

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

مثلثات



$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

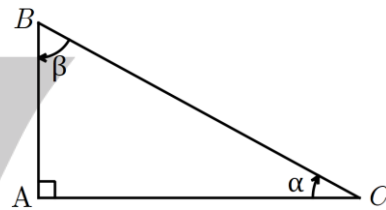
ابتدا یک یادآوری کوتاه از فصل مثلثات داشته باشیم.

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

در هر مثلث قائم الزاویه برای زاویه حاده α داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$



و همواره داریم: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ و $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

زوایای مهم مثلثاتی:

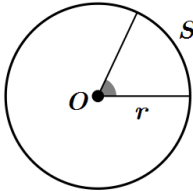


x	30	45	60
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$		1	$\sqrt{3}$
$\cot x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

دایره مثلثاتی: در دایره مثلثاتی شعاع ۱ واحد است

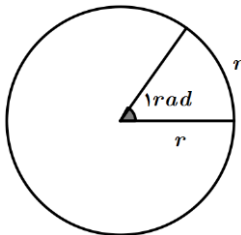
قبلا برای اندازه گیری زاویه با واحد درجه آشنا شدیم. یکی دیگر از واحد های اندازه گیری زاویه ، رادیان نام دارد. برای اندازه گیری زاویه مرکزی O بر حسب رادیان کافی است طول کمان روبه رو به آن زاویه را به طول شعاع دایره تقسیم

کنیم:



$$\theta(\text{rad}) = \frac{s}{r}$$

با توجه به تعریف رادیان نتیجه می گیریم که یک رادیان اندازه زاویه ای مرکزی است که طول کمان روبه رو به آن برابر با طول شعاع در هر دایره دلخواه است.



$$1 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

تبدیل نسبت های مهم در دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

توابع مثلثاتی متناوب



تابع f را **متناوب** گوئیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر x از دامنه داشته

$$f(x + T) = f(x) \text{ باشیم}$$

کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دوره تناوب** f مینامیم.

♦ دوره تناوب توابع به صورت: $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$ برابر با:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

♦ مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع بالا از رابطه های روبرو به دست می آید: $\max = |a| + c$, $\min = -|a| + c$

♦ اگر توان فرد باشد باید نکات بالا را بکاربرد اما اگر توان فرد نباشد داریم:

$$\left. \begin{array}{l} y = a \sin^{2k}(bx + c) \\ y = a \cos^{2k}(bx + c) \end{array} \right\} \rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

راه فوق یک راه حل تستی است. در مثال ها مسائل تشریحی با توان ۲ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

توان های بیشتر از ۲ در سوالات نهایی مورد ارزیابی قرار نمیگیرند.

♦ در توابع مثلثاتی فاصله بین دو ماکزیمم متوالی یا فاصله بین دو مینیمم متوالی نشان دهنده دوره تناوب است. در واقع

اگر یک دوره تناوب را به ۴ قسمت تقسیم کنید هر قسمت $\frac{T}{4}$ است. (در تست ها خیلی مفید است)

