تبدیل نمودار توابع

انتقال عمودی و افقی

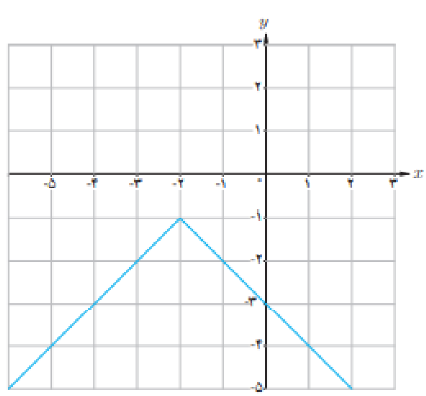
فرض کنید تابع $y=f\left(x\right)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y=f\left(x\right)+k$ باید تابع $y=f\left(x\right)$ را به اندازه k واحد به سمت بالا منتقل کنیم و برای رسم $y=f\left(x\right)-k$ باید تابع $y=f\left(x\right)$ را به اندازه k واحد به سمت پایین بیاوریم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی عرض نقاط تابع قبلی است و این تغییرات موافق با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f\left(x\right)+۲$ ما هم باید همان $+۲$ را روی عرض ها اعمال کنیم.

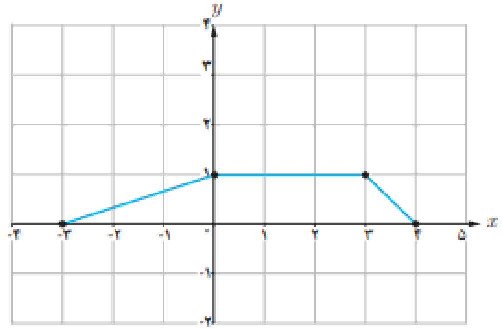
فرض کنید تابع $y=f\left(x\right)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y=f\left(x+k\right)$ باید تابع $y=f\left(x\right)$ را به اندازه k واحد به سمت چپ منتقل کنیم و برای رسم $y=f\left(x-k\right)$ باید تابع $y=f\left(x\right)$ را به اندازه k واحد به سمت راست بیاوریم. در واقع همیشه با y موافق هستیم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی طول نقاط تابع قبلی است و این تغییرات مخالف با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f\left(x+۲\right)$ ما باید -۲ را روی طول ها اعمال کنیم.در واقع همیشه با x لج میکنیم. ☺

📖**مثال –** نمودار تابع f داده شده است. از روی آن تابع $g\left(x\right)=f\left(x-۱\right)$ و $h\left(x\right)=f\left(x\right)-۱$ را رسم کنید.



مثال – از روی نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(x-۲)+۱$ را رسم کنید.



انبساط و انقباض عمودی

برای رسم تابع $y=kf(x)$ $(k>۰)$ از روی تابع $y=f(x)$ به این صورت عمل میکنیم که تمام y ها را k برابر می کنیم.

اگر $k>۱$ باشد این عمل را انبساط عمودی و اگر $۰<k<۱$ باشد، این کار را انقباض عمودی میگوییم.

کماکان روی حرف قبلی که در مورد y کاری که خواسته را انجام میدهیم ، هستیم.

انبساط و انقباض افقی

برای رسم تابع $y=f(kx)$ $(k>۰)$ از روی تابع $y=f(x)$ به این صورت عمل می کنیم که تمام کارهایی که انجام داده را برعکس عمل میکنیم. مثلا برای رسم تابع $y=f(۲x)$ تمام طولها را تقسیم بر ۲ میکنیم وبرای رسم $y=f\left(\frac{x}{۳}\right)$ باید تمام x ها را ضرب در ۳ کنیم.

یادتان هست که ما همیشه میگفتیم x موجودی لجباز است؟

اگر $k>۱$ باشد انقباض افقی و اگر $۰<k<۱$ باشد انبساط افقی میگوییم.

