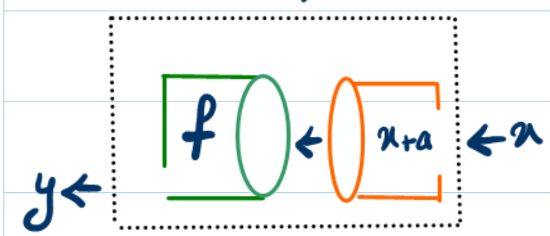
در این درس می‌خواهیم عددی مانند a را در دامنه و برد تابع f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

الف) انتقال افقی و عمودی:

۱- $f(x\pm a)$: برای رسم نمودار $y=f(x+a)$ نمودار f را روی محور xها a واحد سمت چپ و برای رسم نمودار $y=f(x-a)$ نمودار f را روی محور xها a واحد سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه (x_0-a, y_0) از نمودار تابع $y=f(x+a)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

$f(x+a)$



دامنه تابع $f(x+a)$، xهایی هستند که باعث می‌شوند عبارت $(x+a)$ اجازه ورود به f را پیدا کند.

$$h(x)=f(x+a) \Rightarrow h(x_0-a)=f(x_0-a+a)=f(x_0)=y_0$$

۲- $f(x)\pm a$: برای رسم نمودار $y=f(x)+a$ نمودار f را روی محور yها a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y=f(x)-a$ نمودار

f را روی محور y ها a واحد به سمت پایین منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطهٔ (x_0, y_0+a) از نمودار تابع $y=f(x)+a$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

ب) انقباض و انبساط افقی و عمودی:

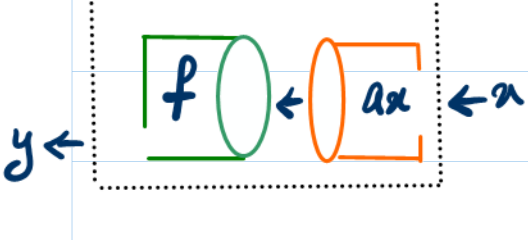
۱- $f(ax)$: اگر $0<a<1$ باشد نمودار f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می‌کنیم. (انبساط افقی)

اگر $a>1$ باشد نمودار f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می‌کنیم. (انقباض افقی)

همچنین نقطهٔ $(\frac{x_0}{a}, y_0)$ از نمودار تابع $y=f(ax)$ متناظر با نقطهٔ (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

دامنه تابع $f(ax)$، x هایی هستند که باعث می‌شوند عبارت (ax) اجازه ورود به f را پیدا کند.

$f(ax)$



$$h(x)=f(ax) \Rightarrow h(\frac{x_0}{a}) = f(a\times\frac{x_0}{a}) = f(x_0) = y_0$$

نکته: در حالت انبساط و انقباض افقی x های طول نقاط f بر a تقسیم می‌شوند.

۲- $af(x)$: اگر $0<a<1$ باشد نمودار f را در راستای محور yها با ضریب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $a>1$ باشد نمودار f را در راستای محور yها با ضریب a منبسط می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (x_0, ay_0) از نمودار تابع $y=af(x)$ متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y=f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y یا عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پ) انعکاس:

۱- $-f(x)$: نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض‌ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض لازم را انجام می‌دهیم، سپس انعکاس را اعمال می‌کنیم.

ت) ترکیبی :

اگر بخواهیم نمودار تابعی به صورت $y = af(bx+c)+d$ را رسم کنیم ،

اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم :

$$c \to b \to a \to d$$

یعنی اول داخل پرانتز تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پرانتز

تغییرات روی y . دقت کنید باز هم داخل پرانتز اعمال عکس حالت عادی رخ

می‌شوند یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

در حالی که در بیرون پرانتز اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق

بالاتر بود)

ث) تأثیر قدر مطلق :

۱- $|f|$: نمودار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور yها است حذف می‌کنیم و قرینه قسمتی را که سمت راست محور y است نسبت به محور y رسم می‌کنیم.

نکته : برای رسم نمودارهای تبدیل یافته کافی است تأثیرات را روی چند نقطه (نقاط شکستگی یا نقاط ابتدا و انتها یا تغییر نما یا محل برخورد با محورها) اعمال کنید و با همان چند نقطه نمودار را رسم کنید.

