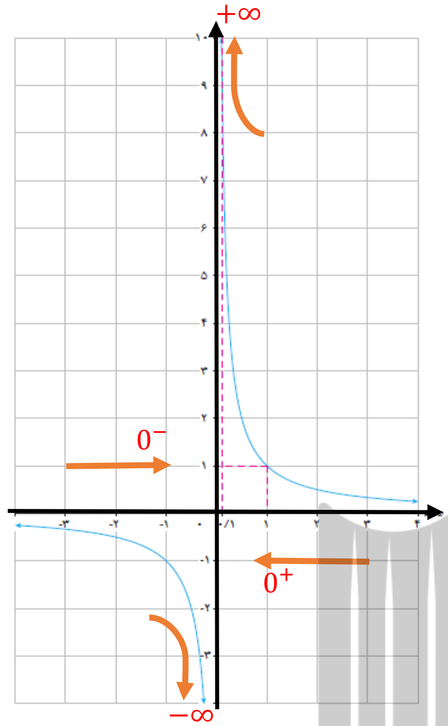
※ تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ مفروض است:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ را به کمک جدول و نمودار تعیین کنید.



x	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\dots \xrightarrow{10^{-6}}$	۰
$f(x)$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$\dots \xrightarrow{10^{6}}$	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچکتر شود؟ ۰/۰۰۰۰۰۱

$$f(x)>10^6 \to \frac{1}{x}>10^6 \xrightarrow{x\text{ مثبت}} x<10^{-6}$$

پ) وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود آیا مقادیر تابع به عدد خاصی نزدیک می شوند؟چرا؟خیر مقادیرتابع بدون هیچ محدودیتی مرتبا بزرگ ،بزرگتر می شوند

تذکر۱: وقتی x با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک می شود(از سمت راست به صفر میل می کند) مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی بزرگ و بزرگ تر می شود و به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نمی کند

به بیان دیگر: می توان x را از هر عدد مثبت دلخواهی،بزرگتر کرد به شرطی که $f(x)$ را به اندازه کافی با مقادیر بزرگتر از صفر،به صفر نزدیک کرد پس $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ وجود ندارد و می نویسیم: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

تذکر۲: نماد $+\infty$ نشان می دهد که حد فوق موجود نیست،چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نشان می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگ تر باشد.

※ برای تابع $f(x)=\frac{1}{x}$:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ را به کمک جدول و نمودار تعیین کنید .

x	$-\frac{۱}{۲}$	-۰/۲	-۰/۱	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱	$\dots \longrightarrow$	۰
$f(x)$	-۲	-۵	-۱۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	$\dots \longrightarrow$	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از -10^6 کوچک تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟منفی یک میلیونیم $\frac{-1}{1000000}$

$$f(x)<-10^6 \xrightarrow{x\text{ باید منفی باشد}} \frac{1}{x}<-10^6 \to x>-10^{-6} \to -10^{-6}<x<0$$

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می شود $f(x)$ چه تغییری می کند؟مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی مرتبا کوچک و کوچکتر می شوند، اما به عدد خاصی نزدیک نمی شود پس $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ وجود ندارد و می نویسیم $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی:

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

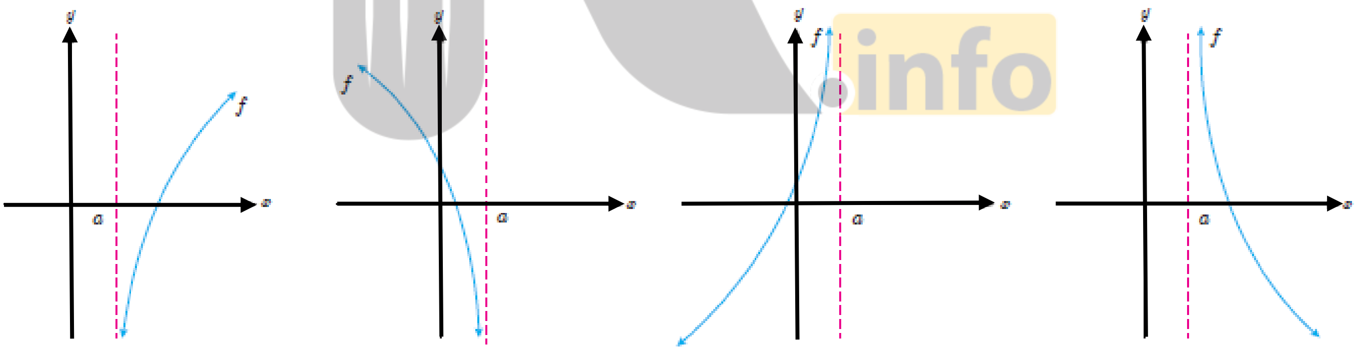
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

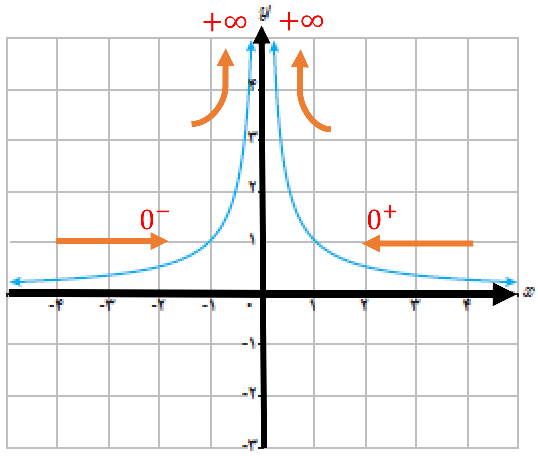
مثال: توصیف حالت های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل های زیر آمده است.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ مطابق شکل رسم شده است رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x=0$ بررسی کنید

x	۰/۵−	۰/۱−	۰/۰۱−	۰/۰۰۱−	$\cdots \to$	۰	$\leftarrow \cdots$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵
$f(x)$	۲-	۵-	۱۰۰-	۱۰۰۰-	$\cdots \to$	تعریف نشده	$\leftarrow \cdots$	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲



با نزدیک شدن نقطه x به اندازه کافی به صفر،مقدارهای $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد.در این حالت می نویسیم: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

تعریف:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم .

تعریف:

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم .