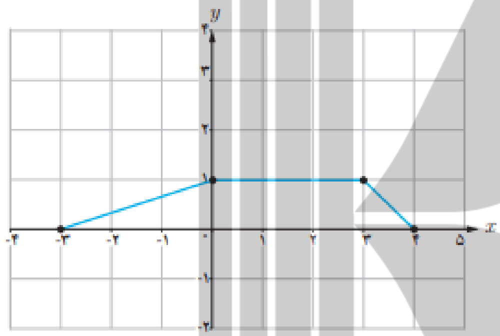
در واقع هر کاری که روی x انجام دهیم جزو انبساط یا انقباض افقی حساب میشود و هرکاری روی y انجام دهیم جزو انبساط و انقباض عمودی حساب میشود.

مثال – درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

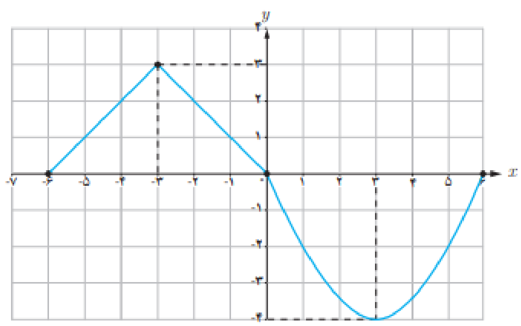
برد تابع با ضابطه $y=kf(x)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است. دی ۹۸ تجربی

دامنه تابع با ضابطه $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است.

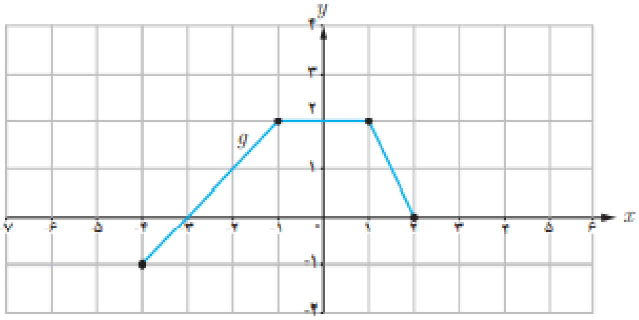
مثال – نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x)$ و $h(x)=f(\frac{۱}{۳}x)$ را رسم کنید.



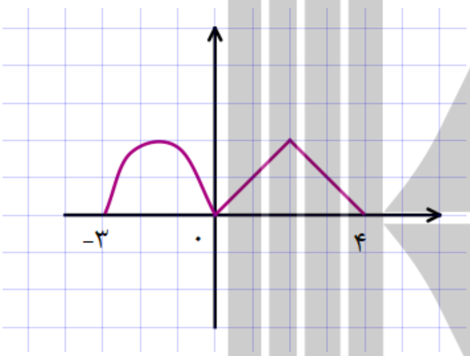
مثال – از روی نمودار تابع f که رسم شده است ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کنید سپس دامنه و برد تابع g را بیابید.



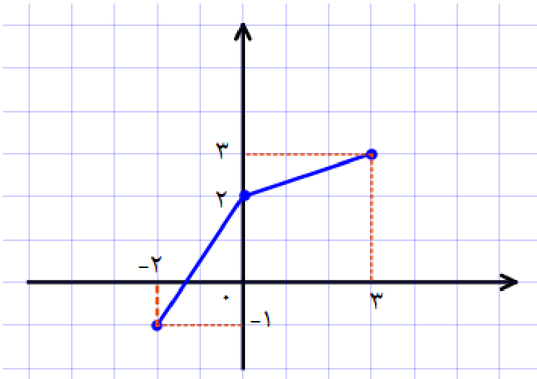
مثال – تابع g داده شده است. از روی آن نمودار $f(x) = ۲f(\frac{۱}{۲}x) + ۱$ را رسم کنید.