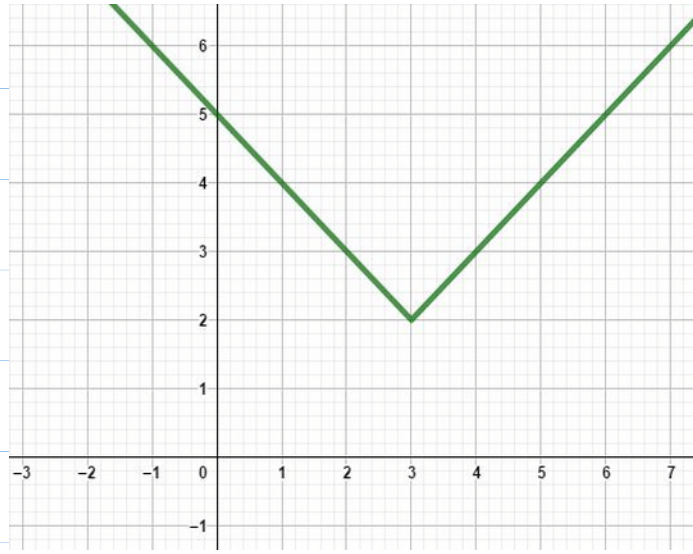
مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = |3-x| + 2$ یادآوری $|A| = |-A|$

$f(x) = |-(3-x)| + 2 = |x-3| + 2$

انتقال افقی ۳ واحد سمت راست

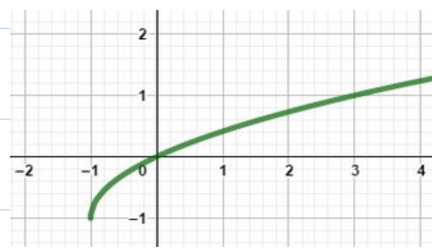
انتقال عمودی ۲ واحد سمت بالا



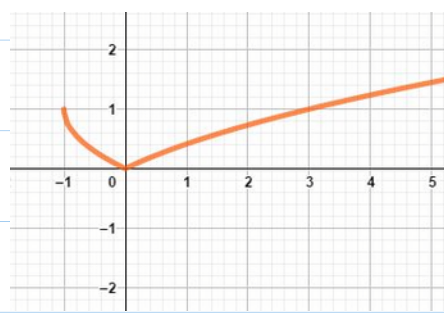
ب) $y = -|\sqrt{x+1} - 1|$

انتقال افقی یک واحد به سمت چپ و انتقال عمودی یک واحد به سمت پایین

$y = \sqrt{x+1} - 1$

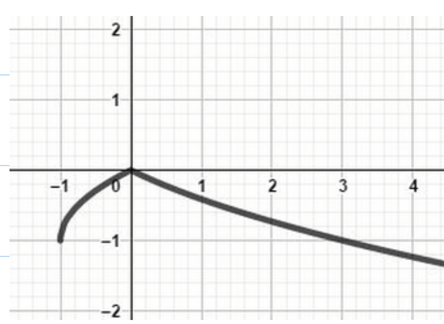


$y = |\sqrt{x+1} - 1|$



تاثیر قدر مطلق:
قسمتی که زیر محور x هاست
نسبت به محور x ها قرینه می کنیم

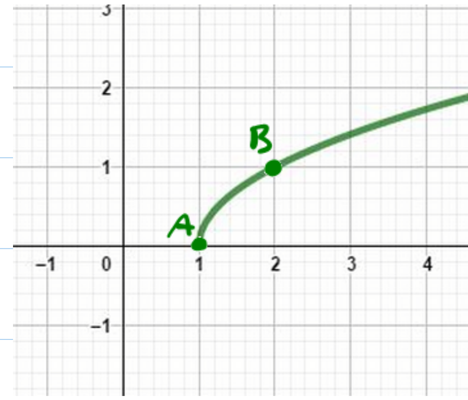
$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$



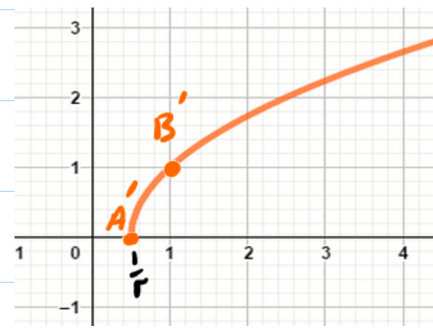
انعکاس:
نمودار را نسبت به محور x ها
قرینه می کنیم.

