# مثلثات

## ۳-۴: معادلات مثلثاتی

در این بخش با معادلات مثلثاتی و روش‌های حل آن‌ها آشنا می‌شویم. معادلات مثلثاتی به معادلاتی می‌گویند که در آن‌ها عبارت‌های مثلثاتی حضور داشته باشند. بسیاری از مواقع، حل یک مسأله در هندسه یا علوم دیگر، به حل یک معادله‌ی مثلثاتی می‌انجامد. معادلات مثلثاتی بحثی بسیار گسترده دارند که در این بخش ما تنها بر حل معادلات مقدماتی در محدوده‌ی مطالب کتاب درسی و کمی فراتر از آن تأکید داریم.

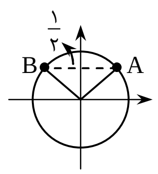
### چهار صورت اصلی معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی می‌توانند ساختارهای متفاوتی داشته باشند. معادله‌ای چون $\sin x = \frac{1}{2}$ یک معادله‌ی بسیار ساده است و معادله‌ای مانند $\sin^2 x + \tan x = x - \cos x$ یک معادله‌ی پیچیده. معمولاً معادلاتی که ما با آن‌ها سروکار داریم پس از ساده‌کردن و انجام عملیات‌های جبری، به یکی از ۴ صورت زیر تبدیل می‌شوند:

الف) $\sin x = \sin a$ ب) $\cos x = \cos a$ پ) $\tan x = \tan a$ ت) $\cot x = \cot a$

در این بخش ابتدا این چهار حالت کلی و معادلات قابل تبدیل به آن‌ها را بررسی می‌کنیم و سپس چند معادله‌ی پیچیده‌تر را حل می‌کنیم.

### معادلات به شکل $\sin x = \sin a$



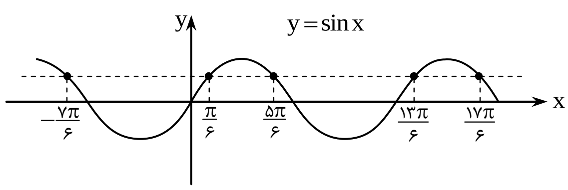

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی $\sin x = \frac{1}{2}$ (یا در واقع $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$) را حل کنیم. طبق دایره‌ی مثلثاتی اگر انتهای کمان متناظر زاویه‌ی $x$ در یکی از دو نقطه‌ی $A$ و $B$ باشد، داریم $\sin x = \frac{1}{2}$. نقطه‌ی $A$ متناظر $x_1 = \frac{\pi}{6}$ و نقطه‌ی $B$ متناظر $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$ است. پس دو جواب معادله به‌دست آمده است.

از طرفی می‌دانیم نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\alpha$ و $2k\pi + \alpha$ (که $k \in Z$) یکسان‌اند، پس هر $x$ با مقدار $x = 2k\pi + x_1$ یا $x = 2k\pi + x_2$ نیز جواب معادله است.

**نکته:** **معادله‌ی** $\sin x = \sin a$ **دو دسته جواب دارد:** $(k \in Z)$

$$x_1 = 2k\pi + a \quad , \quad x_2 = 2k\pi + \pi - a$$

**در حالت‌های خاص** $\sin x = \pm 1$ **فقط یک دسته جواب داریم** $(x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ یا $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2})$




معادله‌ی $\sin x = \frac{1}{2}$ را با نمودار نیز می‌توانیم حل کنیم. می‌دانیم ریشه‌های این معادله همان طول نقاط برخورد نمودار $y = \sin x$ و خط $y = \frac{1}{2}$ هستند. در شکل این نقاط را مشاهده می‌کنید.

**مسأله‌ی (۱): هر یک از معادلات زیر را حل کنید و بگویید در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارند.**

**الف)** $\sqrt{2}\sin 2x + 1 = 0$ **ب)** $\sin 2x - \sin 4x = 0$ **پ)** $2\sin^2 x - \sin x = 1$

**حل: الف)** داریم: $\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$، پس $\sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{4})$، در نتیجه دو دسته جواب داریم:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{8} \quad , \quad 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

دو دسته جواب وجود دارد. در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ ریشه‌های $x_1 = \pi - \frac{\pi}{8}$، $x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{8}$، $x_3 = \frac{5\pi}{8}$ و $x_4 = \pi + \frac{5\pi}{8}$ حضور دارند.

**ب)** داریم: $\sin 2x = \sin 4x$، بنابراین دو حالت پیش می‌آید:

$$2x = 2k\pi + 4x \Rightarrow -2x = 2k\pi \Rightarrow x = -k\pi$$

$$2x = 2k\pi + \pi - 4x \Rightarrow 6x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

دو دسته جواب به‌دست می‌آید. در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ ریشه‌های $x_1 = 0$، $x_2 = \pi$، $x_3 = 2\pi$، $x_4 = \frac{\pi}{6}$، $x_5 = \frac{3\pi}{6}$، $x_6 = \frac{5\pi}{6}$، $x_7 = \frac{7\pi}{6}$، $x_8 = \frac{9\pi}{6}$ و $x_9 = \frac{11\pi}{9}$ حضور دارند.

➢ **تذکّر:** دسته جواب اول را می‌توانیم به‌صورت $x = k\pi$ نیز نشان دهیم (زیرا $k \in Z$).

**پ)** معادله را می‌توانیم به‌صورت $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بنویسیم. پس دو معادله حاصل می‌شود:

$$2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

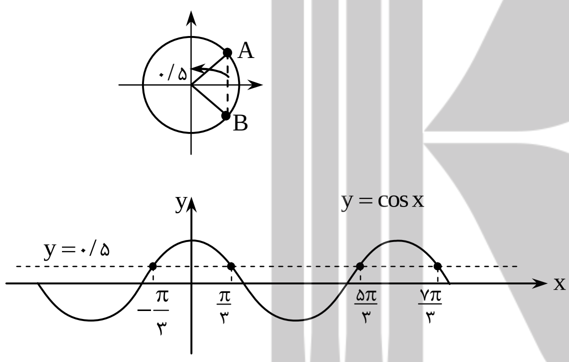
پس سه دسته جواب داریم. در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ جواب‌های $x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6}$، $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6}$ و $x_3 = \frac{\pi}{2}$ حضور دارند.

## ◈ معادلات به شکل cosx=cosa

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی $\cos x = \frac{1}{2}$ (یا در واقع $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$) را حل کنیم. طبق دایره‌ی مثلثاتی اگر انتهای کمان متناظر $x$ در یکی از دو نقطه‌ی $A$ و $B$ باشد، داریم: $\cos x = \frac{1}{2}$.

نقطه‌ی $A$ متناظر $\frac{\pi}{3}$ و نقطه‌ی $B$ متناظر $-\frac{\pi}{3}$ است، پس دو دسته جواب $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ برای معادله به‌دست می‌آیند.

از نمودار $y = \cos x$ نیز این نتیجه واضح است که با خط $y = \frac{1}{2}$ در نقاطی برخورد می‌کند که طول آن‌ها همان ریشه‌های معادله است.




**نکته:** **معادله‌ی $\cos x = \cos a$ دو دسته جواب دارد:**

$$x = 2k\pi + a \quad , \quad x = 2k\pi - a$$

**در حالت‌های خاص $\cos x = \pm 1$ فقط یک دسته جواب داریم ($x = 2k\pi$ یا $x = (2k+1)\pi$).**

❍ **مسأله‌ی (۲): هر یک از معادلات زیر را حل کنید.**

**الف)** $\cos 2x = \cos 3x$ **ب)** $\cos 2x = \sin 3x$

**حل: الف)** طبق نکته‌ی قبل دو حالت پیش می‌آید:

$$2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow -x = 2k\pi \Rightarrow x = -2k\pi$$

$$2x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 5x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}$$

تمام جواب‌های دسته جواب اول، در دسته جواب دوم حضور دارند. مثلاً $x = -4\pi$ یکی از جواب‌های دسته جواب اول است، که به ازای $k = -10$ از دسته جواب دوم تولید می‌شود. به این ترتیب جواب کلی معادله $x = \frac{2k\pi}{5}$ است.

**ب)** می‌دانیم $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$، پس می‌توانیم معادله را به‌صورت $\cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-3x)$ بنویسیم. بنابراین:

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-3x\Rightarrow 5x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=2k\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$$

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+3x\Rightarrow x=-2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

➢ **تذکّر (۱):** می‌توانستید معادله را به‌صورت $\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=\sin 3x$ بنویسید و با استفاده از روش حل $\sin x=\sin a$ معادله را حل کنید.

➢ **تذکّر (۲):** جواب‌های به‌صورت $x=-2k\pi+\frac{\pi}{2}$ همگی در دسته جواب اول حضور دارند. زیرا این جواب‌ها به‌صورت $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$ قابل بازنویسی‌اند، دسته جواب اول نیز به‌صورت $x=(4k+1)\frac{\pi}{10}$ قابل بازنویسی است. حال اگر $x=(4m+1)\frac{\pi}{2}$ یکی از جواب‌های دسته جواب دوم باشد، با جای‌گذاری $k=5m+1$ داریم: $(4k+1)\frac{\pi}{10}=(4m+1)\frac{\pi}{2}$، پس این جواب در دسته اول حضور دارد. پس می‌توانیم دسته جواب اول را به تنهایی به‌عنوان همه‌ی جواب‌های معادله معرفی کنیم.

➢ **تذکّر (۳):** هنگام حل یک معادله لازم نیست حتماً مانند تذکّر قبل، دسته جواب‌ها را با هم مقایسه کنید. انجام ندادن این کار لطمه‌ای به درستی راه‌حل شما وارد نمی‌کند، هر چند که از زیبایی و دقت آن می‌کاهد.

**مسأله‌ی (۳): معادله‌ی $2\cos^2 x-\sin x-1=0$ را از دو راه‌حل کنید و نشان بدهید جواب‌های دو روش یکسان‌اند.**

**حل: راه اول:** با جای‌گذاری $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0\Rightarrow(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\ \text{یا}\ \sin x=-1$$

به این ترتیب دو معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$1)\ \sin x=\frac{1}{2}=\sin(\frac{\pi}{6})\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$2)\ \sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

**راه دوم:** با استفاده از اتحاد $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\cos 2x-\sin x=0\Rightarrow\cos 2x=\sin x\Rightarrow\cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-x)$$

دو معادله‌ی زیر از رابطه‌ی فوق به‌دست می‌آید:

$$1)\ 2x=2k\pi+(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$2)\ 2x=2k\pi-(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

حالا باید ثابت کنیم که جواب‌های راه اول و دوم یکسان هستند. برای این منظور باید نشان بدهیم دسته جواب‌های اول هر دو راه‌حل یکسان‌اند. برای این منظور در دسته جواب $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ سه وضعیت را برای $k$ در نظر می‌گیریم: $k=3m$، $k=3m+1$ یا $k=3m+2$. در هر حالت داریم:

$$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\begin{cases}2m\pi+\frac{\pi}{6} & k=3m\\ 2m\pi+\frac{5\pi}{6} & k=3m+1\\ 2(m+1)\pi-\frac{\pi}{2} & k=3m+2\end{cases}$$

با توجه به صحیح بودن $m$ می‌بینید که دو حالت اول همان جواب‌های بخش (۱) از روش اول را بیان می‌کنند و حالت سوم همان جواب‌های بخش (۲) از راه اول است.

