درس اوّل : اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

در این درس ابتدا یکنوایی تابع را به کمک مشتق بررسی می کنیم و سپس بعد از تعریف نقاط اکسترمم یک تابع، به کمک مشتق تابع، این نقاط را بررسی می نماییم.

تابع صعودی و نزولی

در فصول گذشته با تعریف توابع صعودی و نزولی آشنا شده ایم. بیاد داریم که :

الف : تابع f را روی بازه‌ی I یکنوا گوییم، هرگاه تابع f روی بازه‌ی I یا صعودی و یا نزولی باشد.

ب : تابع f را روی بازه‌ی I اکیداً یکنوا گوییم، هرگاه تابع f روی بازه‌ی I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد.

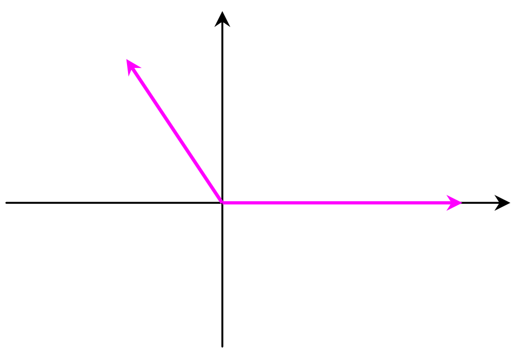
توجه ۱ : طبق تعریف، تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

توجه ۲ : اگر تابع f روی بازه‌ی I اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد، آنگاه روی این بازه صعودی (نزولی) است.

مثال : با رسم نمودار ، یکنوایی تابع $f(x)=|x|-x$ را بررسی کنید.

حل :

$$f(x)=|x|-x=\begin{cases} 0 & x\geq 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$$



مشاهده می شود که تابع f در بازه‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ ثابت است. به طور کلی تابع f در $(-\infty,+\infty)$ نزولی است.

کاربرد مشتق در تشخیص یکنوایی توابع

یکی از کاربردهای مهم مشتق تعیین یکنوایی توابع است. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

فرض کنید تابع f بر روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت :

الف : اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)>0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

ب : اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)<0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

ج : اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)=0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ ثابت است.

توجه ۱ : شرط استفاده از قضیه‌ی فوق آن است که تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد.

توجه ۲ : برای تعیین یکنوایی یک تابع، از تابع مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود به دست می آوریم. سپس تابع مشتق را در قالب یک جدول[1] تعیین علامت می کنیم. در هر فاصله که علامت مشتق ، مثبت بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً صعودی و در هر فاصله که علامت مشتق منفی بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است.

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+1$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=x^3-3x+1 \to f'(x)=3x^2-3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-3=0 \to x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

لذا تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$ اکیداً نزولی و در بازه های $(1,+\infty)$ و $(-\infty,-1)$ اکیداً صعودی است.

توجه :

۱ : عکس این قضیه برای توابع یکنوا درست نیست. برای مثال تابع $f(x)=x^3$ صعودی اکید است. امّا مشتق آن در $x=0$ مثبت نیست.

۲ : ممکن است مشتق تابعی صفر شود و آن تابع صعودی یا نزولی(غیر اکید) باشد. مانند تابع $f(x)=[x]$

[1] . این جدول را جدول تغییرات یا جدول رفتار تابع می نامند.

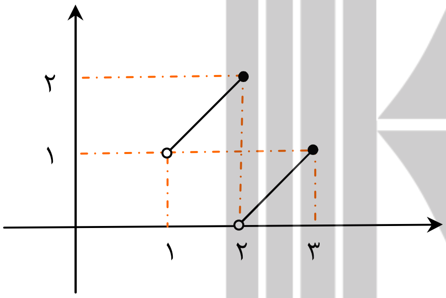
نقاط و مقدار های اکسترمم مطلق (سراسری)

نقطه‌ی $c\in D_f$ را نقطه‌ی مینیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار **مینیمم مطلق** تابع f می نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c,f(c))$ نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f ، بالاتر نباشد.)

نقطه‌ی $c\in D_f$ را نقطه‌ی ماکزیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f می نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c,f(c))$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f ، پایین تر نباشد.)

هر نقطه‌ی مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع نامیده می شود.

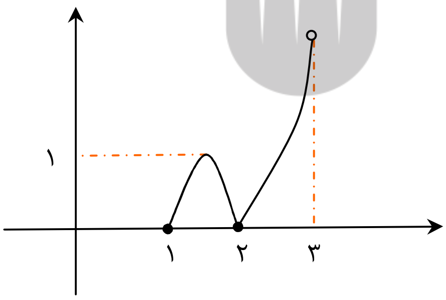
مثال ۱ :



تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست، امّا در $x=۲$ دارای ماکزیمم مطلق است و $\max(f)=f(۲)=۲$

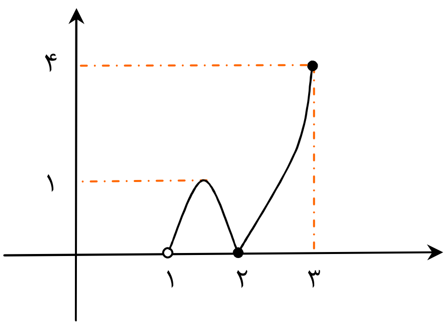
امّا تابع در بازه‌ی $[۱,۳]$ مینیمم مطلق ندارد.

مثال ۲ :



تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست و در $x=۱$ و $x=۲$ دارای مینیمم مطلق است و $\min(f)=f(۱)=f(۲)=۰$ امّا تابع در بازه‌ی $[۱,۳]$ ماکزیمم مطلق ندارد.

مثال ۳ :



تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست و در $x=۲$ دارای مینیمم مطلق است که $\min(f)=f(۲)=۰$ و در $x=۳$ دارای ماکزیمم مطلق است که $\max(f)=f(۳)=۴$

توجه :

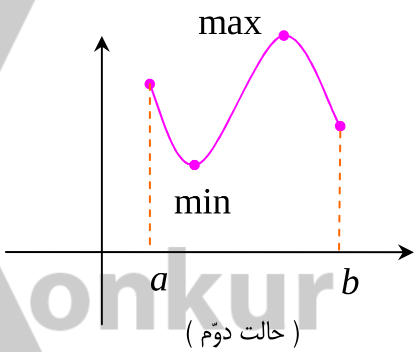
۱ : اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه هم مقدار ماکزیمم و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

۲ : فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. در این صورت در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم مطلق تابع را بررسی می کنیم.

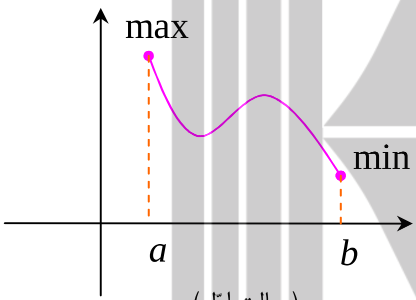
حالت اوّل : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم.

حالت دوّم : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی[2] بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر باشد.

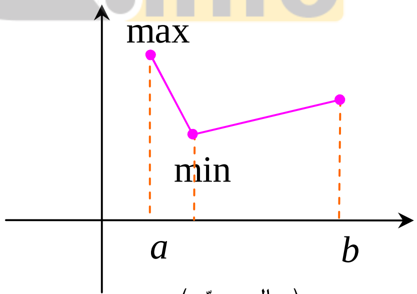
حالت سوّم : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق پذیر نباشد.



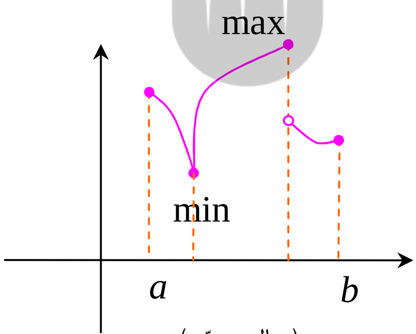
(حالت دوّم)



(حالت اوّل)



(حالت سوّم)



(حالت سوّم)

***

[2] . اگر تابع در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. آنگاه تمام نقاط بازه‌ی (a,b) را نقاط درونی و نقاط $x=b$ و $x=a$ را نقاط کناری می نامند. در بازه‌ی $[a,b)$ فقط $x=a$ و در بازه‌ی $(a,b]$ فقط $x=b$ مرزی و سایر نقاط درونی هستند.

نقاط بحرانی تابع

نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می نامیم، هرگاه یا $f'(c)$ موجود نباشد یا $f'(c)=۰$

اگر نمودار تابع معلوم می باشد به راحتی نقاطی که تابع در آنها مشتق ناپذیر بوده و یا مشتق تابع در آنها صفر است را تعیین نمود. علاوه بر این برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، می توان مشتق تابع را بدست آورده و ریشه های صورت و مخرج آن را به عنوان نقطه‌ی بحرانی می پذیریم.

توجه : با توجه به این تعریف نتیجه می شود که اگر تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، چون تابع درنقاط $x=b$ و $x=a$، مشتق پذیر نیست، پس این نقاط، نقطه‌ی بحرانی محسوب می شوند.

مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=-۲x^۳+۳x^۲+۱$ را روی بازه‌ی $[-۱,۲]$ بیابید.

حل : تابع چند جمله ای است و در تمام نقاط درونی بازه مشتق پذیر است. لذا ابتدا فقط نقاطی را تعیین می کنیم که در آنها مشتق برابر صفر باشد.

$$f(x)=-۲x^۳+۳x^۲+۱$$

$$\to f'(x)=-۶x^۲+۶x \xrightarrow{f'(x)=۰} -۶x^۲+۶x=۰ \to x=۰ \quad \text{یا} \quad x=۱$$

پس نقاط $x=۰$ و $x=۱$ نقاط بحرانی نمودار تابع هستند. نقطه‌ی $x=-۱$ به عنوان نقطه‌ی ابتدای بازه‌ی داده شده، نیز بحرانی می باشد.

مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=-x^۳+۳x^۲$ را روی بازه‌ی $[-۱,۱]$ بیابید.

حل : تابع چند جمله ای در تمام نقاط نقط درونی بازه مشتق پذیر است. لذا ابتدا نقاطی را تعیین می کنیم که در آنها مشتق برابر صفر باشد.

$$f(x)=-x^۳+۳x^۲$$

$$\to f'(x)=-۳x^۲+۶x \xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x^۲+۶x=۰ \to x=۰ \quad \text{یا} \quad x=۲\notin[-۱,۱]$$

پس نقطه‌ی $x=۰$ نقطه‌ی بحرانی نمودار تابع است. نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ به عنوان نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی داده شده، نیز بحرانی می باشند.

مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=-x^۳+۳x^۲$ را روی بازه‌ی $(-۱,۱)$ بیابید.

حل : تابع چند جمله ای در تمام نقاط نقط درونی بازه مشتق پذیر است. لذا ابتدا نقاطی را تعیین می کنیم که در آنها مشتق برابر صفر باشد.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$\rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \xrightarrow{f'(x)=0} -3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 2 \notin [-1,1]$$

پس نقطه‌ی $x = 0$ تنها نقطه‌ی بحرانی نمودار تابع است.

مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 - 3x$ را به دست آورید.

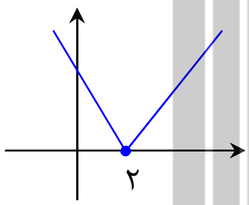
حل : تابع چند جمله ای در تمام نقاط مشتق پذیر است. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1 \;,\; x = -1$$

مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x - 2|$ را تعیین کنید.

حل : دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. $D_f = R$

از طرفی این تابع در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق پذیر نیست. این نقطه یـک نقطـه‌ی بحرانی تابع است.



مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ را تعیین کنید.

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$4x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(4 - x) \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$\rightarrow D_f = [0,4]$$

اکنون از تابع مشتق گرفته و ریشه های صورت و مخرج آن را تعیین می کنیم.

$$f'(x) = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} \xrightarrow{f'(x)=0} \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0 \rightarrow x = 2$$

ریشه های صورت $x = 2$

ریشه های مخرج $x = 0$ و $x = 4$

لذا نقطه های $x = 4$ و $x = 0$ و $x = 2$ نقاط بحرانی نمودار تابع می باشند.

مثال : نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱,۳]$

مشخص کنید.

حل :

$$f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x \rightarrow f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۶x^۲+۶x-۱۲=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۶} x^۲+x-۲=۰ \rightarrow x=۱\in[-۱,۳] \ , \quad x=-۲\notin[-۱,۳]$$

لذا نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ و $x=۳$ بحرانی هستند.

$$f(۱)=۲(۱)^۳+۳(۱)^۲-۱۲(۱)=۲+۳-۱۲=-۷$$
$$f(-۱)=۲(-۱)^۳+۳(-۱)^۲-۱۲(-۱)=-۲+۳+۱۲=۱۳$$
$$f(۳)=۲(۳)^۳+۳(۳)^۲-۱۲(۳)=۵۴+۲۷-۳۶=۴۵$$

نقطه‌ی $(۱,-۷)$ می نیمم مطلق و نقطه‌ی $(۳,۴۵)$ ماکزیمم مطلق است.

تمرین : نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲-۶x$ در هر یک از بازه های زیر تعیین کنید.

الف) $x\in[-۲,۷]$ ب) $x\in(-۲,۷]$ ج) $x\in(-۲,۷)$ د) $x\in[-۲,۵)$

حل :

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲-۶x \rightarrow f'(x)=x^۲-۵x-۶ \xrightarrow{f'(x)=۰} x^۲-۵x-۶=۰$$
$$\rightarrow (x-۶)(x+۱)=۰ \rightarrow x=۶ \ , \quad x=-۱$$

حال جدول زیر را تشکیل می دهیم.

	$x=-۲$	$x=-۱$	$x=۵$	$x=۶$	$x=۷$
الف	بحرانی	بحرانی	❉	بحرانی	بحرانی
ب	❉	بحرانی	❉	بحرانی	بحرانی
ج	❉	بحرانی	❉	بحرانی	❉
د	بحرانی	بحرانی	❉	❉	❉

تمرین : نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=x^۳-۳x$

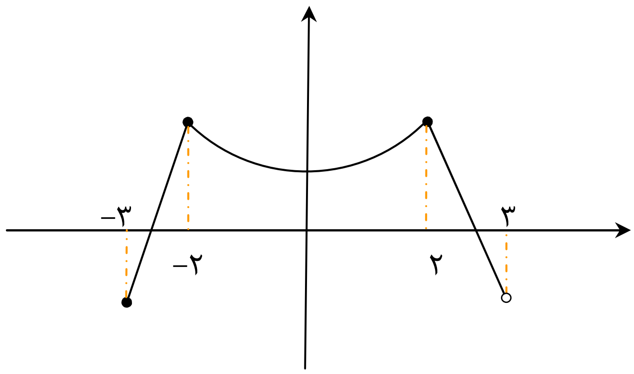
۲) $f(x)=\sqrt{۴x-۷}$

۳) $f(x)=\sqrt{x^۳-۴x}$

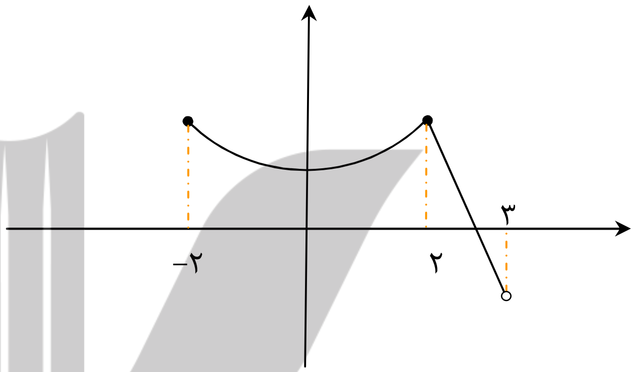
۴) $f(x)=||x|-۱|$

تمرین : در هر مورد نقطه یا نقاط بحرانی تابع داده شده را تعیین کنید.