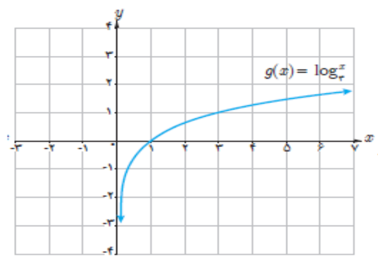
مثال:برای حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ داریم:

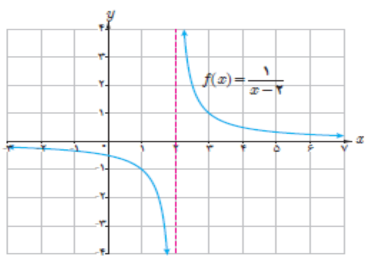
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

مثال: برای حد تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ در نقطه $x=0$ داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{|x|}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{|x|}=+\infty$$

مثال: با توجه به نمودار توابع f، g و h حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید؟

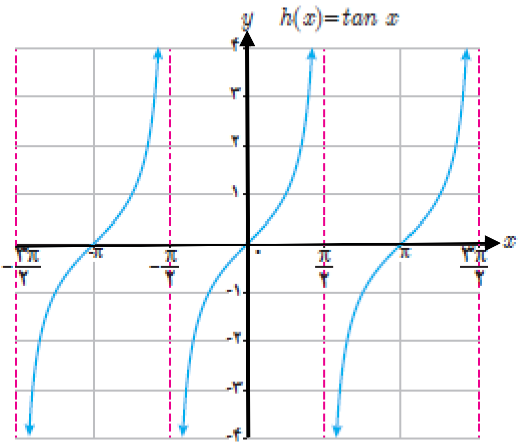




$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$



$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

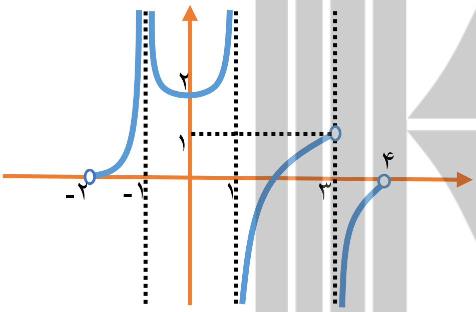
$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

مثال: درتابع با ضابطه ی $f(x)=\frac{16}{x^2}$ ،اگر بخواهیم مقادیر تابع از 10^6 بزرگ تر شود،حداکثر شعاع بازه به مرکز صفر را بیابید؟ می خواهیم مقادیر تابع بزرگتر از 10^6 شود،بنابراین:

$$f(x)=\frac{16}{x^2}>10^6 \xRightarrow{\text{معکوس}} 0<\frac{x^2}{16}<\frac{1}{10^6} \xRightarrow{\times 16} 0<x^2<\frac{16}{10^6} \xRightarrow{\text{جذر}} 0<|x|<\frac{4}{10^3} \to -0/004<x<0/004, x\neq 0$$

حداکثر شعاع بازه=۰/۰۰۴

مثال:نمودار تابع f در زیر رسم شده است،حدود زیر را بیابید.

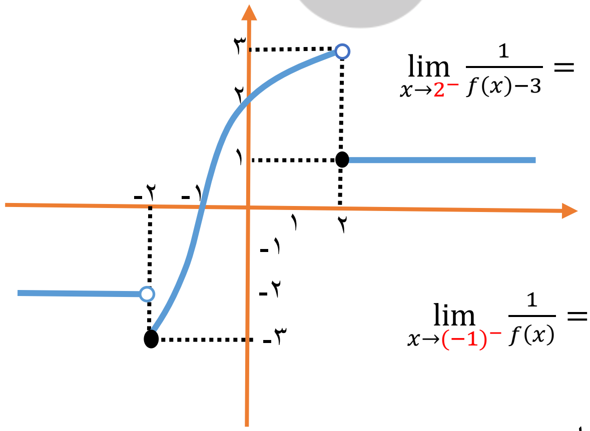


$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$

مثال:نمودار تابع f در زیر رسم شده است،حدود زیر را بیابید.

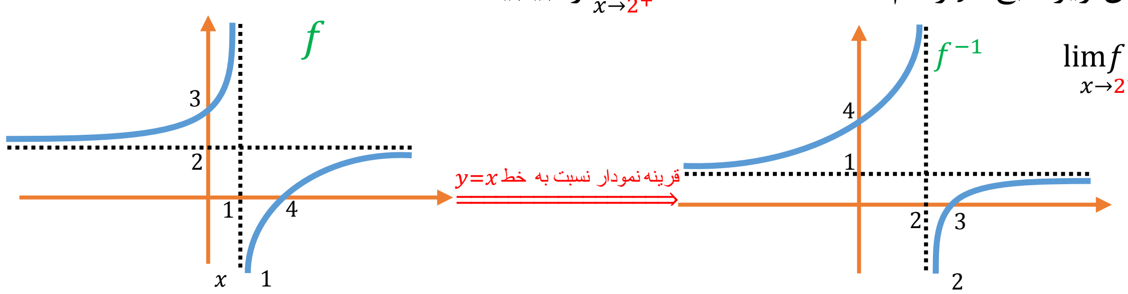


$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{1}{f(x)+3}=\frac{1}{-3^+ +3}=\frac{1}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)-3}=\frac{1}{3^- -3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)-2}=\frac{1}{2^- -2}=\frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

مثال : در شکل زیر تابع f رسم شده است $\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = -\infty$$



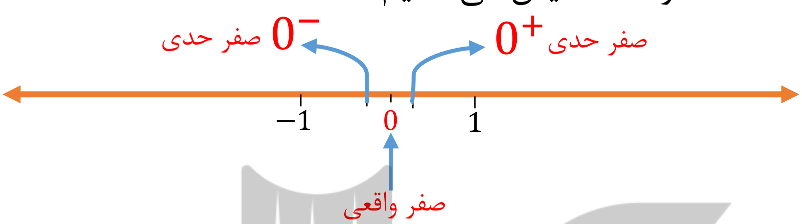
یادآوری

تذکر: همان طور که می دانید دو نوع صفر داریم ،صفر حدی و صفر واقعی(مطلق)

صفر حدی و صفر مطلق:

صفر مطلق: همان عدد صفر که مبدا محور اعداد حقیقی است،صفر مطلق(واقعی) نام دارد.