**تست (۱): جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۲x = \sin x$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ بیان شده است. مجموعه‌ی مقادیر $i$ کدام است؟ (سراسری-۸۳)**

۱) $\{۷ , ۹\}$  ۲) $\{۱ , ۳ , ۵\}$  ۳) $\{۱ , ۴ , ۷\}$  ۴) $\{۱ , ۵ , ۹\}$

**حل:** این تست را در مسأله‌ی قبل حل کرده‌ایم. مثلاً با راه‌حل اول سه دسته جواب زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad , \quad x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۶} \quad , \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

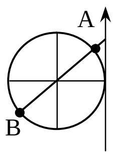
دسته جواب $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ را به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$ نیز می‌توانیم نشان دهیم (چون انتهای کمان‌های $-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ یکسان‌اند)، پس سه دسته جواب عبارت‌اند از:

$$x = ۲k\pi + \frac{۹\pi}{۶} \quad , \quad x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \quad , \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

این سه دسته جواب به‌صورت $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ قابل بیان‌اند که $i \in \{۱,۵,۹\}$. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

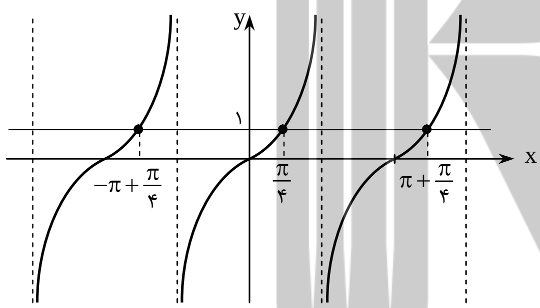
## معادلات به شکل $\tan x = \tan a$ و $\cot x = \cot a$

فرض کنید می‌خواهیم معادله‌ی $\tan x = ۱$ را حل کنیم (در واقع معادله‌ی $\tan x = \tan\frac{\pi}{۴}$ را). طبق دایره‌ی مثلثاتی اگر انتهای کمان متناظر $x$ در یکی از دو نقطه‌ی $A$ و $B$ باشد، داریم: $\tan x = ۱$. نقطه‌ی $A$ متناظر $\frac{\pi}{۴}$ و نقطه‌ی $B$ متناظر $\pi + \frac{\pi}{۴}$ است، پس دو دسته جواب $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ و $x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} = (۲k+۱)\pi + \frac{\pi}{۴}$ برای معادله به‌دست می‌آید.




این دو دسته جواب را به‌صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ می‌توانیم ترکیب کنیم. چون $k$ یا فرد است یا زوج، که در هر حالت $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ در یکی از دو دسته‌ی بالا قرار می‌گیرد.

از نمودار $y = \tan x$ نیز که با دوره‌ی تناوب $\pi$ متناوب است، این امر واضح است. می‌بینید که خط $y = ۱$ نمودار را در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{۴}$ (و در حالت کلی $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$) قطع کرده است. مشابه حرف‌های بالا را درباره‌ی معادله‌ای چون $\cot x = ۱$ نیز می‌توانیم بگوییم.




**نکته:** **معادله‌ی $\tan x = \tan a$ (یا $\cot x = \cot a$) دسته جواب $x = k\pi + a$ را دارد.**

**مسأله‌ی (۴): هر یک از معادلات زیر را حل کنید.**

**الف)** $\sin ۲x = -\cos ۲x$  **ب)** $\cot x - ۳\tan x = ۰$

**حل: الف)** می‌توانیم معادله را به‌صورت $\sin ۲x = -\sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x)$ بنویسیم و حل کنیم. ولی راه دیگر استفاده از نسبت تانژانت است. می‌دانیم $\cos ۲x \neq ۰$، زیرا اگر $\cos ۲x = ۰$ داریم $\sin ۲x = \pm ۱$، پس تساوی برقرار نیست. با فرض $\cos ۲x \neq ۰$ دو طرف را بر $\cos ۲x$ تقسیم می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = -۱ \Rightarrow \tan ۲x = -۱ \Rightarrow \tan ۲x = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$$

**ب)** با جای‌گذاری $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{\tan x} - ۳\tan x = ۰ \Rightarrow ۱ - ۳\tan^۲ x = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

دو حالت پیش می‌آید:

$$\tan x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\tan(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$\tan x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\tan(\frac{۵\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۶}$$

معمولاً در معادلات دیگر باید با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادله را به یکی از چهار صورت قبلی تبدیل و سپس آن را حل کنید.

**مسأله‌ی (۵): هر یک از معادلات زیر را حل کنید.**

**الف)** $\sin ۲x+۲\sin x=۰$

**ب)** $۲\sin(x+\frac{\pi}{۸})-\cos^{۲}(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱$

**پ)** $۲\sin(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\sin(۳x-\frac{\pi}{۸})$

**ت)** $\frac{۲}{\sqrt{۳}}(\tan x-\cot x)=\tan^{۲}x+\cot^{۲}x-۲$

**ث)** $\tan(\frac{\pi}{۱۲}-x)\tan(x-\frac{\pi}{۶})=-۱$

**ج)** $\cos x-۲\sin x=\frac{۱}{\cos x}$

**حل: الف)** با توجه به $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ داریم:

$$۲\sin x\cos x+۲\sin x=۰\Rightarrow ۲\sin x(\cos x+۱)=۰\Rightarrow \sin x=۰ \ \text{یا}\ \cos x=-۱$$

می‌دانیم وقتی $\cos x=-۱$، قطعاً $\sin x=۰$. پس اگر جواب‌های $\sin x=۰$ را بیابیم، جواب‌های معادله‌ی دوم را نیز یافته‌ایم. درنتیجه تمام جواب‌های معادله عبارت‌اند از: $\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi$

**ب)** با توجه به روابط $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ و $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ داریم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۸})=\cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۸}))=\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})$$

با جای‌گذاری این نتیجه در معادله‌ی اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$۲\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})-\cos^{۲}(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱\xrightarrow{t=\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})}t^{۲}-۲t+۱=۰\Rightarrow t=۱$$

$$\Rightarrow\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱\Rightarrow x-\frac{۳\pi}{۸}=۲k\pi\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۸}$$

**پ)** می‌توانیم $\sin(۳x-\frac{\pi}{۸})$ را بر حسب $\sin(\frac{۳\pi}{۸}-x)$ بیان کنیم. داریم:

$$\sin(۳(\frac{۳\pi}{۸}-x))=\sin(\frac{۹\pi}{۸}-۳x)=\sin(\pi+\frac{\pi}{۸}-۳x)=-\sin(\frac{\pi}{۸}-۳x)=\sin(۳x-\frac{\pi}{۸})\Rightarrow\sin(۳x-\frac{\pi}{۸})=\sin(۳(\frac{۳\pi}{۸}-x))$$

حال اگر قرار دهیم $\frac{۳\pi}{۸}-x=t$، معادله را به‌صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$$۲\sin t=\sin ۳t\Rightarrow ۲\sin t=۳\sin t-۴\sin^{۳}t\Rightarrow\sin t(۴\sin^{۲}t-۱)=۰$$

پس $\sin t=۰$ یا $\sin t=\pm\frac{۱}{۲}$ که هر کدام از معادله‌های حاصل را به راحتی می‌توان حل کرد. (پاسخ نهایی را به خودتان واگذار می‌کنیم.)

**ت)** با توجه به تساوی $(\tan x-\cot x)^{۲}=\tan^{۲}x+\cot^{۲}x-۲$، اگر در معادله قرار دهیم $y=\tan x-\cot x$، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}}y=y^{۲}\Rightarrow y=۰\ \text{یا}\ y=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$y=\tan x-\cot x=\tan x-\frac{۱}{\tan x}=\frac{\tan^{۲}x-۱}{\tan x}=\frac{-۲}{\tan ۲x}=-۲\cot ۲x\Rightarrow\begin{cases}\cot ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \cot ۲x=\frac{-۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

پس $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$ یا $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}$.

**ث) راه اول:** معادله را به‌صورت $\tan(\frac{\pi}{۱۲}-x)=-\cot(x-\frac{\pi}{۶})$ می‌نویسیم. حال با استفاده از اتحادها داریم:

$$-\cot(x-\frac{\pi}{۶})=\cot(\frac{\pi}{۶}-x)=\tan(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۶}-x))=\tan(\frac{\pi}{۳}+x)$$

بنابراین باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\tan(\frac{\pi}{12}-x)=\tan(\frac{\pi}{3}+x)\Rightarrow \frac{\pi}{3}+x=k\pi+\frac{\pi}{12}-x\Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

**راه دوم:** فرض کنید: $x-\frac{\pi}{6}=\alpha$ و $\frac{\pi}{12}-x=\beta$، بنابراین طبق معادله: $\tan\alpha\tan\beta=-1$. اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

پس اگر $x$ جواب معادله باشد، برای آن $\tan(\alpha-\beta)$ مقداری تعریف‌نشده است. می‌دانیم جز بـرای مقـادیر $\alpha-\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}$، $\tan(\alpha-\beta)$ تعریف‌شده است، درنتیجه:

$$\alpha-\beta=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow (x-\frac{\pi}{6})-(\frac{\pi}{12}-x)=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$$

➢ **تذکّر:** می‌توانید پاسخ راه دوم را دقیقاً به‌صورت دسته جواب راه اول نشان دهید:

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{(k+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\Rightarrow x=\frac{k'\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

**۵)** واضح است که $\cos x\neq 0$، حال با تقسیم طرفین بر $\cos x$ داریم:

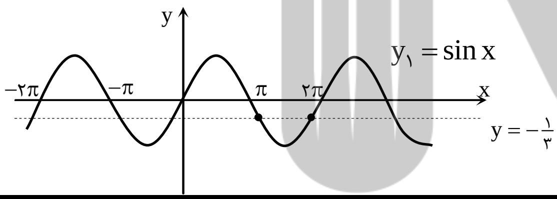
$$1-2\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1-2\tan x=1+\tan^2 x\Rightarrow \tan^2 x+2\tan x=0\Rightarrow \tan x=0 \text{ یا } \tan x=-2$$

هر یک از دو معادله‌ی فوق به‌راحتی قابل حل است. (برای حل معادله‌ی $\tan x=-2$ چون زاویه‌ی معروفی ندارید، یک زاویه‌ی فرضی مانند $\alpha$ با $\tan\alpha=2$ در نظر بگیرید.)

**تست (۲): معادله‌ی $(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{1}{3})(\sin x-\frac{1}{4})=0$ در بازه‌ی $[\pi\ ,\ 2\pi]$ چند ریشه دارد؟ (آزاد-۸۳)**

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

**حل:** در فاصله‌ی $[\pi\ ,\ 2\pi]$ همواره داریم $\sin x\leq 0$، پس عبارت‌های پرانتزهای اول و سوم نمی‌توانند صفر باشند، در نتیجه ریـشه‌هـای معادلـه فقط در رابطه‌ی $\sin x=-\frac{1}{3}$ صدق می‌کنند. به راحتی می‌توان مشاهده کرد که خط $y=-\frac{1}{3}$، نمودار $y=\sin x$ را در دو نقطه در این فاصله قطع می‌کند. در نتیجه معادله دو ریشه دارد. بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.