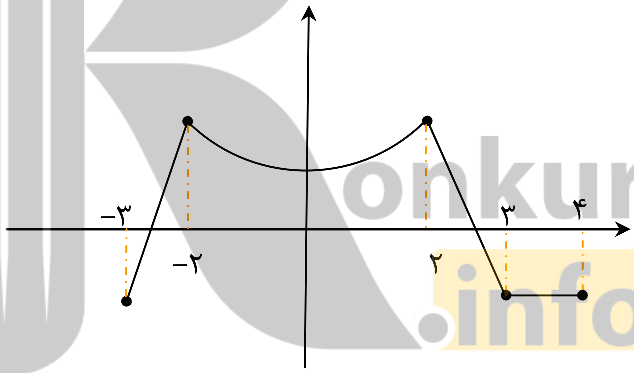
۵)



۶)



۷)



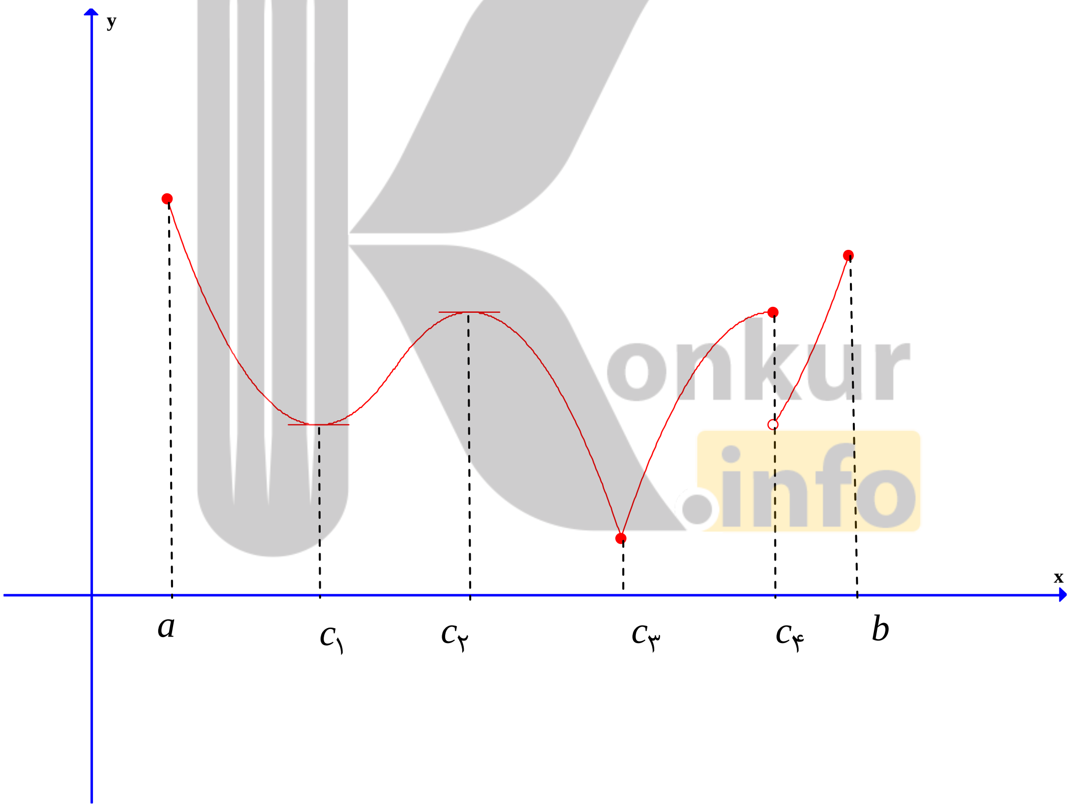
نقاط و مقدار های اکسترمم نسبی (موضعی)

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c\in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c مینیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می نامند.

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c\in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می نامند.

توجه : هر نقطه‌ی مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع نامیده می شود.

مثال : شکل زیر نمودار تابع f است.



تابع f در نقاط $c_۱$ و $c_۳$ دارای مینیمم نسبی و در نقاط $c_۲$ و $c_۴$ دارای ماکزیمم نسبی است. همچنین با توجه به مثال بالا، نکات زیر قابل توجه می باشند.

۱ : شرط لازم برای آن که c نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، آن است که تابع f در یک همسایگی

(دو طرفه‌ی) نقطه‌ی c تعریف شده باشد. بنابراین اگر تابع f فقط روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط a و b نمی توانند اکسترمم نسبی f باشند. (خلاصه اینکه نقاط انتهایی بازه‌ی $[a,b]$ ، اکسترمم نسبی نیستند.)

۲ : لزومی ندارد که تابع f در نقاط اکسترمم نسبی خود، پیوسته یا مشتق پذیر باشد. مانند نقاط $c_۴$ و $c_۳$

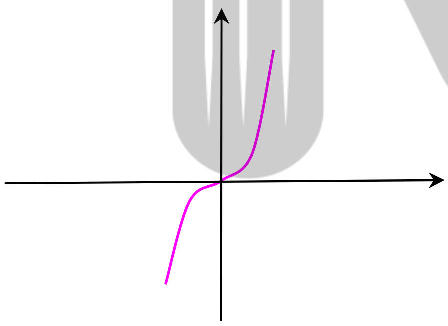
۳ : اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$ است. مانند نقاط $c_۲$ و $c_۱$ (یعنی در نقاط اکسترمم نسبی مشتق پذیر هر تابع ، مقدار عدد مشتق برابر با صفر و خط مماس در آن نقطه افقی است.)

۴ : نقطه‌ی اکسترمم نسبی می تواند نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f نیز باشد. مانند نقطه‌ی $c_۳$ که مینیمم نسبی و مطلق است.

۵ : اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع f در یک همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آن گاه نقطه‌ی c نقطه‌ی اکسترمم نسبی f نیز هست. مانند نقطه‌ی $c_۳$

۶ : هر نقطه‌ی واقع بر یک تابع ثابت یا واقع بر بخشی از یک تابع که ثابت است. هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی محسوب می شود. (زیرا در هر دو تعریف اکسترمم نسبی صدق می کند.)

۷ : هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی یک نقطه‌ی بحرانی f است.



اما هر نقطه‌ی بحرانی درونی لزوماً اکسترمم نسبی (یا مطلق) نیست. $x=۰$ نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)=x^۳$ است. اما اکسترمم f (نسبی یا مطلق) نیست.

قضیه‌ی فرما : اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد. آنگاه $f'(c)=۰$ است.

نتیجه : هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع ، یک نقطه‌ی بحرانی است.

***

آزمون مشتق اوّل (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

فرض کنید c نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد. ($a<c<b$) و تابع f بر بـازه‌ی $I=(a,b)$ پیوسـته و بـر این بازه بجز احتمالاً در c ، مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف : اگر f' روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ب : اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج : اگر f' روی (a,c) و (c,b) تغییر علامت ندهد، آنگاه f در c اکسترمم نسبی ندارد.

توجه کنید که f می تواند در $x=c$ مشتق پذیر ($f'(c)=۰$) یا مـشتق ناپـذیر ($f'(c)$ وجـود نـدارد.) باشد. اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع با آزمون مشتق اول ، اکسترمم هـای نسبی پیوسته‌ی توابع را می توان تعیین نمود.

در این قسمت نیز می توان از جدول تغییرات تابع جهت تعیین علامت مشتق اوّل و تعیین نقاط اکسترمم نیـز کمک گرفت.

مثال : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$$

حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۴x^۳+۴x^۲-۸x\xrightarrow{f'(x)=۰}۴x^۳+۴x^۲-۸x=۰$$

$$\rightarrow ۴x(x^۲+x-۲)=۰\rightarrow ۴x(x+۲)(x-۱)=۰\rightarrow x=-۲\ ,\ x=۰\ ,\ x=۱$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{۳۲}{۳}$	$\nearrow$	۰	$\searrow$	$-\frac{۵}{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$
			min		max		min		

نقاط مینیمم نسبی تابع $(-۲,\frac{-۳۲}{۳})$ و $(۱,\frac{-۵}{۳})$

نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $(۰,۰)$

مثال : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۸x$$

حل :

$D_f = R$

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ = ۰ \rightarrow ۴(x^۳ - ۳x + ۲) = ۰$$

$\rightarrow ۴(x-۱)(x^۲ + x - ۲) = ۰ \rightarrow ۴(x-۱)(x-۱)(x+۲) = ۰ \rightarrow x = -۲ \;,\; x = ۱$ مضاعف

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۲۴	$\nearrow$	۳	$\nearrow$	$+\infty$
			min				

نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $(-۲,-۲۴)$ و تابع نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع ندارد.

توجه کنید که در این تمرین برای حل معادله‌ی $f'(x) = ۰$ از قانون مجموع ضرایب (که در اینجا صفر است.) کمک گرفتیم. همچنین در نقطه‌ی $x = ۱$ مشتق تغییر علامت نداده است، پس این نقطه اکسترمم نسبی نیست.

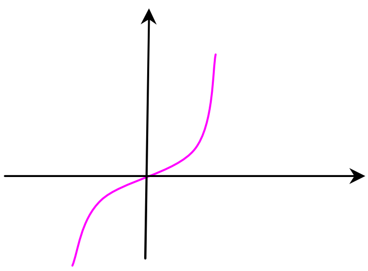
نکته :

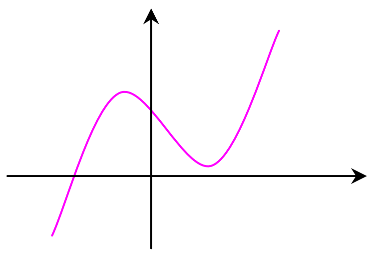
الف : نمودار هر تابع درجه‌ی دوّم به شکل $f(x) = ax^۲ + bx + c$ همواره دارای نقطه‌ی اکسترممی به طول $x = -\dfrac{b}{۲a}$ می باشد.

اگر $a > ۰$ آنگاه این نقطه می نیمم مطلق می باشد.

اگر $a < ۰$ آنگاه این نقطه ماکزیمم مطلق می باشد.

ب : نمودار هر تابع درجه‌ی سوّم به شکل $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ یا یک نقطه‌ی ماگزیمم نسبی و یک نقطه‌ی می نیمم نسبی (همزمان) دارد، یا هیچکدام را ندارد. در صورتی که هر دو نقطه را داشته باشد، طول نقطه‌ی وسط آنها برابر $x = -\dfrac{b}{۳a}$ است.





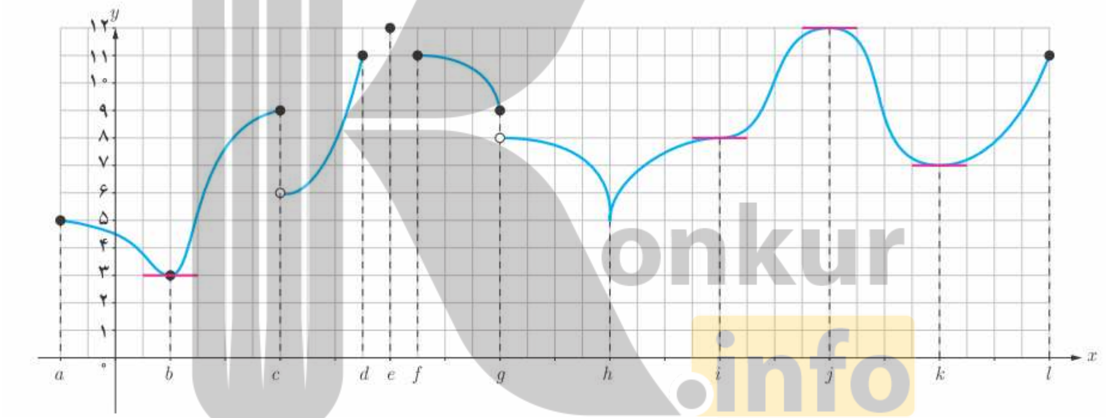
پ : اگر در نقطه ای مانند c مشتق اوّل صفر شود، طوری که در هـر دو طـرف آن نقطـه مـشتق اوّل تغییـر علامت ندهد. آن گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماگزیمم نسبی است.

ت : در توابع پیوستهی مشتق پذیر ریشه های ساده و ریشه های مکرر مرتبهی فرد معادلـهی $f'(x)=۰$ ، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت می دهد.) امّا ریـشه هـای مکرر مرتبهی زوج ، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت نمی دهد.)

ث : برای تعیین علامت مشتق، می توان یک نقطهی دلخواه (غیر از ریشه های آن) را انتخاب و با جایگزین نمودن آن نقطه در مشتق، علامت عدد حاصل را در نظر گرفت.

تمرین برای حل :

۸ : در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد، یعنی تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است، مشخص شده اند. با توجه به این نمودار به سئوالات زیر پاسخ دهید.



الف : تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص کنید.

ب : تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.

پ : تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

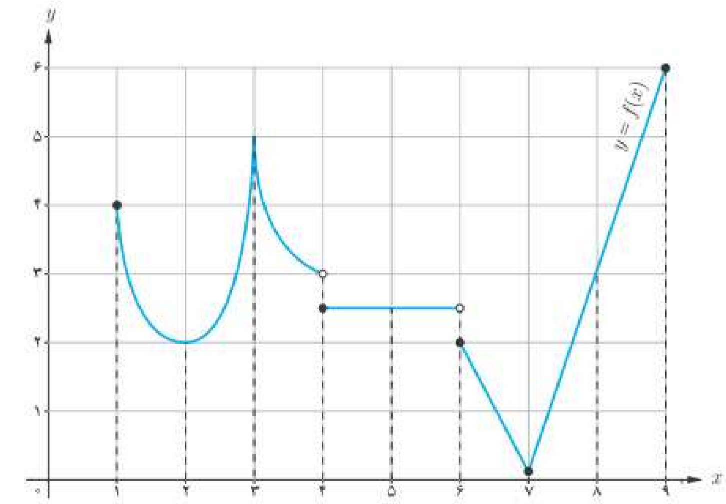
ت : آیا در همهی نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟

ت : در اکسترمم های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟

ج : آیا امکان دارد در نقطه ای مشتق برابر صفر باشد، ولی در آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟

چ : آیا امکان دارد در نقطه ای مشتق وجود نداشته باشد، ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد.

۹ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس جدول داده شده را تکمیل کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×			×	×			✓
min مطلق	×	×			×	×			×
max نسبی	×	×			✓	×			×
min نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطهٔ بحرانی	✓	✓			✓	✓			✓

۱۰ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته، دارای اکسترمم های مطلق است.

ب : هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی باز، دارای اکسترمم های مطلق است.

پ : اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x=c$ نمی تواند اکسترمم نسبی باشد.

ت : اگر $f'(c)=۰$ باشد، آنگاه $x=c$ اکسترمم نسبی است.

ث : اگر $x=c$ طول یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$

۱۱ : نمودار تابعی را رسم کنید که در نقاط اکسترمم آن، مشتق تابع موجود باشد.

سپس با توجه به این نمودار جای خالی را در گزاره های زیر کامل کنید.

الف : در نقاط اکسترمم، مشتق خط مماس برابر .... است.

ب : خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط موازی محور .... است.

۱۲ : اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ را تعیین کنید.

۱۳ : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ روی بازه‌ی $[-۲,۲]$ را تعیین کنید.