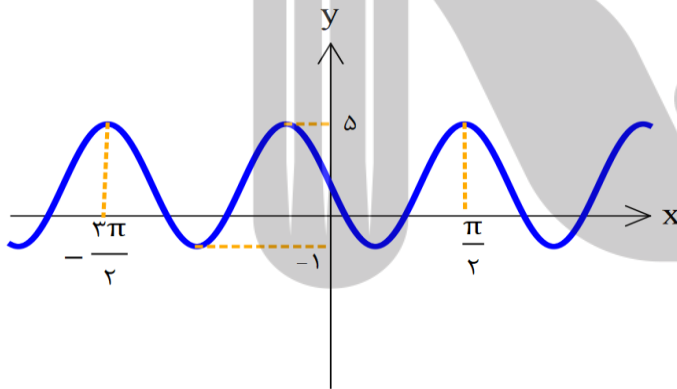
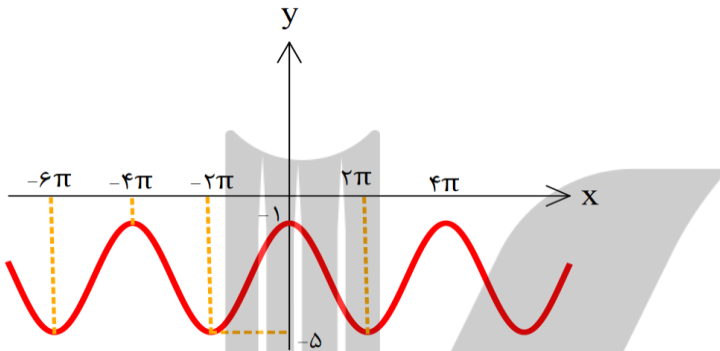
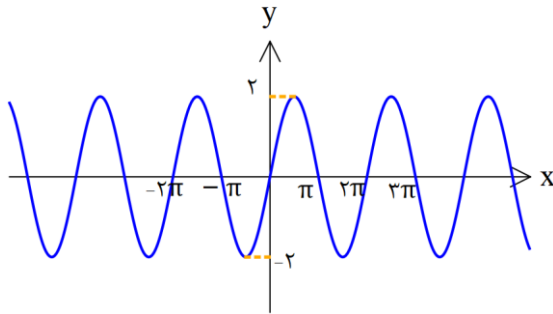
📖 مثال: دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \sin 3x$ و $g(x) = \sin^2 4x$ را بیابید.

📖 مثال: دوره تناوب تابع های زیر را بیابید.

ب) $y = \cos^2 2x$

الف) $y = 2 \sin\left(\frac{2}{\sqrt{2}} x\right) + 1$

مثال: در شکل های زیر مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب را بیابید.

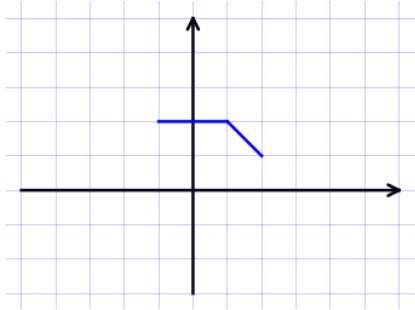


مثال: دوره تناوب هریک از توابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = 5 + 2 \cos \frac{\pi}{4} x \quad (\text{الف})$$

$$y = 3 \sin \left(\frac{-1}{2} x + 4 \right) - 1 \quad (\text{ب})$$

مثال: شکل زیر را طوری کامل کنید که دوره تناوب ۳ باشد.



مثال: نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = 3 \sin x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید.


مثال: دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \sin \frac{\pi}{8} x$ و $y = 2 + \cos 3x$ را به دست آورید.

مثال: تابع مثلثاتی با دوره تناوب $T = 2$ و مقادیر ماکزیمم $\max = 8$ و مینیمم $\min = 3$ بنویسید.


مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را به دست آورید.


$$y = 4 \sin(-2\pi x) + 1 \quad (\text{الف})$$


$$y = 1 + 2 \cos 4x \quad (\text{ب})$$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید. 

دی ۹۷


مثال: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3}x\right)$ را به دست آورید. خرداد ۹۸ 


مثال: یک تابع مثلثاتی با دوره تناوب $T = \pi$ و مقادیر ماکزیمم $\max = -1$ و مینیمم $\min = -5$ رسم کنید و سپس ضابطه آن را بیابید. 

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بنویسید. 

الف) $y = \pi \cos 3x - \pi$

ب) $y = \frac{2}{3} \sin 4\pi x + 3$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 \cos(3\pi x) - 1$ را بدست آورید. تیر ۹۸ 

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos(2\pi x) + 1$ را بدست آورید. شهریور ۹۸ 