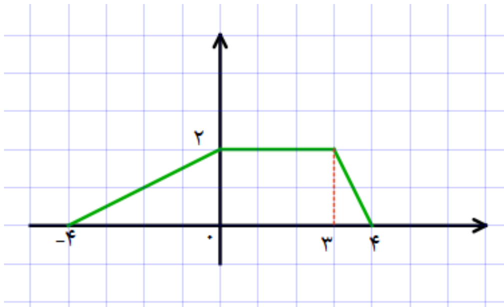
مثال – تابع f داده شده است. نمودار تابع $y = ۲f(x)$ را رسم کنید.



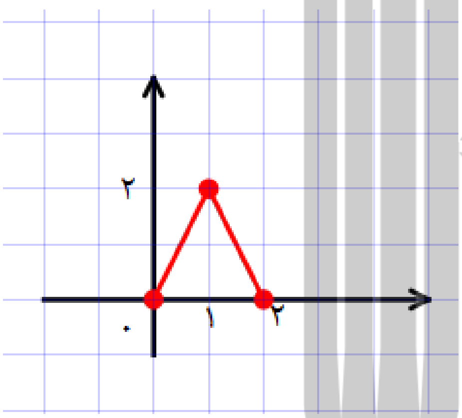
مثال – با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار تابع $y = f(\frac{x}{۲}) - ۲$ را رسم کنید.



مثال – با استفاده از نمودار تابع f ، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)-۲$ را رسم کنید.



مثال – با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ نمودار تابع $y=-۲f(\frac{۱}{۳}x)$ را رسم کنید.



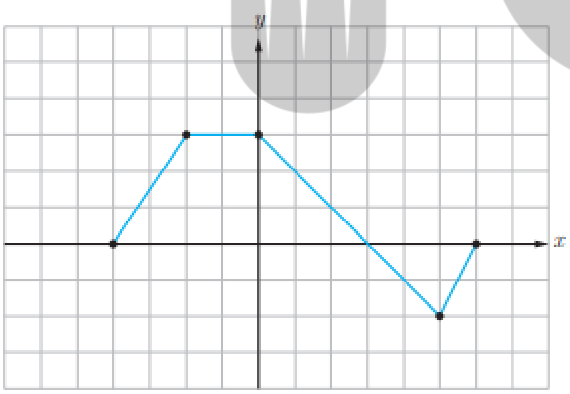
مثال – نمودار تابع $y=-\sin x$ و $y=\sin ۲x$ را از روی $y=\sin x$ رسم کنید. (با انتقال)

مثال- نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$ داده شده است. نمودارهای $g(x)=2f(x)+1$ و $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ را رسم کنید.

قرینه نسبت به محورهای مختصات

برای رسم تابع $y=f(-x)$ کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور y قرینه کنید. و برای رسم تابع $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع را نسبت به محور x ها قرینه کنید.

مثال- نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده است. از روی آن نمودار تابع های $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=-f(x)+2$ را بکشید.



نکته مهم در رسم توابع

برای رسم تابع $y=af\left(bx+c\right)+d$ باید مراحل زیر را به ترتیب انجام داد:

۱- تابع را در راستای محور طولها ابتدا c واحد برعکس عمل کنید. (یعنی اگر c مثبت بود عقب برویم و اگر c منفی بود جلو برویم.)

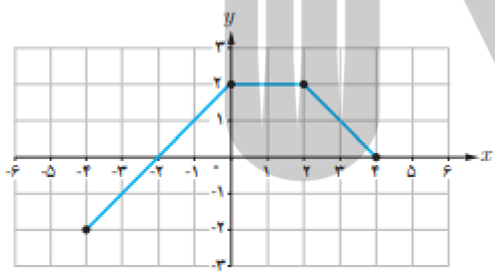
۲- طول نقاط را بر b تقسیم کنید.

تا اینجای کار هر کاری که روی x انجام شده بود را برعکس قوانین که ابتدا ضرب و تقسیم بود و سپس جمع و منها ، انجام دادیم. یعنی اول جمع و منها را اعمال کردیم و سپس ضرب و تقسیم.