۱۴ : اکسترمم های نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-۴x+۶$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ را به دست آورید و مشخص کنید که این تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟

۱۵ : نمودار تابعی را رسم کنید که در فاصله‌ی $(۱,۵)$ مشتق پذیر باشد و در فاصله‌ی $(۱,۲)$ صعودی و در فاصله‌ی $(۲,۳)$ نزولی و در فاصله‌ی $(۳,۴)$ صعودی باشد.

۱۶ : نمودار تابعی را رسم کنید که در فاصله‌ی $(۱,۳)$ نزولی باشد و در فاصله‌ی $(۳,۴)$ ثابت باشد. طوری که در فاصله‌ی $(۱,۴)$ مشتق پذیر نباشد.

۱۷ : نمودار تابعی را رسم کنید که در فاصله‌ی $(۱,۳)$ نزولی باشد و در فاصله‌ی $(۳,۴)$ ثابت باشد. طوری که در فاصله‌ی $(۱,۴)$ مشتق پذیر باشد.

۱۸ : نمودار تابعی را رسم کنید که در بازه‌ی $[۱,۶]$ همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

الف : در فاصله‌ی $(۱,۶)$ مشتق پذیر باشد.
ب : در فاصله‌ی $(۱,۲)$ مشتق منفی باشد.

پ : در فاصله‌ی $(۲,۳)$ مشتق مثبت باشد.
ت : در فاصله‌ی $(۳,۴)$ مشتق صفر باشد.

ث : در فاصله‌ی $(۴,۶)$ مشتق منفی باشد.

۱۹ : نمودار تابعی را رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

الف : نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد و مشتق در آن برابر صفر باشد.

ب : نقطه‌ی می نیمم نسبی داشته باشد و تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

پ : نقطه‌ی ماکزیمم مطلق نقطه‌ی بحرانی باشد.

ت : نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد و تابع در آن ناپیوسته باشد.

ث: نقطه ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.

۲۰ : نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه اش پیوسته باشد ولی ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

۲۱ : برای هر مورد نمودار یک تابع رسم کنید.

الف : تابع f در بازه ای مانند $[a.b]$ صعودی است، امّا صعودی اکید نباشد.

ب : تابع f در بازه ای مانند $[a.b]$ نزولی است، امّا نزولی اکید نباشد.

ج : تابع f در بازه ای مانند $[a.b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

۲۲ : برای هر کدام از موارد زیر ، نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف : تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است، امّا در برخی نقاط آن پیوسته نیست.

ب : تابعی در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است، امّا در برخی نقاط آن بازه مشتق پذیر نیست.

ج : تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق پذیر است، امّا مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

۲۳ : نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۲۴ : نمودار هر یک از توابع زیر را در بازه‌ی داده شده رسم کنید و سپس نقاط اکسترمم نسبی و مطلق و نقاط بحرانی را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x)=۳x^{۲}-۲x-۵ \quad ; \quad [-۲,۱]$

ب) $f(x)=x^{۳}-۳x \quad ; \quad [-۱,۲]$

ج) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ۰\le x<۲\\ ۴-x & x\ge ۲\end{cases}$

۲۵ : تعیین کنید که توابع زیر در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی هستند؟

الف) $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$

ب) $f(x)=-x^{۳}+۳x$

پ) $f(x)=۲x^{۳}-۳x^{۲}-۱۲x+۷$

ت) $f(x)=x^{۴}$

ث) $f(x)=\dfrac{x}{x-۲}$

۲۶ : نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که تمام شرایط زیر را داشته باشد.

$f(\text{۰})=\text{۰}$ و $f(\text{۴})=-\text{۲}$ و $f(-\text{۱})=\text{۵}$

نقطه‌ی $(\text{۱},\text{۱})$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

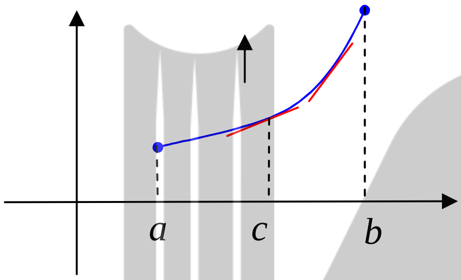
***

درس دوّم : جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف آن

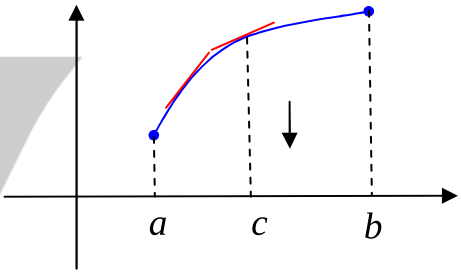
در این درس ابتدا مفهوم تقعر منحنی را بیان می کنیم. سپس به کمک مشتق دوّم تـابع ، روش تعیـین تقعـر نمودار تابع بیان می نماییم.

جهت تقعر منحنی

به شکل های زیر توجه کنید. هر دو تابع روی بازه ی (a,b) صعودی اند. ولی در شـکل (۱) تقعـر (گـودی) منحنی رو به بالا و در شکل (۲) تقعر رو به پایین است.

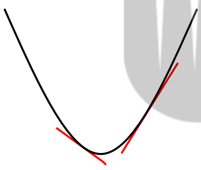


شکل (۱)

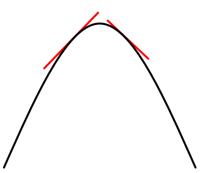


شکل (۲)

گوییم تابع f در نقطه‌ی $(c, f(c))$ تقعر رو به بالا (رو به پایین) دارد، هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و در یک همسایگی نقطه‌ی c منحنی تابع بالای (پایین) خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی c باشد.



اگر نمودار تابع f روی بازه‌ی I ، بـالای همـه‌ی مماس هـایش باشـد، آنگـاه نمودار f را مقعر رو به بالا (یا به اختصار مقعر یا گود) می نامند.



اگر نمودار تابع f روی بازه‌ی I ، پـایین همـه‌ی ممـاس هـایش باشـد، آنگـاه نمودار f را مقعر رو به پایین (یا به اختصار محدب یا تپه) می نامند.

اکنون به قضیه‌ی زیر موسوم به قضیه‌ی تقعر توجه کنید.

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x از بازه‌ی باز I موجود باشد. در این صورت:

الف: اگر به ازای هر $x \in I$ ، $f''(x) > 0$ باشد، آنگاه نمودار f روی بازه‌ی I تقعر رو به بالا دارد.

ب : اگر به ازای هر $x\in I$ ، $f''(x)<۰$ باشد، آنگاه نمودار f روی بازه‌ی I تقعر رو به پایین دارد.

برای تعیین جهت تقعر منحنی تابع f ، مشتق دوّم آن را محاسبه کرده، نقاطی که f'' در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را به دست آورده و f'' را تعیین علامت می کنیم. در هر بازه ای که $f''>۰$ باشد، جهت تقعر f رو به بالا و در هر بازه ای که $f''<۰$ باشد، جهت تقعر f رو به پایین است. جدول تعیین علامت f'' را جدول تقعر تابع نیز می نامند.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را دامنه‌ی تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ب) $g(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$

حل :

الف :

$$D_f=R-\{۰\}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x}\rightarrow f'(x)=-\frac{۱}{x^{۲}}\rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}$$

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y''		−	ن	+	
y	∘	∩ $-\infty$	ن ‖	$+\infty$ ∪	∘

ب:

$$g(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱\rightarrow g'(x)=۳x^{۲}+۶x\rightarrow g''(x)=۶x+۶$$

$$\xrightarrow{g''(x)=۰}۶x+۶=۰\rightarrow x=-۱$$

x	$-\infty$		-۱		$+\infty$
y''		−	۰	+	
y	$-\infty$	∩	۳	∪	$+\infty$

مثال : با تشکیل جدول تعیین علامت f'' تعیین کنید که تابع $f(x)=x^{۴}-۲۴x^{۲}-x$ روی چه بازه ای دارای تقعر رو به بالا و روی چه بازه ای دارای تقعر رو به پایین است؟

حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۴x^{۳}-۴۸x-۱ \rightarrow f''(x)=۱۲x^{۲}-۴۸$$

$$\xrightarrow{f''(x)=۰} ۱۲x^{۲}-۴۸=۰ \rightarrow x=\pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y''		+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	$\cup$	-۷۸	$\cap$	-۸۲	$\cup$	$+\infty$

در بازه‌ی $(-۲,۲)$ جهت تقعر تابع رو به پایین و در فاصله های $(۲,+\infty)$ و $(-\infty,۲)$ رو به بالا است.

***

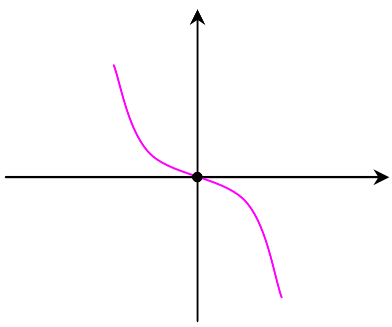
نقطه‌ی عطف نمودار تابع

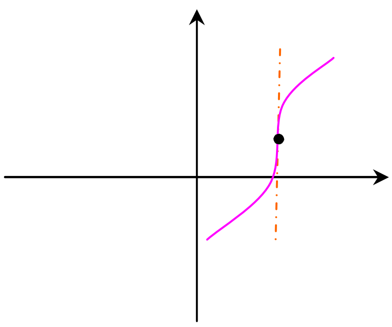
نقطه‌ی $(c,f(c))$ ، **نقطه‌ی عطف** نمودار تابع f نامیده می شود (یا تابع f در c نقطه‌ی عطف دارد.)

هرگاه دو شرط زیر هم زمان باشند.

الف : نمودار f در c دارای مماس واحد باشد. (یعنی $f'(c)=L$ یا $f'(c)=+\infty$ یا $f'(c)=-\infty$)

ب : جهت تقعر f در c عوض شود. (یعنی f'' تغییر علامت دهد.)





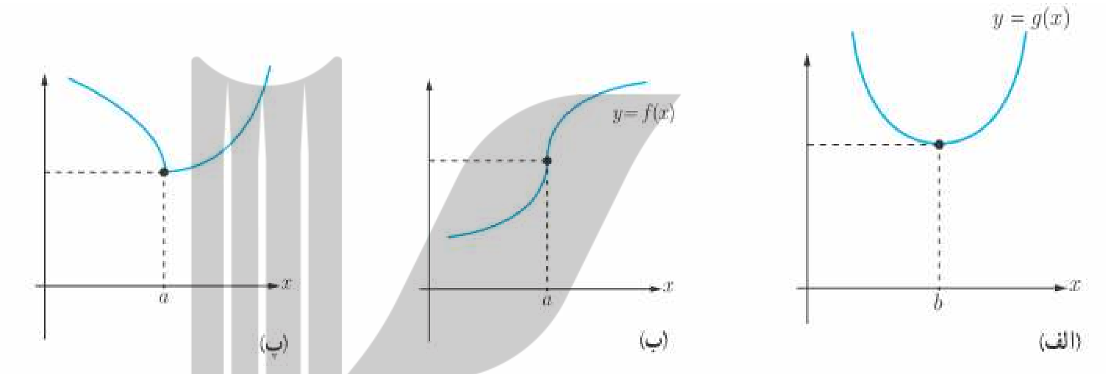
توجه :

الف : اگر نقطه‌ی c حداقل یکی از شرط های فوق را نداشته باشد. نقطه‌ی عطف نمودار تابع نیست.

ب : نقطه‌ی عطف تنها نقطه ای از نمودار تابع است که منحنی دارای مماس واحد بوده و مماس بر منحنی در این نقطه از منحنی عبور می کند.

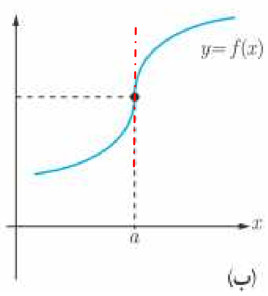
ج : با توجه به شرط اوّل نتیجه می شود که تابع f در نقطه‌ی عطف پیوستگی دو طرفه دارد.

مثال : در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص کنید و خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف را رسم کنید.



حل : در حالت « الف » تقعر منحنی در همسایگی نقطه‌ی $x=b$ عوض نشده است. لذا نقطه‌ی $x=b$ نقطه ی عطف نیست.

در حالت « پ » تقعر منحنی در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ عوض شده است، امّا در این نقطه منحنی مماس واحد ندارد. لذا این نقطه، نقطه‌ی عطف نمی باشد. در حالت « ب » نقطه‌ی $x=a$ هر دو شرط نقطه‌ی عطف را دارد. لذا این نقطه، نقطه‌ی عطف نمودار تابع است.



توجه : برای تعیین نقطه‌ی عطف منحنی تابع f ، مشتق دوّم تابع را محاسبه کرده، ریشه های صورت و مخرج f'' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم. در هر نقطه که f'' تغییر علامت دهد. در صورتی که مماس واحد داشته باشیم، آنگاه نمودار تابع f در آن نقطه دارای عطف است. (در نقطه‌ی عطف تابع یا $f''(c)=0$ است و یا $f''(c)$ وجود ندارد.)

مثال : نقطه یا نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-6x^2$ ب) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

حل الف :

$D_f=R$

$$f'(x)=3x^2-12x \to f''(x)=6x-12 \xrightarrow{f''(x)=0} 6x-12=0 \to x=2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ $\cap$	-16 عطف	$+\infty$ $\cup$

حل ب :

$D_f=R$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to f''(x)=\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$x=0$ ریشه‌ی مخرج

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$+$	نامعین	$-$
y	$-\infty$ $\cup$	0 عطف	$+\infty$ $\cap$

نقطه‌ی $(0,0)$ نقطه‌ی عطف قائم تابع نیز نامیده می شود.

توجه : نقطه‌ی $x=0$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است. ولی $f''(0)$ موجود نیست.

نکته :

الف: اگر مشتق دوّم تابعی در نقطه‌ی $x=c$ صفر شود و تغییر علامت ندهد، آن نقطه، نقطه‌ی عطف نیست.

بطور مثال نقطه‌ی $x=0$ در تابع $f(x)=x^4$ که با وجود اینکه $f''(0)=0$ ا ست ولی تغییر علامت نمی دهد.

ب : نمودار هر تابع درجه‌ی سوم به شکل $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ همواره دارای نقطه‌ی عطفی به طول $x=-\frac{b}{۳a}$ می باشد.

پ : در توابع چند جمله ای ریشه های ساده یا مکرر از مرتبه‌ی فرد f'' ، همواره نقطه‌ی عطف نمودار تابع f هستند.

مثال : جدول تغییرات و جدول تقعر تابع $f(x)=x^{۳}-۳x$ و نقاط اکسترمم و نقاط عطف نمودار تـابع را در صورت وجود به دست آورید.