ب) $y=\sqrt{2x-1}+1$

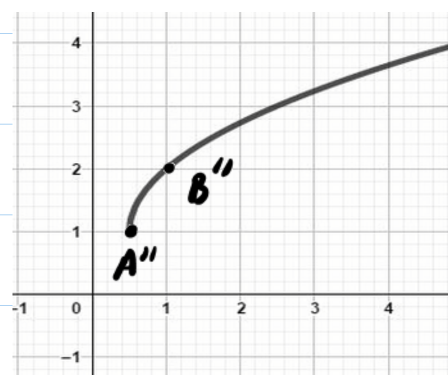
$y=\sqrt{x-1}$ انتقال افقی یک واحد به راست



$y=\sqrt{2x-1}$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$

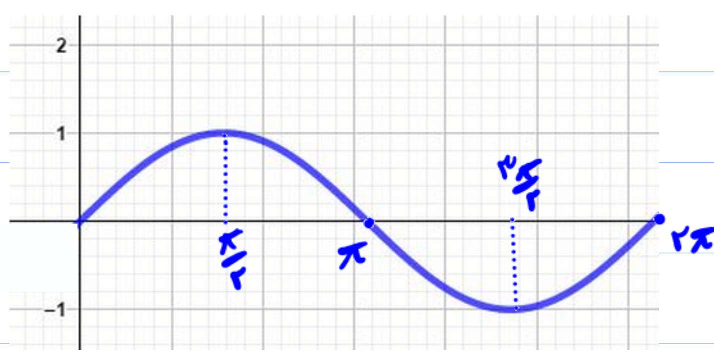


$y=\sqrt{2x-1}+1$ انتقال عمودی یک واحد به بالا

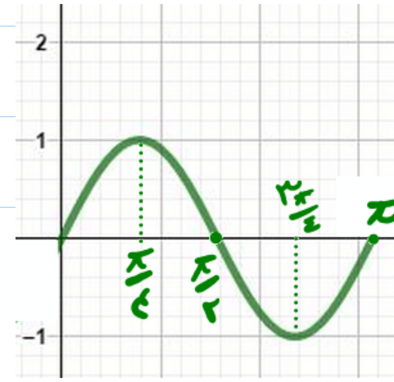


ج) $y=|2\sin 2x-1|$ $[0,\pi]$

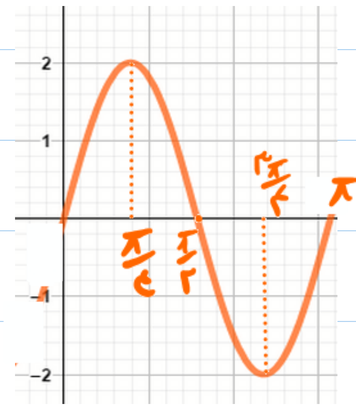
$y=\sin x$



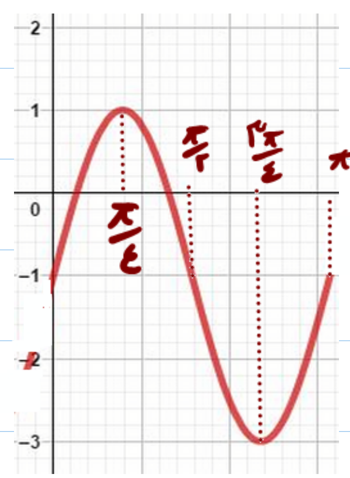
$y = \sin 2x$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$



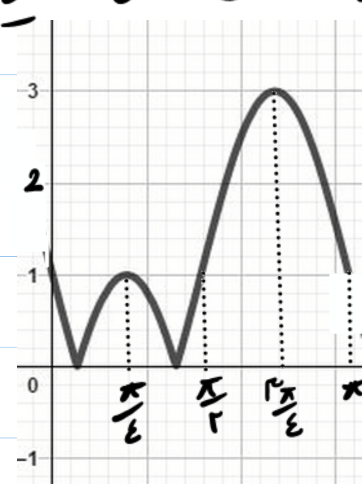
$y = 2\sin 2x$ انبساط عمودی با ضریب 2



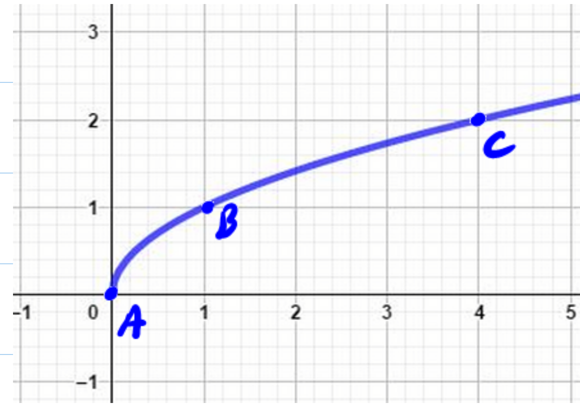
$y = 2\sin 2x - 1$ انتقال عمودی یک واحد پایین



$y = |2\sin 2x - 1|$ تأثیر قدر مطلق: قسمتی که زیر محور xها است قرینه می‌کنیم.