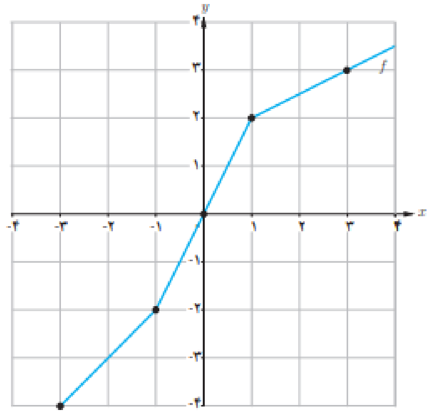
۳- عرض نقاط را در a ضرب کنید.

۴- تابع را در راستای محور عرضها d واحد بالا ببرید.

مثال- تابع داده شده است. با استفاده از آن تابع $y=۲f\left(۳x-۱\right)+۴$ را رسم کنید.



مثال- تابع $y=f\left(x\right)$ داده شده است. نمودار تابع $y=-f\left(2x-4\right)+3$ را رسم کنید.



مثال- نقطه $\left(2,1\right)$ روی نمودار تابع $y=f\left(x\right)$ داده شده است. نقطه متناظر آن روی نمودار منحنی $y=2f\left(2x\right)+1$ را محاسبه کنید.

مثال- اگر دامنه تابع $y=f\left(x\right)$ به صورت $\left(-1,4\right]$ باشد، دامنه تابع $y=f\left(2x-1\right)$ را بیابید.

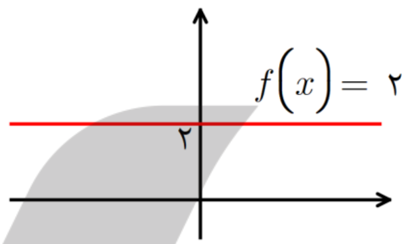
مثال- نقطه $\left(-3,4\right)$ روی منحنی $y=f\left(x-1\right)-4$ قرار دارد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y=f\left(x\right)$ را محاسبه کنید.

توابع چند جمله ای

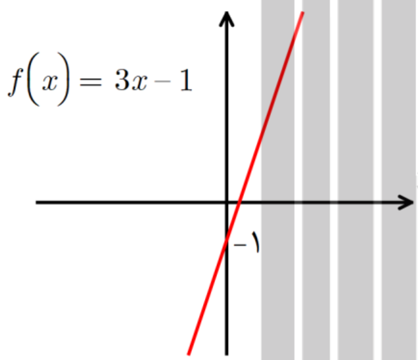
تعریف هر تابع به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ را که در آن ضرایب اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی باشد را یک **چند جمله ای** میگوییم. اگر $a_n \neq 0$ باشد چند جمله ای را درجه n می گوییم.

تابع هایی که تا به حال با آنها آشنا شده ایم:

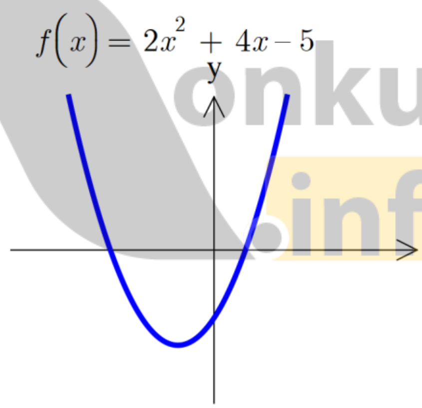
۱- درجه صفر (تابع ثابت)



۲- تابع درجه ۱ (خط راست)



۳- تابع درجه ۲ (سهمی)

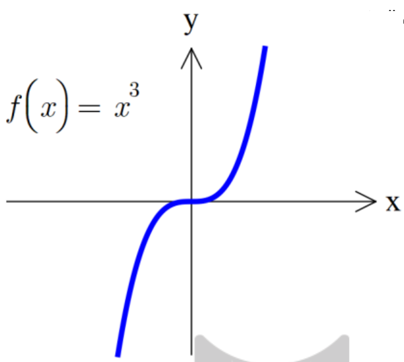


۴- تابع درجه ۳

امسال قصد داریم با تابع درجه ۳ آشنا شویم که انواع مختلف دارد. حالت کلی تابع درجه ۳ به صورت زیر است:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