حل:

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^{۲}-۳=۰\to x=\pm ۱$$

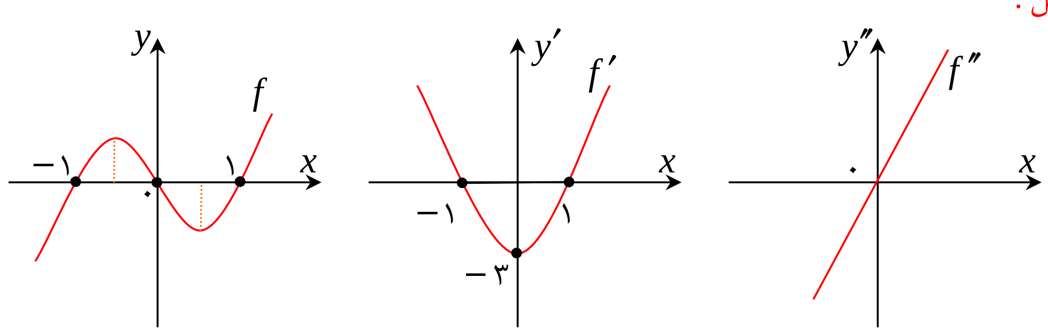
$$f''(x)=۶x\xrightarrow{f''(x)=۰}۶x=۰\to x=۰$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۰	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	$+\infty$
		$\cap$	max	$\cap$	عطف	$\cup$	min	$\cup$	

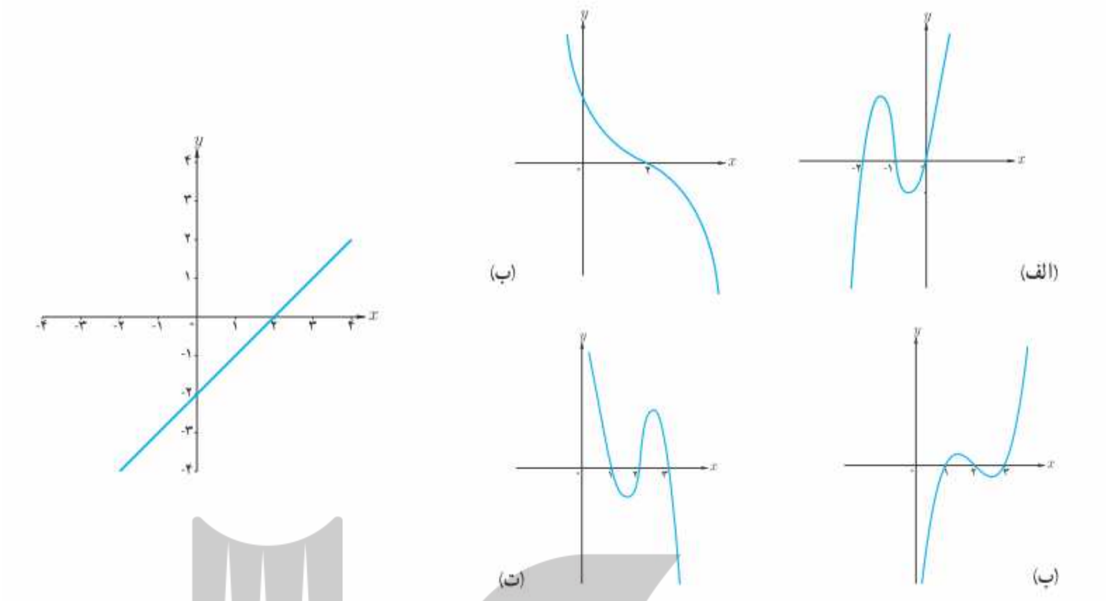
توجه : تابع درجه‌ی سوّم یا دارای یک نقطه‌ی مـاکزیمم نـسبی و یـک نقطـه‌ی مینـیمم نـسبی اسـت، یـا هیچکدام را ندارد. ولی در هر حالت نقطه‌ی عطف دارد. در صورتی که تابع درجه‌ی سوّم دارای یـک نقطـه‌ی ماکزیمم نسبی و یک نقطه‌ی مینیمم نسبی باشد، نقطه‌ی عطف وسط آنها است.

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۳x$ به همراه نمودار مشتقات اوّل و دوّم آن را رسم کنید.

حل :



مثال : اگر شکل زیر نمودار f'' باشد، کدام نمودار می تواند نمودار f باشد.



حل: با توجه به نمودار مشخص است که تابع درجه سوّم و صعودی می باشد. از طرفی طول نقطه‌ی عطف مثبت می باشد. لذا نمودار « ب » جواب مسئله است.

***

آزمون مشتق دوّم (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

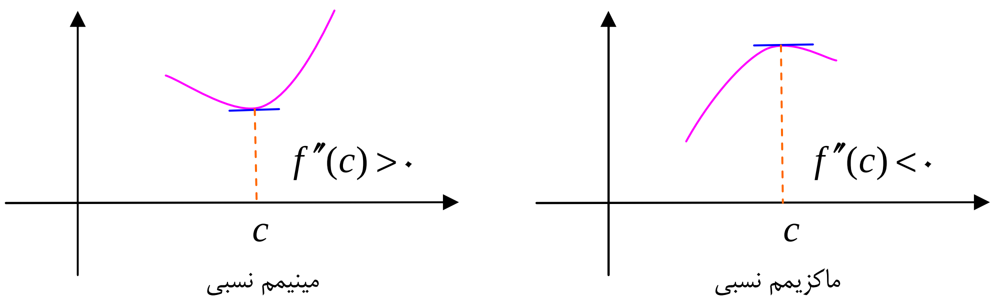
گاهی می توان از مشتق دوّم برای تعیین اکسترمم های نسبی (موضعی) نیز استفاده کرد.

فرض کنید $(c, f(c))$ نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و $f'(c)=0$ و $f''(c)$ موجود باشد. در این صورت:

الف : اگر $f''(c)>0$ باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ب : اگر $f''(c)<0$ باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ج : اگر $f''(c)=0$ باشد، آنگاه آزمون بی نتیجه است (یعنی با این آزمون نمی توان حکم قطعی داد.)



توجه : از آنجا که طبق شرایط فوق باید $f''(c)$ موجود باشد، لذا تابع f باید در $x=c$ مشتق پذیر باشد و چون c نقطه‌ی بحرانی f است. لذا باید $f'(c)=۰$ باشد. بنابراین با آزمون مشتق دوم، اکسترمم های نسبی مشتق پذیر توابع را می توان تعیین نمود.

مثال : به کمک آزمون مشتق دوم ، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲-۹x-۷$ را تعیین کنید.

حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۳x^۲+۶x-۹\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^۲+۶x-۹=۰$$

$$\to x^۲+۲x-۳\to x=۱\ ,\ x=-۳$$

نقاط $x=۱$ و $x=-۳$ نقاط بحرانی تابع هستند و $f'(۱)=۰$ و $f'(-۳)=۰$. همچنین f'' روی $I=(-\infty,+\infty)$ موجود است. لذا:

$$f''(x)=۶x+۶\to\begin{cases}f''(۱)=۱۲>۰\\ f''(-۳)=-۱۲<۰\end{cases}$$

پس طبق آزمون مشتق دوم نقطه‌ی $x=۱$ مینیمم نسبی و نقطه‌ی $x=-۳$ ماکزیمم نسبی است.

تمرین برای حل :

۷ : جای خالی را کامل کنید.

الف : اگر f'' در یک بازه مثبت باشد. تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به .... است.

ب : اگر f'' در یک بازه منفی باشد. تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به .... است.

۸ : نمودار تابعی را با اطلاعات زیر رسم کنید.

الف: $f(۰)=f(۱)=f(۲)=۰$ 　　ب: مشتق دوّم تابع $(-\infty,۱)$ منفی است.

ج: مشتق دوّم تابع $(۱,+\infty)$ مثبت است.

۹ : کدام یک از گزاره های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ برای گزاره های نادرست، مثال نقض ذکـر کنید.

الف : در نقطه‌ی عطف علامت $f''(x)$ تغییر می کند.

ب : هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطه‌ی عطف است.

پ : هر نقطه ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود، یک نقطه‌ی عطف است.

ت : تابع می تواند بیش از یک نقطه ی عطف داشته باشد.

ث : تابع اکیداً صعودی نقطه‌ی عطف ندارد.

۱۰ : نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که در نقطه ای مانند a جهت تقعر عوض شود، ولی این نقطه، نقطه‌ی عطف نباشد.

۱۱ : جهت تقعر توابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۵$

ب) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$

ج) $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$

د) $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}$

۱۲ : به کمک آزمون مشتق دوّم ، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۵$ را تعیین کنید.

***

درس سوّم : رسم نمودار تابع

در این درس می خواهیم به کمک مشتق یک تابع و با تعیین صعودی و نزولی بودن آن و نقاط بحرانی، نمودار تابع را رسم نماییم.

مراحل رسم نمودار توابع به کمک مشتق

برای رسم نمودار یک تابع ، با استفاده از مشتق، به ترتیب زیر عمل کنید.

۱ : دامنه‌ی تابع را تعیین می کنید.

۲ : از تابع مشتق گرفته و ریشه های آن را در صورت وجود به دست می آورید.

۳ : جدول تغییرات را رسم می کنید.

۴ : به کمک جدول تغییرات، نمودار تابع را روی صفحه‌ی محور های مختصات رسم کنید.

اگر لازم باشد، جهت دقت بیشتر در نقطه یابی و ترسیم نمودار، می توانید از نقاط دلخواه دیگری[1] با توجه بـه معادله‌ی تابع انتخاب کنید. این نقاط را نقاط کمکی می نامند.

توجه : در صورتی که تابع دارای مجانب افقی یا قائم باشد. ابتدا مجانب های آن را تعیین و قبـل از ترسـیم نمودار تابع، نمودار مجانب ها را رسم کنید.

❋❋❋

رسم نمودار توابع چند جمله ای به کمک مشتق

ابتدا موضوع فقط به رسم نمودار توابع چند جمله ای محدود می کنیم.

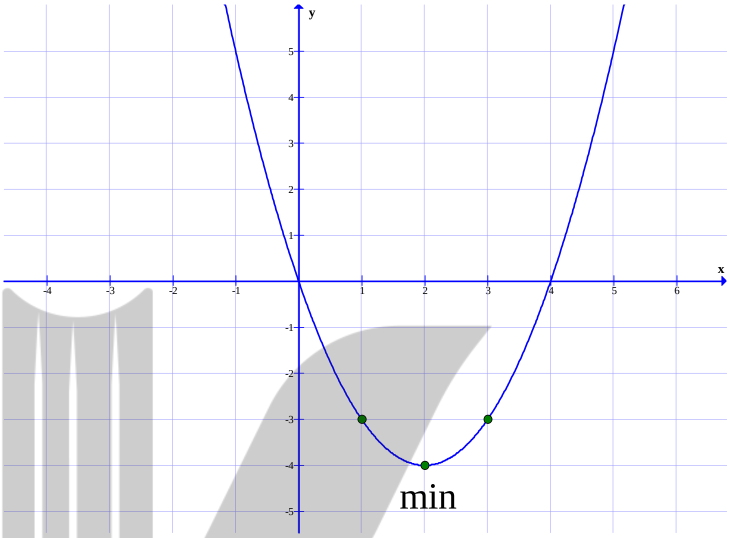
مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۴x$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x)=۲x-۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۲x-۴=۰ \rightarrow x=۲$$

[1] . نقاط برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات در صورت وجود را نیز تعیین کنید.

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
y'			−		۰		+		
y	$+\infty$	↘	-۳	↘	-۴ min	↗	-۳	↗	$+\infty$

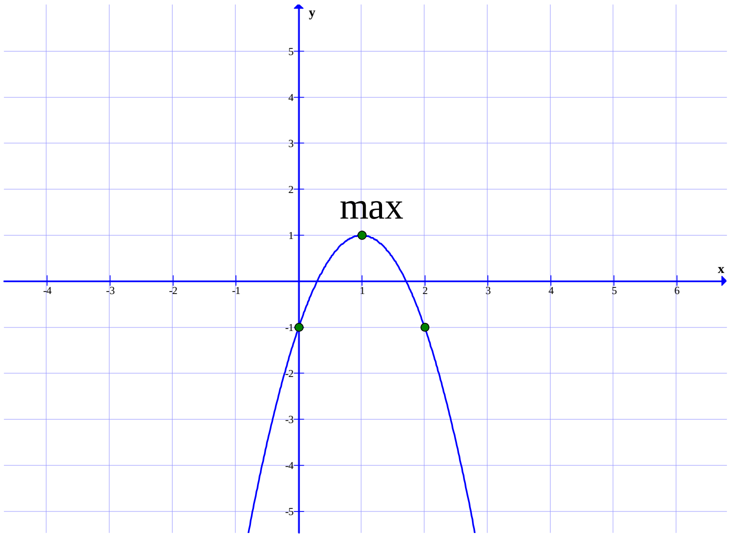


مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = -۲x^{۲} + ۴x - ۱$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x) = -۴x + ۴ \xrightarrow{f'(x)=۰} -۴x + ۴ = ۰ \rightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'			+		۰		−		
y	$-\infty$	↗	-۱	↗	۱ max	↘	-۱	↘	$-\infty$



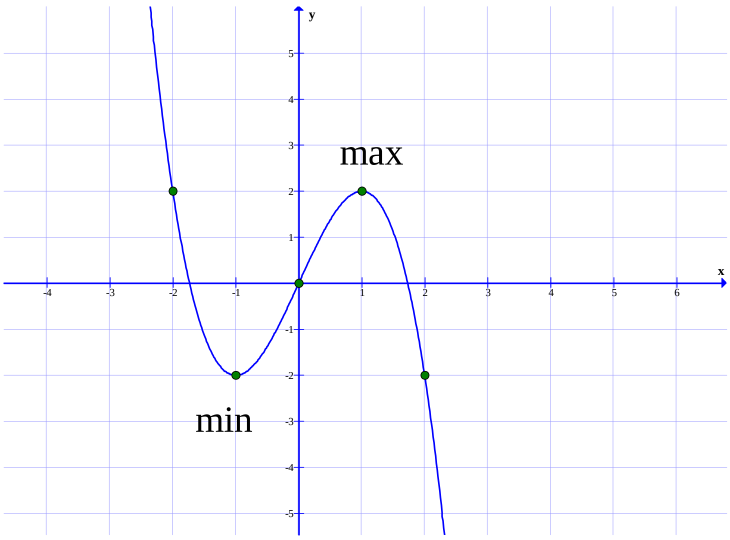
***

مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}+۳x$ را رسم کنید.

حل :

$$f'(x)=-۳x^{۲}+۳\xrightarrow{f'(x)=۰}-۳x^{۲}+۳=۰\rightarrow -۳x^{۲}=۱\rightarrow x=\pm۱$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		$-$			$\circ$		$+$		$\circ$				$-$
y	$+\infty$	$\searrow$	۲	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۲	$\searrow$	-۲	$\searrow$	$-\infty$
					min				max				



مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=3x^{3}-9x$ را رسم کنید.

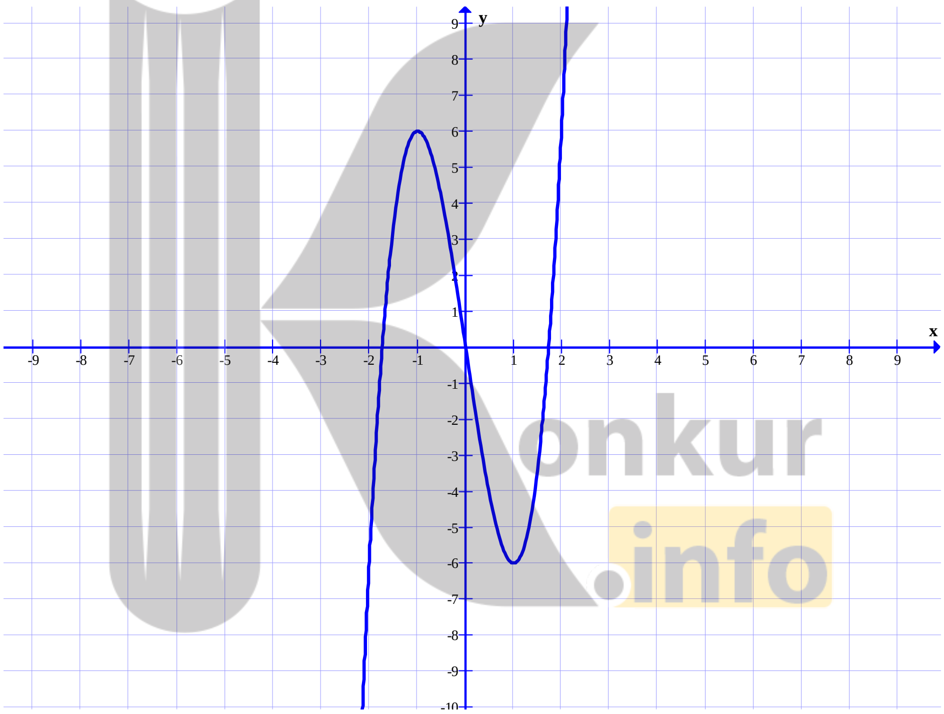
حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=9x^{2}-9\xrightarrow{f'(x)=0}9x^{2}-9=0\rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	6 max	↘	0 عطف	↘	-6 min	↗	$+\infty$

$$f(x)=0\rightarrow 3x^{3}-9x=0\rightarrow x=0,x=\pm\sqrt{3}$$



مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^{4}-8x^{2}+7$ را رسم کنید.