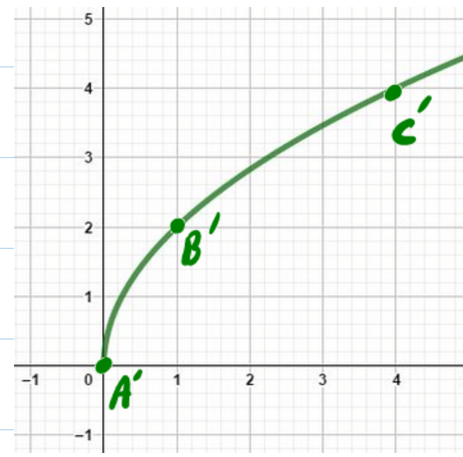


ث) $f(x) = -2\sqrt{x} + 1$

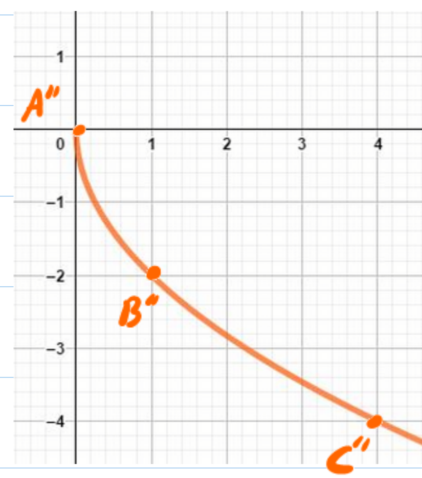


$y = \sqrt{x}$

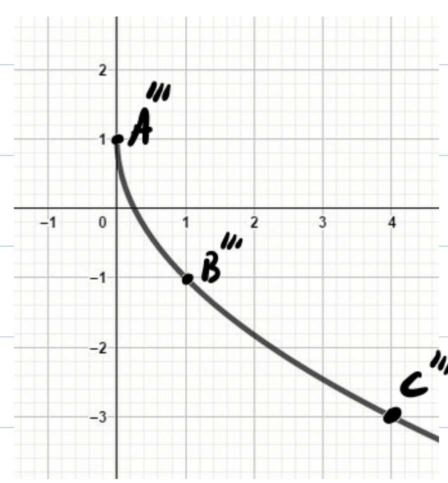
$y = 2\sqrt{x}$ انبساط عمودی با ضریب ۲



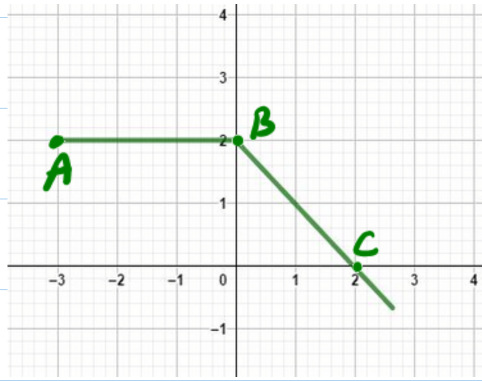
$y = -2\sqrt{x}$ انعکاس نسبت به محور xها



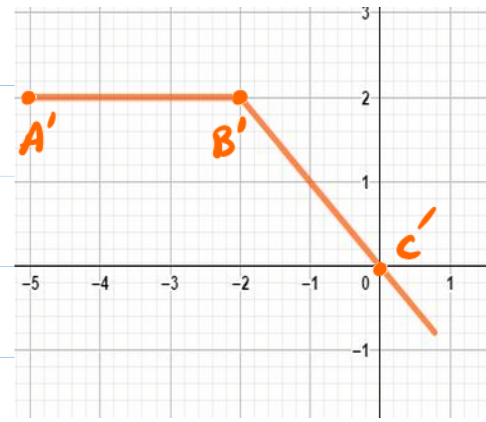
$f(x) = -2\sqrt{x} + 1$ انتقال عمودی یک واحد بالا