مثال: دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

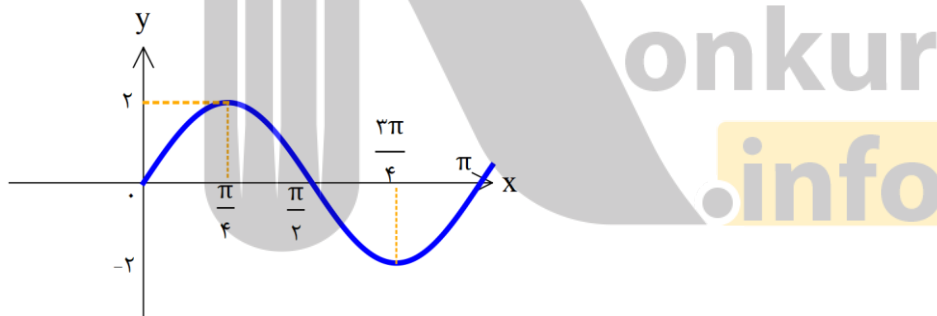
الف) $y = 3 \sin 2\pi x$

ب) $y = -2 \cos \pi x + 3$

مثال: دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را بیابید. تیر ۹۹

مثال: دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$ را بیابید. دی ۹۸

مثال: معادله ی منحنی روبه رو را به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ بیان کنید.

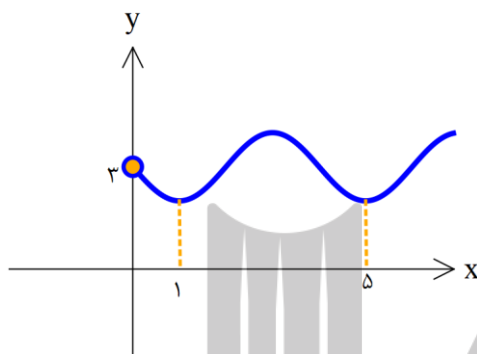


مثال: معادله یک تابع سینوسی را بنویسید که ماکزیمم آن ۶ و مینیمم آن ۱ و دوره تناوب آن ۲ باشد. این تابع را رسم کنید.



کاربرد دوره تناوب در مسائل:

مثال: شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



- ۲(۱) ۲/۵ (۲) ۳ (۳) ۳/۵ (۴)

مثال: دوره تناوب دو تابع زیر با هم برابرند. مقادیر ممکن برای b را بیابید.

$$y = -\sin\left(\frac{3\pi x}{b-1}\right), \quad y = -\cos((3b+3)\pi x) + 2$$

konkur
info

تایع تانژانت:



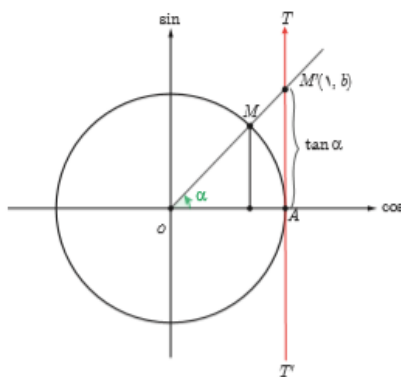
در سال دهم و یازدهم با محورهای \sin و \cos در دایره مثلثاتی آشنا شدیم.

امسال قصد داریم با محور \tan در دایره آشنا شده و دوره تناوب و شکل این

تابع را به طور مختصر یاد بگیریم. در شکل روبرو

محورموازی با محور \sin را محور \tan مینامیم و طبق شکل داریم:

$$\tan \alpha = AM = b$$



نکات مهم در مورد تابع تانژانت

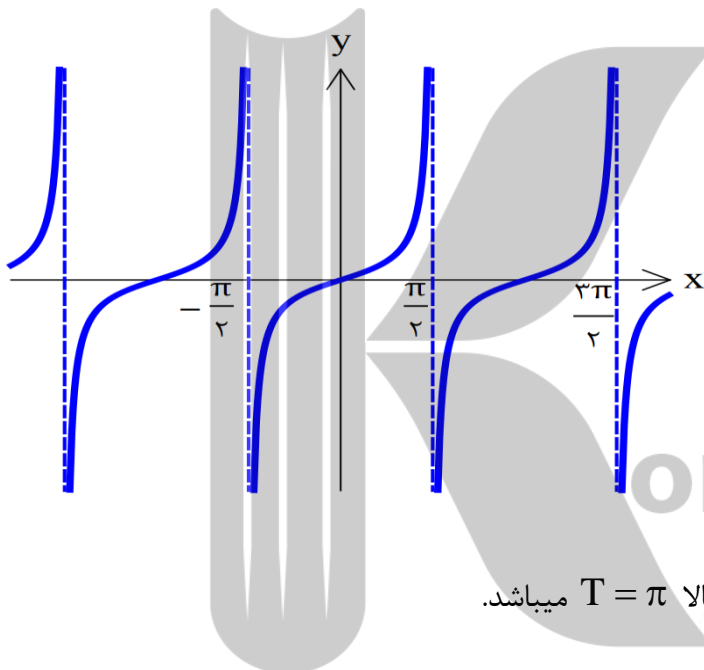


(۱) تابع تانژانت در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است. (۲) در تمام ربع های مثلثاتی تابع \tan صعودی است.

(۳) تابع \tan در کل دامنه اش صعودی نیست.

(۴) با توجه به نمودار تابع \tan میتوان نتیجه گرفت که دامنه تابع $y = \tan(f(x))$ برابر است با :

$$\left\{ x \mid f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$



(۵) نمودار تابع \tan :


(۶) دوره تناوب تابع $y = \tan x$ با توجه به شکل بالا $T = \pi$ میباشد.


با توجه به قوانین انبساط و انقباض افقی که در فصل اول آموختید دوره تناوب تابع تانژانت $T = \frac{\pi}{|b|}$ است. یعنی با تابع

مشابه خودش از لحاظ \sin و \cos دوره تناوب آن نصف شده است.

(۷) در نمودار تابع تانژانت خطوط عمودی نقطه چین را **مجانِب قائم** مینامیم که بعداً در مورد آن مفصل صحبت خواهیم

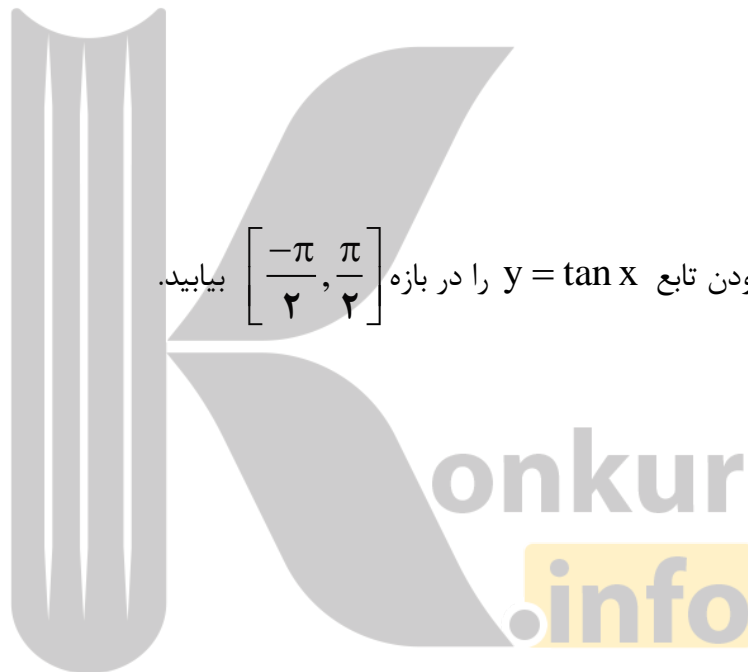
کرد. برای رسم، ریشه های مخرج مجانب های قائم هستند.


مثال: دوره تناوب تابع $y = 2 \tan 3x + 5$ را بیابید. 


مثال: الف) نمودار $y = \tan 2x$ را رسم کنید. دی ۹۷ 

ب) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خرداد ۹۸

دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر با است. (درست - نادرست)



مثال: صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بیابید. 

مثال: صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید. 

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (الف)}$$

$$g(x) = 2 \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (ب)}$$

$$h(x) = 2 - 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \text{ (پ)}$$

مثال: درستی یا نادرستی هر کدام را مشخص کنید.