صفر حدی: به عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و نیز به عدد بسیار بزرگ منفی و نزدیک صفر،صفر حدی می گوییم و آن ها را به ترتیب با نماد 0^+ و 0^- نمایش می دهیم.



تعریف نشده ها:

$$\text{تعریف نشده} = \frac{\text{عدد}}{0\ \text{واقعی}} \qquad \text{تعریف نشده} = \frac{0\ \text{حدی}}{0\ \text{واقعی}} \qquad \text{تعریف نشده} = \frac{\text{عدد}}{0\ \text{واقعی}}$$

$$\text{تعریف نشده} = \frac{\infty}{0\ \text{واقعی}} \qquad \text{تعریف نشده} = (0\ \text{واقعی})^{(0\ \text{واقعی})}$$

صورت های مبهم :

$$\text{مبهم} = \frac{0\ \text{حدی}}{0\ \text{حدی}} \qquad \text{مبهم} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{مبهم} = \infty - \infty \qquad \text{مبهم} = \infty \times (0\ \text{حدی})$$

حالت های صفر:

$$0 = \frac{0\ \text{مطلق}}{0\ \text{حدی}} \qquad 0 = \frac{0\ \text{حدی}}{\text{عدد غیر صفر}} \qquad 0 = \frac{0\ \text{حدی}}{\infty} \qquad 0 = \frac{\text{عدد}}{\infty}$$

$$0 = \infty \times (0\ \text{واقعی}) \qquad 0 = (0\ \text{واقعی})^{(0\ \text{حدی مثبت})} \qquad 1 = (0\ \text{حدی})^{(0\ \text{واقعی})}$$

تذکر: اصولا صفر حدی در مقایسه با صفر مطلق،مانند یک عدد غیر صفر رفتار می کند ولی در مقایسه با سایر اعداد غیر صفر،مانند صفر عمل می کند.

تذکر: صفر یا هر عدد دیگری که از جزء صحیح بیرون بیاید،مطلق است.

بی نهایت:

نماد های "$+\infty$" و "$-\infty$"اعداد حقیقی نیستند و در واقع یک مفهوم حدی هستند که به ترتیب از هر عدد مثبتی بزرگتر و از هر عدد منفی ای کوچک تر می باشند.

$$\frac{\infty}{\text{0 حدی}} = \infty \qquad \frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{0 حدی}} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

تذکر: عدد غیر صفر تقسیم بر صفر حدی ،حاصل بی نهایت میشه .علامت بی نهایت را،علامت صفر حدی و عدد صورت تعیین می کند.

تذکر: همان طور که قبلا هم گفتیم ،اگر حاصل یک حد نامتناهی شود،از آن جایی که $\pm\infty$ اعداد حقیقی نیستند،آن حد موجود نیست.

تذکر: خیلی مراقب باشید که قبل از عدد گذاری هوپیتال نگیرید ،چون ***HoP*** برای $\frac{\text{0 حدی}}{\text{0 حدی}}$ است نه $\frac{\text{عدد}}{0}$!!

یادآوری : $(0)^2 = (0^\pm)^2 = 0^+$ و $|0^\pm| = 0^+$

حدی

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مفروض است :

الف) $\lim_{x\to 0} f(x)$ را به کمک نمودار تعیین کنید.

ب)اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از 10^9 بیشتر شود، x باید چگونه باشد؟

حدهای نامتناهی

حد بی نهایت:یعنی x به سمت عدد میل می کند اما حاصل حد ،بی نهایت(نامتناهی) می شود و آن هنگامی است که $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\text{عدد}}{0 \text{ حدی}} = \infty$ در این حالت به خط $x = a$،مجانب قائم تابع $f(x)$ می گوییم

قضیه ۱: اگر n یک عدد طبیعی باشد،آن گاه:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$$

و

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} =$$

قضیه ۲:

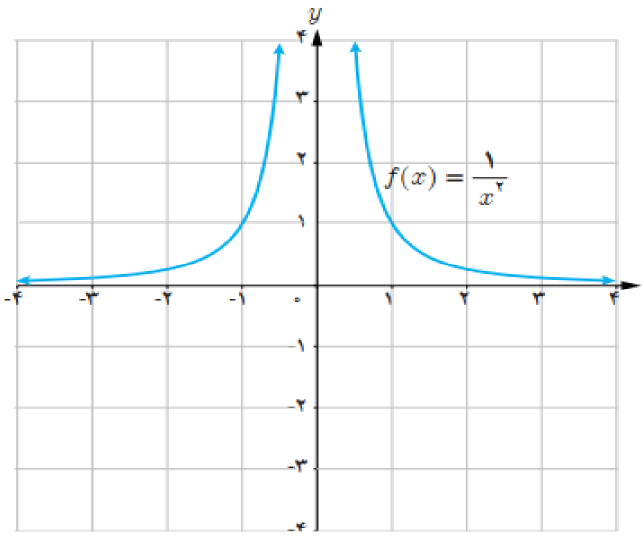
الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و برعکس

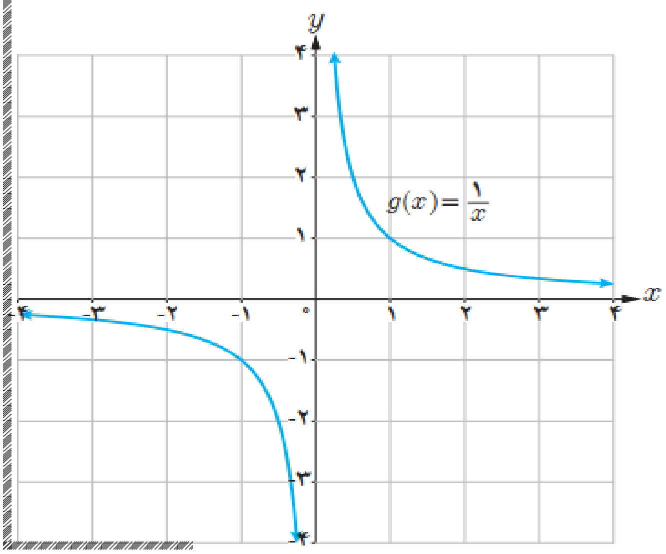
ب) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ و برعکس

مثال :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{|x-1|} =$$

مثال:با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین طبق قضایای بالا حاصل حدود زیر را بیابید؟





قضیه ۳: اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ مثبت باشد،آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to 5} \frac{4x}{(x-5)^4} =$$

ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to 1} \frac{-3x}{(x-1)^4} =$$

ج) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x+4}{x-4} =$$

د) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-6}{-x+3} =$$

تذکر: قضیه ۳ در حالتی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ نیز برقرار است.