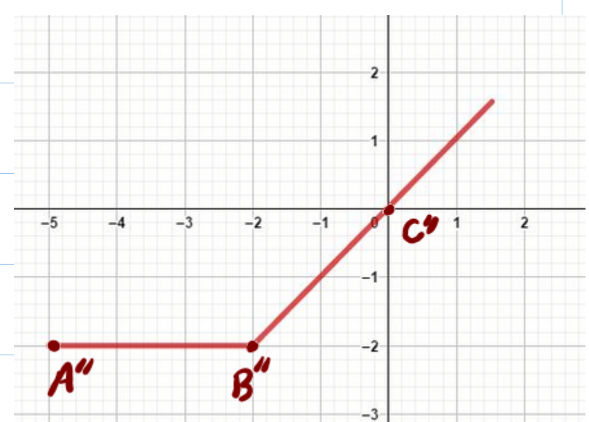
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=1-f(x+2)$ را رسم کنید.



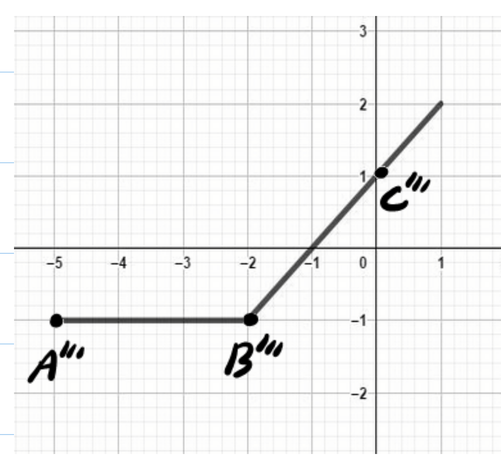
$y=f(x+2)$ انتقال افقی ۲ واحد چپ



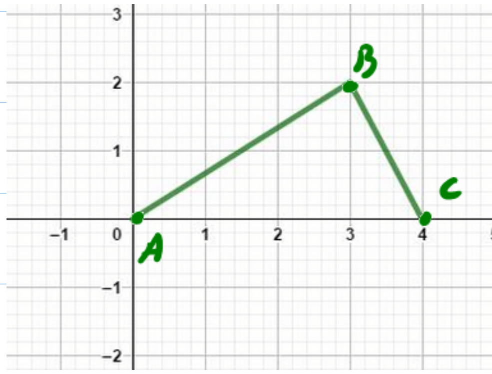
$y=-f(x+2)$ انعکاس نسبت به محور xها

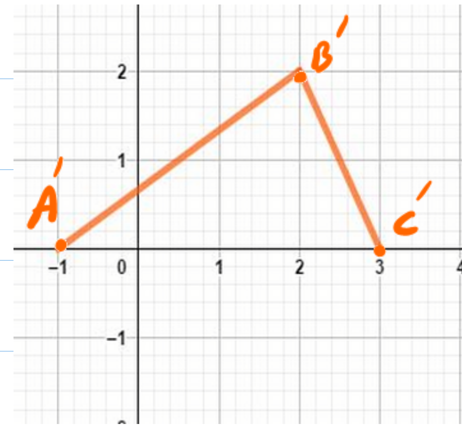


$y=1-f(x+2)$ انتقال عمودی یک واحد بالا



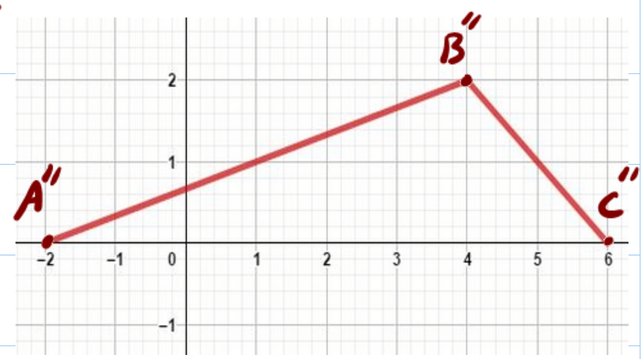
مثال : نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y=3f(\frac{1}{2}x+1)$ را رسم کنید.



