4$ مجانب قائم: پس $x=4$ ریشه مخرج:
$4b+1=0 \to b=-\frac{1}{4}$

$y=2$ مجانب افقی:
$\frac{a}{b}=2 \to a=2b=2(-\frac{1}{4})=-\frac{2}{4}$

نکته: می‌دانیم مشتق تابع هموگرافیک به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است. این تابع روی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است ولی در دو طرف مجانب قائم با توجه به علامت $ad-bc$ یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

مثال: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{mx+1}{x-2}$ به صورت زیر باشد، حدود m را بیابید.



$x=2$ مجانب قائم است، پس در بازه $(-\infty,2)$ و $(2,+\infty)$

تابع اکیداً نزولی است پس f' منفی است $(ad-bc<0)$

$$m(-2)-(1)(1)<0 \Rightarrow -2m-1<0$$

$$\Rightarrow -2m<1 \to m>-\frac{1}{2}$$