اما در کتاب پیش رو تنها توابعی را رسم میکنیم که شکل پایه ی آنها $y=x^{۳}$ است سپس با انتقال هایی که آموخته ایم انواع دیگر آن را رسم می کنیم. پس در حالت کلی قادر به رسم توابعی به صورت $y=k(x-a)^{۳}+b$ هستیم. که در آن (a,b) در واقع راس جدید هس



مثال- تابع های خواسته شده را رسم کنید.

الف) $f(x)=(x-۱)^{۳}$

ب) $g(x)=۲x^{۳}+۱$

پ) $h(x)=-۲(x-۲)^{۳}$

ت) $k(x)=-x^{۳}-۲$

ث) $F(x)=-(x+۳)^{۳}$

ج) $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x$

چ) $g(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۴$

ح) $h(x)=x(x^{۲}-۶)+۴(۳x-۱)$

مثال- تابع $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=x^{3}$ را در بازه $(0,1)$ با دقت با هم مقایسه کنید.

مثال- نمودار تابع $f(x)=x^{3}-2$ چند بار خط $y=x$ را قطع میکند؟

مثال- دوتابع $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=x^{3}$ را رسم کنید و جواب نامعادله $f(x)>g(x)$ را بنویسید.

مثال- درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

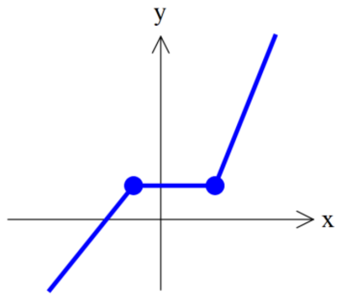
نمودار تابع $y=x^{3}$ در بازه $(0,1)$ پایین تر از نمودار تابع $y=x^{2}$ است.

مثال- درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. **تیر ۹۹**

نمودار تابع $y=x^{3}$ در بازه $[0,1]$ پایین تر از نمودار تابع $y=x^{2}$ است.

توابع صعودی و نزولی   توابع صعودی اکید و نزولی اکید

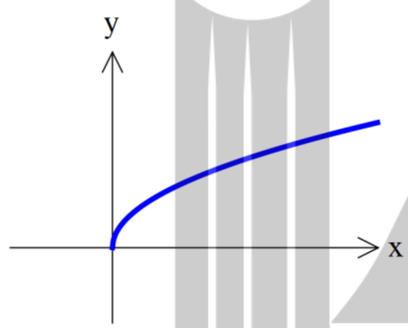
الف) تابع صعودی



اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$

داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$ تابع را صعودی میگوییم

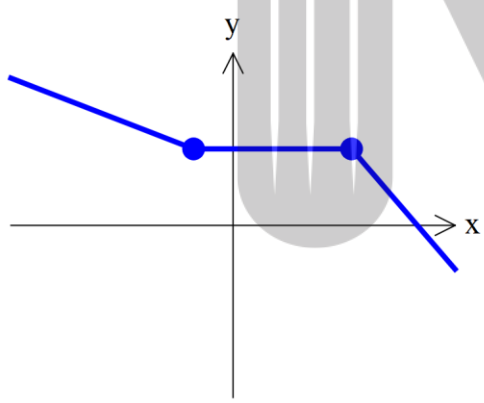
ب) تابع اکیداً صعودی



اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$

داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ تابع را اکیداً صعودی میگوییم.

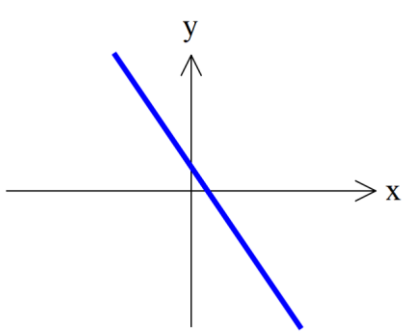
پ) تابع نزولی



برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$ داشته باشیم

$f(x_1) \ge f(x_2)$ تابع را نزولی میگوییم.

