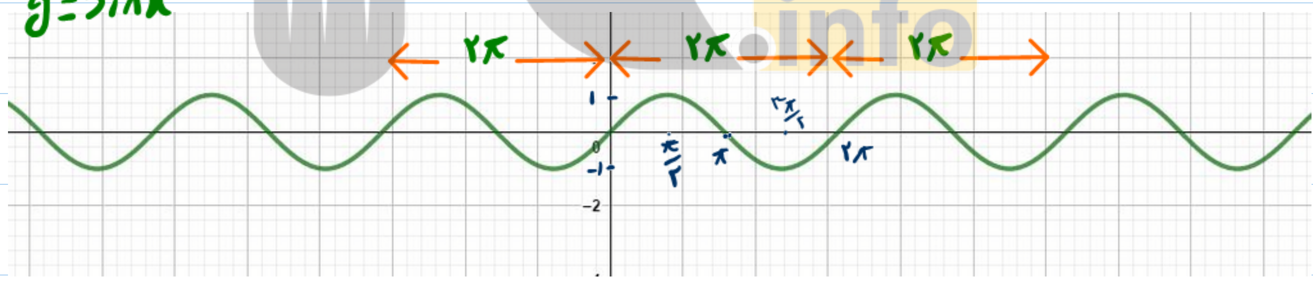
تابع متناوب :

اگر در تابعی برای هر مقدار از دامنه تابع، تساوی $f(x+T)=f(x)$ برقرار باشد،
یعنی اضافه کردن T، اثری روی مقدار تابع نداشته باشد، می‌گوییم f متناوب است.
به کوچک‌ترین مقدار مثبت T **دوره تناوب** می‌گوییم.

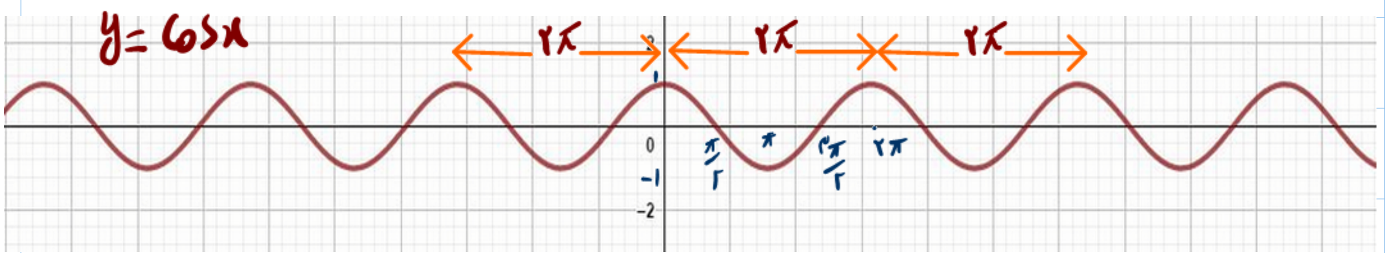
به عبارت دیگر در توابع متناوب، قسمتی از نمودار در حال تکرار شدن است. به کوچک‌ترین اندازه افقی این قسمت تکرار شونده دوره تناوب می‌گوییم.

مثال : دوره تناوب توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیابید.

$y=\sin x$



$T=2\pi$



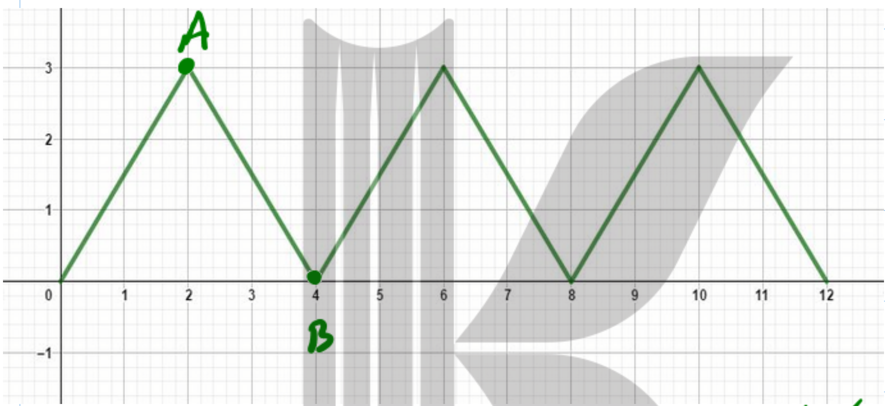
$T=2\pi$

نکته: اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد، اضافه یا کم کردن مضارب صحیح

T، مقدار تابع را تغییر نمی دهد:
$$f(x+kT)=f(x)$$

مثال: اگر قسمتی از نمودار تابع f به شکل زیر باشد، $f(1399)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$



$T=4$

باید مضربی از ۴ را به ۱۳۹۹ اضافه یا کم کنیم تا عددی بین ۰ تا ۴ بدست آید.

$$f(1399)=f(1399+(-349)4)=f(1399-1396)=f(3)$$

خط AB : $A(2,3)$, $B(4,0)$ $\qquad m=\frac{0-3}{4-2}=-\frac{3}{2}$

$$y-0=-\frac{3}{2}(x-4) \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+6$$

$$f(3)=-\frac{3}{2}(3)+6=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$$

گزینه ۲

مثال: ضابطه تابع متناوب f در بازه $(0,1)$ به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ است. اگر دوره تناوب تابع برابر یک باشد، $f(-5/36)$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۶ ۳) تعریف نشده ۴) ۰/۴

گزینه ۱ $\quad f(-5/36)=f(-5/36+6(1))=f(0/64)=\sqrt{0/64}=0/8$

نکته: اگر دوره تناوب $f(x)$ برابر T باشد، دوره تناوب $af(bx+c)+d$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است. یعنی برای محاسبه دوره تناوب فقط به ضریب x توجه می‌کنیم.

سایر ضرایب و انتقال‌ها اثری روی دوره تناوب ندارند.

مثال: دوره تناوب $y=2f(6x-1)+4$ برابر 2 است. دوره تناوب $g(x)=-f(3x)-1$ را بیابید.

$$y:\quad 2=\frac{T_f}{6} \Rightarrow T_f=12$$

$$g:\quad T_g=\frac{T_f}{3}=\frac{12}{3}=4$$

نتیجه: دوره تناوب توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$

برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x)=k\cos(kx)+3$ برابر $\frac{\pi}{4}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟

۱) ۱۱   ۲) ۷   ۳) ۵   ۴) ۴

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{k} \Rightarrow k\pi=8\pi \longrightarrow k=8$$

$$f(x)=8\cos 8x+3 \Rightarrow f(0)=8\overbrace{\cos 8\times 0}^{1}+3=8\times 1+3=11$$ گزینه ۱

نکته: گاهی اوقات لازم است با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، تابع را ساده تا حد امکان ساده کنیم، سپس دوره تناوب را حساب کنیم.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\cos^2x-\cos^4x$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) 2π

$$f(x)=\cos^2x-\cos^4x=\cos^2x(1-\cos^2x)=\cos^2x\sin^2x$$

یادآوری: $\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\sin^2 2x$

یادآوری: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$

$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ گزینه ۲

مثال: اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sqrt{2}\cos^2(mx-4)$ برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$f(x) = \sqrt{2} \times \frac{1+\cos 2(mx-4)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\cos(2mx-8))$

گزینه ۱

$T = \frac{3\pi}{4} = \frac{\cancel{2}\pi}{|\cancel{2}m|} \Rightarrow 3\pi|m| = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{4\pi}{3\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{4}{3}$

نکته: دوره تناوب توابع $y=\tan ax$ و $y=\cot ax$ برابر $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره تناوب تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) 4π ۲) 2π ۳) π ۴) $\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$$ گزینه ۲

بررسی توابع مثلثاتی به صورت $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$

پارامتر a باعث انبساط یا انقباض عمودی تابع سینوس و کسینوس می‌شود و پارامتر c یک انتقال عمودی را نتیجه می‌دهد. پس مقادیر ماکزیمم و مینیمم این گونه توابع عبارتند از:

$$y_{max}=|a|+c \qquad y_{min}=-|a|+c$$

در درس قبل هم دیدیم پارامتر b که باعث انبساط یا انقباض افقی می‌شود، در دوره تناوب مؤثر است و $T=\frac{2\pi}{|b|}$.