مثال: هزینه پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای به وسیله تابعی ،با ضابطه $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی بر حسب میلیون تومان با دامنه تابع $[0و100)$ است.

الف)هزینه پاک سازی ۹۵ درصد آلودگی ها چقدر است؟ $x=95$ پس $f(95)$ را حساب می کنیم

$$f(95)=\frac{255\times95}{100-95}=4845$$ میلیون تومان

در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است.

ب)آیا می توان صد درصد آلودگی های رودخانه را پاک سازی کرد؟

با توجه به دامنه تابع، x فقط در همسایگی چپ ۱۰۰ تعریف می شود $x\to100^-$ ،از طرفی وقتی x با مقادیر کمتر از ۱۰۰ به عدد ۱۰۰ نزدیک می شود عبارت $100-x$ در مخرج با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می شود (0^+)

$$\lim_{x\to100^-}\frac{225x}{100-x}=\frac{225\times100}{100-100^-}=\frac{22500}{0^+}=+\infty$$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد ۱۰۰ مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده ای بزرگ تر خواهد شد لذا هرگز نمی توان صد درصد آلودگی های رودخانه را پاک سازی کرد.

مثال:

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x+1}{4-x^2}=$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{1-x}{x+2}=$$

$$\lim_{x\to(-a)^+}\frac{x-a}{x^2-a^2}=$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^3} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{x^2+4x+4} =$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x}{x^2-4} =$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} =$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]-x}{|x|-3} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{[x](x^3-x)} =$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} =$$

$$\lim_{x\to (-1)^-} \frac{x^2+1}{x^2+2x+1} =$$

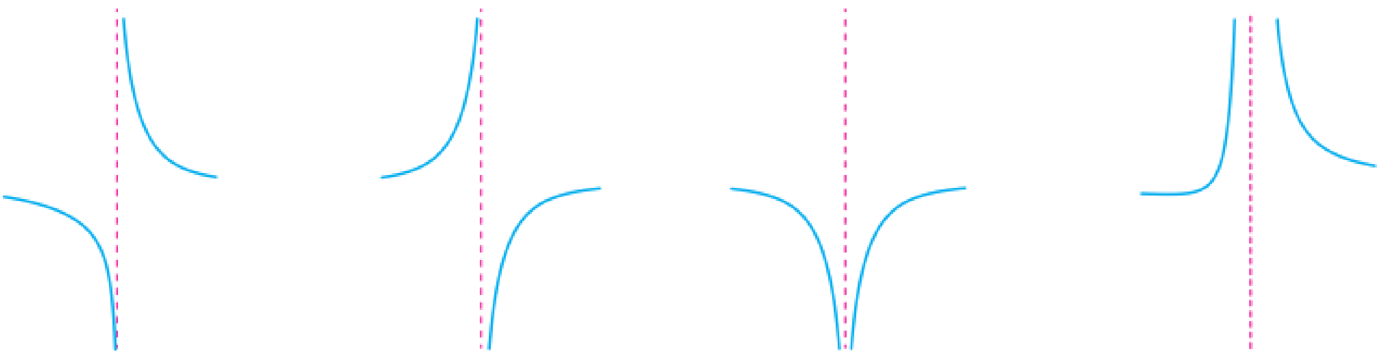
$$\lim_{x\to1}\ \frac{x-5}{x^2-2x+1}=$$

$$\lim_{x\to1}\ \frac{x+5}{x^2-3x+2}=$$

$$\lim_{x\to0}\ \frac{x-2}{x^3-x^2}=$$

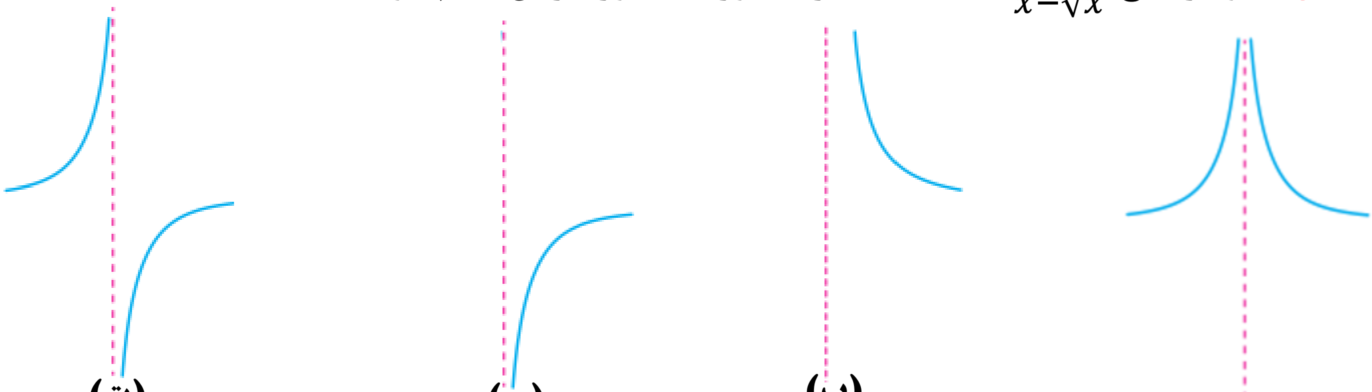
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{[x]-1}{|2x-1|}=$$

مثال:نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{-x^2+6x-9}$ در مجاورت خط $x=3$ چگونه است ؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{x}}$ در مجاورت محور عرض ها چگونه است؟