**تست (۳): جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin 4x-\sin 2x=\sin(\frac{\pi}{2}+3x)$، کدام است؟ (سراسری - ۸۱)**

۱) $\frac{k\pi}{6}$ ۲) $\frac{k\pi}{3}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

**حل:** اولاً: $\sin 4x-\sin 2x=\sin(\frac{\pi}{2}+3x)=\cos 3x$، حال با استفاده از روابط تبدیل به ضرب داریم:

$$2\sin x\cos 3x=\cos 3x\Rightarrow \cos 3x(2\sin x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} 1)\ \cos 3x=0\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ 2)\ \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \text{ یا } x=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

جواب‌های معادله‌ی دوم زیرمجموعه‌ای از جواب‌های معادله‌ی اول‌اند. پس جواب کلـی معادلـه گزینـه‌ی (۴) مـی‌شـود. بـرای آن کـه نـشان دهیـد جواب‌های معادله‌ی دوم در معادله‌ی اول حضور دارند، مانند راه مسأله‌ی (۳) عمل کنیـد. در دسـته جـواب اول بـرای $k$، سـه حالـت فـرض کنیـد ($k=3m$، $k=3m+1$ و $k=3m+2$)، و نشان دهید هر دو حالت دسته جواب دوم به وجود می‌آیند.

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**مسأله‌ی (۶): هر یک از معادلات زیر را حل کنید.**

الف) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$

ب) $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 3x}$ * پ) $(\cos 3x+\cos 4x)(\cos 3x+\cos x)=\frac{1}{4}$

**حل: الف)** با استفاده از روابط تبدیل جمع به ضرب، دو طرف معادله را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\sin x+\sin 3x+\sin 2x=\cos x+\cos 3x+\cos 2x\Rightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x$$
$$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=\cos 2x(2\cos x+1)\Rightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-\cos 2x)=0$$

به دو معادله می‌رسیم: $\cos x=-\frac{1}{2}$ و $\sin 2x=\cos 2x$. نمونه‌ی هر یک از این معادلات را قبلاً حل کرده‌ایم.

**ب)** دو طرف معادله را در $2\sin x\sin 2x\sin 3x$ ضرب کنید و سپس از روابط تبدیل به جمع استفاده کنید:

$$2\sin 2x\sin 3x=2\sin x\sin 3x+2\sin x\sin 2x\Rightarrow \cos x-\cos 5x=\cos 2x-\cos 4x+\cos x-\cos 3x$$
$$\Rightarrow \cos 5x-\cos 3x+\cos 2x-\cos 4x=0\Rightarrow -2\sin x\sin 4x-2\sin(-x)\sin 3x=0$$
$$\Rightarrow \sin x(\sin 3x-\sin 4x)=0\Rightarrow \sin x=0 \text{ یا } \sin 3x=\sin 4x$$

$\sin x=0$ در دامنه‌ی معادله نیست. پس فقط ریشه‌های معادله‌ی دوم را پیدا می‌کنیم:

$$\sin 3x=\sin 4x\Rightarrow\begin{cases}4x=2k\pi+3x\Rightarrow x=2k\pi\\ 4x=2k\pi+\pi-3x\Rightarrow x=\frac{(2k+1)\pi}{7}\end{cases}$$

دسته جواب اول غیر قابل قبول است، زیرا به ازای آن‌ها داریم: $\sin x=0$. اما دسته جواب دوم قابل قبول است، مگر حالت‌های خاصی که به ازای آن‌ها $2k+1$ مضرب ۷ است، زیرا در این حالات نیز داریم: $\sin x=0$.

**پ)** ابتدا عبارت سمت چپ را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی ساده‌تر می‌کنیم:

$$(\cos 3x+\cos 4x)(\cos 3x+\cos x)=(\cos 3x+\cos 4x)2\cos x\cos 2x=\cos 2x(2\cos x\cos 3x+2\cos x\cos 4x)$$
$$=\cos 2x(\cos 2x+\cos 4x+\cos 3x+\cos 5x)=\cos 2x\cos 2x+\cos 2x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x+\cos 2x\cos 5x$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 4x+1)+\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)+\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos x)+\frac{1}{2}(\cos 7x+\cos 3x)$$

با توجه به معادله مقدار عبارت بالا برابر $\frac{1}{4}$ است، پس داریم:

$$1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos 7x=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos 7x)=-\sin\frac{x}{2}$$

مانند آن‌چه در بخش (۳-۳) درباره‌ی محاسبه‌ی مجموع‌های مثلثاتی آموختیم، نتیجه می‌گیریم:

$$\sin\frac{15}{2}x-\sin\frac{x}{2}=-\sin\frac{x}{2}\Rightarrow \sin\frac{15}{2}x=0\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{15}$$

تنها دقت کنید که در جواب‌های نهایی نباید $k$ مضرب ۱۵ باشد (چرا؟ در واقع باید همه‌ی حالاتی را که به ازای آن‌ها $\sin\frac{x}{2}=0$ از جواب‌ها حذف کنید).

## معادلات کلاسیک

دسته‌ای خاص از معادلات مثلثاتی را معادلات کلاسیک می‌گویند. فرم کلی این معادلات در مسائل زیاد ظاهر می‌شود و راه‌حل آن‌ها یکسان است. با توجه به این‌که کتاب درسی سه حالت این معادلات را بررسی کرده (هر چند که نامی از کلاسیک نیاورده)، در این‌جا ما معادلات کلاسیک نوع اول تا سوم را (و علاوه بر آن نوع چهارم را که با معلومات ما قابل حل است) بررسی می‌کنیم.

**مسأله‌ی (۷): معادله‌های زیر را حل کنید.**

الف) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ ب) $3\cos x+2\sin x=2$

**حل: الف)** در بخش (۳-۱) دیدید که هر عبارت به شکل $a\sin x+b\sin x$ را می‌توانیم به‌صورت $\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$ بازنویسی کنیم. داریم:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \text{ یا } x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{12} \text{ یا } 2k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

**ب)** در بخش (۳-۱) دو اتحاد $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ و $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ را ثابت کرده‌ایم. با جای‌گذاری این روابط داریم: $(t=\tan\frac{x}{2})$

$$3\times\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\times\frac{2t}{1+t^2}=2\Rightarrow 5t^2-4t-1=0\Rightarrow(t-1)(5t+1)=0$$

پس باید دو معادله‌ی $\tan\frac{x}{2}=1$ و $\tan\frac{x}{2}=-\frac{1}{5}$ را حل کنیم که حل آن‌ها را به خودتان واگذار می‌کنیم.

**نتیجه:** **معادلاتی به شکل $a_1\sin x+a_2\cos x=a_3$ را معمولاً معادلات کلاسیک نوع اول می‌گویند.**
**این‌گونه معادلات را به دو روش می‌توانیم حل کنیم:**
**۱- نوشتن** $a\sin x+b\cos x$ **به شکل** $\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha$
**۲- جای‌گذاری** $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ و $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

**مسأله‌ی (۸):** **معادله‌ی** $\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=1$ **را حل کنید.**

**حل:** با استفاده از روابط مقدماتی داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=\cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-2x))=\cos(\frac{\pi}{6}+2x)$$

با جای‌گذاری نتیجه‌ی بالا در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}\cos(2x+\frac{\pi}{6})=1$$

این معادله نیز شبیه یک معادله‌ی کلاسیک نوع اول است. درواقع داریم:

$$\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

**تست (۴):** **معادله‌ی** $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$ **در فاصله‌ی** $(0\ ,\ 4\pi)$ **چند ریشه دارد؟ (آزاد- ۸۱)**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**حل:** از روش ارائه شده برای معادلات کلاسیک نوع اول استفاده می‌کنیم:

$$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x)=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\cos(2x-\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=2k\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{8}$$

در فاصله‌ی $(0\ ,\ 4\pi)$ چهار جواب متمایز برای معادله به‌دست می‌آید:

$$x_1=\frac{\pi}{8}\ ,\ x_2=\pi+\frac{\pi}{8}\ ,\ x_3=2\pi+\frac{\pi}{8}\ ,\ x_4=3\pi+\frac{\pi}{8}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

**مسأله‌ی (۹):** **معادله‌ی** $\tan x-\sqrt{3}\cot x=1-\sqrt{3}$ **را حل کنید.**

**حل:** با ضرب دو طرف معادله در $\tan x$ داریم:

$$\tan^2 x-\sqrt{3}=(1-\sqrt{3})\tan x\xrightarrow{\tan x=t}t^2+(\sqrt{3}-1)t-\sqrt{3}=0\Rightarrow t_1=1\ ,\ t_2=-\sqrt{3}$$

$$1)\ \ \tan x=1\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$2)\ \ \tan x=-\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

**نتیجه:** معادلات به شکل: $a_1 \tan x + a_2 \cot x = a_3$، را اصطلاحاً معادلات کلاسیک نوع دوم می‌گویند. این معادلات به راحتی با تغییر متغیر $\tan x = t$ قابل حل هستند.

**مسأله‌ی (۱۰):** معادله‌ی $(1+\sqrt{2})\sin^2 x + (\sqrt{2}-1)\cos^2 x + \sin 2x = \sqrt{2}$ را حل کنید.

**حل: راه اول:** با توجه به آن‌که $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ و $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ نتیجه می‌گیریم:

$$(1+\sqrt{2})\frac{1-\cos 2x}{2} + (\sqrt{2}-1)\frac{1+\cos 2x}{2} + \sin 2x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

**راه دوم:** می‌دانیم $\cos x \neq 0$، بنابراین می‌توانیم دو طرف را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم:

$$(1+\sqrt{2})\tan^2 x + \sqrt{2} - 1 + \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x} \Rightarrow (1+\sqrt{2})\tan^2 x + \sqrt{2} - 1 + 2\tan x = \sqrt{2}(1+\tan^2 x)$$

به این ترتیب به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ برحسب $\tan x$ رسیده‌ایم که می‌توانیم آن را حل کنیم.

**نتیجه:** معادلات به شکل $a_1 \sin^2 x + a_2 \cos^2 x + a_3 \sin x \cos x = a_4$ را اصطلاحاً معادلات کلاسیک نوع سوم می‌گویند. این معادلات را به یکی از این دو روش می‌توانیم حل کنیم:

۱- جای‌گذاری‌های $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$، $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ و $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

۲- با شرط $\cos x \neq 0$، دو طرف معادله را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم تا به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ برحسب $\tan x$ برسیم.

**مسأله‌ی (۱۱):** معادله‌ی $\sin x - \cos x + 2\sin x \cos x = -(1+\sqrt{2})$ را حل کنید.

**حل: راه اول:** می‌دانیم $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$ و علاوه بر آن:

$$2\sin x \cos x = \sin 2x = -\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = -(2\cos^2(x+\frac{\pi}{4}) - 1)$$

با جای‌گذاری این دو نتیجه در معادله‌ی اصلی، به معادله‌ی درجه‌ی دومی برحسب $\cos(x+\frac{\pi}{4})$ می‌رسیم. ادامه‌ی راه‌حل را به خودتان واگذار می‌کنیم. (پاسخ نهایی $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$ می‌شود.)

**راه دوم:** اگر قرار دهیم $t = \sin x - \cos x$ داریم: $t^2 = 1 - \sin 2x$، پس $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$. با جای‌گذاری این نتیجه به معادله‌ی درجه‌ی دومی برحسب $t$ می‌رسیم. با پیدا کردن مقادیر ممکن برای $t$، به یک معادله‌ی کلاسیک نوع اول خواهیم رسید که حل آن را به خودتان واگذار می کنیم.

**نتیجه:** معادلات به شکل $a_1(\sin x \pm \cos x) + a_2 \sin x \cos x = a_3$ را اصطلاحاً معادلات کلاسیک نوع چهارم می‌گویند. این معادلات را به یکی از دو روش بیان شده در مسأله‌ی قبل می‌توان حل کرد.