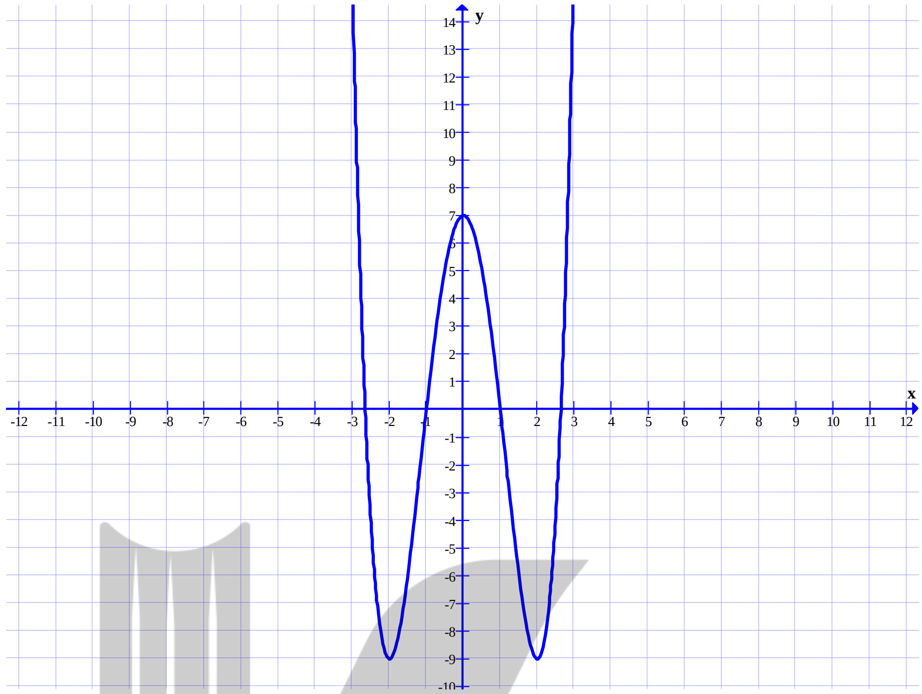
حل :

$$f(x)=x^{4}-8x^{2}+7 \quad \text{و} \quad D_f=R$$

$$f'(x)=4x^{3}-16x\xrightarrow{f'(x)=0}4x^{3}-16x=0\rightarrow 4x(x^{2}-4)=0\rightarrow x=0,x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	-9 min	↗	7 max	↘	-9 min	↗	$+\infty$

$f(x)=۰ \to x^۴-۸x^۲+۷=۰ \to x=\pm ۱\ ,\ \ x=\pm\sqrt{۷}$



❋❋❋

تمرین برای حل :

۱ : جدول تغییرات و نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=-۳x^۲+۶x+۱$ ت) $f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x$

ب) $f(x)=۳x^۲-۳x$ ث) $f(x)=-x(x+۲)^۲$

پ) $f(x)=-x^۳+۳$ ج) $f(x)=x^۴-۴x^۳$

۲ : نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط زیر را همزمان داشته باشد.

الف : دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی بوده و تابع در تمام نقاط پیوسته و مشتق پذیر باشد.

ب : تابع در فاصله های $(-\infty,-۱)$ و $(۱,+\infty)$ نزولی اکید است.

پ : در فاصله‌ی $(-۱,۱)$ علامت f' مثبت است.

ت : نقطه‌ی $(۰,۰)$، نقطه‌ی عطف آن باشد.

ث : نقطه‌ی $(-۱,-۲)$ می نیمم نسبی و نقطه‌ی $(۱,۲)$ ماگزیمم نسبی تابع باشد.

❋❋❋

رسم نمودار تابع هموگرافیک(همنگار)

هر تابع به صورت $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ به شرط $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ و $c\neq 0$ را تابع **هموگرافیک** می نامند. این تابع به ازای همه‌ی مقادیر x بجز ریشه‌ی مخرج یعنی $x=\dfrac{-d}{c}$ پیوسته است.

تابع هموگرافیک دارای دو مجانب بصورت زیر می باشد.

مجانب قائم $\qquad cx+d=0 \rightarrow x=\dfrac{-d}{c}$

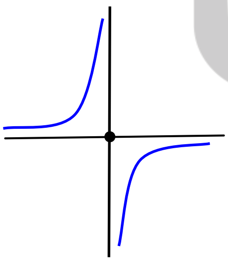
مجانب افقی $\qquad y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax}{cx}=\dfrac{a}{c}$

اگر از تابع هموگرافیک مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

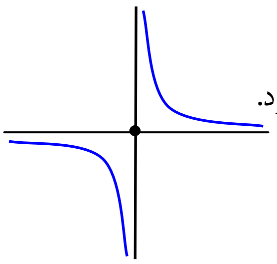
$$y'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

و چون $\dfrac{b}{d}\neq\dfrac{a}{c}$ پس $ad\neq bc$ لذا همواره $y'\neq 0$ می باشد و لذا تابع نقطه‌ی هیچگاه ماگزیمم یا مینیمم ندارد. همچنین اگر $ad-bc>0$ باشد، تابع در هر سمت مجانب قائم آن صعودی اکید و اگر $ad-bc<0$ باشد تابع در هر سمت مجانب قائم آن نزولی اکید است. ولی طبق تعریف، تابع هموگرافیک در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی می باشد.

اگر مشتق مثبت باشد، نمودار تابع در ناحیه‌ی دوّم و چهارم مجانب هایش قرار می گیرد.



و اگر مشتق منفی باشد، نمودار تابع در ناحیه‌ی اوّل وسوّم مجانب هایش قرار می گیرد.

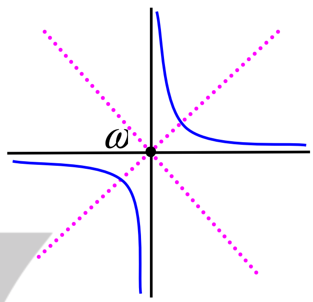


تابع هموگرافیک دارای یک مرکز تقارن و دو محور تقارن است.

مرکز تقارن، تابع هموگرافیک محل تلاقی مجانب های آن است. لذا مختصات مرکز تقارن همواره به صورت زیر می باشد.

$$\omega(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$$

محورهای تقارن تابع هموگرافیک یکی از مجموع دو مجانب و دیگری از تفاضل دو مجانب تابع بدست مـی آیند.



$$x+y=\frac{-d}{c}+\frac{a}{c}=\frac{a-d}{c}$$

$$x-y=\frac{-d}{c}-\frac{a}{c}=-\frac{a+d}{c}$$

مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{x+۱}{x-۲} \quad \text{و} \quad D_f=R-\{۲\}$$

مجانب قائم $x-۲=۰ \rightarrow x=۲$

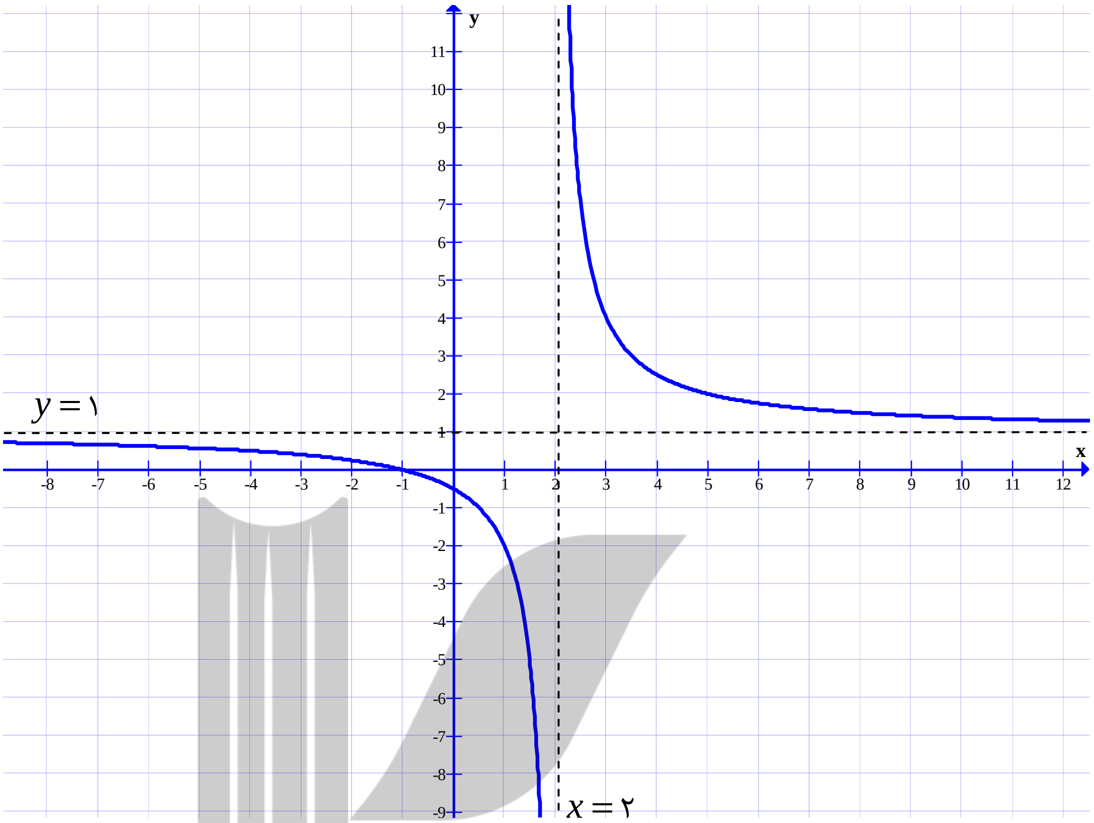
مجانب افقی $\lim\limits_{x\rightarrow\pm\infty} f(x)=۱ \rightarrow y=۱$

$$f'(x)=\frac{۱(x-۲)-۱(x+۱)}{(x-۲)^۲}=\frac{-۳}{(x-۲)^۲}<۰$$

مشتق اوّل ریشه ندارد و همواره منفی می باشد. پس تابع در هر سمت مجانب قائم آن همواره نزولی است.

x	$-\infty$		۱		۲			۳		$+\infty$
y'		−		−			−		−	
y	۱	↘	−۲	↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$	↘	۴	↘	۱

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-۲}{x}$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{x-۲}{x} \quad \text{و} \quad D_f=R-\{۰\}$$

$x=۰$ مجانب قائم

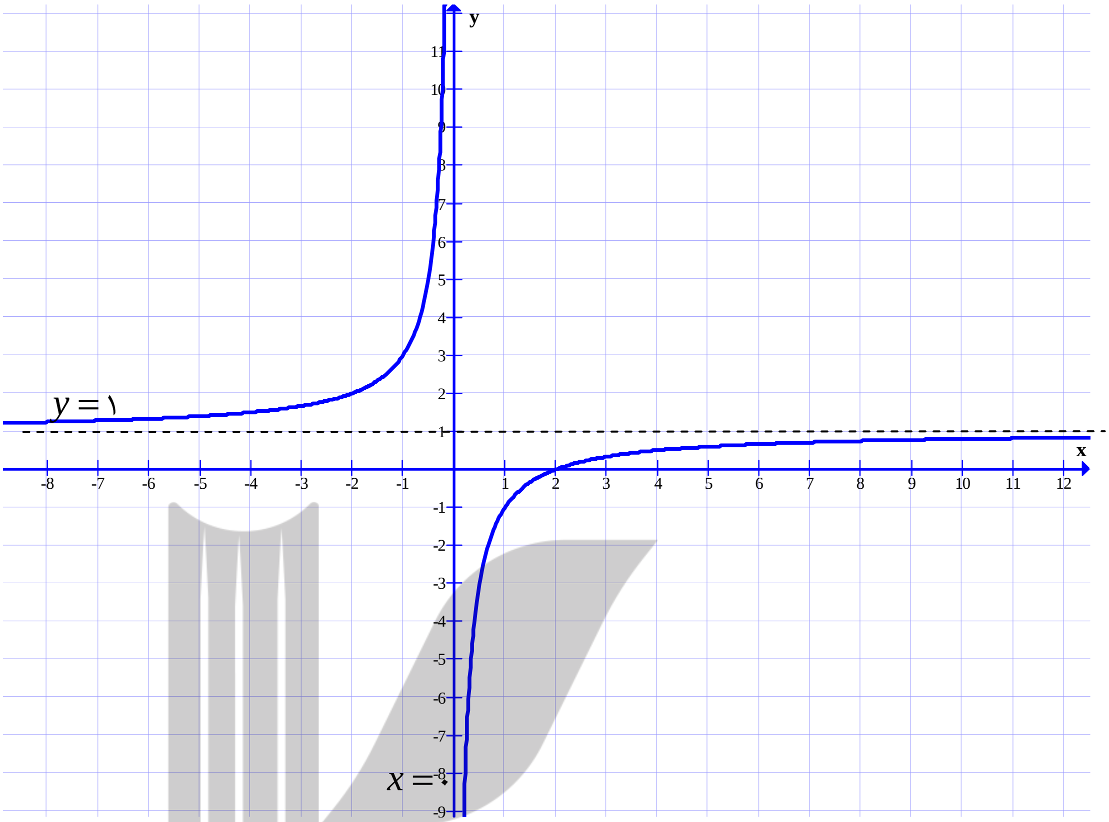
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=۱ \to y=۱$ مجانب افقی

$$f'(x)=\frac{۱(x)-۱(x-۲)}{x^۲}=\frac{۲}{x^۲}>۰$$

مشتق اوّل ریشه ندارد و همواره مثبت می باشد. پس تابع در هر سمت مجانب قائم آن همواره صعودی است.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+		+		+	۰	+	
y	۱	$\nearrow$	۳	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	-۱	$\nearrow$	۱

ابتدا مجانب ها و سپس نمودار تابع را رسم می کنیم.



***

تمرین برای حل :

۳ : جدول تغییرات و منحنی نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=\dfrac{2x}{x-1}$ ۲) $y=\dfrac{3x-2}{2x}$

۴ : معادلات مجانب ها و محور های تقارن و مختصات مرکز تقارن تابع زیر را بدست آورید.

$$y=\frac{x-1}{2x-1}$$

۵ : در تابع $y=\dfrac{2x+1}{2x-3k}$ مقدار k را چنان تعیین کنید که خط $x=-2$ مجانب قائم منحنی نمودار این تابع باشد.

۶ : معادله‌ی یک تابع هموگرافیگ را طوری بنویسید که

الف : نقطه‌ی $(2,1)$ محل تقاطع مجانب های آن است. ب : نمودار تابع از نقطه‌ی $(-1,0)$ می گذرد.