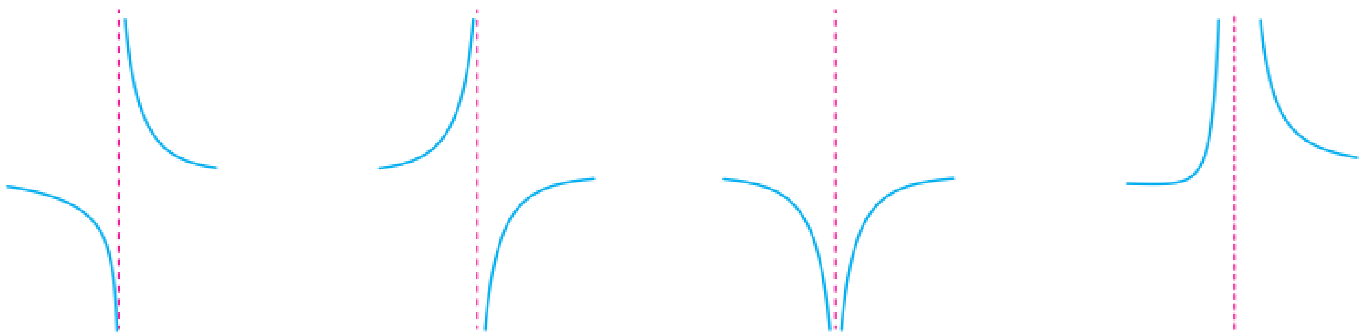


(الف) (ب) (پ) (ت)

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{x+3}{|x|-x}$ در مجاورت محور y ها چگونه است؟

(الف) (ب) (پ) (ت)

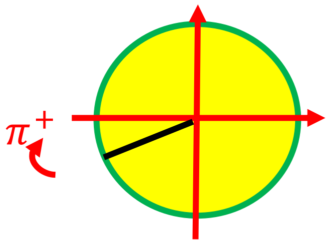
مثال: کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می دهد ؟ چرا؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

تذکر: اگر در حد گیری توابع کسری مثلثاتی با $\frac{\text{عدد}}{0}$ مواجه شدید،برای تشخیص 0^{+} یا 0^{-} بودن نسبت مثلثاتی موجود در مخرج کسر ، می توانید از دایره مثلثاتی استفاده کنید.

مثال:



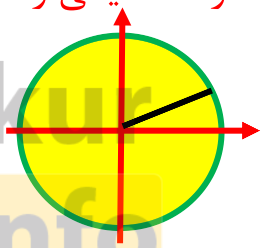
$$\lim_{\substack{x\to\pi^{+}\\ \text{ربع سوم}}} \frac{cosx}{Sinx} = \frac{-1}{0^{-}} = +\infty$$

تذکر بسیار مهم :توجه داشته باشید که هر گاه در حد گیری حاصل $Sinu$ یا $cosu$ برابر 1 شد،حتما 1^{-} و هر گاه حاصل حد این دو ،برابر -1 شود، حتما $(-1)^{+}$ است.

در همین راستا می توان گفت همواره $1 \pm Sinu \geq 0$ و $1 \pm cosu \geq 0$ است و در نتیجه همواره $Sinu - 1 \leq 0$ و $cosu - 1 \leq 0$ می باشد.

مثال : حاصل $\lim_{x\to0^{+}} \frac{x-1}{Sinx}$ را بدست آورید.

حل:وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر ۱- و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $Sinx$ مقداری مثبت است .لذا داریم:



$$\lim_{\substack{x\to0^{+}\\ \text{ربع اول}}} \frac{x-1}{Sinx} = \frac{-1}{0^{+}} = -\infty$$

مثال: با رسم نمودار تابع $y = tanx$ در یک همسایگی محذوف عدد $x = \frac{\pi}{2}$ ،رفتار این تابع را وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ میل می کند بررسی کنید.

مثال:حد تابع $\lim_{x\to0} cotx$ را بیابید.

تذکر: نماد گذاری ها به صورت $\lim_{x\to0^{-}} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{x\to0^{+}} \frac{1}{x} = +\infty$ به این معنا نیست که ∞ را عدد در نظر گرفتیم زمانی که حاصل حد بی نهایت می شود می گوییم حد وجود ندارد.حتی اگر حد چپ و راست هر دو $+\infty$ شوند یا هر دو $-\infty$ شوند.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{3-2\cos x}{x} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{cos\pi x}{x-2\sqrt{x}+1} =$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{[tan^2 x]}{\tan(x-\frac{\pi}{3})} =$$

$$\lim_{x\to (\frac{3\pi}{2})^-} tanx =$$

$$\lim_{x\to 2} \tan(\frac{\pi[x]}{x}) =$$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{3})^+} \frac{tanx+\sqrt{3}}{tanx-\sqrt{3}} =$$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})^+} \frac{[sin4x]}{sinx+cosx}=$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x-|x|}{x^2-[-x]}=$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-\sqrt{x+2}}=$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2-3x-2}=$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x}{x-[x]-1}=$$

مثال: حاصل $\lim_{x\to1} log\frac{x-1}{x+1}$ را بیابید؟

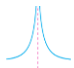
مثال:حاصل $\lim_{x\to1} log\frac{x^3+2}{(x-1)^2}$ را بیابید؟

مثال: نمودار تابع $f(x)=\log_3 x+1$ را رسم کنید و از روی شکل حاصل حد $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

مثال: حد تابع $\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{sinx}$ را در صورت وجود به دست آورید.

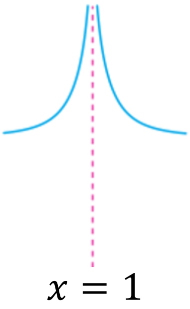
مثال: حد تابع $\lim_{x\to 0^+}\frac{cos[x]}{[x]}$ را در صورت وجود بیابید.

مثال: حد تابع $\lim_{x\to(\frac{-1}{4})^-}\frac{-x}{tan\pi x+1}$ را بیابید.

تذکر: اگر با حدی به صورت $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{حدی } 0}=+\infty$ یا $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=-\infty$ مواجه شدید که $x\to a^+$ و $x\to a^-$ هر دو نامتناهی اما یکسان بود (هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$) ،نمودار تابع در $x=a$ انفصال مضاعف به یکی از دو صورت  یا  خواهد داشت .حال اگر در این شرایط مخرج چند جمله ای درجه دوم باشد،قطعا به فرم $k(x-a)^2$،یعنی مربع کاملی با ریشه مضاعف $x=a$ است

مثال: اگر $\lim_{x\to 3}\frac{1-x}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+2b$ را بیابید.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{ax-1}{ax^2+bx-2}$ در مجاورت $x=1$ به صورت زیر است،حاصل $f(2)$ را بیابید.



مثال: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x}{3x^2-ax+b}=-\infty$ باشد،آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax-2}{x^2+11-b}$ را بیابید.

مثال: a و b چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x}{x^2-ax+b}=+\infty$ باشد.