## حل معادلات با استفاده از نامساوی‌ها

بعضی از معادلات را تنها با در نظر گرفتن محدوده‌های عبارات می‌توانیم حل کنیم. در این‌گونه معادلات معمولاً یک طرف تساوی همواره از مقداری بزرگ‌تر و طرف دیگر کوچک‌تر است، به همین دلیل تنها در حالت مساوی بودن با آن مقدار، دو طرف برابر می‌شوند.

**مسألهی (۱۲): هر یک از معادلات زیر را حل کنید.**

الف) $\cos 2x + \cos 4x = 2$

ب) $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$

پ) $\cos 2x(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) = 1$

**حل: الف)** میدانیم همواره $-1 \le \cos 2x , \cos 4x \le 1$. پس همواره $-2 \le \cos 2x + \cos 4x \le 2$. در معادلهی صورت سؤال چون $\cos 2x + \cos 4x$ در بیشترین مقدار خود یعنی ۲ قرار دارد پس باید هر دو مقدار $\cos 2x$ و $\cos 4x$ در بیشترین مقدار خود یعنی ۱ باشند. بنابراین جوابهای معادله اشتراک جوابهای دو معادلهی $\cos 2x = 1$ و $\cos 4x = 1$ هستند. از طرفی داریم:

$$\cos 2x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 2x - 1 = 1 \Rightarrow \cos 4x = 1$$

یعنی جوابهای معادلهی $\cos 2x = 1$، بخشی از جوابهای معادلهی $\cos 4x = 1$ هستند و اشتراک جوابها، همان جوابهای $\cos 2x = 1$ است. پس تنها این معادله را حل میکنیم:

$$\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

**ب)** مانند قسمت قبل استدلال کنید. همواره داریم: $-2 \le \sin 5x + \sin x \le 2$ و علاوه بر آن: $2 \le 2 + \cos^2 x \le 3$ (چرا؟). همانطور که میبینید دو عبارت تنها در یک حالت میتوانند برابر باشند که هر دو برابر ۲ باشند. نتیجه میگیریم باید هر سه تساوی زیر همزمان برقرار باشند:

$$\sin x = 1 \quad , \quad \sin 5x = 1 \quad , \quad \cos x = 0$$

وقتی $\sin x = 1$، داریم: $\cos x = 0$ و چون باید از سه جواب اشتراک بگیریم، لازم نیست معادلهی $\cos x = 0$ را بررسی کنیم. دو معادلهی دیگر را حل میکنیم:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad , \quad \sin 5x = 1 \Rightarrow 5x = 2k'\pi + \frac{\pi}{2}$$

میدانیم اگر $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$5x = 10k\pi + \frac{5\pi}{2} = (10k+2)\pi + \frac{\pi}{2} = 2\underbrace{(5k+1)}_{m}\pi + \frac{\pi}{2} = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$$

پس جوابهای دستهی اول جزئی از جوابهای دستهی دوم نیز هستند. یعنی اشتراک دو جواب، $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ میشود.

**پ)** با توجه به این که: $\frac{1}{4} \le 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \le 1$ (چرا؟) و $-1 \le \cos 2x \le 1$، تنها وقتی حاصلضرب دو عبارت برابر ۱ میشود که هر دو برابر ۱ باشند. یعنی: $\cos 2x = 1$ و $\sin 2x = 0$. پس: $2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$

---

**تست (۵): حاصلجمع جوابهای معادلهی $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ روی بازهی $[\pi , 2\pi]$ کدام است؟**

۱) $\frac{8\pi}{3}$

۲) $\frac{10\pi}{3}$

۳) $3\pi$

۴) $\frac{11\pi}{3}$

**حل:** با توجه به آنکه $2\sin^2 x - 1 = -\cos 2x$ داریم:

$$-\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\cos x = \cos(\pi + x) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi + x \Rightarrow x = (2k+1)\pi \\ 2x = 2k\pi - (\pi + x) \Rightarrow x = \dfrac{(2k-1)\pi}{3} \end{cases}$$

در فاصلهی $[\pi , 2\pi]$ دو جواب متمایز برای معادله بهدست میآید: $\{\pi, \frac{5\pi}{3}\}$. مجموع این دو ریشه برابر است با $\frac{8\pi}{3}$. بنابراین گزینهی (۱) درست است.

---

**مسألهی (۱۳): اگر معادلهی زیر ریشه داشته باشد، محدودهی مقادیر $m$ را بیابید.**

$$\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = m\cos 4x$$

**حل:** عبارت سمت چپ را ساده میکنیم:

$$\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2}) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

با جایگذاری این نتیجه در معادله بهدست میآوریم:

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x = m\cos 4x \Rightarrow \frac{7}{8} = (m - \frac{1}{8})\cos 4x \Rightarrow \cos 4x = \frac{7}{8m-1}$$

برای آن که معادله جواب داشته باشد، باید: $-1 \le \frac{7}{8m-1} \le 1$ و حل این نامعادله نتیجه میدهد: $m \in (-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [1, +\infty)$

**مسألهٔ (۱۴): الف) معادلهٔ $m\tan x+\cot x=۴$، در فاصلهٔ $(\circ,\frac{\pi}{۲})$ دو جواب متمایز دارد. محدودهٔ مقادیر $m$ را بیابید.**

* **ب) در معادلهٔ مثلثاتی $۸\sin^۲ x+k\sin ۲x=۱$، مجموع جواب‌های متمایز در فاصلهٔ $[\circ,\pi]$ برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ است. مقدار $k$ را بیابید.**

**حل: الف)** اگر قرار دهیم: $\tan x=t$، داریم: $\cot x=\frac{۱}{t}$ و با جای‌گذاری به یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$mt^۲-۴t+۱=\circ\Rightarrow t=\frac{۲\pm\sqrt{۴-m}}{m}$$

معادلهٔ اصلی دو ریشهٔ متمایز $x_۱$ و $x_۲$ در فاصلهٔ $(\circ,\frac{\pi}{۲})$ دارد. چون $t_۱=\tan x_۱$ و $t_۲=\tan x_۲$، پس هر دو مقدار $t_۱$ و $t_۲$ مثبت و متمایزند. یعنی معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب $t$، باید دو ریشهٔ مثبت و متمایز داشته باشد.

اولاً باید $\Delta>\circ$، یعنی: $m<۴$. ثانیاً باید هم حاصل‌جمع ریشه‌ها و هم حاصل‌ضرب ریشه‌ها مثبت باشد. $\frac{۴}{m}>\circ$ و $\frac{۱}{m}>\circ$. پس $m>\circ$ و اشتراک این محدوده با شرط قبلی عبارت است از: $\circ<m<۴$

**ب)** ابتدا دقت کنید که $\cos x\neq\circ$. زیرا اگر $\cos x=\circ$، آن‌گاه با جای‌گذاری در معادله به‌دست می‌آوریم: $۱=۸$، که تناقض است. حال دو طرف معادله را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم که معادله بر حسب $\tan x$ مرتب شود:

$$۸\tan^۲ x+۲k\tan x=\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x\Rightarrow ۷\tan^۲ x+۲k\tan x-۱=\circ$$

اگر قرار دهیم $\tan x=t$، معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل حداکثر دو جواب دارد که هرکدام به یک دسته جواب برای معادلهٔ اصلی منجر می‌شود. در هر حال در فاصلهٔ $(\circ,\pi)$ این جواب‌ها منحصر به فردند (چرا؟). می‌خواهیم بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_۱+x_۲=\frac{۳\pi}{۴}$ برقرار باشد. در نتیجه:

$$\tan(x_۱+x_۲)=-۱\Rightarrow\frac{\tan x_۱+\tan x_۲}{۱-\tan x_۱\tan x_۲}=-۱$$

در معادلهٔ $۷t^۲+۲kt-۱=\circ$ مجموع دو ریشه برابر است با $-\frac{۲k}{۷}$ و حاصل‌ضرب آن دو $-\frac{۱}{۷}$ می‌شود. پس داریم:

$$\frac{-\frac{۲k}{۷}}{۱-(-\frac{۱}{۷})}=-\frac{k}{۴}\Rightarrow-\frac{k}{۴}=-۱\Rightarrow k=۴$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که به ازای این مقدار، معادله ریشه هم دارد.

## تمرین‌های بخش ۳-۴

۱- **هر یک از معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. سپس تعیین کنید که هر معادله در فاصلهٔ $[\circ,۴\pi]$ چند جواب دارد.**

الف) $\sin ۲x=\cos x$

ب) $\cos ۲x\sin x=\cos ۲x$

پ) $\tan ۳x=\tan ۲x$

ت) $\sin^۳(\pi x)+\cos^۳(\pi x)=\circ$

ث) $\tan x=۲\sin x$

ج) $\frac{۲}{\sin x}-۲\sin x=۳$

چ) $\sin^۲ x=۱+\cos x$

ح) $\frac{۲\sin(۲\pi-x)}{\cos x}-\frac{\sin(۲\pi+x)}{\cos(-x)}=\tan(\frac{\pi}{۲}+x)$

۲- **هر یک از معادلات زیر را حل کنید.**

الف) $\cos ۶x=\cos x\cos ۵x$

ب) $\sin x\cos ۴x-\sin ۳x+\sin ۴x\cos x=\circ$

پ) $\frac{\sin ۷x-\sin x}{\sin ۳x}=۲$

ت) $\sin ۲x+\sqrt{۳}\cos ۲x=۲$

ث) $\sin ۲x+\cos ۲x=\sqrt{۲}\sin x$

ج) $۲\sin^۲ x-\sin ۲x=۱$

چ) $\cos ۴x-\sin ۳x+۱=۲\cos^۲ ۲x$

ح) $\sin x\cos x=\cos^۲ x-\frac{۱}{۲}$

خ) $\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=۱+\sin(\frac{۵\pi}{۲}+x)$

د) $\sin^۶ x+\cos^۶ x=\frac{۵}{۴}\sin^۲ ۲x$

۳- نقاط تلاقی نمودار تابع $f(x) = -۲\sin^۴ x + \sqrt{۳}\sin^۳ x + ۲\sin^۲ x - \sqrt{۳}\sin x$ با محور $x$ ها را به‌دست آورید.

٤- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۳\sqrt{۲}(\sin x + \cos x) + \sin ۲x = -۵$

ب) $\sin^۳ x + \cos^۳ x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\sin ۲x$

پ) $\tan(\frac{\pi}{۲}\cos x) = \cot(\pi \sin x)$

ت) $\sin ۲x - \cos ۲x = ۱ - \sin ۴x$

ث) $\cos^۲ x + \cos^۲ ۲x + \cos^۲ ۳x + \cos^۲ ۴x = ۲$

ج) $\sin(x - \frac{۲\pi}{۱۱}) + \cos(\frac{۱۵\pi}{۲۲} - x) = ۱$

چ) $\sqrt{۳}\sin(۳x + \frac{۴\pi}{۹}) + \sin(\frac{\pi}{۱۸} - ۳x) = ۲\sin ۲x$

ح) $\tan ۳x + \tan ۳x \tan ۲x \tan x = \tan ۲x + \tan x$

۵- هر یک از معادلات زیر در فاصله‌ی $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

الف) $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۳}{۴}$

ب) $\tan^۳ x \cot x + \cot^۴ x \tan^۲ x = ۴$

پ) $(۲\sin^۲ x - ۱)(۲\sin^۲ x - ۲)...(۲\sin^۲ x - ۱۰) = ۰$

٦- الف) اگر معادله‌ی $\tan x + (a-۱)\cot x = \sqrt{۲}$، در بازه‌ی $(۰, \frac{\pi}{۲})$ دو جواب متمایز داشته باشد، حدود مقادیر $a$ را بیابید.