ت) تابع اکیداً نزولی



برای هر دو نقطه x_1, x_2 از بازه D که $x_1 < x_2$

داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ تابع را اکیداًنزولی میگوییم

نکته: تابعی که در کل یک بازه صعودی یا نزولی باشد را **یکنوا** میگوییم و تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد را **اکیداًیکنوا** می گوییم.

مثال- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود. دی۹۷ ، خرداد۹۹

ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه خود اکیداً یکنوا است. تیر۹۸

پ) تابع $f(x)=-x^{۳}+۲$ در دامنه تعریفش صعودی است. شهریور ۹۸

مثال- در جای خالی عدد یا عبارت مناسب قرار دهید.

الف) تابع $y=(x+۱)^{۳}$ در دامنه تعریف خود .... (صعودی ، نزولی) است. خرداد۹۸

ب) تابع $y=x^{۲}|x|$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است.حداکثر مقدار a برابر .... است. تیر۹۸

پ) تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع .... نامیده میشود. دی ۹۸

ت) اگر تابع $f(x)=ax+b$ هم صعودی هم نزولی باشد مقدار aبرابر است با: ....

ج) تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ همواره تابعی .... و تابع $y=\log_{۲}^{x}$ همواره تابعی .... است.(صعودی- نزولی)

چ) اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد.نمودار f محور x ها را حداکثر در ...... نقطه قطع می کند.

مثال- تابع $f(x)=۲x^۲+۸x$ روی بازه $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. کمترین مقدار a را بیابید.

مثال- تابع $f(x)=\left(k^۲-۱\right)^x$ نزولی است. حدود k را بیابید.

مثال- نمودار تابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی ، نزولی و ثابت است؟

$$f(x)=\begin{cases}-۲x+۱ & x<۲\\ -۱ & -۲<x<۱\\ ۲x-۳ & x\geq ۱\end{cases}$$

مثال- حدود k را طوری بیابید که تابع $f(x)=kx^۲+۴x-۲$ در بازه ی $[۱,+\infty)$ ، نزولی باشد.

مثال- تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}-۱ & x>۱ \\ -۳x+۲ & x\le ۱ \end{cases}$ رارسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است.

مثال- نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. نمودار هر کدام را رسم کنید.

الف) $f(x)=-۲-۵x$ ب) $g(x)=x^{۲}-۶x+۱$ پ) $h(x)=\sqrt{۵}$

مثال- هر گاه تابع $f=\{(۲,-۳),(-۱,۵),(۰,k),(۱,۲)\}$ نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

مثال- نموداری رسم کنید که تمام ویژگی های زیر را داشته باشد.

الف) $f(۲)=۱$

ب) روی اعداد نامنفی ثابت باشد.

پ) روی بازه $[-۴,۰]$ اکیداً صعودی باشد.

ت) روی بازه $(-\infty$ و $-۴]$ اکیداً نزولی باشد.

مثال- نموداری رسم کنید که تمام ویژگی های زیر را داشته باشد.

الف) $f(-۲)=۳$

ب) روی اعداد منفی ثابت باشد.

پ) روی بازه $[۰,۳]$ اکیداً صعودی باشد.

ت) روی بازه $(۳,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد.

مثال- تابع $f(x)=x^{۲}-۴$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی است؟

مثال- تابع $f(x)=|x|-۳$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی نزولی است؟

تعریف

اگر تابع f صعودی باشد و $f(a)<f(b)$ میتوان نتیجه گرفت $a<b$

اگر تابع f نزولی باشد و $f(a)<f(b)$ میتوان نتیجه گرفت $a>b$

مثال- تابع f نزولی است و میدانیم $f(۳x-۲)<f(۴-x)$ حدود x را بیابید.