مثال: حاصل هر یک از حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{6})^-}\frac{cosx}{2cosx-\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[sinx]}{x}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(-1)^{[x]}}{x^2-4}$$

قضیه ۴:اگر : $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ و یا $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

تذکر: قضیه فوق در حالتی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ نیز برقرار است.

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$ چون مخرج خیلی خیلی بزرگ می شود،پس کسر خیلی کوچک می شود و به سمت صفر می رود

مثال: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{tanx}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{\tan(\frac{\pi}{2}+x)}$ را به دست آورید.

مثال: $\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})$ را به دست آورید.

مثال:حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{cosx}{\log x}$ را به دست آورید.

مثال حدود زیرا بیابید؟

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{[sinx]-1}{x-\pi} =$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{[x^3]-1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x^2+x}\right) =$$

مثال: توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=x+1$ مفروض اند:

الف) حاصل $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} g(x)$ را به دست آورید .

ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x\to 0}((f(x+g)(x))$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه ای می گیرید ؟

ت) تابع $f\times g$ را بصورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x\to 0} f(x)\times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} g(x)$ بیان کنید.

با توجه به مثال فوق به طور کلی قضیه زیر را می توان بیان کرد

قضیه ۵: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ آن گاه:

الف) $\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$

ب) $\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)=\begin{cases}+\infty & L>0\\ -\infty & L<0\end{cases}$

$\infty = \infty \times$ عدد غیر صفر , عدد $\pm\infty=\pm\infty$

علامت ∞ حاصل،از ضرب علامت عدد در علامت ∞ اولیه بدست می آید

تذکر: قضیه ۵ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

قضیه ۶: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ آن گاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0 \\ +\infty & L < 0 \end{cases}$

تذکر: قضیه ۶ در حالتی که $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(2x + 1 + \frac{1}{x^2})$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+Sin^2x}{x^2}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x^2}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (1 - x)tanx$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{1-cos2x}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{3x^2-Sin^3x}{2x^3}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} sin2x. tan\frac{\pi}{2}x$ را به دست آورید.

تمرین: توابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x}$ و $g(x)=\frac{2x^2+2}{3x+1}$ و $g(x)=\frac{x-2}{2+x^2}$ مفروض اند:

الف) حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ را به دست آورید.

ب) حاصل هر یک از مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)+h(x)=$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)+g(x)=$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\times h(x)=$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\times g(x)=$$

اعمال جبری بر روی بی نهایت ها :

$$\begin{cases}(\text{عدد غیر صفر})\times(\infty)=\infty\\(\text{عدد مثبت})\times(+\infty)=+\infty\\(\text{عدد منفی})\times(+\infty)=-\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}(+\infty)\times(+\infty)=+\infty\\(-\infty)\times(-\infty)=+\infty\\(+\infty)\times(-\infty)=-\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}+\infty+\infty=+\infty\\-\infty-\infty=-\infty\\+\infty-\infty=\text{مبهم}\end{cases}$$

تذکر:

❊ رفع ابهام حالت $\infty-\infty$ وقتی $x\to a$

❊ رفع ابهام حالت $\infty\times 0$ وقتی $x\to a$

❊ رفع ابهام حالت $\frac{\infty}{\infty}$ وقتی $x\to a$

مورد اهداف این کتاب نیست.

مثال:آیا تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ در $x=0$ حد دارد؟حدود یک طرفه چطور؟

مثال:آیا عبارت $\frac{1}{\infty}+\infty$ مبهم است ؟ $\frac{\infty}{0}$ چطور؟

مثال:حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{(-1)^{[x]}sinx}{x^2}$ را به دست آورید.

مثال:حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan(x-1)|}{(x-1)^2}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-1)}{x(x-1)^3}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to (n+\frac{1}{2})\pi^+} tanx$ را به دست آورید.(n عدد صحیح دلخواهی است)

مثال:حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{2-[cosx]}{x}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to \pi^+}\frac{[cosx]}{cos\frac{x}{2}}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3\pi-x)}{x\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1-sinx}$ را به دست آورید.

مثال:حاصل $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{1-cosx}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{tanx}{\sqrt{1+cos2x}}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{[x^2]^2}{2x^2}$ را به دست آورید.

مثال: حاصل $\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+(-1)^{[x]})}{x^2-1}$ را به دست آورید.

مثال: با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}=+\infty$$

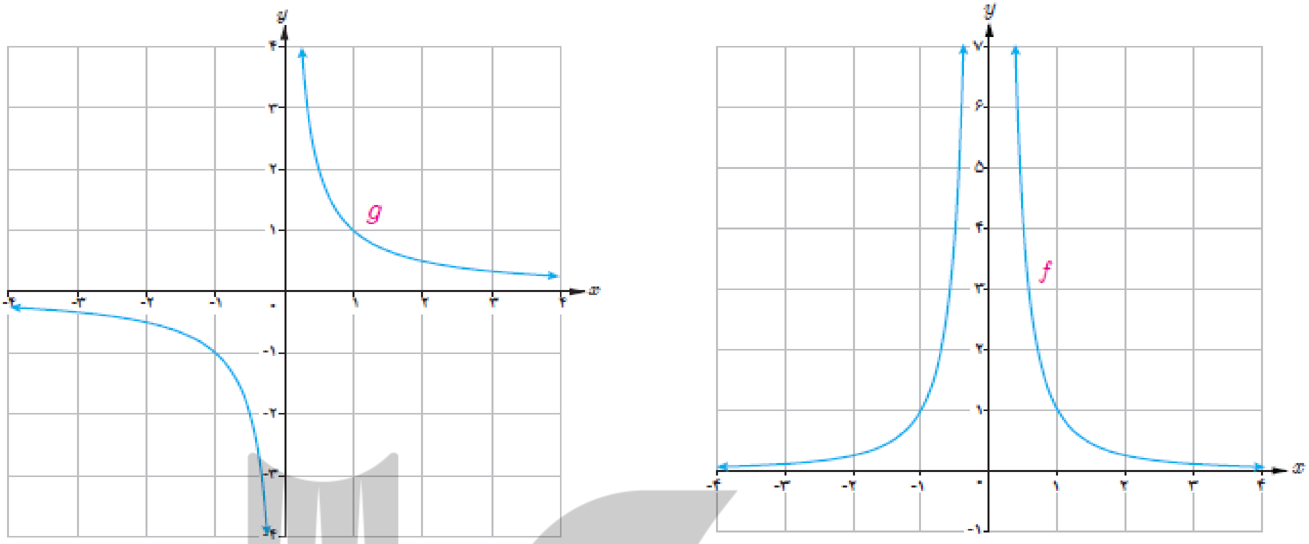
$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2}\left|\frac{5-x}{2+x}\right|=+\infty$$