ب) اگر معادله‌ی $(۲a-۳)\tan x + (a-۱)\cot x = ۲$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، مقدار $a$ را بیابید.

پ) اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $۲\tan x + \cot x = k - ۱$ در فاصله‌ی $[۰, \pi]$ باشند و بدانیم $x_۱ + x_۲ = \frac{۳\pi}{۴}$، مقدار $k$ را به‌دست آورید.

۷- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin x \cos^۲ x + \cos x \sin^۲ x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

ب) $۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \tan x + \cot x$

پ) $\sin ۱۸x + \sin ۱۰x + \sin ۲۰x = ۳ + \cos^۲ ۲x$

ت) $\tan^۲ ۴x + \cot^۲ ۴x + ۲\tan ۴x + ۲\cot ۴x = ۶$

ث) $\sin x + \cos x = \sqrt{۲} + \sin^۲ x$

ج) $۴\sin ۲x - \tan^۲(x - \frac{\pi}{۴}) = ۴$

* چ) $۸\sin^۳ x \cos x - ۳\sin^۲ x + ۲\cos^۲ x \sin^۲ x + \cos^۴ x = ۱$

* ح) $۲(\sin ۲x - \cos ۲x) = \frac{\cos x + \cos ۳x}{\cos x - \sin x}$

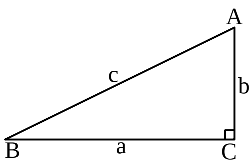
# مثلثات

## ۳-۱: توابع مثلثاتی

بحث مثلثات یکی از بحث‌های بسیار مهم ریاضی است که اهمیت ویژه‌ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال و علوم مهندسی دارد. شما در درس ریاضی (۱) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی و بعضی از اتحادهای مقدماتی مربوط به آن‌ها آشنا شده‌اید. در درس ریاضی (۲) نیز دایره‌ی مثلثاتی و کاربردهای مثلثات در مسائل هندسی را آموخته‌اید. به این ترتیب حال آماده‌اید که با مثلثات به شکل مجرد و جبری‌تر از سال‌های قبل روبه‌رو شوید. در این بخش ضمن مروری کوتاه و مختصر بر آن‌چه پیش از این آموخته‌اید، چهار تابع اصلی مثلثاتی و نمودار آن‌ها را یاد می‌گیریم و اتحادهای مقدماتی را خواهیم آموخت.

### تعریف نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای حاده

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با زاویه‌ی قائم $\hat{C}$ و اضلاع c، b و a در نظر بگیرید. از روی این شکل نسبت‌های سینوس (sin) و کسینوس (cos)، تانژانت (tan) و کتانژانت (cot)، سکانت (sec) و کسکانت (csc) به صورت زیر تعریف می‌شوند:[۱]




$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$
$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \cot A = \frac{b}{a}$$
$$\csc A = \frac{c}{a} \qquad \sec A = \frac{c}{b}$$

#### ارتباط بین نسبت‌ها

با استفاده از تعریف اولیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی می‌توان رابطه‌ی بین آن‌ها را پیدا کرد:

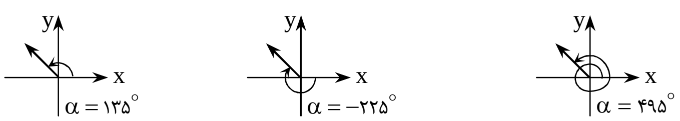
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} , \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha} , \csc\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث و استفاده از اولین تساوی فوق دو اتحاد بدیهی زیر به‌دست می‌آید:

$۱) \ \sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$ $\qquad$ $۲) \ \tan\alpha . \cot\alpha = ۱$

### زاویه‌ی مثلثاتی

در مثلثات ما فقط با زاویه‌های حاده سروکار نداریم. برای این منظور، مفهوم زاویه را به شکل جبری گسترش می‌دهیم.
چنان‌چه می‌دانید، در صفحه‌ی مختصات یک زاویه‌ی استاندارد با جهت چرخش و میزان چرخش یک نیم‌خط مشخص می‌شود. حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (پاد ساعتگرد) با علامت $+$ و در جهت ساعتگرد با علامت $-$ مشخص می‌شود. میزان چرخش نیز اندازه‌ی عددی زاویه را تعیین می‌کند. در شکل‌های زیر سه زاویه‌ی مختلف را مشخص کرده‌ایم که همگی با یک نیم‌خط مشخص شده‌اند (میزان چرخش از محور x ها تا نیم‌خط در نظر گرفته می‌شود).




---

[۱] – نسبت‌های مثلثاتی سکانت و کسکانت کاربرد زیادی ندارند. در این‌جا فقط برای کامل بودن بحث به آن‌ها اشاره کرده‌ایم.

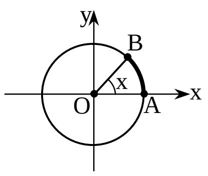
### واحد رادیان

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، برخلاف هندسه معمولاً برای زاویه از واحد رادیان استفاده می‌کنیم. در مباحث حد و مشتق در توابع مثلثاتی و فرمول‌های آن‌ها، زاویه‌ها برحسب رادیان هستند. به‌طور کلی اگر در مسأله‌ای عددی بدون علامت درجه برای اندازه‌ی یک زاویه دیدید، آن را بر حسب رادیان باید در نظر بگیرید.

**یادآوری:** **اگر زاویه‌ای برحسب درجه اندازه‌ی $D$ و برحسب رادیان اندازه‌ی $R$ داشته باشد، این دو عدد را می‌توانیم با رابطه‌ی $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ به هم مربوط سازیم.**

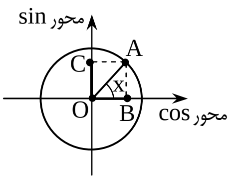
◄ **مثال:** زاویه‌ی $۲۷۰^\circ$ برحسب رادیان برابر است با: $\pi\times\frac{۲۷۰}{۱۸۰}=\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان.

## دایره‌ی مثلثاتی




با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم مقادیر نسبت‌های مثلثاتی را برای هر زاویه‌ی مثلثاتی (نه فقط زاویه‌های حاده) بیابیم.
منظور از دایره‌ی مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات است که محورهای $x$ و $y$ دو قطر آن هستند.
با توجه به آن‌که شعاع دایره ۱ است، پس طول کمان $AB$، از نظر عددی با اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل آن (یعنی $x$) برابر است.

### محورهای سینوس و کسینوس

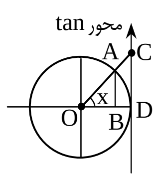



می‌توانیم دو محور عمودی قطر دایره را به‌عنوان محورهای $\cos x$ و $\sin x$ در نظر بگیریم. به این ترتیب برای به‌دست آوردن سینوس و کسینوس یک زاویه مانند $x$، کافی است از نقطه‌ی انتهای کمان متناظر آن روی دایره (یعنی نقطه‌ی $A$ در شکل) به این دو محور خطهایی عمود کنیم. پاهای عمود مقادیر $\cos x$ و $\sin x$ را نشان می‌دهند. برای زاویه‌های حاده مانند شکل بالا، به راحتی می‌توان نشان داد که این تعریف با تعریف اولیه‌ی نسبت‌ها سازگار است. چون $OA=۱$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OAB$ داریم: $\cos x=\frac{OB}{OA}$. با توجه به $OA=۱$ نتیجه می‌گیریم $OB=\cos x$.

➢ **تذکر:** با توجه به تعریف بالا اگر انتهای کمان $x$ در یکی از چهار ربع دایره باشد، می‌توانیم علامت نسبت‌ها را به راحتی تعیین کنیم:

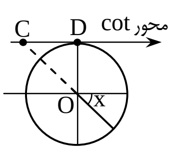
| انتهای کمان متناظر $x$ | ربع اول | ربع دوم | ربع سوم | ربع چهارم |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | + | + | − | − |
| $\cos x$ | + | − | − | + |

### محورهای تانژانت و کتانژانت




برای دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم خطی مماس بر دایره مطابق شکل رسم کنیم و آن را محور تانژانت در نظر بگیریم. به این ترتیب برای به‌دست آوردن تانژانت یک زاویه مانند $x$ کافی است نیم‌خط آن زاویه را امتداد دهیم تا محور را در نقطه‌ای قطع کند (در شکل نقطه‌ی $C$). این نقطه همان $\tan x$ را روی محور نشان می‌دهد. برای توجیه دقت کنید $AB=\sin x$ و $OB=\cos x$. از طرفی طبق قضیه‌ی تالس در مثلث $OCD$ داریم:

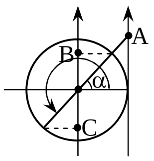
$$\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OD}\xrightarrow{OD=۱}\frac{AB}{CD}=OB\Rightarrow CD=\frac{AB}{OB}\Rightarrow CD=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow CD=\tan x$$




شبیه محور تانژانت، می‌توانیم خطی مماس بر دایره مانند شکل روبه‌رو رسم کنیم و آن را محور کتانژانت در نظر بگیریم. برای پیدا کردن کتانژانت هر زاویه کافی است نیم‌خط آن زاویه را امتداد دهیم تا محور را قطع کند. به این ترتیب نقطه‌ی قطع شده، مقدار $\cot x$ را نشان می‌دهد.
برای تمرین با روش مشابه روش ما برای تانژانت، در شکل روبه‌رو نشان دهید که $\cot x=-CD$. (چرا از علامت − استفاده کرده‌ایم؟)

➢ **تذکّر:** با توجه به محور تانژانت واضح است که اگر $n \in Z$، آن‌گاه $\tan(n\pi + \frac{\pi}{۲})$ تعریف نشده است، زیرا نیم‌خط زاویه با محور تانژانت موازی می‌شود. به همین ترتیب $\cot(n\pi)$ نیز تعریف نشده است.

## روابط بین نسبت‌های مثلثاتی براساس دایره‌ی مثلثاتی




با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم به راحتی ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایایی چون $\alpha$، $\pi \pm \alpha$، $\frac{\pi}{۲} \pm \alpha$ و ... را به‌دست آوریم.

برای مثال زاویه‌ی $\alpha$ و $\pi + \alpha$ را در نظر بگیرید. انتهای کمان این دو زاویه نسبت به مبدأ متقارن است. مثلاً با توجه به شکل، اگر نیم‌خط‌های این دو زاویه را امتداد دهیم هر دو در یک نقطه محور تانژانت را قطع می‌کنند (نقطه‌ی $A$ در شکل)، پس $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.

به همین ترتیب، می‌بینید که پای عمودهای انتهای کمان‌ها بر محور سینوس‌ها دو نقطه‌ی قرینه می‌شود (نقاط $B$ و $C$)، پس $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی روابط متنوعی از این نوع می‌توانیم به‌دست آوریم که مهم‌ترین آن‌ها در نکته‌ی زیر آمده است (اثبات آن‌ها به خودتان واگذار شده است).