مثال- در نامعادله روبرو حدود x را بیابید. $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x+۳} \le ۲^{-۴x+۵}$

مثال- اگر $\frac{۱}{۶۴} \le (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$ حدود x کدام است. دی۹۸

مثال- نامعادله $\log(۵x-۱) \le \log(۲-۳x)$ را حل کرده و جواب را روی محور نشان دهید.

مثال- نامعادله روبرورا حل کنید. شهریور۹۸ $\log(x+۱) \le \log(۲x-۳)$

مثال- نامعادله را حل کنید $\log_{۰/۵}^{\frac{۲x+۱}{۳}} \le \log_{۰/۵}^{\frac{۴x-۱}{۲}}$

مثال- یکنوایی توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = \log_{۲} x$

ب) $y = \log_{۳}(x + ۱)$

مثال- اگر تابع در بازه ای اکیداً صعودی باشد آیا صعودی هم هست؟

اگر تابعی در بازه ای صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی هم هست؟

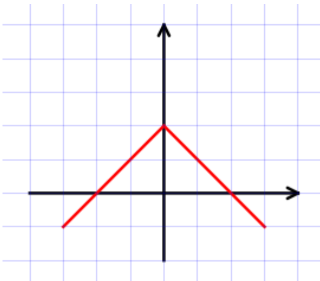
رسم توابع قدرمطلق $|f(x)|$

برای رسم این نوع توابع باید ابتدا تابع داخل قدرمطلق را رسم کنیم.(هنگام رسم محل تلاقی با محور طولها و عرضها خیلی مهم و تاثیر گذار است.)

سپس قرینه ی قسمتی از منحنی که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها رسم می کنیم و سپس قسمت های پایین را پاک می کنیم.

مثال- تابع $f(x) = |x^{۲} - ۴|$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی است؟

مثال- نمودار تابع f داده شده است. از روی آن نمودار $y=-|f(x)|$ را بکشید.



مثال- نمودار تابع را رسم کنید. (مرحله به مرحله) $f(x)=\left|\sqrt{x+۲}-۱\right|$

مثال- تابع $f(x)=-|x+۲|+۴$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی تابع را در $(۳ و +\infty)$ مشخص کنید.

نکته: اگر تابعی در یک بازه اکیدا یکنوا باشد وارون پذیر است.

مثال- تابع $y=x^۳$ را رسم کنید و وارون پذیری آن را بررسی کرده و وارون آن را رسم کنید.

مثال- تابع $y=(x-1)^3+2$ را در بازه $[0,4]$ رسم کنید و در صورت وارون پذیر بودن نمودارو ضابطه f^{-1} را مشخص کنید.

مثال- وارون تابع $f(x)=-(x+1)^3+2$ را در صورت وجود یافته و نمودار f,f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنید.

بخش پذیری چند جمله ای ها

فرض کنید چند جمله ای $f(x)$ داده شده است و باقیمانده تقسیم آن بر $x-a$ را میخواهیم.

$$x-a=0 \rightarrow x=a \rightarrow \text{باقیمانده } R=f(a)$$

یعنی اگر ریشه مقسوم علیه را در چند جمله ای داده شده قرار دهیم باقیمانده به دست می آید.

نتیجه: اگر در تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ داشته باشیم $f(a)=0$ انگاه می گوییم چند جمله ای بر $x-a$ بخشپذیر است.

مثال: باقیمانده تقسیم چند جمله ای $f\left(x\right)=-۲x^{۲}+۴x-۵$ را بر $x-۱$ بیابید.

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دی۹۸

چند جمله ای $f\left(x\right)=۲x^{۳}+۵x^{۲}-۳x-۱۰$ بر دو جمله ای $x+۲$ بخش پذیر است.

مثال: چند جمله ای $f\left(x\right)=۳x^{۳}+۵x^{۲}-۸$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $f\left(x\right)$ بر $\left(x-۱\right)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم ، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

پ) $f\left(x\right)$ رابه صورت حاصل ضرب عامل هایش بنویسید.