۷ : در تابع $y=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ مقادیر c و b و a را طوری بیابید که $\omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ مرکز تقارن منحنی بوده و نمودار تابع محور x ها را در نقطه ای به طول یک قطع کند.

۸ : تابع $y=\dfrac{ax+b}{x+d}$ داده شده است.

الف) مقادیر d و b و a را چنان بیابید که $x=-1$ و $y=2$ مجانب های منحنی نمایش تابع بوده و نمودار تابع محورعرض ها را در نقطه ای به عرض -1 قطع کند.

ب) جدول تغییرات و نمودار تابع مقابل را رسم کنید. $y=\dfrac{2x}{x+1}$

۹ : تابع هموگرافیکی را بنویسید که مجانب های آن $x=2$ و $y=1$ بوده و محور طول ها را در نقطه ای به طول ۴ قطع کند.

۱۰ : تابع $y=\dfrac{ax+1}{x-1}$ داده شده است.

الف) مقدار a را به قسمی بیابید که فاصله‌ی مرکز تقارن تابع از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{5}$ گردد.

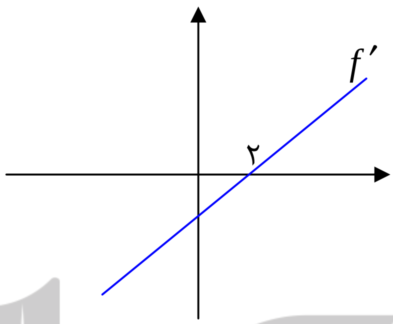
ب) معادلات محور های تقارن تابع را بدست آورید.

***

روش رسم نمودار تابع با معلوم بودن نمودار مشتق آن

برای رسم نمودار یک تابع به کمک نمودار مشتق آن ، بهترین روش این است که جدول تغییرات را به کمک نمودار مشتق ، تنظیم کرده و سپس با استفاده از این جدول نمودار تابع را رسم نمود.

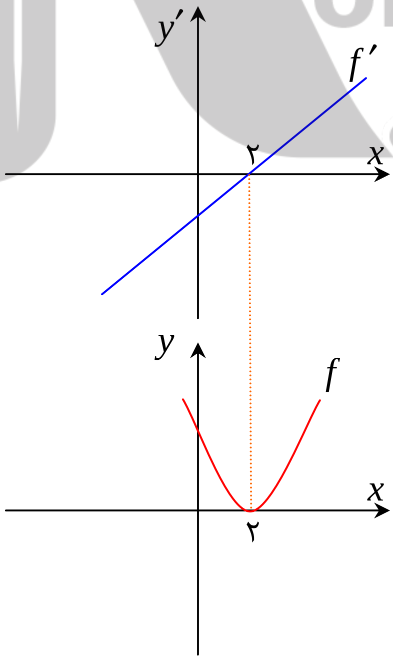
مثال : نمودار مشتق تابعی به شکل زیر است. نمودار تابع را رسم نمایید.



حل : ابتدا جدول تغییرات را رسم می کنیم.

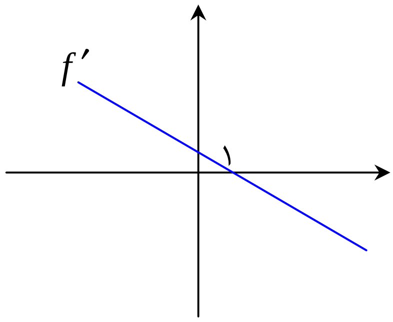
x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		پایین محور طولها −	۰	بالای محور طول ها +	
y	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.



توجه : به کمک این روش نمی توان عرض نقاط (در نمودار f) را تعیین کرد. در این جا عرض نقاط را صفر فرض می کنیم.

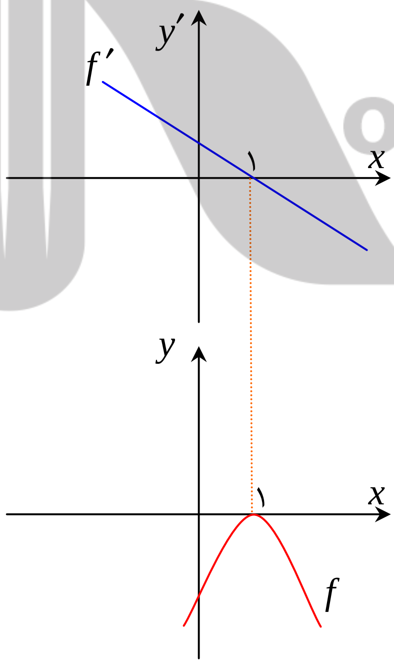
مثال : نمودار مشتق تابعی به شکل زیر است. نمودار تابع را رسم نمایید.



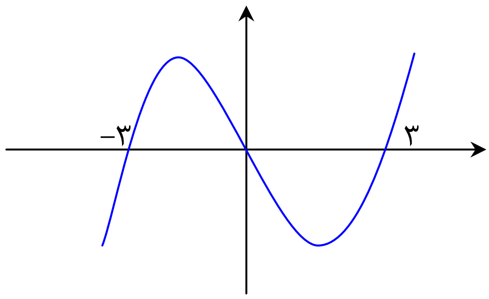
حل : ابتدا جدول تغییرات را رسم می کنیم.

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$+\infty$	↗	max	↘	$+\infty$

پس نمودار تابع به شکل زیر است.

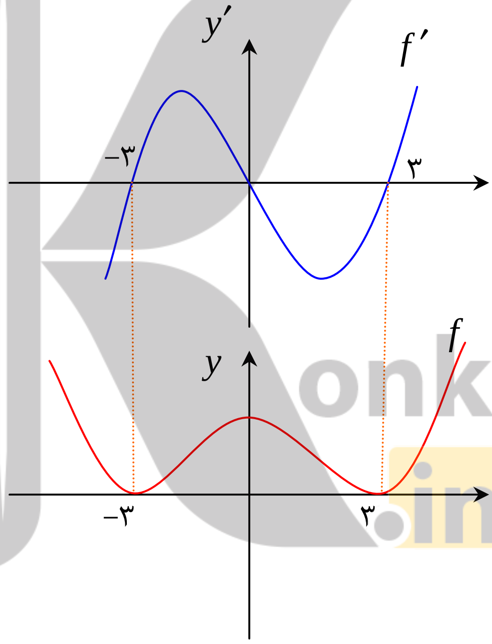


مثال : نمودار مشتق تابعی به شکل زیر است. نمودار تابع را رسم کنید.



حل :

x	$-\infty$		−۳		۰		۳		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	min	↗	max	↘	min	↗	$+\infty$

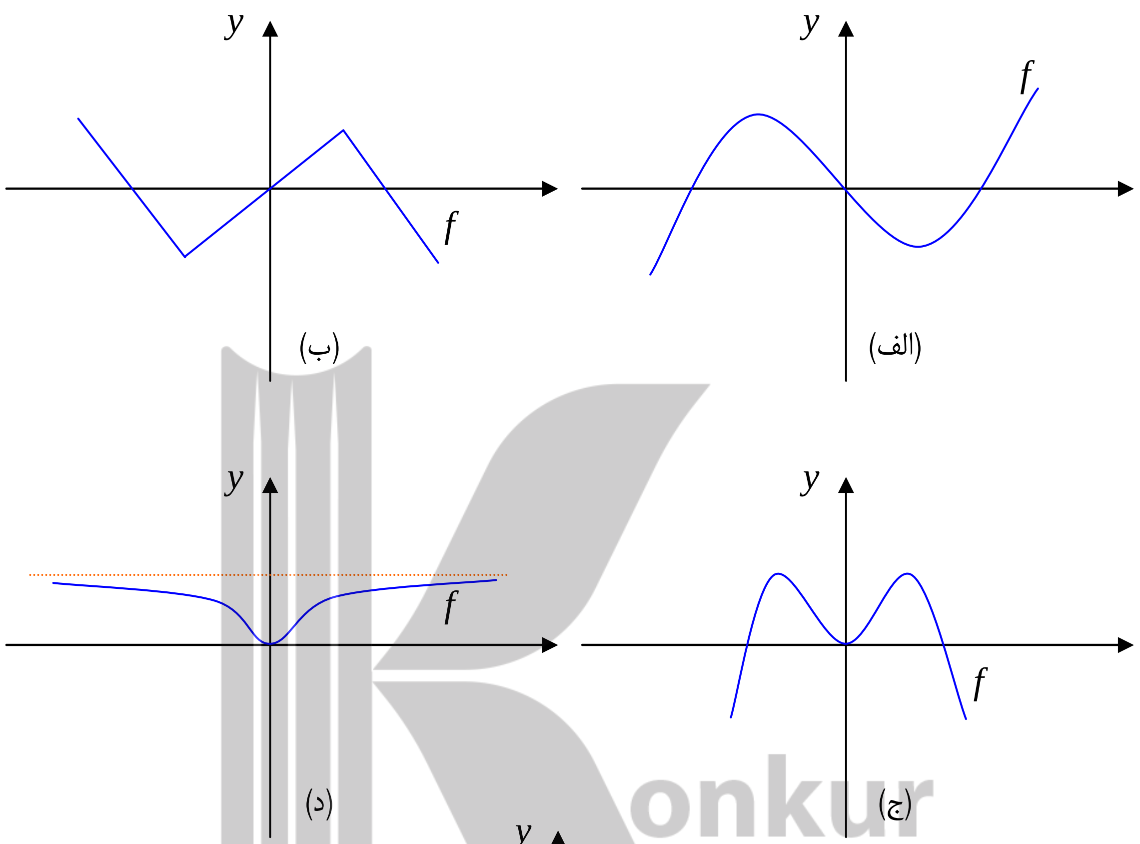


***

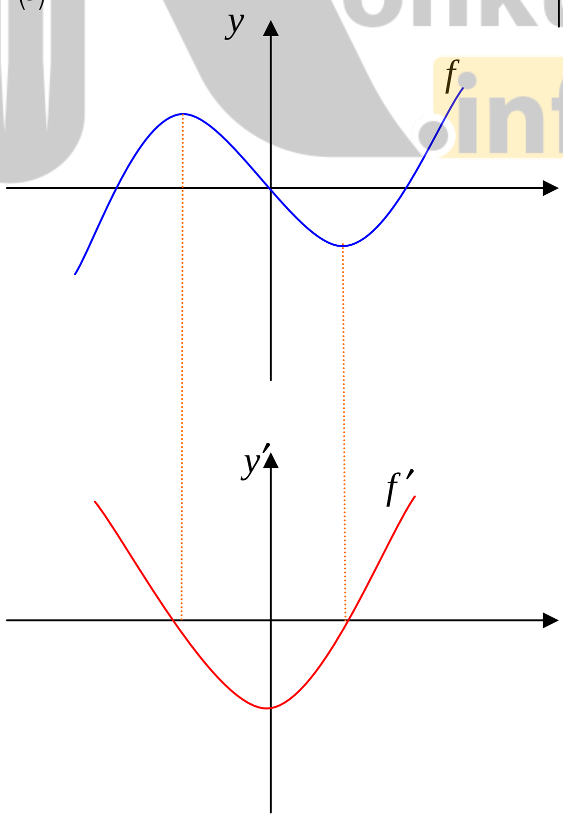
رسم نمودار مشتق به کمک نمودار تابع

کافی است به نقاط اکسترمم ، نقاط عطف و صعودی و نزولی بودن تابع توجه شود.

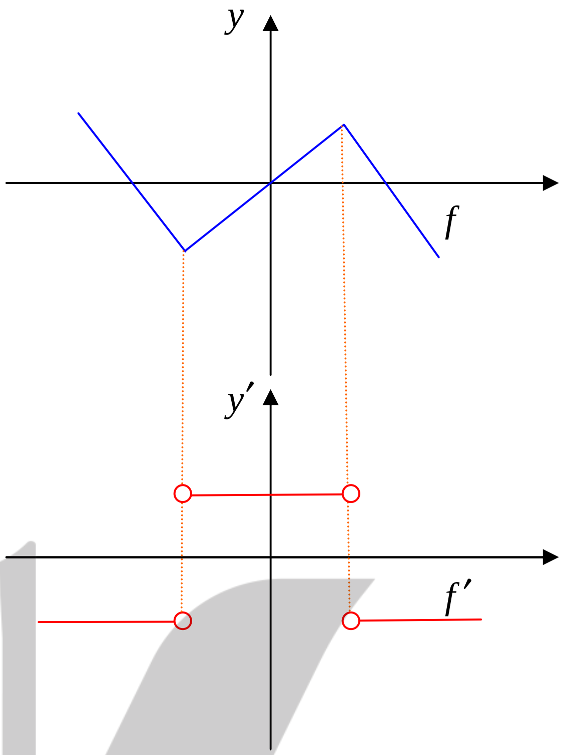
مثال : در هر مورد نمودار مشتق تابع را رسم کنید.



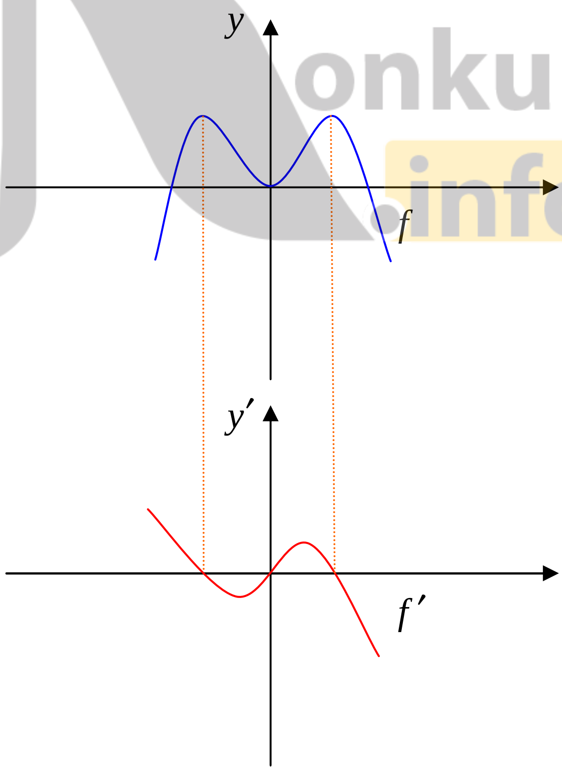
حل الف :



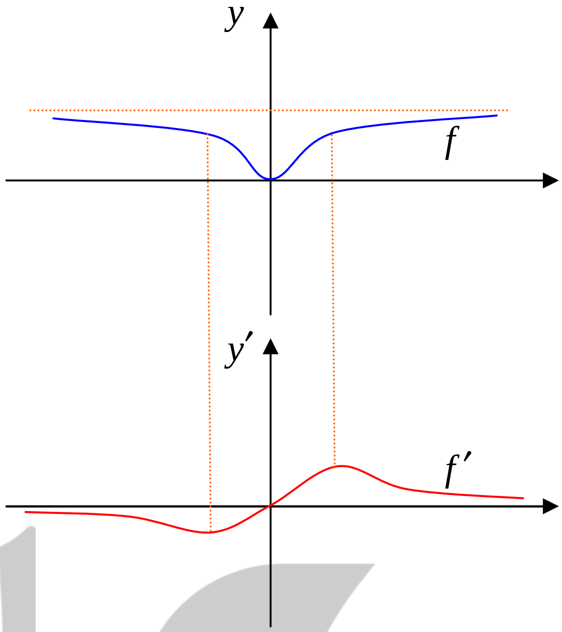
حل ب :



حل ج :



حل د :



***

درس چهارم : چند کاربرد دیگر مشتق

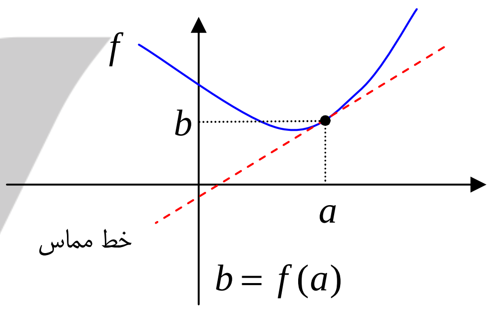
در این درس به بیان روش تعیین معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع ، روش رفع ابهام حدهای مبهم و همچنین روش های حل مسائل پارامتری و مسائل بهینه سازی به کمک مشتق می پردازیم.