**نکته:** **برای هر زاویه‌ی $\alpha$ و هر عدد صحیح $n$ روابط زیر برقرار است:**

**۱- تمام نسبت‌های مثلثاتی $\alpha$ و $۲n\pi + \alpha$ کاملاً یکسان‌اند.**

**۲- داریم:** $\sin(n\pi + \alpha) = (-۱)^n \sin\alpha$ و $\cos(n\pi + \alpha) = (-۱)^n \cos\alpha$.

**همچنین داریم:** $\tan(n\pi + \alpha) = \tan\alpha$ و $\cot(n\pi + \alpha) = \cot\alpha$.

**۳- داریم:** $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$**، ولی سه نسبت دیگر زاویه‌های $\alpha$ و $-\alpha$ قرینه‌اند.**

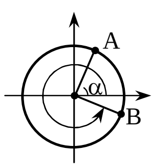
**٤- داریم:** $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$**، ولی سه نسبت دیگر زاویه‌های $\alpha$ و $\pi - \alpha$ قرینه‌اند.**

➢ **تذکّر:** توصیه می‌کنیم که از حفظ کردن روابط بالا خودداری کنید. با هر بار رجوع به دایره‌ی مثلثاتی، هر چند در ابتدا سرعت کمی دارید، ولی به مرور بر این روابط به خودی‌خود مسلط می‌شوید و البته هیچ‌وقت آن‌ها را فراموش نمی‌کنید.

**نکته:** **ارتباط نسبت‌های مثلثاتی $\alpha$ و $n\frac{\pi}{۲} \pm \alpha$ ( $n$ عدد فرد)**

**در این موارد جای سینوس و کسینوس (و همچنین تانژانت و کتانژانت) در دو زاویه عوض می‌شود. ممکن است علاوه بر تعویض، علامت هم عوض شود که تغییر علامت را با توجه به جایگاه زاویه در دایره‌ی مثلثاتی می‌توان متوجه شد.**

◄ **مثال:** فرض کنید می‌خواهیم ارتباط نسبت‌های مثلثاتی $\alpha$ و $\frac{۳\pi}{۲} + \alpha$ را به‌دست آوریم.




برای $\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha)$ می‌دانیم باید از $\cos\alpha$ استفاده کنیم (تغییر $\sin$ و $\cos$)، همچنین با توجه به شکل برای یک زاویه‌ی مثالی $\alpha$، $\cos\alpha$ مثبت و $\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha)$ منفی است. بنابراین: $\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\cos\alpha$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = \sin\alpha$ (چرا این‌جا علامت منفی نداریم؟)، همچنین $\tan(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha$ و $\cot(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$.

❍ **مسأله‌ی (۱):** **حاصل هر یک از عبارات زیر را بیابید.**

**الف)** $A = ۲\cos(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}) + ۳\tan(\frac{۱۲۵\pi}{۴}) + ۴\cot(-\frac{۱۲۵\pi}{۴})$

**ب)** $B = \sin(\frac{n\pi}{۲}) + \cos(\frac{n\pi}{۲}) \quad (n \in N)$

**حل: الف)** با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم: $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ و $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. در نتیجه:

$$A=۲\cos(۳۱\pi+\frac{\pi}{۴})+۳\tan(۳۱\pi+\frac{\pi}{۴})-۴\cot(۳۱\pi+\frac{\pi}{۴})$$

$$=۲\times(-۱)^{۳۱}\cos(\frac{\pi}{۴})+۳\tan(\frac{\pi}{۴})-۴\cot(\frac{\pi}{۴})=۲\times(-۱)^{۳۱}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}+۳\times۱-۴\times۱=-\sqrt{۲}-۱$$

**ب)** مسأله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم (حالت زوج بودن $n$ و حالت فرد بودن $n$):

$$۱)\ n=۲k\rightarrow B=\sin k\pi+\cos k\pi=۰+(-۱)^k=(-۱)^k$$

$$۲)\ n=۲k+۱\rightarrow B=\sin(k\pi+\frac{\pi}{۲})+\cos(k\pi+\frac{\pi}{۲})=(-۱)^k+۰=(-۱)^k$$

➢ **تذکّر:** با توجه به این‌که در هر دو حالت $n=۲k$ و $n=۲k+۱$، داریم $k=[\frac{n}{۲}]$، پس می‌توان دو نتیجه‌ی بالا را به صورت زیر با هم ترکیب کرد:

$$\sin(\frac{n\pi}{۲})+\cos(\frac{n\pi}{۲})=(-۱)^{[\frac{n}{۲}]}$$

## اتحادهای مثلثاتی مقدماتی

با استفاده از دو رابطه‌ی اصلی $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ و $\tan\alpha\cot\alpha=۱$ و ارتباط مقدماتی بین نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم چند اتحاد ساده و پرکاربرد را به‌دست آوریم: (اثبات این اتحادهای ساده را به خودتان واگذار می‌کنیم)

$$۱)\ ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\qquad ۲)\ ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$۳)\ \cos^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}\qquad ۴)\ \sin^۲\alpha=\frac{\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$$

**مسأله‌ی (۲): هر یک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.**

**الف)** $\frac{(۱-\sin x\cos x)(۱+\sin x\cos x)-\sin^۲ x\cos^۲ x}{\cos^۴ x+\sin^۴ x}=۱$

**ب)** $\frac{\sin^۳ x+\cos^۳ x}{\sin x+\cos x}=۱-\sin x\cos x$

**پ)** $\frac{\sin^۲ x}{۱+\tan^۲ x}-\frac{\cos^۲ x}{۱+\cot^۲ x}+\sec^۲ x=۱+\tan^۲ x$

**ت)** $\frac{۲(۱-\sin^۳ x-\cos^۳ x)}{\sin x+\cos x+۲}=(۱-\sin x-\cos x)^۲$

**حل: الف)** از یک طرف تساوی (در این مثال طرف چپ که آن را $A$ می‌نامیم) شروع می‌کنیم و با ساده‌کردن آن به طرف دیگر می‌رسیم:

$$A=\frac{۱-\sin^۲ x\cos^۲ x-\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}=\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}$$

حال با توجه به $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ داریم:

$$A=\frac{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}=\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}=۱$$

**ب)** طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x)$$

$$\Rightarrow \sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر $\sin x+\cos x$ اتحاد ثابت می‌شود.

**پ)** ابتدا با ساده کردن دو جزء از مجموع سمت چپ تساوی داریم:

$$\frac{\sin^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x}-\frac{\cos^{۲} x}{۱+\cot^{۲} x}=\frac{\sin^{۲} x}{\frac{۱}{\cos^{۲} x}}-\frac{\cos^{۲} x}{\frac{۱}{\sin^{۲} x}}=(\sin x\cos x)^{۲}-(\sin x\cos x)^{۲}=۰$$

بنابراین طرف چپ برابر است با:

$$۰+\sec^{۲} x=\frac{۱}{\cos^{۲} x}=۱+\tan^{۲} x$$

**ت)** فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=t$ و $\sin^{۳} x+\cos^{۳} x$ را بر حسب t می‌یابیم. داریم:

$$t^{۲}=(\sin x+\cos x)^{۲}=۱+۲\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^{۲}-۱}{۲}$$

از طرفی مانند قسمت (ب) می‌توان ثابت کرد:

$$\sin^{۳} x+\cos^{۳} x=(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)\Rightarrow \sin^{۳} x+\cos^{۳} x=t(۱-\frac{t^{۲}-۱}{۲})=\frac{t}{۲}(۳-t^{۲})$$

به این ترتیب با شروع از طرف چپ تساوی داریم:

$$\frac{۲(۱-(\sin^{۳} x+\cos^{۳} x))}{\sin x+\cos x+۲}=\frac{۲(۱-\frac{t}{۲}(۳-t^{۲}))}{t+۲}=\frac{۲-۳t+t^{۳}}{t+۲}=\frac{(t+۲)(t^{۲}-۲t+۱)}{t+۲}=(t-۱)^{۲}=(\sin x+\cos x-۱)^{۲}$$

**تست (۱): حاصل عبارت** $\frac{\sin^{۴} x+\cos^{۴} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}-(\tan x+\cot x)^{۲}$ **کدام است؟ (آزاد – ۸۳)**

**۱)** ۲−　　**۲)** ۲　　**۳)** ۱−　　**٤)** صفر

**حل:** با استفاده از تساوی $\sin^{۴} x+\cos^{۴} x=۱-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x$ داریم:

$$\frac{\sin^{۴} x+\cos^{۴} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}-(\tan x+\cot x)^{۲}=\frac{۱-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}-(\frac{\sin^{۲} x+\cos^{۲} x}{\sin x\cos x})^{۲}$$
$$=\frac{۱-۲\sin^{۲} x\cos^{۲} x}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}-\frac{۱}{\sin^{۲} x\cos^{۲} x}=-۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

**مسأله‌ی (۳): اگر عبارت زیر برای جمیع مقادیر x یک اتحاد باشد، a و b را بیابید.**

$$(a+b\sin x-b\cos x)^{۲}=۲(۱-\sin x)(۱+\cos x)$$

**حل:** یک تساوی در صورتی اتحاد است که برای تمام مقادیر دامنه‌ی آن برقرار باشد.

**راه اول:** فرض کنید: $\sin x-\cos x=t$. در این صورت داریم (برای سادگی محاسبات قرار داده‌ایم $\sin x\cos x=y$):

$$t^{۲}=(\sin x-\cos x)^{۲}=۱-۲\sin x\cos x=۱-۲y$$

با جای‌گذاری این نتیجه در تساوی اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$(a+bt)^{۲}=۲(۱-t-y)\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}t^{۲}+۲abt=۲-۲t-۲y\xrightarrow{t^{۲}=۱-۲y}a^{۲}+b^{۲}(۱-۲y)+۲abt=۲-۲t-۲y$$

با مرتب‌کردن دو طرف تساوی به‌دست می‌آوریم:

$$a^{۲}+b^{۲}+(۲ab)t+(-۲b^{۲})y=۲-۲t-۲y$$

برای آن‌که تساوی فوق یک اتحاد باشد، باید ضرایب دو طرف مساوی باشند. یعنی:

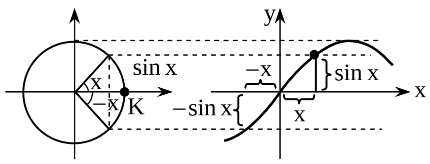
$$\{a^{۲}+b^{۲}=۲\ ,\ ۲ab=-۲\ ,\ -۲b^{۲}=-۲\}\Rightarrow (a,b)=(۱,-۱)\ \text{یا}\ (-۱,۱)$$

**راه دوم:** چون تساوی باید برای هر مقدار x برقرار باشد، برای $x=۰$ و $x=\pi$ نیز صادق است. با جای‌گذاری این مقادیر به دو معادله می‌رسیم که از حل دستگاه آن‌ها مقادیر a و b به‌دست می‌آید.

## توابع مثلثاتی

اگر ورودی یک تابع، زاویه‌ای برحسب رادیان باشد و خروجی آن یکی از نسبت‌های مثلثاتی قبل یا عبارتی شامل آن‌ها، در واقع با یک تـابع مثلثـاتی مواجه‌ایم. با استفاده از توابع مثلثاتی می‌توانیم بسیاری از پدیده‌های طبیعی را مدل کنیم، چرا که در بسیاری پدیده‌ها با رونـدی تنـاوبی مواجـه‌ایـم و چنان‌چه در فصل ۲ دیده‌اید، بخش مهمی از توابع متناوب، تابع‌های مثلثاتی هستند.

با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم درکی از نمودار توابع مثلثاتی داشته باشیم. برای مثال، تابع $f(x)=\sin x$ را در نظر بگیرید. این تابع به هـر زاویه‌ی $x$، مقدار $\sin x$ را نسبت می‌دهد. به شکل روبه‌رو دقت کنید.