مثال: مقادیر max، min و دوره تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $y=3-\cos(\frac{1}{4}x)$

$$T=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$$

$$y_{max}=|-1|+3=1+3=4 \qquad y_{min}=-|-1|+3=-1+3=2$$

ب) $y=-2\sin(\pi x)+\sqrt{3}$

$$T=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$y_{max}=|-2|+\sqrt{3}=2+\sqrt{3} \qquad y_{min}=-|-2|+\sqrt{3}=-2+\sqrt{3}$$

نکته: اگر نمودار تابعی به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$

باشد، برای بدست آوردن ضابطه تابع یعنی یافتن پارامترها a، b، c و تشخیص

سینوسی یا کسینوسی بودن تابع به صورت زیر عمل می کنیم:

۱) اگر محور yها از max یا min نمودار عبور کند، تابع کسینوسی است در غیر این صورت سینوسی است.

۲) با جمع و کم کردن روابط گفته شده برای مقادیر max و min داریم..

$$\left.\begin{array}{l} y_{max}=|a|+c \\ y_{min}=-|a|+c \end{array}\right\} \xRightarrow{+} y_{max}+y_{min}=2c \Rightarrow c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{max}-y_{min}=2|a| \Rightarrow |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$$

۳) برای یافتن b از دوره تناوب کمک می گیریم ($T=\frac{2\pi}{|b|}$)

۴) برای تشخیص علامت a و b این گونه عمل می کنیم:

الف- در توابع سینوسی اگر نمودار بعد $x=0$ روند صعودی داشته باشد، a و b هم علامت

هستند یعنی: $a\times b>0$

و اگر نمودار بعد $x=0$ روند نزولی داشته باشد، a و b غیر هم علامت اند یعنی: $a\times b<0$

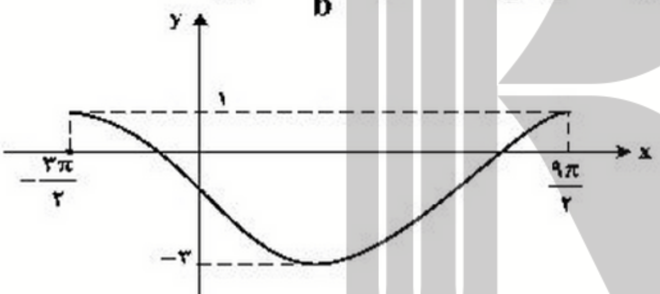
ب- در توابع کسینوسی اگر نمودار، روی محور yها، ماکزیمم داشته باشد $a>0$ است

و اگر مینیمم داشته باشد $a<0$ است.

با توجه به رابطه $\cos(-x)=\cos x$ ، b می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی:

شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) −۲
۲) −۳
۳) −۴
۴) −۶

$$T=\frac{9\pi}{2}-\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{12\pi}{2}=6\pi \Rightarrow 6\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{3}$$

$$|a|=\frac{1-(-3)}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

چون بعد $x=0$ تابع نزولی است پس $ab<0$ و دو حالت داریم:

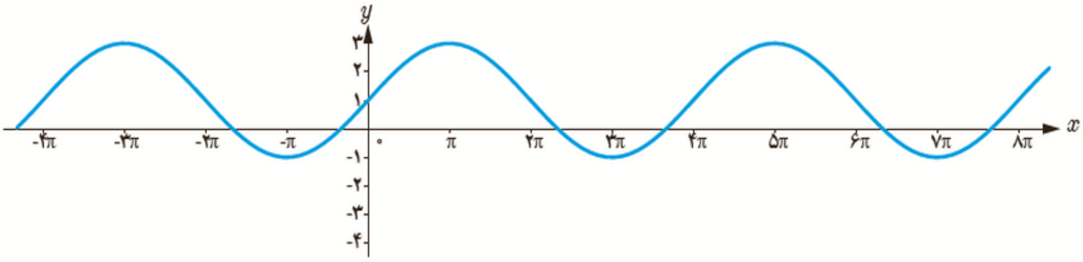
$$\begin{cases} a=2 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad \frac{a}{b}=\frac{2}{-\frac{1}{3}}=-6 \qquad\qquad \begin{cases} a=-2 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases} : \frac{a}{b}=\frac{-2}{\frac{1}{3}}=-6$$

گزینه ۴

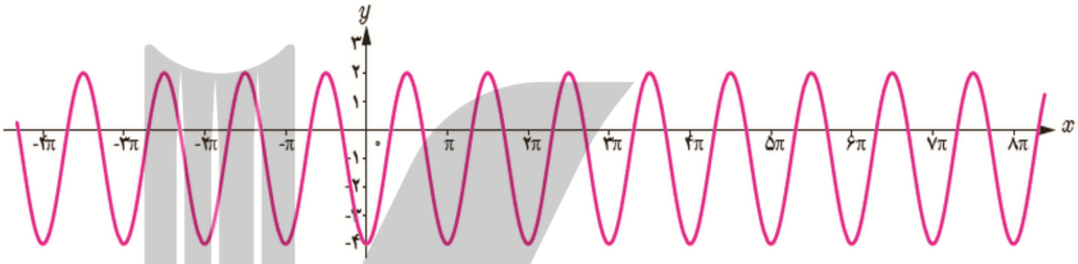
مثال: ضابطه توابع زیر به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ است.

ضابطه آنها را مشخص کنید.

الف)



ب)



الف) $T=4\pi \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$ تابع سینوسی است

$|a|=\frac{3-(-1)}{2}=\frac{4}{2}=2$, $c=\frac{3+(-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

حول $x=0$ تابع روند صعودی دارد پس $ab>0$:

ضابطه تابع: $y=2\sin\frac{1}{2}x+1$ یا $y=-2\sin(-\frac{1}{2}x)+1$

ب) $T=\pi \Rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2$ تابع کسینوسی

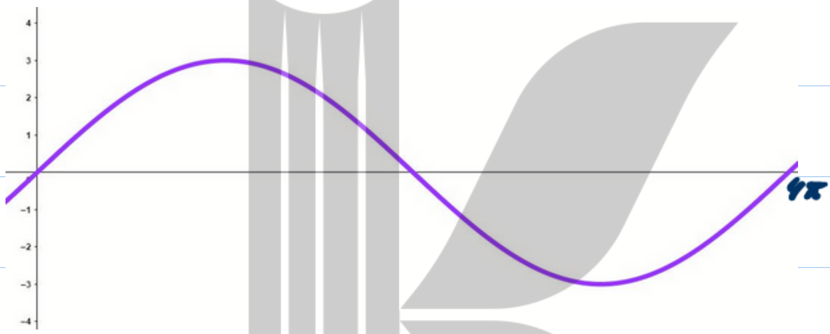
$|a|=\frac{2-(-4)}{2}=\frac{6}{2}=3$, $c=\frac{2+(-4)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

چون مقدار y ها از min بزرگ‌تر است پس $a<0$ یعنی -3 است:

ضابطه تابع $y=-3\cos 2x-1$ یا $y=-3\cos(-2x)-1$

مثال: شکل زیر نمودار تابع $f(x)=a\sin bx$ است. مقدار ab کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶



$$T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi|b|=2\pi \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$$

$$|a|=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است:

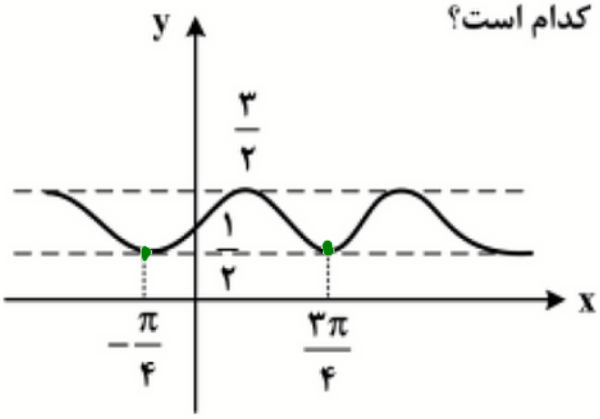
$$a=3,\ b=\frac{1}{3} \Rightarrow ab=3\times\frac{1}{3}=1$$

$$a=-3,\ b=-\frac{1}{3} \Rightarrow ab=-3\times(-\frac{1}{3})=1$$

گزینه ۱

مثال: کنکور سراسری ۹۸ ریاضی :

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۲

۴) ۳

مخرج دوره تناوب ضرب sin

$$y = 1 + a\sin bx\cos bx = 1 + \frac{1}{2}a\sin 2bx$$

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\pi}{4} = \pi \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow \pi|b| = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

$$\left|\frac{1}{2}a\right| = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

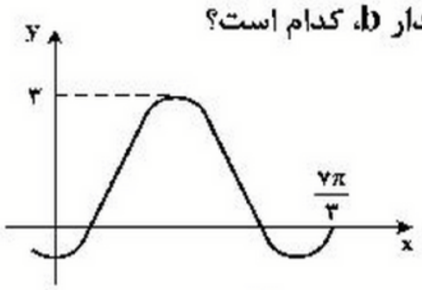
بعد از $x=0$ روند تابع صعودی است پس $ab>0$ است :

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \quad a+b=2 \quad , \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \quad a+b=-2$$

گزینه ۳

مثال: کنکور سراسری ۹۹ تجربی

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲

۲) ۱

۳) -1

۴) -2

$$y = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = a + b\cos x$$

$$y_{max} = ۳ = |b| + a$$

چون محور yها از min عبور کرده است پس $b<0$: $a - b = ۳ \quad (۱)$

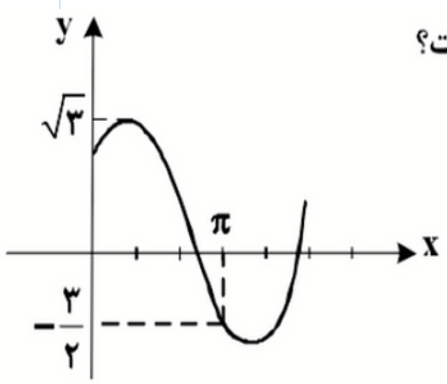
$$\left(\frac{۷\pi}{۳}, 0\right) \xrightarrow{\text{در تابع}} 0 = a + b\cos\frac{۷\pi}{۳} \Rightarrow 0 = a + b\cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = a + b\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow 0 = a + b\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = 0 \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow -\begin{cases} a - b = ۳ \\ a + \frac{b}{۲} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{۳b}{۲} = -۳ \xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow b = -۲$$ گزینه ۴ ✓

مثال: کنکور سراسری ۹۸ تجربی :



شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

$$y_{max} = |b| + a \Rightarrow |b| + a = \sqrt{۳}$$

چون تابع به ازای $x=0$ روند صعودی دارد پس b با یک (ضریب x) هم علامت و مثبت است :

$$a+b=\sqrt{3} \qquad (1)$$

$$\left(\pi, -\frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\text{(جایگذاری)}} -\frac{3}{2} = a + b\,\underbrace{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

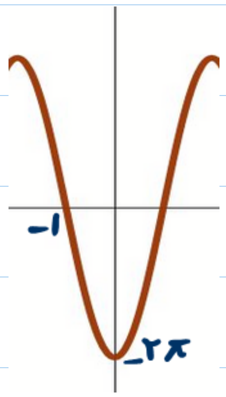
$$a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ -\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow b+\frac{\sqrt{3}}{2}b=\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

$$b\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b=\sqrt{3}$$

گزینه ۳

مثال: نمودار تابع $f(x)=a\cos bx$ به صورت زیر است. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟



۱) $\sqrt{2}\pi$ ۲) $-\sqrt{2}\pi$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

$$y_{min}=-|a|+0=-2\pi \Rightarrow |a|=2\pi$$

چون محور y ها از min عبور کرده پس $a<0$ است :

$\Rightarrow -a = 2\pi \Rightarrow a = -2\pi$

چون $f(-1)=0$ پس :

$0 = -2\pi \cos(-b) \Rightarrow \cos(-b) = 0 \Rightarrow -b = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

اولین نقطه‌ای که تابع $\cos x$ قبل از $x=0$، برابر صفر می‌شود $-\frac{\pi}{2}$ است.

$f(x) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} x$

$f(\frac{1}{2}) = -2\pi \cos \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = -2\pi \cos \frac{\pi}{4} = -2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}\pi$

گزینه ۲

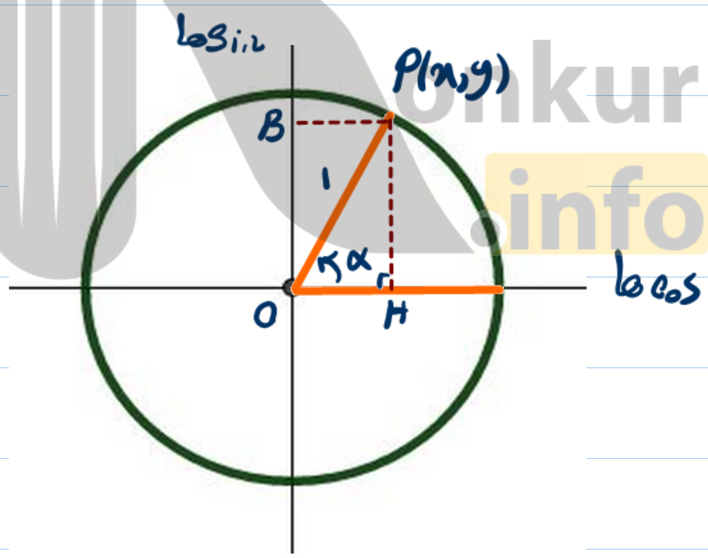
تانژانت در دایره مثلثاتی :

یادآوری : دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع یک و مرکز مبدأ مختصات است.

ضلع ابتدای هر زاویه در دایره مثلثاتی، بر قسمت مثبت محور x ها واقع است.

اگر اندازه زاویه $\alpha > 0$ باشد به اندازه α در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کنیم و اگر $\alpha < 0$ باشد به اندازه α در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخیم.

اگر ضلع انتهایی زاویه محیط دایره را در نقطه $P(x,y)$ قطع کند داریم :



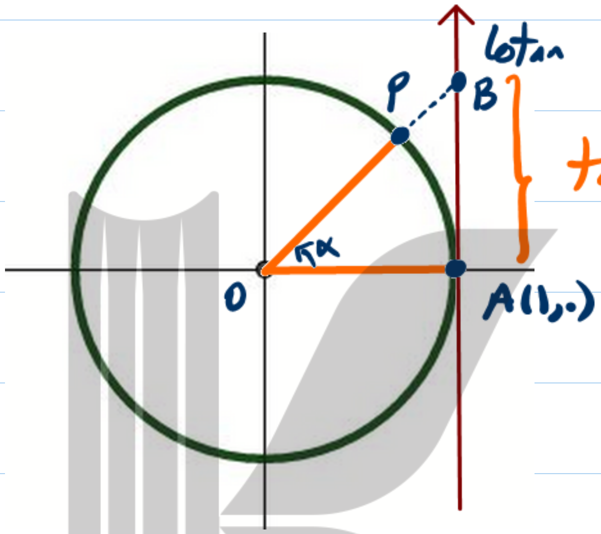
$$\overset{\triangle}{OHP} : \quad \sin\alpha = \frac{PH}{OP} = \frac{PH}{1} \Rightarrow \sin\alpha = PH = BO \Rightarrow y_P = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos\alpha = OH \Rightarrow x_P = \cos\alpha$$

محور تانژانت ها را موازی محور سینوس ها و مماس بر دایره در نقطه $A(1,0)$

در نظر می گیریم. مبدأ این محور $A(1,0)$ است و جهت مثبت آن مانند محور سینوس هاست.