(الف) تابع تانژانت در ربع چهارم از $\frac{3\pi}{4}$ تا رسیدن به زاویه 2π مقدار کاهشی دارد.

(ب) بازه ای وجود دارد که تانژانت در آن بازه صعودی است.

(پ) تابع تانژانت تابعی غیر متناوب است.

(ت) دوره تناوب تابع $y = -2 \cos\left(\frac{\pi x}{8}\right) + 1$ برابر ۱۶ است.

(ث) دامنه تانژانت برابر $D = \mathbb{R} - \left\{x = k\pi + \frac{\pi}{4}\right\}$ است.

(ج) دوره تناوب تانژانت برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

(چ) در نمودار تابع $y = a \cos bx + c$ مقدار بیشینه نمودار ۵ و کمینه ی نمودار ۲ است. در این صورت مقدار a برابر

$\frac{3}{5}$ و مقدار c برابر $\frac{1}{5}$ است.

ج) دامنه تابع $y = \tan(x)$ برابر با $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ است. شهریور ۹۸

خ) در جای خالی عبارت ریاضی مناسب بنویسید.

دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است. دی ۹۸

معادلات مثلثاتی

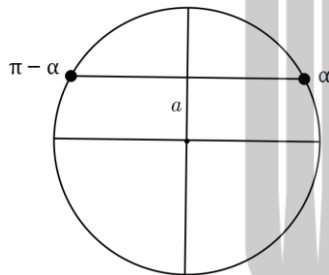


الف) معادلات به صورت $\sin x = a$ در این سوالات ابتدا باید مطمئن باشیم عدد a در بازه $[-1, 1]$ قرار داشته باشد.

در غیر این صورت معادله جواب ندارد.

حال فرض کنید $a \in [-1, 1]$ باید فکر کنیم $a = \sin ?$ یعنی در حافظه تان به دنبال زاویه ای بگردید که سینوس آن a

میشود. $\sin x = \sin \alpha$





$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$


همان طور که در شکل میبینید هر دو نقطه مشخص شده دارای سینوس برابر a هستند.


مثال: معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

مثال: معادله $2 \sin 2x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید. تیر ۹۹ ریاضی


مثال: معادله ی $\sin 3x = 1$ را حل کنید. 

مثال: معادله $2 \sin^2 5x - \sin 5x = 0$ را حل کنید. 

مثال: معادله $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید. 

مثال: معادله $\sin 4x = \sin x$ را حل کنید. 

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید. شهریور ۹۸ ریاضی 

مثال: معادله ی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید. شهریور ۹۸ تجربی 

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

دی ۹۷ تجربی ب) $\sin x - \cos 2x = 0$

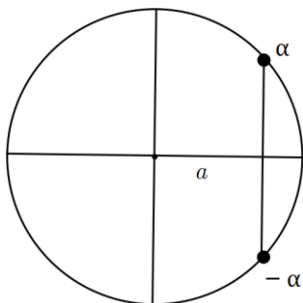
مثال: معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x = 0$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید. خرداد ۹۸ تجربی

مثال: معادله مثلثاتی $2 \sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ را حل کنید. تیر ۹۸ تجربی

ب) معادلات به صورت $\cos x = a$ در این سوالات ابتدا باید مطمئن باشیم عدد a در بازه $[-1, 1]$ قرار داشته باشد.

در غیر این صورت معادله جواب ندارد.


حال فرض کنید $a \in [-1, 1]$ باید فکر کنیم $a = \cos ?$ یعنی در حافظه تان به دنبال زاویه ای بگردید که کسینوس آن





$\cos x = \cos \alpha$ a میشود

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

همان طور که در شکل میبینید هر دو نقطه مشخص شده دارای کسینوس برابر a هستند.

مثال: معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را حل کنید. 


مثال: معادله $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید. دی ۹۷ 


مثال: معادلات زیر را حل کنید. 

الف) $2\cos x + 1 = 0$

ب) $\cos 3x = \cos 2x$

$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$


مثال: معادله زیر را حل کنید. 