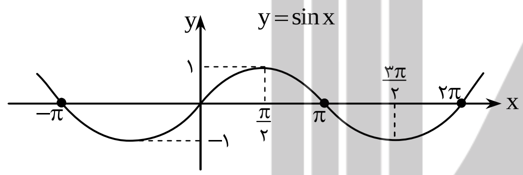


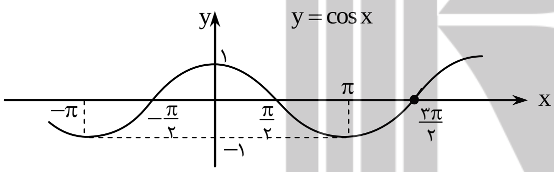

می‌بینید که چگونه $x$، $-x$، $\sin x$ و $\sin(-x)$ را روی نمودار تابع $f$ با طـول‌هـای متناظر روی دایره تطبیق داده‌ایم. در واقع اگر شما از نقطـه‌ی $K$ روی دایـره شـروع بـه حرکت در خلاف جهت حرکت عقربـه‌هـای سـاعت کنیـد، ماننـد آن اسـت کـه از مبـدأ مختصات روی نمودار تابع $y=\sin x$ در حال حرکتید. در هر لحظه فاصـله‌ی عمـودی شما تا محور $x$ها برابر فاصله‌ی عمودی شما در دایره تا محور $x$ها است.

با توجه به این توضیح می‌توانیم نمودار توابع مثلثاتی را رسم کنیم. در ادامه ما نمودار چهار تابع اصلی را بررسی می‌کنیم.

## توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$

نمودار این دو تابع را در دو شکل مقابل مشاهده می‌کنید. چنان‌چه می‌بینیـد دو نمودار شباهت‌هایی دارند. هر دو دارای بیش‌تـرین مقـدار ۱ و کـم‌تـرین مقدار ۱− هستند.




در واقع نمودار $y=\cos x$ همان نمودار $y=\sin x$ است که بـه انـدازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ واحـد بـه چـپ انتقـال یافتـه اسـت. ایـن نتیجـه معـادل اتحـاد $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ است.



**نکته:**

**ویژگی‌های اصلی نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$**

**۱- هر دو نمودار بین خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ واقع‌اند (این دو خط بر نمودارها مماس‌اند).**

**۲- نمودار $y=\sin x$ در نقاط $x=n\pi$ و نمودار $y=\cos x$ در نقـاط $x=n\pi+\frac{\pi}{۲}$ بـا محـور $x$هـا برخـورد مـی‌کننـد. $(n\in Z)$**

**۳- نمودار $y=\sin x$ در نقاط به طول $x=n\pi+\frac{\pi}{۲}$ بر یکی از دو خط $y=\pm۱$ مماس است و نمودار $y=\cos x$ در نقـاط به طول $x=n\pi$. $(n\in Z)$**

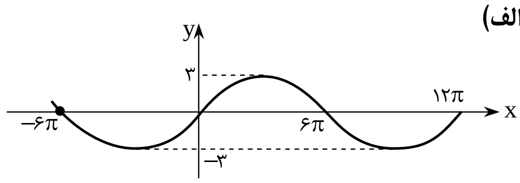
**۴- دوره‌ی تناوب هر دو نمودار $T=۲\pi$ است.**

**۵- تابع $y=\sin x$ فرد است و نمودار آن نسبت به مبدأ متقارن است.**

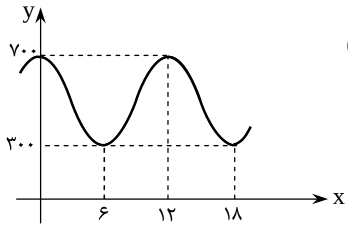
**۶- تابع $y=\cos x$ زوج است و نمودار آن نسبت به محور $y$ها متقارن است.**

❍ **مسألهٔی (۴): در شکل‌های زیر نمودار توابعی مثلثاتی رسم شده است. ضابطه‌ی آن‌ها را بیابید. (دقت کنید که مقیاس‌های دو محور مساوی نیستند!)**

**الف)**




**ب)**




**حل: الف)** نمودار تابع شبیه نمودار $y = \sin x$ است که در جهت افقی و عمودی باز شده است. اگر قرار دهیم $f(x) = a\sin bx$، داریم:

۱- چون بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع برابر ۳ و ۳− است، پس $a = ۳$.

۲- چون دوره‌ی تناوب تابع $۱۲\pi$ است، پس $۱۲\pi = \frac{۲\pi}{|b|}$، بنابراین $b = \frac{۱}{۶}$ (چرا $b > ۰$؟). به این ترتیب نتیجه می‌گیریم $f(x) = ۳\sin\frac{x}{۶}$.

**ب)** نمودار تابع شبیه نمودار $y = \cos x$ است که در جهت افقی و عمودی تغییر مقیاس داده و سپس به بالا منتقل شده است. اگر قرار دهیم $f(x) = a\cos bx + c$، داریم:

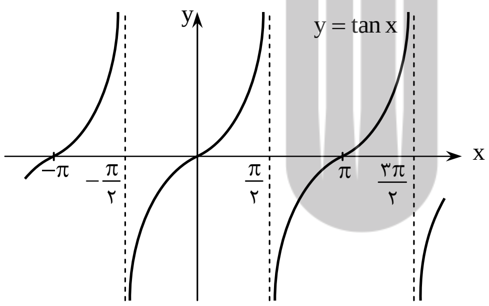
۱- بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع از روی نمودار ۳۰۰ و ۷۰۰ و از روی ضابطه $a + c$ و $-a + c$ است، پس $a = ۲۰۰$ و $c = ۵۰۰$.

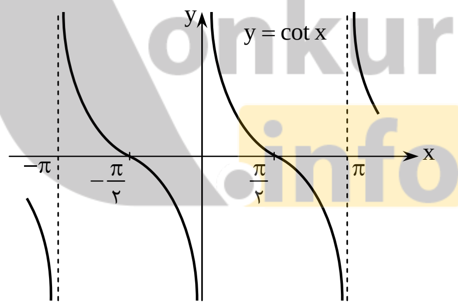
۲- دوره‌ی تناوب تابع ۱۲ است، پس $۱۲ = \frac{۲\pi}{|b|}$، بنابراین $b = \frac{\pi}{۶}$.

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم $f(x) = ۲۰۰\cos(\frac{\pi}{۶}x) + ۵۰۰$

## ◈ توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$

در شکل‌های مقابل نمودار این دوتابع را رسم کرده‌ایم. چنان‌چه می‌بینید نمودار این دو تابع شبیه یکدیگر است. در واقع اگر نمودار $y = \tan x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ واحد به راست منتقل کنیم به نمودار $y = \cot x$ می‌رسیم. این نتیجه معادل اتحاد $\cot x = \tan(\frac{\pi}{۲} - x)$ است.




از نکات قابل توجه در نمودارهای دو تابع بالا، وجود خط‌چین‌های عمودی است. می‌دانیم دامنه‌ی این توابع R نیست، به همین دلیل برای بعضی مقادیر تعریف نشده‌اند. در این مقادیر خط‌چین‌های عمودی رسم شده‌اند. اصطلاحاً به این خط‌چین‌های عمودی «مجانب قائم» می‌گوییم. می‌بینید که وقتی به این خطوط نزدیک می‌شویم، مقدار تابع به سرعت زیاد یا به سرعت کم می‌شود (اصطلاحاً به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند).

**نکته:**

**ویژگی‌های اصلی نمودارهای $y = \tan x$ و $y = \cot x$**

**۱- تابع $y = \tan x$ مجانب‌های قائمی در نقاط $x = n\pi + \frac{\pi}{۲}$ دارد و تابع $y = \cot x$ در نقاط $x = n\pi$ (که $n \in Z$). به ازای این مقادیر توابع تعریف نشده‌اند.**

**۲- دوره‌ی تناوب هر دو تابع برابر $\pi$ است.**

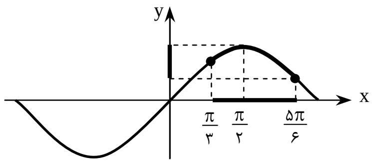
**۳- در یک دوره‌ی تناوب با شروع از یک خط مجانب، تابع $y = \tan x$ صعودی اکید و تابع $y = \cot x$ نزولی اکید است.**

**۴- هر دو تابع فرد و نمودارهای آن ها نسبت به مبدأ مختصات متقارن هستند.**

**مسأله‌ی (۵): الف) اگر** $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ **و** $\sin x = \frac{3-m^2}{3+m^2}$**، مقدار m در چه فاصله‌ای قرار دارد؟**

**ب) اگر** $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ **و** $\sin 2\alpha = \frac{m}{1+2m}$**، حدود تغییرات m را بیابید.**

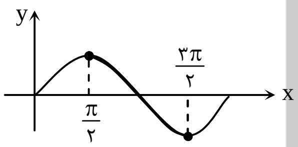
**حل: الف)** به نمودار تابع $y = \sin x$ توجه کنید:




فاصله‌ی $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ روی محور طول‌ها فاصله‌ای را مشخص می‌کند که متناظر آن روی نمودار قسمت مورد نظر پررنگ‌تر شده است. به این ترتیب محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ (یا همان برد تابع) نیز مشخص شده است. با توجه به این‌که $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$، در این فاصله داریم: $\frac{1}{2} \le \sin x \le 1$. پس باید نامعادله‌ی $\frac{1}{2} \le \frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1$ را حل کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \le \frac{3-m^2}{3+m^2} \Rightarrow \frac{3-m^2}{3+m^2} - \frac{1}{2} \ge 0 \Rightarrow \frac{3-3m^2}{3+m^2} \ge 0 \xrightarrow{3+m^2>0} 3-3m^2 \ge 0 \Rightarrow |m| \le 1 \\ \frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1 \Rightarrow \frac{3-m^2}{3+m^2} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{-2m^2}{3+m^2} \le 0 \xrightarrow{3+m^2>0} -2m^2 \le 0 \Rightarrow m \in R \end{array}\right\} \Rightarrow m \in [-1, 1]$$

**ب)** داریم: $\frac{\pi}{2} \le 2\alpha \le \frac{3\pi}{2}$. این فاصله را در نمودار تابع $y = \sin x$ پررنگ کرده‌ایم. بنابراین:



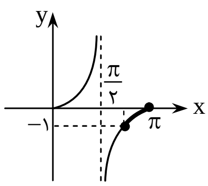

$$-1 \le \sin 2\alpha \le 1 \Rightarrow \left|\frac{m}{1+2m}\right| \le 1 \Rightarrow m^2 \le 4m^2 + 4m + 1 \Rightarrow 3m^2 + 4m + 1 \ge 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(3m+1) \ge 0 \Rightarrow m \in R - (-1, -\frac{1}{3})$$

**تست (۲): با فرض** $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ **و** $\tan \alpha = \frac{2}{m-1}$**، حدود تغییرات m کدام است؟**

۱) $m < -1$ ۲) $m < 1$ ۳) $-1 < m < 1$ ۴) $-2 < m < 2$

**حل:** با توجه به نمودار $y = \tan x$، در فاصله‌ی $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$، داریم: $-1 < y < 0$. پس می‌توان نوشت:



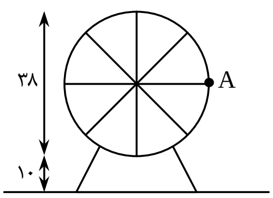

$$-1 < \frac{2}{m-1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{m-1} > -1 \Rightarrow \frac{m+1}{m-1} > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \frac{2}{m-1} < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

اشتراک دو جواب بالا برابر است با: $m \in (-\infty, -1)$. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

## مدل‌سازی ریاضی با توابع مثلثاتی

بسیاری از حرکت‌ها و تغییرات تناوبی را می‌توانیم با توابع مثلثاتی مدل کنیم.