مثال:اگر $f(1-2x)=\frac{x+1}{x^2-x}$ باشد،حاصل $\lim_{x\to\pi} f(cosx)$ را به دست آورید؟

مجانب قائم:

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید

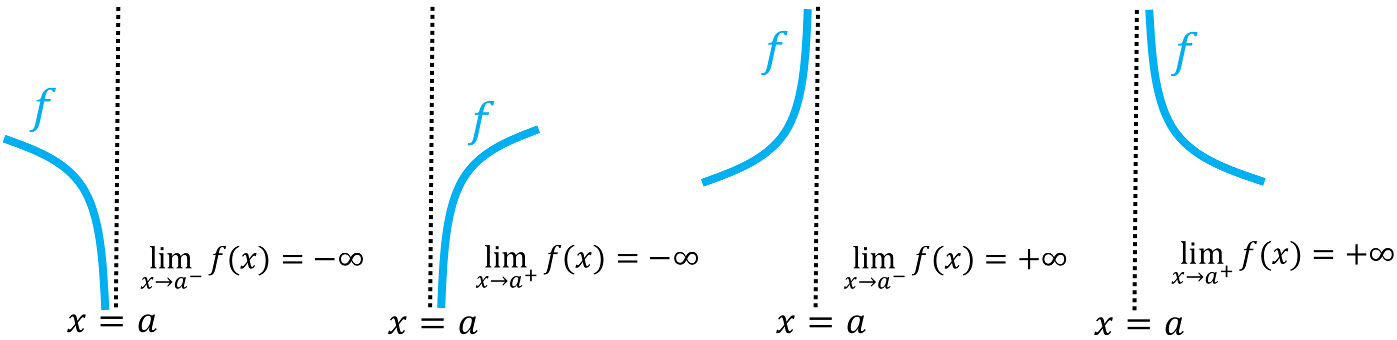


$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$ خط $x=0$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف: هر گاه تابع f حداقل در یک طرف $x=a$ تعریف شده باشد و حد آن در $x=a$ بی نهایت گردد آن گاه خط فرضی $x=a$ را مجانب قائم تابع می گویند.

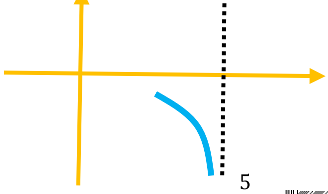
نمودار تابع f در اطراف مجانب قائم به یکی از صورت های زیر می باشد.

الف) اگه تابع f در یک طرف مجانب قائم تعریف بشه نمودار اون در اطراف مجانبش به یکی از صورت های زیر رسم می شه : طبق تعریف حداقل باید یکی از شرایط زیر برقرار باشد.



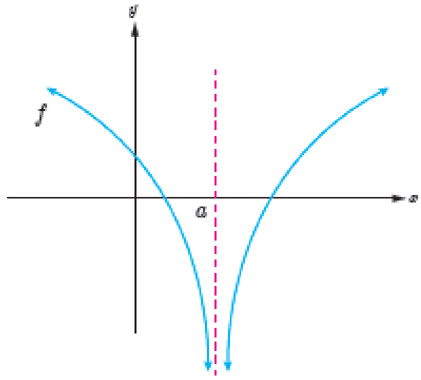
مثال:در تابع $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{5-x}}$ خط $x=5$ مجانب قائم تابع می باشد تابع f را در اطراف این مجانب رسم کنید. حل : می دونیم که $D_f=(-\infty,5)$ یعنی در سمت راست نقطه ی $x=5$ تعریف نشده

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{1-x}{\sqrt{5-x}}=\frac{1-5}{0^+}=\frac{-4}{0^+}=-\infty \to \lim_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$$



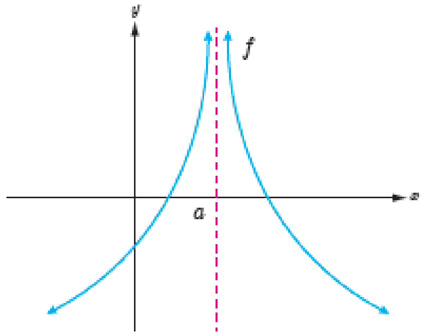
ب) تابع f در دو طرف مجانب قائم تعریف شده باشد

مثال: در هر یک از شکل های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



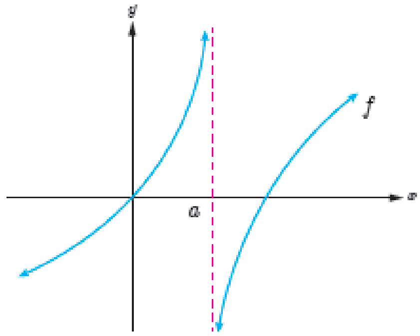
$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



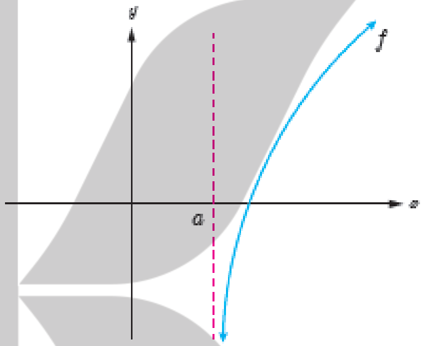
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

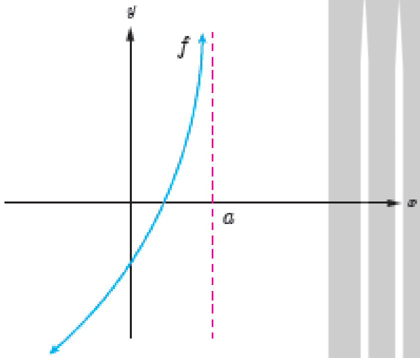


$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$



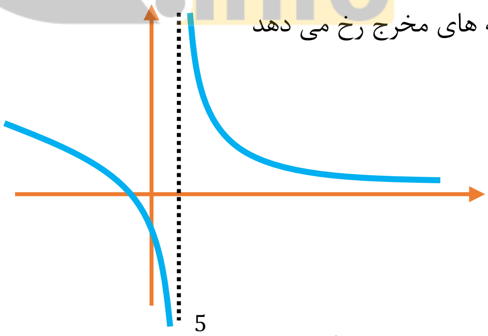
$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