مثال: معادله زیر را حل کنید. 


$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \quad \text{خرداد ۹۸}$$

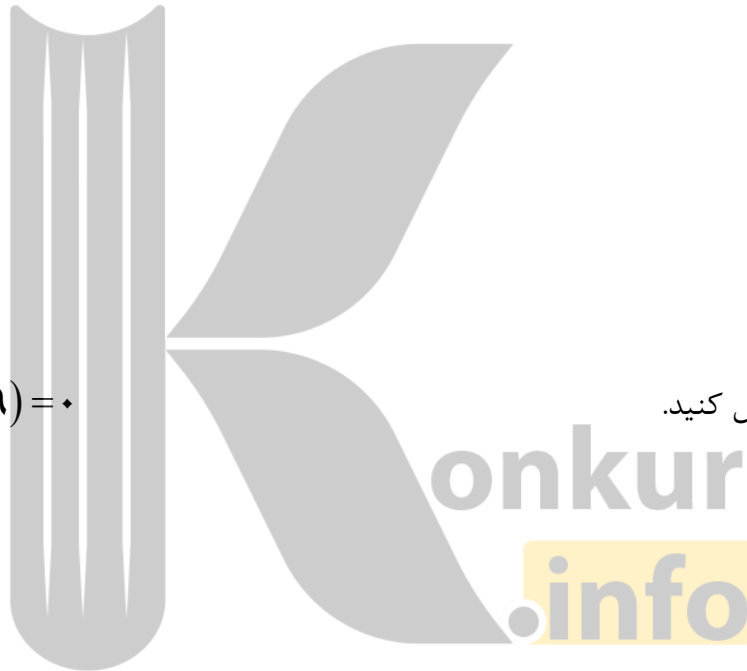
$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \quad \text{دی ۹۸ تجربی}$$

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

مثال: معادله روبرو را حل کنید. 

$$\cos x (2 \cos x - 9) = 0$$

مثال: معادله روبرو را حل کنید. 



مثال: معادله مثلثاتی $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید. تیر ۹۹ تجربی 

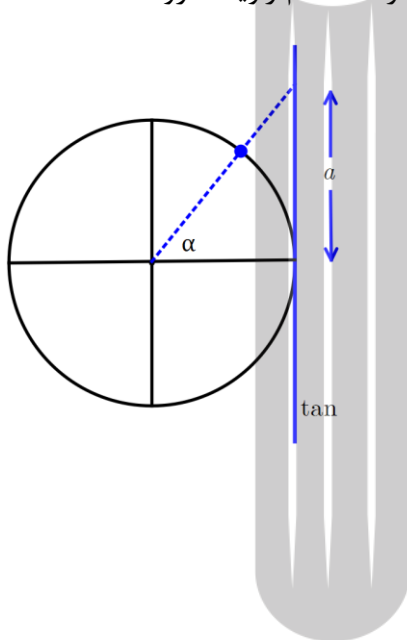
مثال: اندازه دوزلع مثلثی ۵ و ۴ سانتیمتر است. اگر مساحت این مثلث $۵\sqrt{۲}$ باشد، چند

مثلث با این ویژگی وجود دارد؟

پ) معادلات به صورت $\tan x = a$ در این سوالات ابتدا باید فکر کنیم عدد a تانژانت کدام زاویه معروف است که ما در

حافظه داریم. یعنی $\tan x = \tan \alpha$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



همان طور که در شکل میبینید نقطه مشخص شده دارای تانژانت برابر a است.


مثال: معادله را حل کنید.


ب) $\tan 5x = \tan x$


الف) $\tan 2x = \sqrt{3}$

مثال: معادله $\tan(\pi + 2x) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$ را حل کنید.


$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \sqrt{3}$$

مثال: معادله روبرو را حل کنید. 

مثال: معادله $\tan 3x \tan x = 1$ را حل کنید. 

مثال: مقدار $\tan 105$ را محاسبه کنید. 



مثال: مقدار $\frac{1 - \tan 15}{1 + \tan 15}$ را محاسبه کنید. 

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>