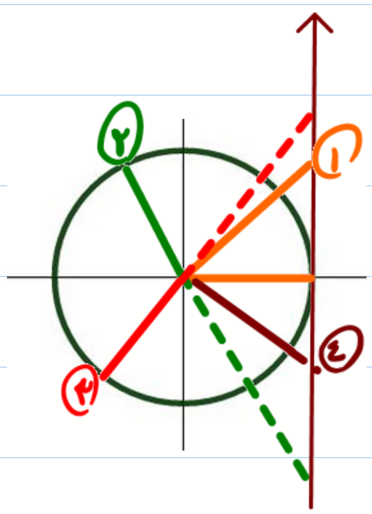
یعنی بالای A تانژانت مثبت و پایین A تانژانت منفی است.



اگر شعاع OP را امتداد دهیم، محور تانژانت ها را در B قطع می کند.

$$O\hat{A}B : \quad \tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} \Rightarrow \tan\alpha = AB$$

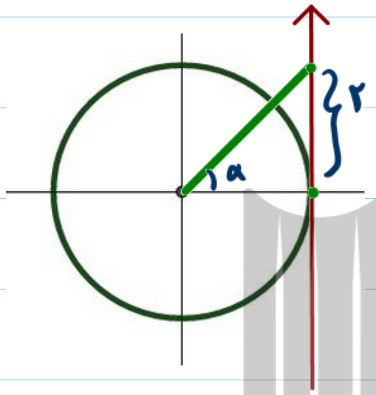
توجه: علامت تانژانت در نواحی چهارگانه به صورت زیر است:



	اول	دوم	سوم	چهارم
tan	+	−	+	−

نکته: در زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و بطور کلی در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$، هر چقدر شعاع را امتداد دهیم محور تانژانت‌ها را قطع نمی‌کند. در این زاویه‌ها تانژانت تعریف نشده است.

مثال: در شکل زیر $\cos\alpha$ کدام است؟

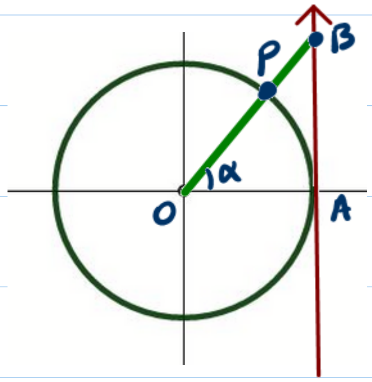


۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۳) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

$\tan\alpha = 2$ ، $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ گزینه ۲

مثال: با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، اگر $P(2a-1, a)$ باشد، مساحت مثلث AOB چقدر است؟



۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$x_p = 2a-1 = \cos\alpha$

$y_p = a = \sin\alpha$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow a^2 + (2a-1)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 4a^2 - 4a + 1 - 1 = 0$$

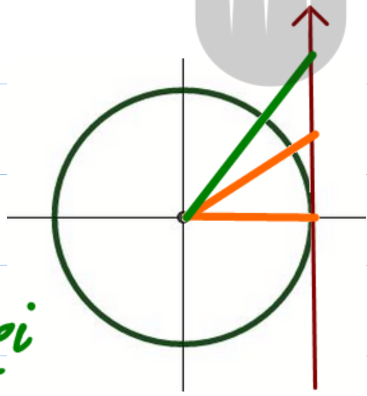
$$5a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(5a-4) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{غ ق ق} \\ 5a - 4 = 0 \longrightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = 2\times\frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{3} = AB$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \times AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$ گزینه ۲

نکته: در تمامی نواحی چهارگانه با افزایش زاویه، مقدار تانژانت هم افزایش می‌یابد.

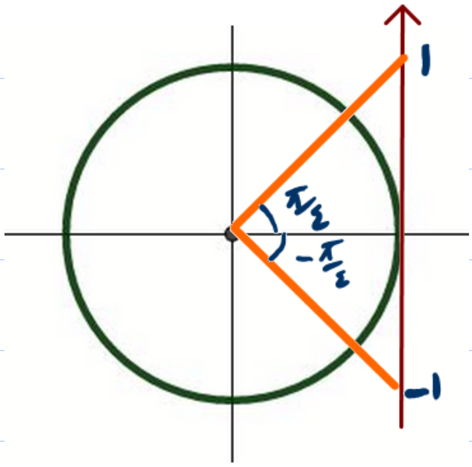


ناحیه اول

ناحیه دوم

برای نواحی سوم و چهارم به طور مشابه ثابت می‌گردد.

مثال: اگر $|x| \le \frac{\pi}{4}$ و $\tan x = \frac{2m-3}{5}$ باشد، محدوده m را بیابید.



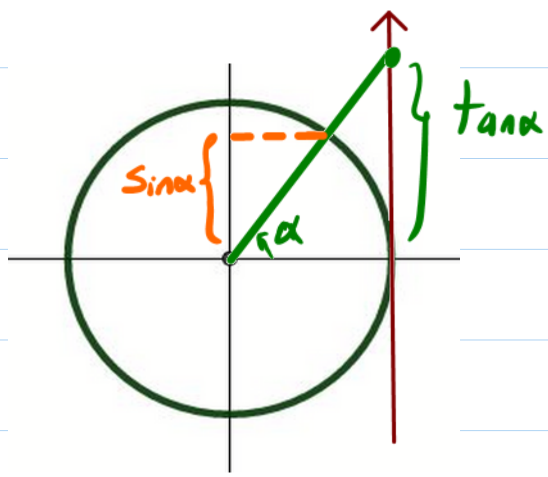
$$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

$$-1 \le \tan x \le 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \le \frac{2m-3}{5} \le 1 \xRightarrow{\times 5} -5 \le 2m-3 \le 5$$