الف : معادله‌ی خط مماس بر منحنی

همانطور که قبلاً اشاره شد، شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ واقع بر منحنی را به کمک مشتق می توان تعیین کرد. معادله‌ی خط مماس نیز از فرمول زیر بدست می آید.

شیب خط مماس $m=f'(a)$

معادله‌ی خط مماس $y=m(x-a)+b$



مثال : معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x)=۲+\sin x$ در نقطه‌ی $x=۰$ را بدست آورید.

حل :

$$x=۰ \xrightarrow{f(x)=۲+\sin x} f(۰)=۲+\sin(۰)=۲+۰=۲$$

$$f'(x)=\cos x \to m=f'(۰)=\cos(۰)=۱$$ شیب خط مماس

$$y=m(x-a)+b \to y=۱(x-۰)+۲ \to y=x+۲$$ معادله‌ی خط مماس

تمرین برای حل :

۱ : معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۲+۳x$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به دست آورید.

۲ : معادله‌ی خط مماسی بر نمودار تابع $f(x)=۲\sin\pi x$ را در نقطه‌ی $x=۰$ به دست آورید.

***

ب : قاعده‌ی هوپیتال

هرگاه g و f توابعی مشتق پذیر در a بوده و $f(a)=g(a)=۰$ باشد، دراین صورت واضح است که حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x \to a$ به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ در می آید. برای رفع ابهام این کسر با فرض اینکه $x \neq a$ می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

یعنی برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که $x \to a$ اگر به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ درآید،کسری تشکیل می دهیم که صورت آن مشتق صورت کسر داده شده و مخرج آن نیز مشتق مخرج کسر داده شده باشند و سپس حد کسر بدست آمده را محاسبه می کنیم.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}}$$

توجه: اگر حد کسر جدید نیز به شکل $\frac{۰}{۰}$ در آید، عمل مشتق گیری را مجدداً تکرار می کنیم.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۶}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۶}\overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{Hop}{=}}\lim_{x\to ۲}\frac{۲x}{۲x+۱}=\frac{۲(۲)}{۲(۲)+۱}=\frac{۴}{۵}$$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x^{۲}}{۱-\cos x}$ را حساب کنید.

حل :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x^{۲}}{۱-\cos x} \overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to ۰} \frac{۲x}{\sin x} \overset{\frac{۰}{۰}}{\underset{Hop}{=}} \lim_{x\to ۰} \frac{۲}{\cos x} = \frac{۲}{\cos(۰)} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

تمرین برای حل :

۳ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۴x-x^{۲}}{x^{۲}-۲x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۴-\sqrt{۵x+۱}}{x^{۲}-۹}$

ج) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{۱+\cos x}{\sin ۲x}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-x+\sin x}{x^{۲}}$

۴ : حد زیر را محاسبه کنید. (جواب $\frac{۱}{۲}$)

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos x-\cos ۲x}{x^{۲}}$$

۵ : مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{۲}-a^{۲}}{x-a} = ۸$ باشد.

۶ : مقدار $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $۳a$ ۳) $۴a$ ۴) $۶a$

۷ : با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^{۲}} = \dfrac{۱}{۲}(b^{۲}-a^{۲})$

ب) $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h} = (m-n)f'(a)$

***

ج: روش هایی برای حل مسائل پارامتری

گاهی معادله‌ی یک تابع بر حسب یک یا چند پارامتر داده می شود و براساس شرایطی که تعیین می شود، محاسبه‌ی پارامتر ها ، مد نظر است. نکاتی که در این قسمت ارائه می شوند، می توانند در حل مسائل پارامتری کمک نمایند.

۱) هر نقطه‌ی عادی واقع بر منحنی دارای یک خاصیت است و آن این است که مختصاتش در معادله‌ی منحنی صدق می کند. نقطه‌ی عادی نقطه ای است که هیچگونه ویژگی در مورد آن ذکر نشده باشد.

مثال : در تابع $y=(m-۱)x^{۳}+۲mx-۱۳$ مقدار m را طوری بیابید که منحنی این تابع از نقطه‌ی $(۲,۳)$ بگذرد.

حل : نقطه‌ی داده شده ، یک نقطه‌ی عادی است لذا مختصات آن را در معادله‌ی تابع جایگزین می کنیم.

$$(۲,۳)\xrightarrow{y=(m-۱)x^{۳}+۲mx-۱۳}۳=(m-۱)(۲)^{۳}+۲m(۲)-۱۳\rightarrow ۸m-۸+۴m=۱۶$$
$$\rightarrow ۱۲m=۲۴\rightarrow m=۲$$

۲) نقطه‌ی ماگزیمم یا مینیمم دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی اوّل در نقطه‌ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه، مقدار مشتق مرتبه‌ی اوّل، برابر صفر می شود. $(y'=۰)$

مثال : تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}+b$ داده شده است. مقدار b و a را طوری پیدا کنید که نقطه‌ی $M(۲,-۴)$ یکی از نقاط ماگزیمم یا مینیمم منحنی باشد.

حل : ابتدا مختصات آن را در معادله‌ی تابع جایگزین می کنیم.

$$(۲,-۴)\xrightarrow{y=x^{۳}+ax^{۲}+b}-۴=(۲)^{۳}+a(۲)^{۲}+b\rightarrow ۴a+b=-۱۲$$

چون این نقطه، ماگزیمم یا مینیمم تابع است. لذا در مشتق مرتبه‌ی اوّل نیز جایگزین می کنیم.

$$(۲,-۴)\xrightarrow{y'=۳x^{۲}+۲ax}۰=۳(۲)^{۲}+۲a(۲)\rightarrow ۱۲+۴a=۰\rightarrow a=-۳$$

در نهایت کمک رابطه‌ی اوّل ، مقدار b را تعیین می کنیم.

$$a=-۳ \xrightarrow{۴a+b=-۱۲} ۴(-۳)+b=-۱۲ \rightarrow b=۰$$

۳) نقطه‌ی عطف دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی دوّم در نقطه‌ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه‌ی دوّم، برابر صفر می شود. ($y''=۰$)

مثال : تابع $y=x^۳+ax^۲+bx+c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و $A(۱,۱)$ نقطه‌ی عطف آن باشد.

حل :

$$(۰,۰) \xrightarrow{y=x^۳+ax^۲+bx+c} ۰=(۰)^۳+a(۰)^۲+b(۰)+c \rightarrow c=۰$$

$$(۱,۱) \xrightarrow{y=x^۳+ax^۲+bx+c} ۱=(۱)^۳+a(۱)^۲+b(۱)+c \xrightarrow{c=۰} a+b=۰$$

$$y=x^۳+ax^۲+bx+c \rightarrow y'=۳x^۲+۲ax+b \rightarrow y''=۶x+۲a$$

$$(۱,۱) \xrightarrow{y''=۶x+۲a} ۰=۶(۱)+۲a \rightarrow a=-۳$$

$$a+b=۰ \xrightarrow{a=-۳} -۳+b=۰ \rightarrow b=۳$$

۴) نقطه‌ی تماس دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی اوّل در نقطه‌ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه‌ی اوّل، برابر شیب خط مماس می شود. ($y'=m$)

مثال : تابع $y=ax^۳+bx+۱$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که خط $y=۵x-۳$ در نقطه ای به طول یک بر منحنی تابع فوق مماس شود.

حل :

$$x=۱ \xrightarrow{y=۵x-۳} y=۵(۱)-۳=۲ \rightarrow A(۱,۲)$$ نقطه‌ی تماس

$$(۱,۲)\xrightarrow{y=ax^۳+bx+۱}۲=a(۱)^۳+b(۱)+۱\rightarrow a+b=۱$$

واضح است که شیب خط مماس برابر ۵ است. این مقدار را نیز از مشتق به دست می آوریم.

$$y'=۳ax^۲+b\xrightarrow{x=۱}m=۳a(۱)^۲+b\xrightarrow{m=۵}۳a+b=۵$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases}a+b=۱\\ ۳a+b=۵\end{cases}\rightarrow a=۲\ ,\ b=-۱$$

تمرین برای حل :

۸ : تابع $y=x^۳+ax+b$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از نقاط $(۰,-۲)$ و $(۱,۲)$ بگذرد.

۹ : منحنی نمایش تابع $y=\frac{x+m}{x+n}$ محور طول ها را در نقطه‌ی A و محور عرض ها را در نقطه‌ی B قطع می کند.اگر معادله‌ی خط AB به صورت $y=x-۱$ باشد. مقدار n و m را بیابید.

۱۰ : تابع $y=ax^۳+bx+c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و در نقطه ای به طول یک دارای مینیممی برابر ۲- باشد.

۱۱ : تابع درجه‌ی سوّمی بنویسید که $A(۰,۴)$ نقطه‌ی ماگزیمم و $B(۲,۰)$ نقطه‌ی مینیمم آن باشد.

۱۲ : تابع درجه‌ی سوّمی بنویسید که $M(۰,۴)$ نقطه‌ی ماگزیمم و $N(۱,۲)$ مرکز تقارن آن باشد.

توجه : در تابع درجه‌ی سوم مرکز تقارن همان نقطه‌ی عطف می باشد.

۱۳ : ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^۳+ax+b$ طوری پیدا کنید که نقطه‌ی $(۱,۲)$، مینیمم نسبی داشته باشد.

۱۴ : مقدار k را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی $y=kx^۲+۲x+۱$ در نقطه‌ی $x=۱$ موازی محور طول ها باشد.

۱۵ : در هر مورد تابع درجه سوّمی مثال بزنید که نقطه‌ی داده شده، نقطه‌ی عطف آن باشد.

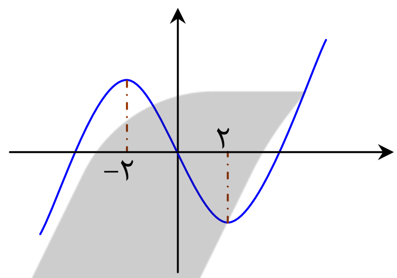
الف : نقطه‌ی $(۰,۰)$ ب : نقطه‌ی $(۱,۰)$ ج : نقطه‌ی $(۰,۱)$ د : نقطه‌ی $(۲,۲)$

۱۶ : مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

الف : $f(۰)=۱$ و $f(۱)=۲$

ب : $x=\frac{۱}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد.

۱۷ : اگر مبدأ مختصات نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سوّمی با ضابطه‌ی $y=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل مقابل داده شده است. مقادیر a و b و c را پیدا کنید.



***

۵: حل مسائل بهینه سازی

در صنعت و اقتصاد فهمیدن بیشترین سود، کمترین هزینه ، کمترین سطح ، کمترین فاصله، کمترین زمان و... بسیار مورد توجه قرار می گیرد. هرگاه به دنبال کمترین یا بیشترین مقدار توابع باشیم، می توان از مفهوم مشتق تابع استفاده کنیم. برای حل این قبیل مسائل، ابتدا با توجه به صورت مسئله تابعی یک متغیره تشکیل می دهیم و ریشه های مشتق مرتبه‌ی اوّل آن را تعیین می کنیم و اگر لازم باشد، جدول تغییرات رسم کنید. توجه داشته باشید که فقط ریشه هایی را می پذیریم که شرایط مسئله‌ی را داشته باشند و در دامنه‌ی اعتباری[1] مسئله باشند.

مثال : مجموع دو عدد مثبت برابر ۳۸ است. بیشترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را بیابید.

حل :

$$x+y=۳۸ \to y=۳۸-x$$

$$P=xy=x(۳۸-x)=۳۸x-x^{۲}$$

$$P(x)=۳۸x-x^{۲} \to P'(x)=۳۸-۲x \xrightarrow{P'(x)=۰} ۳۸-۲x=۰ \to x=\frac{۳۸}{۲}=۱۹$$

$$Max(P)=۳۸(۱۹)-(۱۹)^{۲}=۳۶۱$$

مثال : حاصل ضرب دو عدد مثبت ۶۴ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را بیابید.

حل :

$$x.y=۶۴ \to y=\frac{۶۴}{x} \to S=x+y=x+\frac{۶۴}{x}$$

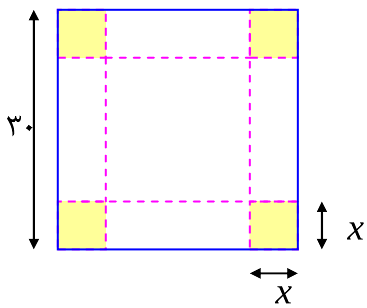
$$S(x)=x+\frac{۶۴}{x} \to S'(x)=۱+\frac{-۶۴}{x^{۲}} \xrightarrow{S'(x)=۰} ۱-\frac{۶۴}{x^{۲}}=۰ \to x^{۲}=۶۴ \to x=\pm۸$$

با توجه به صورت مسئله فقط مقدار $x=۸$ قابل قبول است. پس $y=\frac{۶۴}{۸}=۸$ لذا :

[1] . دامنه‌ی اعتباری تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که متغیر در آنها با توجه به محدودیت های موجود، با معنی باشد. برای مثال وقتی گفته می شود که مساحت مربعی به ضلع x برابر $f(x)=x^{۲}$ می باشد. دامنه‌ی اعتباری این تابع این است که فقط x یک عدد مثبت است.

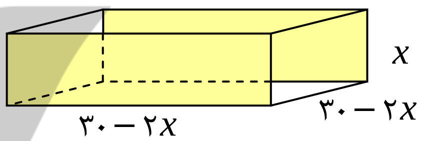
$$Min(S)=x+y=۸+۸=۱۶$$

مثال : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی متر را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهارگوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه‌ی درباز بسازیم. مقدار x را طوری تعیین کنید که حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد.



حل : با توجه به مسئله کافی است که معادله‌ی حجم مکعب تشکیل شده را دهیم.

$$v(x)=x(۳۰-۲x)^۲$$ حجم مکعب



$$\rightarrow v(x)=x(۹۰۰-۱۲۰x+۴x^۲)=۹۰۰x-۱۲۰x^۲+۴x^۳ \quad ; \quad ۰<x<۱۵$$

$$\rightarrow v'(x)=۹۰۰-۲۴۰x+۱۲x^۲$$

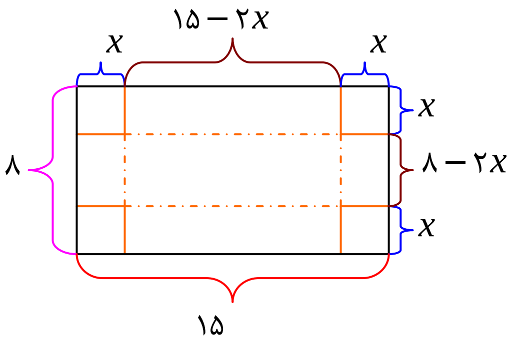
$$\xrightarrow{v'(x)=۰} ۹۰۰-۲۴۰x+۱۲x^۲=۰ \xrightarrow{\div ۱۲} ۷۵-۲۰x+x^۲=۰$$

$$\rightarrow x^۲-۲۰x+۷۵=۰ \rightarrow (x-۵)(x-۱۵)=۰ \rightarrow x=۵ \ , \ x=۱۵$$

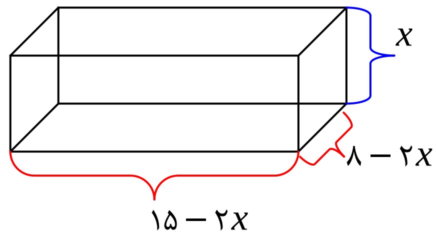
و چون $x=۱۵$ خارج از دامنه‌ی اعتباری تابع است، این جواب قابل قبول نیست. لذا

$$Max(v)=v(۵)=۵(۳۰-۲(۵))^۲=۵(۳۰-۱۰)^۲=۵(۴۰۰)=۲۰۰۰ \ cm^۳$$

مثال : یک سازنده‌ی قوطی مکعبی، برای بریدن مربع های همنهشت از چهار گوشه ورق های حلبی را به ابعاد ۸ اینچ و ۱۵ اینچ و بالابردن چهار طرف آن، جعبه های سرباز می سازد. اگر بخواهیم حجم قوطی های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع هایی که باید بریده شود، چقدر است؟



حل : فرض کنید که طول ضلع مربعی که از گوشه های مستطیل مفروض بریده می شوند برحسب اینچ برابر x باشد.