**مسأله‌ی (۶): پایین‌ترین نقطه‌ی یک چرخ و فلک به قطر ۳۸ متر از سطح زمین ۱۰ متر فاصله دارد. این چرخ و فلک در هر ۸ دقیقه یک دور می‌زند. اگر در نخستین لحظه در نقطه‌ی A باشیم، با هر دور چرخش چرخ و فلک به نقطه‌ی A بازمی‌گردیم.**

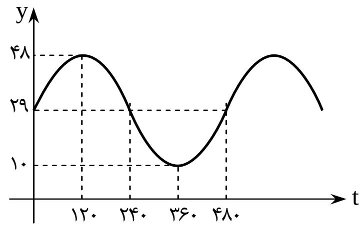



**الف) اگر زاویه‌ی چرخش را به صورت تابعی از زمان نشان دهیم، دوره‌ی تناوب این تابع چقدر است؟**

**ب) اگر ارتفاع خود از سطح زمین را با h(t) (تابعی از زمان) نشان دهیم، ضابطه‌ی h(t) را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.**

**حل: الف)** در هر $۴۸۰ = ۶۰ \times ۸$ ثانیه، $۲\pi$ رادیان دور می‌زنیم. پس دوره‌ی تناوب $\frac{۲\pi}{۴۸۰} = \frac{\pi}{۲۴۰}$ می‌شود.

**ب)** بیش‌ترین ارتفاع ۳۸ و کم‌ترین ۱۰ است. در لحظه‌ی اول نیز در ارتفاع ۲۹ متری هستیم. به این ترتیب نمودار تابع به شکل روبه‌رو می‌شود (هر ربع حرکت در ۲ دقیقه یا ۱۲۰ ثانیه طی می‌شود). می‌توانیم قرار دهیم $h(t) = a\sin bt + c$، پس $a + c = ۴۸$ و $-a + c = ۱۰$، یعنی $c = ۲۹$ و $a = ۱۹$. همچنین با توجه به دوره‌ی تناوب تابع، داریم $\frac{۲\pi}{b} = ۴۸۰$، پس $b = \frac{\pi}{۲۴۰}$. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم:




$$h(t) = ۱۹\sin(\frac{\pi}{۲۴۰}t) + ۲۹$$

## تمرین‌های بخش ۳–۱

**۱- هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.**

الف) $\frac{\sin ۶۰^\circ \cos ۶۰^\circ \tan ۶۰^\circ \csc ۶۰^\circ \sec ۶۰^\circ \cot ۶۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ \cos ۸۰^\circ \tan ۸۰^\circ \csc ۸۰^\circ \sec ۸۰^\circ \cot ۸۰^\circ} = ۱$

ب) $\sin ۲۴۰^\circ + \sin ۲۱۰^\circ + \sin ۱۸۰^\circ + \sin ۱۵۰^\circ + \sin ۱۲۰^\circ + \sin ۹۰^\circ = ۱$

**۲- حاصل هریک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

الف) $A = \cos(a + ۳\pi)\sin(a + \frac{\pi}{۲}) + \tan(a - ۵\pi)\cot(a + ۷\pi)$

ب) $B = \frac{\log_a(\tan ۱^\circ) + \log_a(\tan ۲^\circ) + \cdots + \log_a(\tan ۸۹^\circ)}{۱ + \log_a(\tan ۱^\circ) \times \log_a(\tan ۲^\circ) \times \cdots \times \log_a(\tan ۸۹^\circ)}$

**۳- هریک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.**

الف) $(x\sin\theta - y\cos\theta)^۲ + (x\cos\theta + y\sin\theta)^۲ = x^۲ + y^۲$

ب) $(r\sin\theta\cos\varphi)^۲ + (r\sin\theta\sin\varphi)^۲ + (r\cos\theta)^۲ = r^۲$

پ) $\sin x\cos x(۱ + \tan x)(۱ + \cot x) = (\sin x + \cos x)^۲$

ت) $\sec^۴ x - \sec^۲ x = \tan^۴ x + \tan^۲ x$

ث) $(\sin^۶ x + \cos^۶ x - ۱)^۳ = ۲۷\sin^۶ x\cos^۶ x$

ج) $\frac{۱}{\sin^۴ x} + \frac{۱}{\tan^۴ x} = ۱ + ۲\cot^۲ x + ۲\cot^۴ x$

**۴- هریک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.**

الف) $\sqrt{\frac{۱ + \sin x}{۱ - \sin x}} - \sqrt{\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}} = ۲\tan x$ (برای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$)

ب) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{۲\cos^۲ x - ۱}{\cos^۲ x(۱ - \tan^۲ x)} = \frac{۲\tan x}{\tan x - ۱}$

* پ) $\frac{۱ - \cos\alpha}{(۱ + \tan^۲\alpha)^۲} = \frac{۱}{(۱ + \cos\alpha)(۳ + \cot^۲\alpha + ۳\tan^۲\alpha + \tan^۴\alpha)}$

**۵- اگر** $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$**، حاصل** $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ **را به‌دست آورید.**

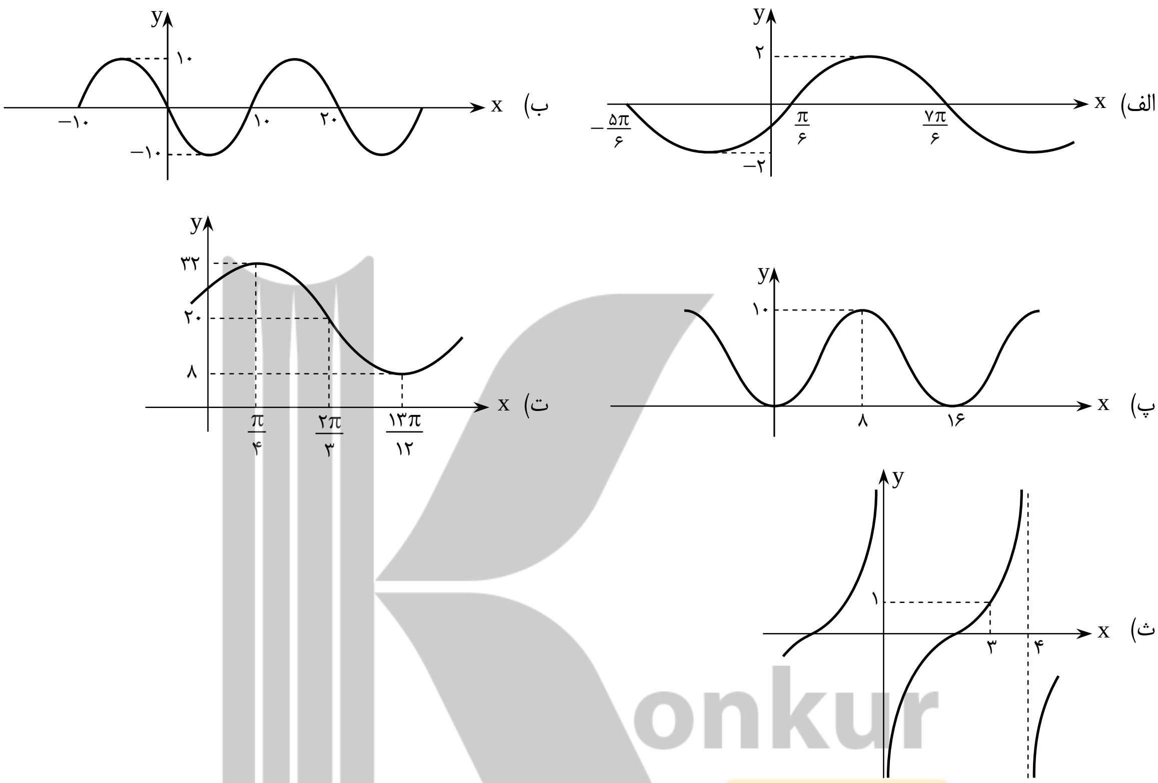
۶- اگر $\begin{cases} \tan x + \tan y = ۳ \\ \cot x + \cot y = ۵ \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\frac{\tan x}{\tan y} + \frac{\cot x}{\cot y}$ را به‌دست آورید.

۷- با فرض $\tan(\frac{\pi}{۱۳۸۶}) \approx ۰/۰۰۲$، حاصل $\frac{۱}{۱+\cot(\frac{\pi}{۱۳۸۶})} + \frac{۱}{۱+\tan(\frac{\pi}{۱۳۸۶})}$ را به‌دست آورید.

۸- مقدار m را چنان بیابید که تابع زیر، تابعی ثابت باشد.

$$F(x) = \sin^۶ x + \cos^۶ x + m(\sin^۴ x + \cos^۴ x)$$

۹- در شکل‌های زیر نمودار چند تابع مثلثاتی رسم شده است. ضابطه‌ی آن‌ها را به‌دست آورید. (مقیاس‌های روی محورها برابر نیستند!)




۱۰- اگر $x \in (-\frac{\pi}{۶}, \pi)$ و $\sin x = \frac{۴-m}{m+۱}$، محدوده‌ی تغییرات m را به‌دست آورید.

۱۱- اگر $\alpha \in (-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۳})$ و $۲m\cos ۲\alpha - ۱ = m$، محدوده‌ی تغییرات m را به‌دست آورید.

۱۲- اگر $x \in (\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴})$، برد توابع $y = \tan x$ ، $y = \cot x$ ، $y = ۲\cos ۳x - ۱$ و $y = \pi \sin(-x + \frac{\pi}{۴})$ را به‌دست آورید.

۱۳- عمق آب در یک منطقه‌ی دریایی در ساعات مختلف شبانه روز مطابق جدول زیر تغییر می‌کند:

| زمان (ساعت) | ۰ | ۲ | ۴ | ۶ | ۸ | ۱۰ | ۱۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عمق (متر) | ۳/۱ | ۷/۸ | ۱۱/۳ | ۱۰/۹ | ۶/۶ | ۱/۷ | ۰/۹ |

**می‌دانیم بیش‌ترین و کم‌ترین عمق آب را یادداشت کرده‌ایم. همچنین می‌دانیم روند تغییر عمق متناوب با مدلی مثلثاتی است.**

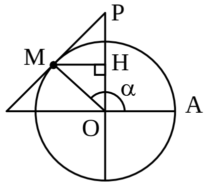
الف) اگر عمق آب را بر حسب زمان به صورت تابع $h(t)$ بیان کنیم، دوره‌ی تناوب و ضابطه‌ی $h(t)$ را بیابید.

ب) اگر یک قایق برای حرکت در این منطقه به حداقل عمق ۱۰ متر آب نیاز داشته باشد، در چه ساعت‌هایی از شبانه‌روز می‌تواند در این منطقه حرکت کند؟

۲۵- عبارت $\frac{۱+\cos\theta}{\sin^{۳}\theta}$، با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{۱}{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}$
۲) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$
۳) $\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}$
۴) $\frac{۱}{\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta}$

۲۶- در دایره‌ی مثلثاتی مطابق شکل روبه‌رو، در نقطه‌ی M مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم تا امتداد قطر عمودی را در P قطع کند. با فرض $A\hat{O}M=\alpha$، طول پاره‌خط HP کدام است؟




۱) $|\sin\alpha\tan\alpha|$
۲) $|\cos\alpha|$
۳) $|\cos\alpha\cot\alpha|$
۴) $|\sin\alpha|$