$$\xRightarrow{+3} -2 \le 2m \le 8 \xRightarrow{\div 2} -1 \le m \le 4$$

نکته: با استفاده از دایره مثلثاتی می‌توان گفت: $|\sin\alpha| < |\tan\alpha|$

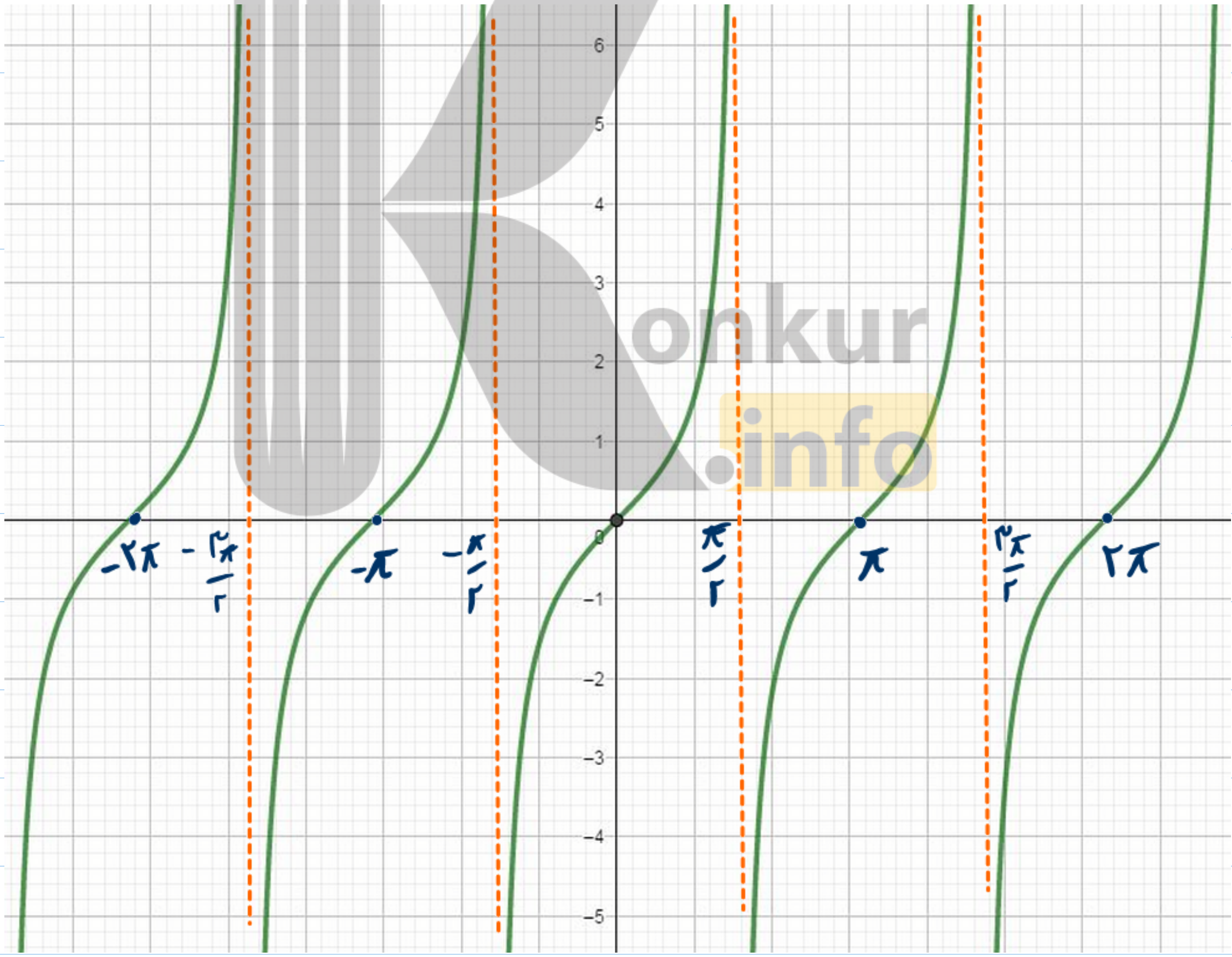


تابع تانژانت

$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

اگر x عددی حقیقی باشد و $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، تابعی که به عدد x تانژانت آن را نسبت می‌دهد تابع تانژانت نامیده می‌شود.

برای رسم نمودار تابع $f(x) = \tan x$ با دنبال کردن روی دایره مثلثاتی به نمودار زیر می‌رسیم:



پس درباره تابع $f(x)=\tan x$ می‌توان گفت :

۱- $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۲- $R_f = \mathbb{R}$

۳- تابع تانژانت، تابعی متناوب است و $T = \pi$

۴- تابع تانژانت یکنوا نیست ولی در بازه‌هایی که در آن تعریف می‌شود یعنی بازه‌هایی که شامل $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ها نیستند، اکیداً صعودی است.

نکته: دوره تناوب تابع $y = a\tan(bx+c)+d$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2})$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

۱) $x \neq k$ ۲) $x \neq 2k+1$ ۳) $x \neq 2k$ ۴) $\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi$$

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} x \neq k\pi \times \frac{2}{\pi} \Rightarrow x \neq 2k$$

گزینه ۳

مثال: اگر $f(x)=\tan x-\frac{1}{\tan x}$، دوره تناوب تابع $\frac{1}{f}$ را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

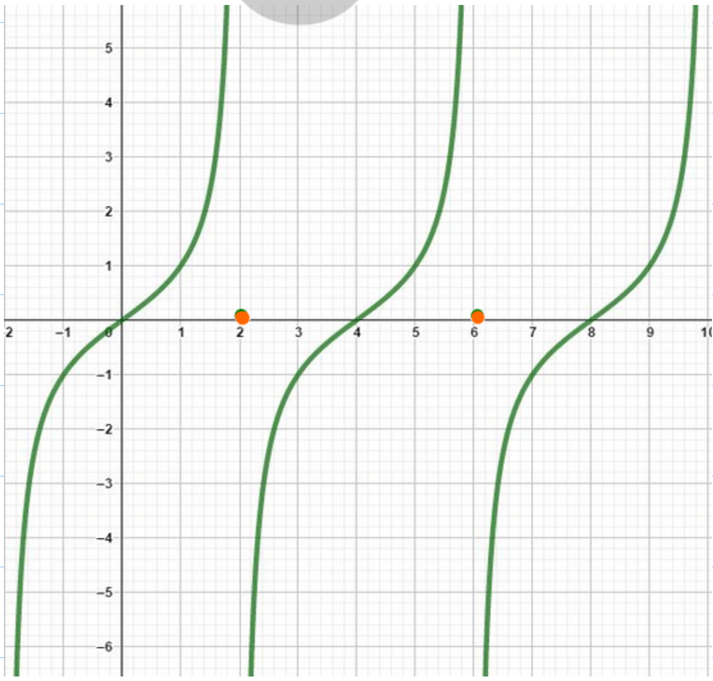
$$=-2\cot 2x=-\frac{2}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{f}=-\frac{1}{2}\tan 2x \Rightarrow T_{\frac{1}{f}}=\frac{\pi}{2}$$

مثال: تابع f با ضابطه $f(x)=\tan(\frac{\pi}{4}x)$ و دامنه $(2,a)$ روی دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

حداکثر مقدار a کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

باید طول تمام نقاط بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم یا در $\frac{4}{\pi}$ ضرب شود.



حداکثر مقدار برای a به طوری که

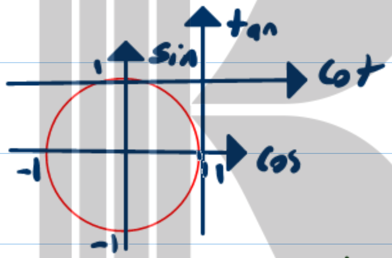
تابع در بازه $(2,a)$ اکیداً صعودی

باشد ۶ است. پس گزینه ۳ درست است.

یادآوری :

۱) جدول نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف :

	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ت.ن	0	ت.ن	0
cot	ت.ن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ت.ن	0	ت.ن



۲) جدول علامت نسبت‌های مثلثاتی :

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

۳) نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad\quad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۴) دو زاویه متمم : α , β متمم اند : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ 9°

مثال : $30+60=90$

$\sin 30 = \cos 60 = \frac{1}{2}$

$\sin 60 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\alpha=\cos\beta \quad , \quad \sin\beta=\cos\alpha$

$\tan\alpha=\cot\beta \quad , \quad \tan\beta=\cot\alpha$

۵) نسبت های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ ، $k \in \mathbb{Z}$

الف) اگر ضریب π عددی زوج باشد آنرا از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم.

$\sin(\cancel{2k\pi} \pm \alpha)=\sin(\pm\alpha)$

$\cos(\cancel{2k\pi} \pm \alpha)=\cos(\pm\alpha)$

ب) اگر ضریب π عددی فرد باشد آنرا از کمان $\sin$ و $\cos$ حذف می کنیم اما نسبت مثلثاتی را قرینه می کنیم.

$\sin(\cancel{(2k+1)\pi} \pm \alpha)=-\sin(\pm\alpha)$

$\cos(\cancel{(2k+1)\pi} \pm \alpha)=-\cos(\pm\alpha)$

ج) ضریب π چه زوج و چه فرد باشد آنرا از کمان های $\tan$ و $\cot$ حذف می کنیم.