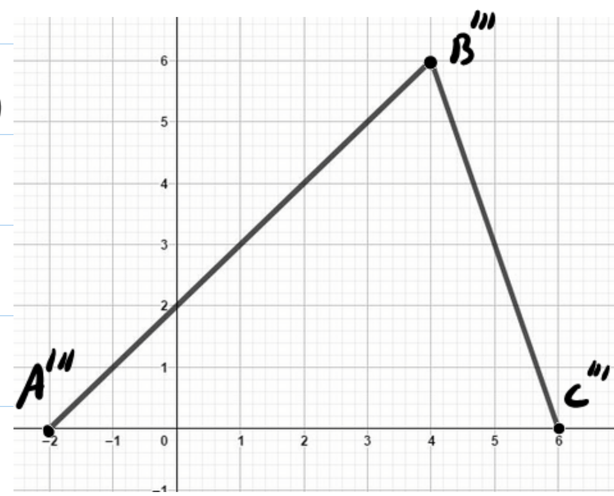


$y=f(x+1)$ انتقال افقی یک واحد به چپ

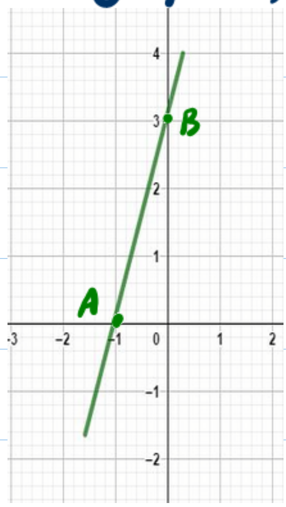
$y=f(\frac{1}{2}x+1)$ انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

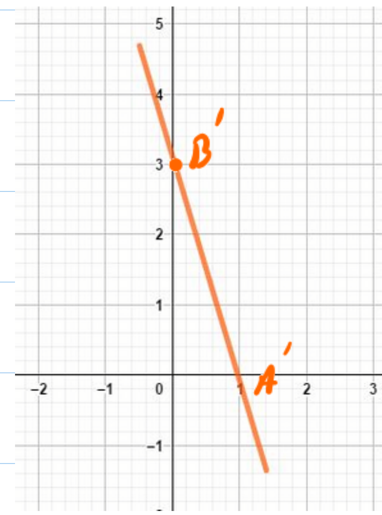


$y=3f(\frac{1}{2}x+1)$ انبساط عمودی با ضریب ۳

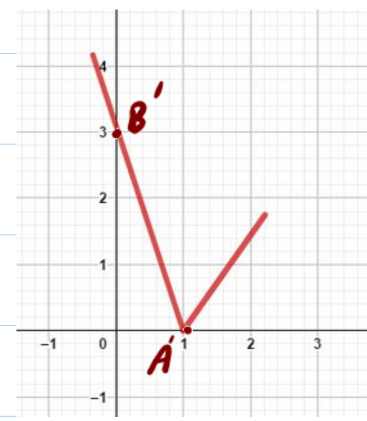


مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=|f(-x)|-2$ را رسم کنید.

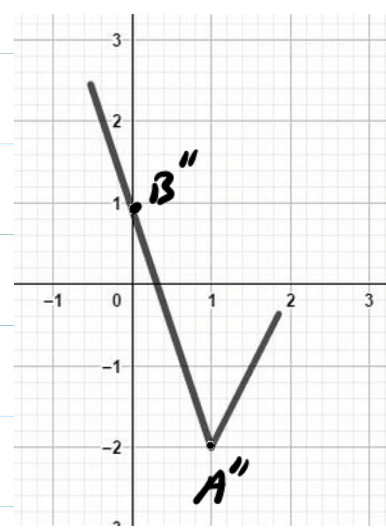




$y=f(-x)$ انعکاس: قرینه نسبت به محور y ها

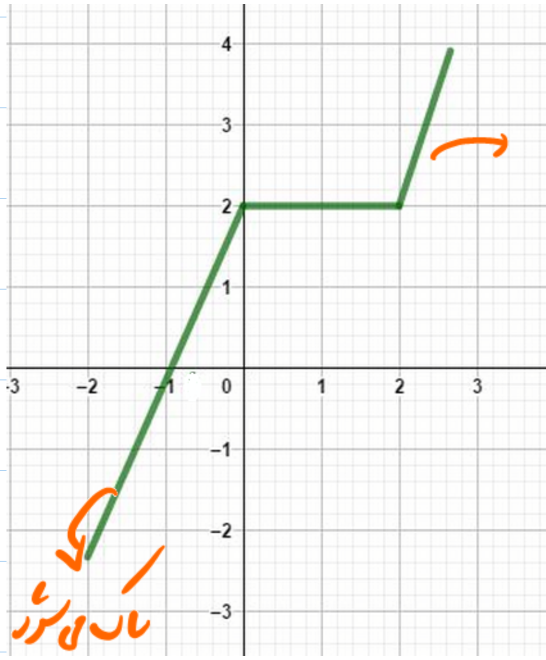


$y=|f(-x)|$ تأثیر قدر مطلق: قسمت‌هایی که زیر محور x است قرینه می‌شود.