مثال: آیا چند جمله ای $x^{۳}+۳x^{۲}-۴x-۶$ بر $x+۱$ بخش پذیر است؟

مثال: باقیمانده تقسیم $p\left(x\right)=x^{۴}-kx^{۳}+۲x^{۲}+۳$ بر $x-۲$ برابر -۵ است مقدار k را بیابید.

مثال: اگر باقیمانده تقسیم $p(x+1)=4x^3-mx^2-3x+2$ بر $x+1$ برابر ۴ باشد، مقدار m چقدر است؟

مثال- اگر $f(x)=x^2+ax-3$ بر $x+1$ بخشپذیر باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را بیابید. خرداد۹۸

مثال: در تقسیم چند جمله ای $x^4-3x^3+4x^2+1$ بر $x-1$ خارج قسمت $q(x)$ و باقیمانده برابر ۳ است. باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x+2$ چقدر است؟

مثال- مقادیر b,a را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x)=x^3+ax^2+b$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ باشد. دی۹۸

مثال: چند جمله ای $p(x)=ax^{۳}+x^{۲}-x+b$ بر $x^{۲}-۳x+۲$ بخشپذیر است.

مقادیر b,a را محاسبه کنید.

مثال- مقادیر را چنان بیابید که چند جمله ای $x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش پذیر باشد. تیر۹۹ و شهریور۹۸

تجزیه دوجمله ای ها به صورت $x^{n}\pm a^{n}$

در تجزیه باید ابتدا دقت کنیم که آیا عبارت داده شده قابل تجزیه هست یا خیر. یعنی اول باقیمانده را حساب کنیم. مثلا اگر از ما خواسته باشند عبارت $x^{۴}+۱$ را بر حسب عامل $x-۱$ تجزیه کنید در جواب باید بگوییم عبارت داده شده بر $x-۱$ بخش پذیر نیست پس قابل تجزیه کردن هم نیست.

الف) اگر n زوج باشد: $x^{n}+a^{n}$ قابل تجزیه نیست اما:

$$x^{n}-a^{n}=(x-a)\left(x^{n-۱}+a^{۱}x^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۳}+....+a^{n-۱}\right)$$

$$x^{n}-a^{n}=(x+a)\left(x^{n-۱}-a^{۱}x^{n-۲}+a^{۲}x^{n-۳}-....-a^{n-۱}\right)$$

ب) اگر n فرد باشد عبارت $x^{n}+a^{n}$ بر $x-a$ بخش پذیر نیست اما:

$$x^n + a^n = (x+a)\left(x^{n-1} - a^1 x^{n-2} + a^2 x^{n-3} - \dots - a^{n-1}\right)$$

تجزیهٔ $x^n - a^n$:

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + a^1 x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \dots + a^{n-1}\right)$$

$$x^n - a^n = (x+a)\left(x^{n-1} - a^1 x^{n-2} + a^2 x^{n-3} - \dots - a^{n-1}\right)$$

حال سوال اصلی اینجاست چگونه این فرمول ها را حفظ کنیم. ابتدا بررسی کنید قابل تجزیه هست یا خیر. در گام دوم اگر علامت بین در $x^n \pm a^n$ با علامت بین در $x \pm a$ هم علامت باشد پرانتز دوم تمام علامت ها مثبت ها در غیر این صورت یکی در میان مثبت و منفی است.

مثال- عبارت $x^۴ - ۱$ را بر حسب $x + ۱$ بنویسید.

مثال- عبارت $x^۶ - ۱$ را بر حسب عامل $x + ۱$ تجزیه کنید. خرداد۹۸

مثال- به کمک اتحادها ساده کنید. $\dfrac{(x^۵ + ۱)(x - ۱)}{x^۳ - x}$

مثال- ساده شده $A = \dfrac{۱ + x + x^۲ + x^۳ + x^۴}{۲}$ به ازای $x = \sqrt[۵]{۳}$ چند برابر $\dfrac{۲}{۱ - \sqrt[۵]{۳}}$ است؟