$\tan(\cancel{k\pi} \pm \alpha)=\tan(\pm\alpha)$

$\cot(\cancel{k\pi} \pm \alpha)=\cot(\pm\alpha)$

٦) نسبت های مثلثاتی $\left(\overset{\text{مضارب فرد } \frac{\pi}{2}}{\overbrace{(2k+1)\frac{\pi}{2}}}\pm\alpha\right)$

همیشه فرض می‌کنیم α حاده است و ناحیه‌ای که زاویه $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ در آن است را مشخص می‌کنیم و علامت نسبت را مشخص می‌دهیم. حال مضرب فرد $\frac{\pi}{2}$ را حذف کرده و اسم نسبت را به صورت زیر تغییر می‌دهیم.

$\sin \to \cos$, $\cos \to \sin$, $\tan \to \cot$, $\cot \to \tan$

$$\sin\left(\cancel{(2k+1)\frac{\pi}{2}}\pm\alpha\right)=\overset{\text{مث}}{\underset{\text{من}}{\sin}}\cos\alpha$$

$$\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\overset{\text{مث}}{\underset{\text{من}}{\cos}}\sin\alpha$$

$$\tan\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\overset{\text{مث}}{\underset{\text{من}}{\tan}}\cot\alpha$$

$$\cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\overset{\text{مث}}{\underset{\text{من}}{\cot}}\tan\alpha$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

1) $\sin(\overset{\text{فرد}}{285}\pi-\alpha)=-\overset{-\sin\alpha}{\overbrace{\sin(-\alpha)}}=\sin\alpha$

2) $\cos(\overset{\text{فرد}}{343}\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

3) $\cos(\overset{\text{زوج}}{24}\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

4) $\sin\left(\overset{\text{مضرب فرد } \frac{\pi}{2}}{\frac{25\pi}{2}}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{24\pi+\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\cancel{12\pi}+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

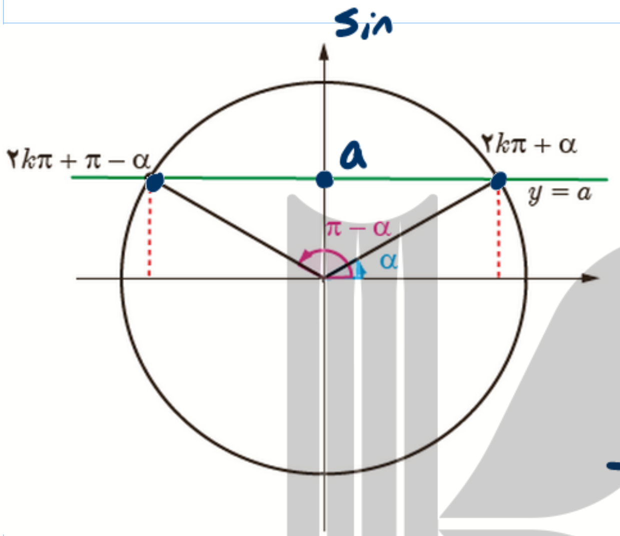
$=+\cos\alpha$

معادلات مثلثاتی

به معادلاتی که مجهول در کمان نسبت مثلثاتی قرار گیرد، معادلات مثلثاتی می‌گویند.

روش شهودی حل معادله $\sin x = a$:

$\alpha + \beta = \pi$ (مکمل) $\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$



روی محور سینوس مقدار a را مشخص و از این نقطه خطی بر محور سینوس عمود می‌کنیم تا دایره مثلثاتی را قطع کند. نقطه برخوردها سر یا جواب مورد نظر است. البته توجه داشته باشید به فرمول عمومی x، جواب کلی معادله است.

نتیجه:

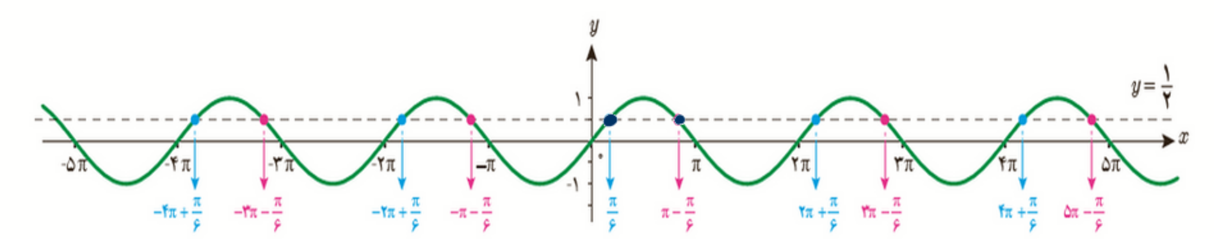
$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

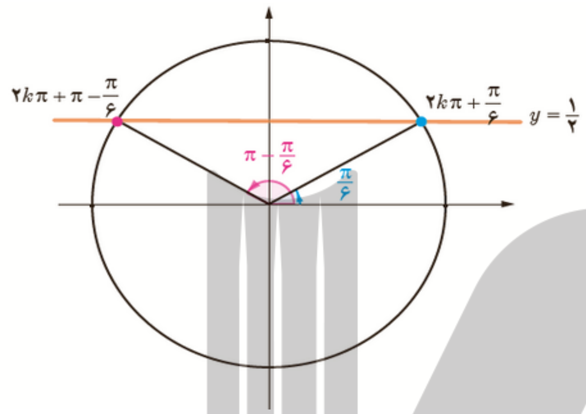
تعمیم

$$\sin \bigcirc = \sin \square \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc = 2k\pi + \square \\ \bigcirc = 2k\pi + (\pi - \square) \end{cases}$$

نکته مهم: اگر معادله به صورت استاندارد گفته شده نبود، باید از روابط بین نسبتهای مثلثاتی و جابه‌جایی عبارات و در صورت لزوم تغییر متغیر استفاده کرده و به شکل $\sin x = \sin\alpha$ یا $\cos x = \cos\alpha$ برسیم.

مثال: چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ است مثال بزنید.





$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x-\sqrt{3}=0$

ب) $4\sin x+\sqrt{8}=0$

الف) $2\sin x=\sqrt{3} \xrightarrow{\div 2} \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$

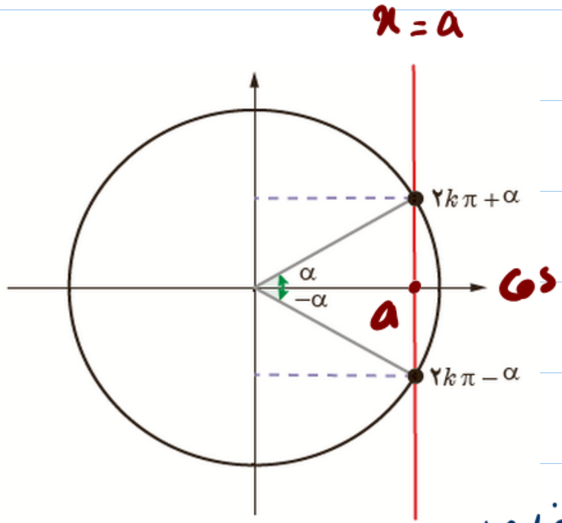
$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) $4\sin x=-\sqrt{8} \xrightarrow{\div 4} \sin x=\frac{-\sqrt{8}}{4}=\frac{-2\sqrt{2}}{4}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{4})$

$$\begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{4} \\ x=2k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{4})=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

روش شهودی حل معادله $\cos x = a$:



روی محور $\cos$ مقدار a را انتخاب و از این نقطه خطی بر محور $\cos$ عمودی کنیم تا دایره مثلثاتی را قطع کند. نقاط برخورد همان x یا جواب مورد نظر خواهد بود.