طول قوطی مورد نظر $=۱۵-۲x \qquad ; \qquad ۰<x<\frac{۱۵}{۲}$

عرض قوطی مورد نظر $=۸-۲x \qquad ; \qquad ۰<x<۴$

لذا حجم قوطی ایجاد شده به شکل زیر است.

$$v(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^{۳}-۴۶x^{۲}+۱۲۰x \qquad ; \qquad ۰<x<۴$$

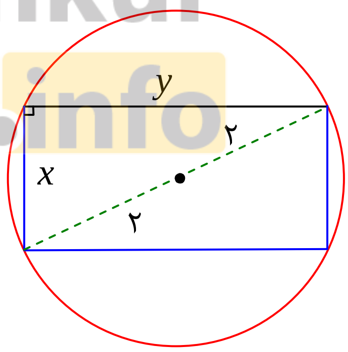
$$v'(x)=۱۲x^{۲}-۹۲x+۱۲۰ \xrightarrow{v'(x)=۰} ۱۲x^{۲}-۹۲x+۱۲۰=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۳x^{۲}-۲۳x+۳۰=۰ \to (۳x-۵)(x-۶)=۰ \to x=\frac{۵}{۳} \ , \ x=۶$$

که $x=۶$ خارج از دامنه‌ی اعتباری تابع است و قابل قبول نیست.

مثال: مساحت بزرگترین مستطیلی که درون دایره ای به شعاع ۲ قرار می گیرد، را بیابید.

حل :



$$x^{۲}+y^{۲}=(۴)^{۲} \to y=\sqrt{۱۶-x^{۲}}$$

$$S=x.y \to S(x)=x\sqrt{۱۶-x^{۲}}$$

$$S'(x)=\sqrt{۱۶-x^{۲}}+\frac{-x^{۲}}{\sqrt{۱۶-x^{۲}}}=\frac{۱۶-۲x^{۲}}{\sqrt{۱۶-x^{۲}}}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=۰} ۱۶-۲x^{۲}=۰ \to x=\pm\sqrt{۸}$$

با توجه به صورت مسئله واضح است که فقط جواب $x=\sqrt{۸}$ قابل قبول است. لذا $Max(S)=۸$

مثال : حجم بزرگترین مخروط دواری را بیابید که درون کره ای به شعاع ۵ محاط شده باشد.

حل : قرار می دهیم $AO=r$ پس $OH=AH-OA=h-۵$ لذا در مثلث OBH می توان نوشت :

$$OH^۲ + BH^۲ = OB^۲ \rightarrow (h-۵)^۲ + r^۲ = ۲۵$$

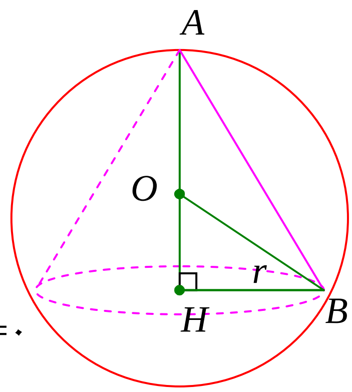
$$\rightarrow r^۲ = ۱۰h - h^۲$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \rightarrow v(h) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰h - h^۲)h = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰h^۲ - h^۳)$$

$$\rightarrow v'(h) = \frac{۱}{۳}\pi(۲۰h - ۳h^۲) \xrightarrow{v'(h)=۰} \frac{۱}{۳}\pi(۲۰h - ۳h^۲) = ۰$$

$$\rightarrow h = ۰(\text{غ}) \; , \; h = \frac{۲۰}{۳}$$

$$\rightarrow Max(v) = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰(\frac{۲۰}{۳})^۲ - (\frac{۲۰}{۳})^۳) = \frac{۴۰۰۰\pi}{۸۱}$$



مثال : مینیمم فاصله‌ی نقطه‌ی $M(۴,۰)$ از منحنی به معادله‌ی $y^۲ = ۴x$ را حساب کنید.

حل : فرض کنیم که نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ نزدیکترین نقطه‌ی منحنی $y^۲ = ۴x$ از نقطه‌ی $M(۴,۰)$ باشد.

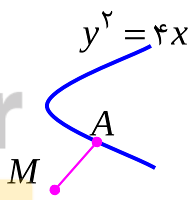
پس :

$$\beta^۲ = ۴\alpha$$

$$d = \sqrt{(\alpha-۴)^۲ + (\beta-۰)^۲} = \sqrt{\alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۶ + \beta^۲}$$

$$\rightarrow d(\alpha) = \sqrt{\alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۶ + ۴\alpha} = \sqrt{\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱۶}$$

$$d'(\alpha) = \frac{۲\alpha - ۴}{۲\sqrt{\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱۶}} = \frac{\alpha - ۲}{\sqrt{\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱۶}} \rightarrow \xrightarrow{d'(\alpha)=۰} \alpha - ۲ = ۰ \rightarrow \alpha = ۲$$

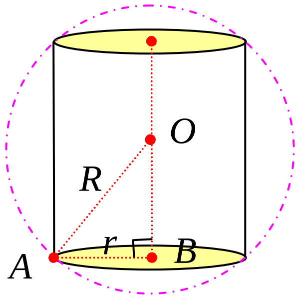


$$\rightarrow Min(d) = \sqrt{(۲)^۲ - ۴(۲) + ۱۶} = \sqrt{۱۲}$$

مثال : در کره ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل : فرض کنیم که استوانه‌ی مورد نظر دارای شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم الزاویه‌ی OAB می توان نوشت:

$$OB = \frac{h}{۲}$$



$$AB^2+OB^2=OA^2 \to r^2+(\frac{h}{2})^2=R^2 \to r^2=R^2-\frac{h^2}{4}$$

لذا حجم استوانه‌ی ایجاد شده به شکل زیر است.

$$v=\pi r^2 h$$

$$\to v(h)=\pi(R^2-\frac{h^2}{4})h=\pi R^2 h-\frac{\pi}{4}h^3 \quad ; \quad 0<h<2R$$

$$\to v'(h)=\pi R^2-\frac{3\pi}{4}h^2 \xrightarrow{v'(h)=0} \pi R^2-\frac{3\pi}{4}h^2=0 \to \pi R^2=\frac{3\pi}{4}h^2$$

$$\to \frac{4}{3}R^2=h^2 \to h=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

$$r^2=R^2-\frac{1}{4}h^2=R^2-\frac{1}{4}(\frac{4}{3}R^2)=R^2-\frac{1}{3}R^2=\frac{2}{3}R^2 \to r=\frac{2}{3}R$$

مثال : می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل : باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

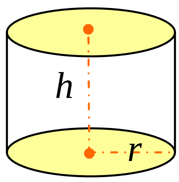
چون قرار است حجم استوانه یک لیتر باشد. پس :

$$v=\pi r^2 h \xrightarrow{v=1000\ cm^3} \pi r^2 h=1000 \to h=\frac{1000}{\pi r^2}$$

از طرفی مساحت کل استوانه برابر مجموع ، مساحت قاعده و سطح جانبی آن است. لذا:

$$S(r)=\pi r^2+2\pi r h \to S(r)=\pi r^2+2\pi r(\frac{1000}{\pi r^2})=S(r)=\pi r^2+\frac{2000}{r}$$

$$\to S'(r)=2\pi r+\frac{-2000}{r^2}=\frac{2\pi r^3-2000}{r^2} \xrightarrow{S'(r)} \frac{2\pi r^3-2000}{r^2}=0$$

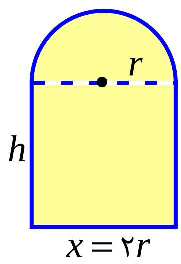


$$\to 2\pi r^3-2000=0 \to r^3=\frac{1000}{\pi} \to r=10\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

$$\xrightarrow{S(r)=\pi r^2+\frac{2000}{r}} S(10\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}})=\pi(10\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}})^2+200\sqrt[3]{\pi}$$

مثال : در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر روی آن می باشد. به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره ای ۴/۵ متر باشد. ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل : کافی است بیشترین مساحت پنجره را بدست آوریم. این مساحت برابر مجموع مساحت های نیم دایره و مستطیل است.



محیط پنجره $p=x+۲h+\frac{۱}{۲}(۲\pi r)=۲r+۲h+\pi r$

$$\xrightarrow{p=۴/۵} ۲r+۲h+\pi r=\frac{۹}{۲} \rightarrow h=\frac{۹}{۴}-r-\frac{۱}{۲}\pi r$$

مساحت پنجره $S=xh+\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}$

$$\rightarrow S(r)=(۲r)(\frac{۹}{۴}-r-\frac{۱}{۲}\pi r)+\frac{۱}{۲}\pi r^{۲} \rightarrow S(r)=\frac{۹}{۲}r-۲r^{۲}-\pi r^{۲}+\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}$$

$$\rightarrow S(r)=\frac{۹}{۲}r-(\frac{۴+\pi}{۲})r^{۲}$$

$$\rightarrow S'(r)=\frac{۹}{۲}-۲(\frac{۴+\pi}{۲})r=\frac{۹}{۲}-(۴+\pi)r \xrightarrow{S'(r)=۰} \frac{۹}{۲}-(۴+\pi)r=۰$$

$$\rightarrow r=\frac{۹}{۲(۴+\pi)}$$

لذا :

شعاع نیم دایره $r=\frac{۹}{۲(۴+\pi)}$

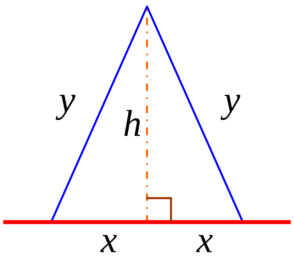
عرض پنجره $x=۲r=۲\times\frac{۹}{۲(۴+\pi)}=\frac{۹}{۴+\pi}$

ارتفاع پنجره $h=\frac{۹}{۴}-r-\frac{۱}{۲}\pi r$

$$h=\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲(۴+\pi)}-\frac{۱}{۲}\pi(\frac{۹}{۲(۴+\pi)})=\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۲(۴+\pi)}-\frac{۹\pi}{۴(۴+\pi)}$$

مثال : می خواهیم کنار یک رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه‌ی ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

حل : با توجه به شکل مقابل و نظر به اینکه محوطه کنار رودخانه ساخته می شود، پس :



$$y+y=100 \to 2y=100 \to y=50$$

$$x^2+h^2=y^2 \xrightarrow{y=50} x^2+h^2=2500$$

$$\to x^2+h^2=2500 \to h=\sqrt{2500-x^2}$$

$$S=\frac{1}{2}(2x)h=x\sqrt{2500-x^2} \qquad ; \qquad 0<x<50$$

$$S'=\sqrt{2500-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}(x)=\sqrt{2500-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$$

$$\xrightarrow{S'=0} \sqrt{2500-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=0 \to \sqrt{2500-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$$

$$\to 2500-x^2=x^2 \to 2x^2=2500 \to x^2=1250 \to x=25\sqrt{2}$$

$$S=x\sqrt{2500-x^2}=25\sqrt{2}\times\sqrt{2500-(25\sqrt{2})^2}=25\sqrt{2}\times\sqrt{2500-1250}$$

$$\to S=25\sqrt{2}\times 25\sqrt{2}=1250 \quad m^2$$

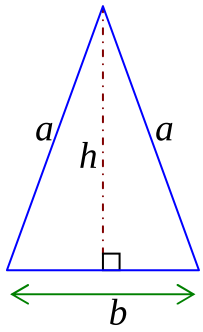
توجه داشته باشید که بدون استفاده از مشتق نیز می توان مسئله را حل کرد. به استدلال زیر دقت کنید.

مساحت این مثلث با توجه به اطلاعات داده شده برابر $S=\frac{1}{2}(50)(50)\times\sin\theta$ می باشد. بیشترین مساحت وقتی است که $\sin\theta=1$ باشد. پس داریم :

$$Max(S)=\frac{1}{2}(50)(50)(1)=1250$$

مثال : نشان دهید که در بین همه‌ی مثلث های متساوی الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.

حل :



$$a^2=h^2+(\frac{b}{2})^2\rightarrow h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}\quad (1)$$

$$P=a+a+b\rightarrow b=P-2a\rightarrow b^2=P^2-4Pa+4a^2\quad (2)$$

$$(1),(2)\rightarrow h=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}(P^2-4Pa+4a^2)}\rightarrow h=\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}$$

$$S=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(P-2a)\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}\rightarrow S(a)=\frac{1}{2}(P-2a)\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}$$

$$S'(a)=(-1)\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}+\frac{1}{2}(P-2a)\times\frac{P}{2\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}}$$

$$=\frac{-2Pa+\frac{1}{2}P^2+\frac{1}{2}P^2-Pa}{2\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}}=\frac{P^2-3Pa}{2\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}}$$

$$\xrightarrow{S'(a)=0}\frac{P^2-3Pa}{2\sqrt{Pa-\frac{1}{4}P^2}}=0\rightarrow P^2-3Pa=0\rightarrow P(P-3a)=0$$

$$\xrightarrow{P\neq 0}P=3a\xrightarrow{P=2a+b}2a+b=3a\rightarrow b=a$$

یعنی مثلث متساوی الاضلاع است.

***

تمرین برای حل :

۱۸ : مجموع دو عدد مثبت برابر ۸ است. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید.

۱۹ : اگر داشته باشیم $3x+4y=240$ ماگزیمم مقدار xy را بیابید.

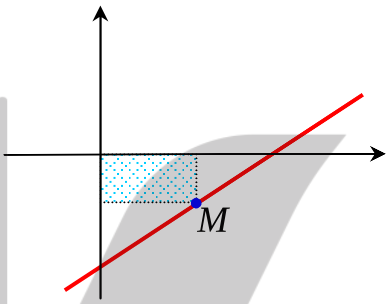
۲۰ : حاصل ضرب دو عدد مثبت ۲۴ است، کمترین مجموع این دو عدد را پیدا کنید.

۲۱ : دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضرب آنها کمترین مقدار ممکن گردد.

۲۲ : ثابت کنید که در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت، مستطیلی که طـول و عـرض آن هـم انـدازه باشند، بیشترین مساحت را دارد.

۲۳ : یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی متـر باشـد، طـول و عـرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲۵ : در شکل زیر یک مستطیل به محور های مختصات وخط $۲y - x = -۱$ محدود شده است، بیـشترین مساحت مستطیل را به دست آورید.



***