مثال:مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-5}$ را بدست آورید؟

حل : مجانب قائم در ریشه های مخرج رخ می دهد

ریشه مخرج $2x - 5 = 0 \to x = \frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} \frac{x+1}{2x-5} = \begin{cases} \lim_{x\to(\frac{5}{2})^+} \frac{x+1}{2x-5} = \frac{\frac{7}{2}}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to(\frac{5}{2})^-} \frac{x+1}{2x-5} = \frac{\frac{7}{2}}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



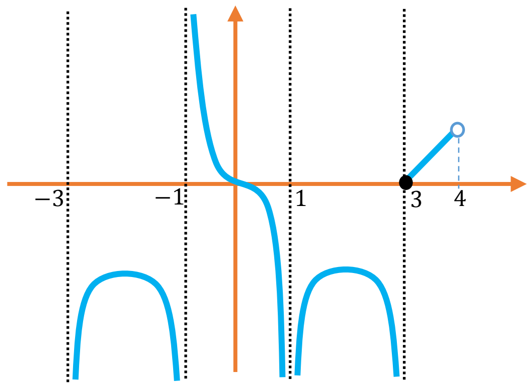
$x = \frac{5}{2}$

پس خط $x = \frac{5}{2}$ مجانب قائم تابع است

تذکر: به طور کلی برای یافتن مجانب های قائم یک تابع باید نقاطی (خطوطی) را بیابیم که تابع درآن نقاط حد نامتناهی داشته باشد

تذکر: توابعی که دارای برد محدود هستند ،نمی توانند مجانب قائم داشته باشند .زیرا حاصل حد آن ها هرگز نامتناهی نمی شود

مثال: تابع f با دامنه $(-3,4)-\{-1,1\}$ در شکل مقابل رسم شده است ،مجانب های قائم تابع f را بیابید.



تذکر: مجانب قائم در توابع گویا ،ریشه های مخرج،مشکوک به مجانب قائم هستند ،درصورتی که صورت و مخرج دارای ریشه (ریشه های) مشترک باشند باید حد تابع را به ازای آن ریشه بیابیم.

مثال:کدام یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ هستند.

❋شرایط مجانب قائم را برای خط $x=-1$ بررسی می کنیم :

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{-1^+ +1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{-1^- +1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

از آنجا که $\lim_{x\to-1} f(x)=\infty$ می توان گفت $x=-1$ مجانب قائم منحنی تابع f است.

❋شرایط مجانب قائم را برای خط $x=3$ بررسی می کنیم:

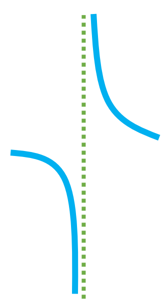
$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}\neq\infty$$

خط $x=3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x=-1$ دارد.

مثال:نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

حل: ریشه های مخرج : $\rightarrow$ $\begin{cases} x=0 & \text{بررسی می کنیم} \\ x^2+1 & \text{ریشه ندارد} \end{cases}$ $\quad f(x)=\frac{x+1}{x(x^2+1)}$

$$\lim_{x\to0}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\begin{cases}\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{0^+\times1}=\frac{1}{0^+}=+\infty\rightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{0^-\times1}=\frac{1}{0^-}=-\infty\rightarrow\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty\end{cases}$$



پس خط $x = 0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع رسم شده است.

مثال: مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$: ریشه های مخرج $\rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \end{cases}$

❋شرایط مجانب قائم را برای خط $x = 3$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{2}{(x+2)(x-3)} = \frac{2}{5\times 0^{\pm}} = \pm\infty$$

از آنجا که $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$ می توان گفت $x = 3$ مجانب قائم منحنی تابع f است.

❋شرایط مجانب قائم را برای خط $x = -2$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{12}{(x+2)(x-3)} = \frac{2}{-5\times 0^{\pm}} = \mp\infty$$

از آنجا که $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$ می توان گفت $x = -2$ مجانب قائم منحنی تابع f است.

بنابراین خطوط $x = 3$ و $x = -2$ مجانب قائم منحنی تابع f است .

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $R - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-2, 2] - \{1\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت قائم خود چگونه است؟

مثال:مجانب های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x)=\frac{2x-1}{3-x}$$

$$g(x)=\frac{x^2+x}{x^2-x}$$

$$g(x)=\frac{1}{x^3-x}$$

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+4}$$

$$g(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$

مثال: تابع $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x+1}$ در اطراف مجانب قائم خود چگونه هستند؟

مثال: نمودارتابع $f(x)=\frac{x-3}{x^4+5x^2}$ در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید؟

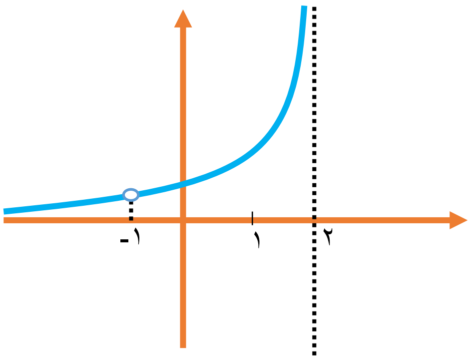
تذکر:در توابع کسری گویا یعنی توابع کسری که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای است،ریشه های مخرج کسر در صورتی که ریشه صورت کسر نباشند،همواره مجانب قائم تابع خواهند بود.

مثال: مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ را در صورت وجود بیابید؟

مثال: مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-[x]}$ را در صورت وجود بیابید؟

مثال :تابع $f(x)=\frac{tanx}{sinx-cosx}$ در بازه $\left[0, 2\pi\right]$ چند خط مجانب قائم دارد

مثال: مقادیر a و b و c را چنان بیابید که نمودار تابع $y=\frac{x+a}{x^2+bx+c}$ به صورت زیر باشد؟



مثال:نمودار تابع $f(x)=\frac{[x]-3}{x-3}$ را اطراف مجانب قائم آن رسم کنید.