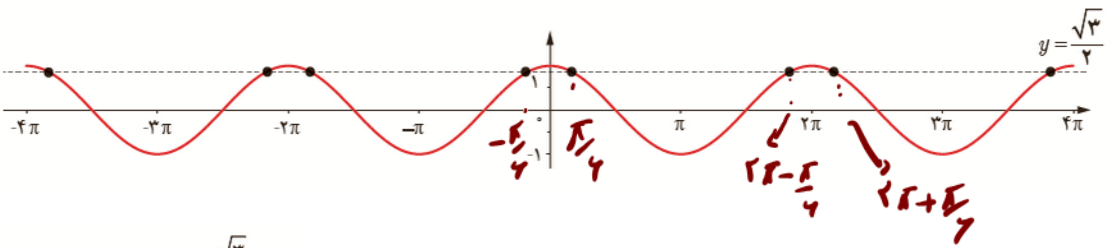
نتیجه:

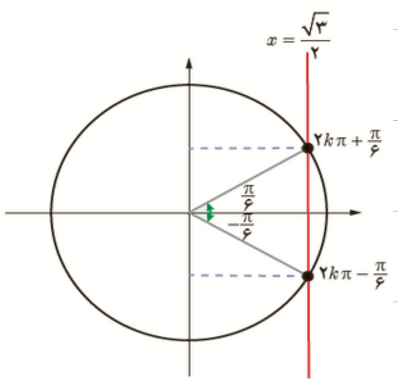
$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

تعمیم

$$\cos \bigcirc = \cos \square \Rightarrow \bigcirc = 2k\pi \pm \square$$

مثال: چند زاویه که مقدار کسینوس آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است مثال بزنید.





$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

جواب عمومی (کلی)

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

مثال : جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

k	-1	0
x	$-2\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{3}$

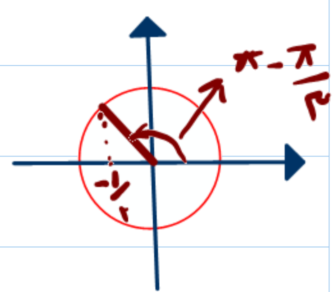
مثال: معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 - (4 \times 2 \times (-5)) = 81 + 40 = 121$$

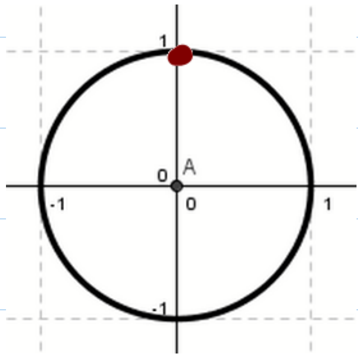
$$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} \frac{9+11}{4} = 5 \times & -1 \leq \cos x \leq 1 \\ \frac{9-11}{4} = -\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

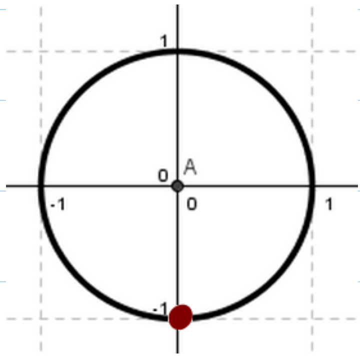


$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

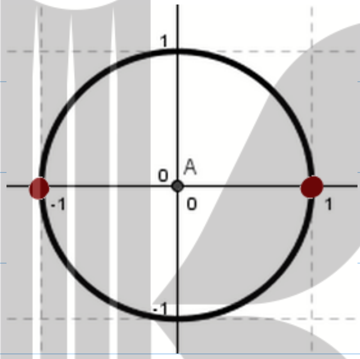
معادلات خاص :



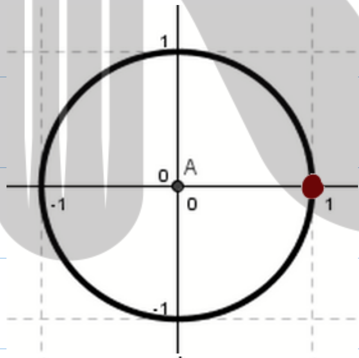
$\sin x = 1$ $\qquad$ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



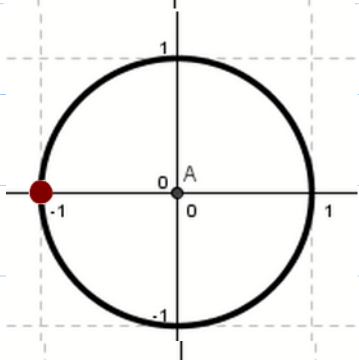
$\sin x = -1$ $\qquad$ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



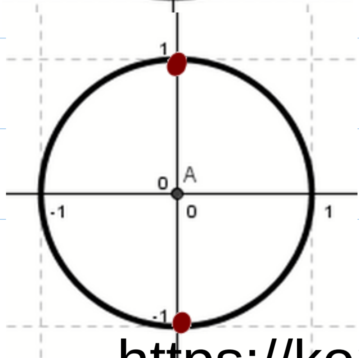
$\sin x = 0$ $\qquad$ $x = k\pi$



$\cos x = 1$ $\qquad$ $x = 2k\pi$



$\cos x = -1$ $\qquad$ $x = (2k+1)\pi$



$\cos x = 0$ $\qquad$ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲}=\sin ۳x \rightarrow 1=\sin ۳x$ حالت خاص

$۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div ۳} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰$

$۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \begin{cases} \cos x = ۰ \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \end{cases}$

$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\cos x = ۱ \rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$

پ) $\cos x = \cos ۲x$

$۲x = ۲k\pi \pm x$

$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \rightarrow ۳x = ۲k\pi \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$

ت) $\cos ۲x - ۳\sin x + ۱ = ۰ \to ۱ - ۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱ = ۰$

$-۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۲ = ۰ \qquad \Delta = ۹ - (۴ \times (-۲)(۲)) = ۹ + ۱۶ = ۲۵$

$\sin x = \dfrac{۳ \pm ۵}{-۴} \begin{cases} \dfrac{۸}{-۴} = -۲ \times & -۱ \leq \sin x \leq ۱ \\ \dfrac{-۲}{-۴} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$

$\sin x = \dfrac{۱}{۲} = \sin \dfrac{\pi}{۶} \qquad \begin{cases} x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{۶} \end{cases}$

ث) $\cos^۲ x - \sin x = \dfrac{۱}{۴} \to ۱ - \sin^۲ x - \sin x - \dfrac{۱}{۴} = ۰$

$-\sin^۲ x - \sin x + \dfrac{۳}{۴} = ۰ \to \Delta = (-۱)^۲ - (۴ \times (-۱)(\dfrac{۳}{۴}))$

$= ۱ + ۳ = ۴$

$\sin x = \dfrac{۱ \pm ۲}{-۲} \begin{cases} \dfrac{۳}{-۲} \times & -۱ \leq \sin x \leq ۱ \\ \dfrac{-۱}{-۲} = \dfrac{۱}{۲} \to \sin x = \dfrac{۱}{۲} = \sin \dfrac{\pi}{۶} \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + ۵\dfrac{\pi}{۶} \end{cases}$

ج) $\sin x - \cos ۲x = ۰$

$\sin x - (۱ - ۲\sin^۲ x) = ۰ \to ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$

$\Delta = ۱ - (۴ \times ۲ \times (-۱)) = ۱ + ۸ = ۹$

$\sin x = \dfrac{-۱ \pm ۳}{۴} \begin{cases} \dfrac{۲}{۴} = \dfrac{۱}{۲} \to \sin x = \sin \dfrac{\pi}{۶} & \begin{cases} x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + ۵\dfrac{\pi}{۶} \end{cases} \\ -۱ \to x = ۲k\pi - \dfrac{\pi}{۲} \end{cases}$

مثال : معادله ی مثلثاتی $\sqrt{8} = 2\sin x + \sqrt{2}$ را حل کنید.

$$2\sin x = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

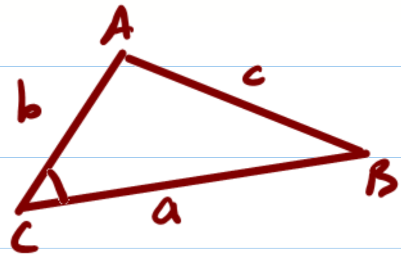
مثال : جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به‌دست آورید.

$$2\sin x \cos x = 2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{2\pi/3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



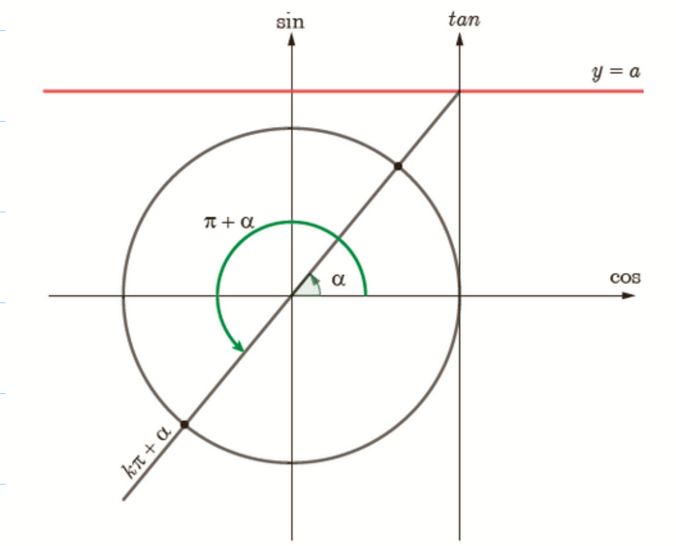
$$S = \frac{1}{2}\, a \times b \times \sin\hat{C}$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin\hat{C} \longrightarrow 3 = 6\sin\hat{C}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{\pi}{6} \ \checkmark \\ \hat{C} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \hat{C} = \frac{5\pi}{6} \ \checkmark \end{cases}$$

دو مثلث

روش شهودی حل معادله $\tan x = a$



روی محور tan مقدار a را مشخص می‌کنیم.

x هایی که امتدادشان به a برخورد می‌کند جواب معادله هستند.

برای حل معادله $\tan x = a$ ابتدا زاویه‌ای را می‌یابیم که تانژانت آن برابر a شود.

اگر آن زاویه α باشد، برای یافتن جواب‌های کلی این معادله داریم:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال: جواب‌های کلی معادلات زیر را بدست آورید.

1) $\tan x = -1 \Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$

2) $\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi$

3) $\tan x - 3\cot x = 0 \Rightarrow \frac{\tan x}{1} - \frac{3}{\tan x} = 0 \Rightarrow \frac{\tan^2 x - 3}{\tan x} = 0$

$$\Rightarrow \tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

نکته مهم: از آنجایی که معادلات تانژانتی محدودیت دامنه دارند، باید جواب به دست آمده را در معادله چک کرد. همچنین در حل معادلات مثلثاتی کسری و رادیکالی هم باید به دامنه توجه کرد.

مثال: جواب‌های معادله $2\cot 2x + \tan x = \cos^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

نکته: $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

$$\cot x - \tan x + \tan x = \cos^2 x \longrightarrow \cot x = \cos^2 x$$

$$\longrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{1} \longrightarrow \cos^2 x(\sin x) = \cos x$$

$$\longrightarrow \cos^2 x(\sin x) - \cos x = 0 \longrightarrow \cos x(\sin x \cos x - 1) = 0$$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$: در این زوایا $\tan$ تعریف نمی‌شود

$\sin x \cos x - 1 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \longrightarrow \sin 2x = 2$ جواب ندارد

$-1 \leq \sin x \leq 1$

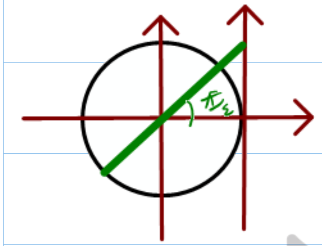
معادله جواب ندارد

مثال: مجموعه جواب های معادله $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$ را بیابید.

به توان ۲

$$\Rightarrow \sin x=\cos x \xRightarrow{\div \cos x} \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4} \to x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$



x های که در ربع سوم هستند نمی توانند جواب معادله باشند

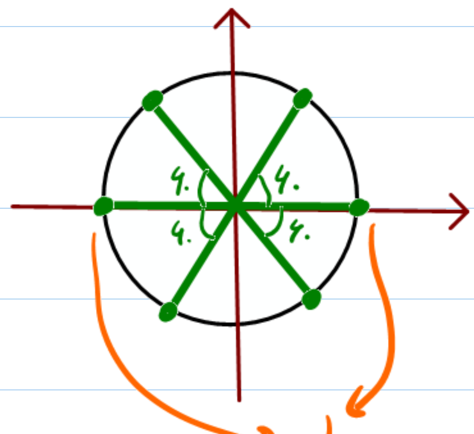
زیرا $\sin$, $\cos$ در ربع سوم منفی هستند و زیر رادیکال جفت ۲ نمی توانند منفی باشند:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$$

مثال: جواب کلی معادله $\frac{\tan 3x+\tan x}{\tan x}=1$ را بیابید.

$$\tan 3x+\tan x=\tan x \Rightarrow \tan 3x=0 \to 3x=k\pi$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}$$



$\tan x=0$

در $x=k\pi$ ، $\tan x$ که در مخرج است، صفر می شود

پس باید این ها را از جواب کلی کم کرد :

$$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

یادآوری :

سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان :

1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$

2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان (2α)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

تانژانت مجموع و تفاضل دو کمان

1) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

2) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

اثبات 1)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\ \boxed{}$$

رابطه ۲ به طریق مشابه ثابت می‌شود.

مثال: $\tan 105^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را حساب کنید.

$$\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\times\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

مثال: تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan 3x+\tan x+\sqrt{3}\tan 3x\tan x=\sqrt{3}$ در بازه $(0,\pi)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan 3x \tan x$$

$$\tan 3x + \tan x = \sqrt{3}(1 - \tan 3x \tan x)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan 3x + \tan x}{1 - \tan 3x \tan x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan(3x + x) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{12}$ ✓	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{4\pi}{12}$ ✓	$\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$ ✓	$\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{10\pi}{12}$

$\tan 3x = \tan 3\times\frac{10\pi}{12} = \tan 3\times\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{5\pi}{2}$ تعریف نشده

جواب گزینه ۳ است.

تانژانت دو برابر کمان:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

اثبات: $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\blacksquare$

مثال: اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2 x = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5} \rightarrow \tan^2 x = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$\underset{x\ \text{ربع اول}}{\overset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow}} \tan x = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2\times\frac{2}{\sqrt{5}}}{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$$

مثال: اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ را محاسبه کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$$

$$=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+\tan\alpha = 5-5\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4\times 9}{3\times 5} = \frac{12}{5}$$

مثال: معادله $\tan 2x = 3\tan x$ در بازه $(0, \frac{5\pi}{2})$ چند جواب دارد؟

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 3\tan x = 0 \Rightarrow \tan x\left(\frac{2}{1-\tan^2 x} - 3\right) = 0$$

$$\begin{cases} \tan x = 0 \longrightarrow x = \pi, 2\pi \\ \frac{2}{1-\tan^2 x} - 3 = 0 \longrightarrow \frac{2}{1-\tan^2 x} = 3 \Rightarrow \frac{1-\tan^2 x}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

⑥ ⑦

$$\Rightarrow 1-\tan^2 x = \frac{2}{3} \rightarrow 1-\frac{2}{3} = \tan^2 x \rightarrow \frac{1}{3} = \tan^2 x$$

$$\xrightarrow{\sqrt{}} \tan x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{6}$ ①	$\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ ② $\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ③	$2\pi+\frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$ ④ $2\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ ⑤

۷ جواب دارد.