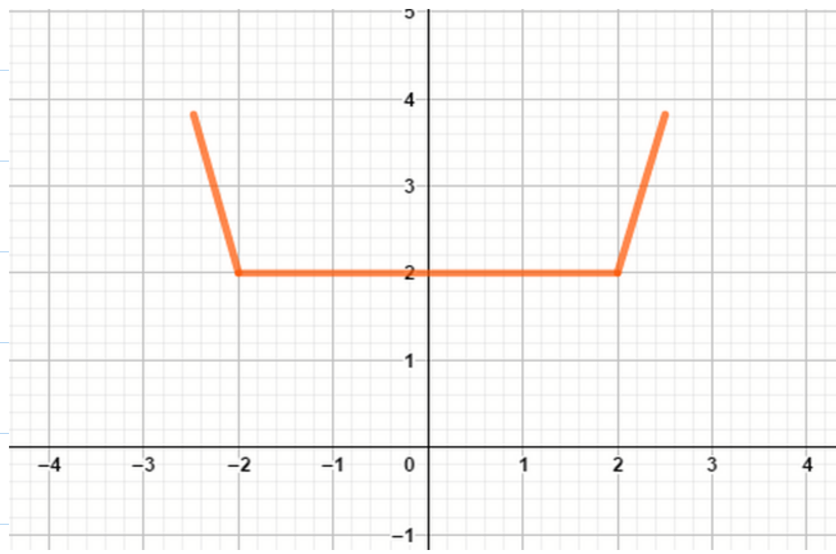


$y=|f(-x)|-2$ انتقال عمودی ۲ واحد پایین

مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



$y=f(|x|)$



مثال: طول نقاط نمودار تابع f را دو برابر می‌کنیم. پس نمودار بدست آمده را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن رسم شده را بیابید.

$f(\frac{x}{2}) \longrightarrow f(\frac{x+1}{2}) \Rightarrow y=f(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$

مثال: نمودار تابع $g(x)=2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

سپس طول و عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن بدست

آمده است را بنویسید.

$$2f(3(x-1))=2f(3x-3)$$

$$\to 2f(3x-3)+2$$

$$\to \underset{\text{عرض‌ها}}{\frac{1}{2}}\left(2f(3\underset{\text{طول‌ها}}{(2x)}-3)+2\right)=f(6x-3)+1$$

$$\Rightarrow h(x)=f(6x-3)+1$$

مثال: منحنی تابع $y=|x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قرینه شکل حاصل را نسبت

به محور yها تعیین می‌کنیم و با ضریب $\frac{1}{2}$ انبساط عمودی می‌دهیم. سپس قرینه آن را نسبت

به محور xها رسم می‌کنیم، معادله منحنی جدید را بدست آورید.

$f(x+3)$: $y=|x+3-2|=|x+1|$

$f(-x+2)\ :\quad y=|-x+1|$

$2f(-x+3)\ :\quad y=2|-x+1|$

$-2f(-x+4)\ :\quad y=-2|-x+1|=-2|1-x|$

مثال: با اعمال موارد کدام گزینه، نمودار $y=f(x)$ به نمودار تابع $y=-\frac{1}{4}(1-x)$ تبدیل می‌گردد؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

۲) ✓ انتقال یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

۳) انتقال یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای افقی

۴) انتقال یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور xها و yها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای عمودی

انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{4}$

قرینه نسبت به محور yها

$$y=-\frac{1}{4}(1-x)$$

قرینه نسبت به محور xها

انتقال افقی یک واحد چپ

گزینه ۲

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

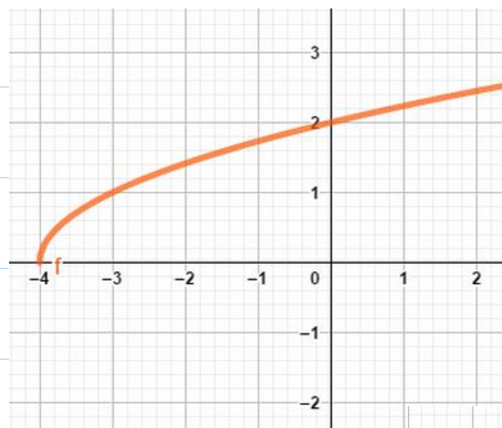
۱) $x=1$ ۲) $x=1/5$ ۳) $x=2$ ✓ ۴) $x=2/5$

$f(-x)$: $y=\sqrt{-x}$

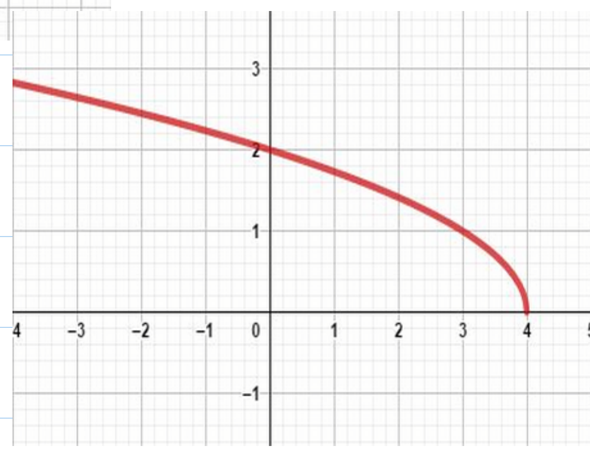
$f(-(x-4))$: $y=\sqrt{-(x-4)}=\sqrt{-x+4}=\sqrt{4-x}$

$y=\sqrt{4+x}$

۴ واحد به چپ

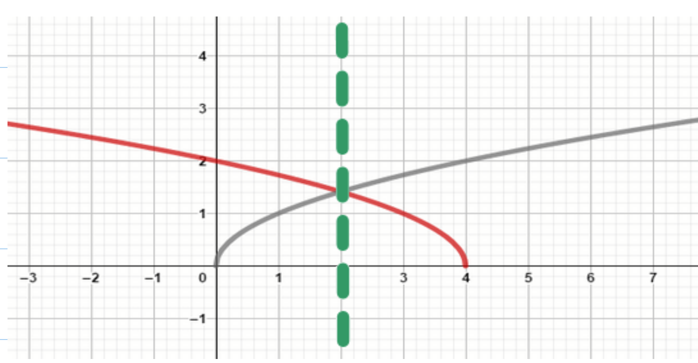


$y=\sqrt{4-x}$ انعکاس: قرینه نسبت به محورها



$x=2$

$y=\sqrt{4-x}$



$y=\sqrt{x}$

گزینه ۳

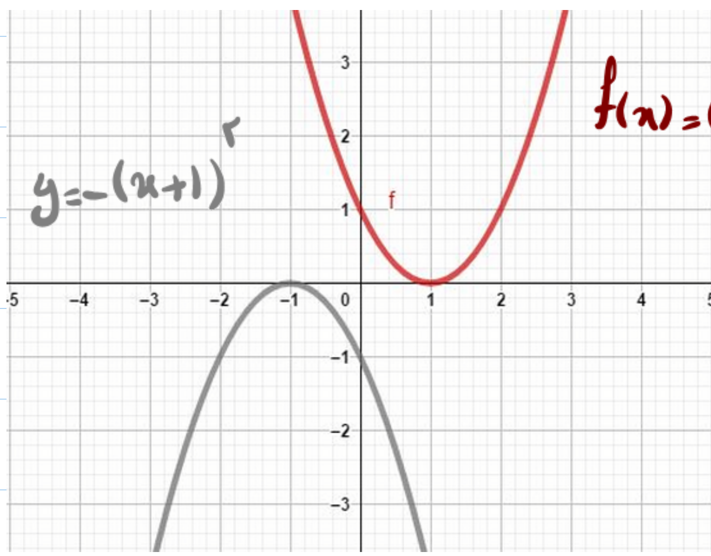
مثال: کنکور ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) ۲ ، ۰ ۲) ۱ ، ۱− ۳) ۲ ، ۱− ۴) ۱ ، ۲−

$$\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases} \qquad -y=(-x-1)^2=(x+1)^2$$

$$\Rightarrow y=-(x+1)^2 \xrightarrow{+4} g(x)=-(x+1)^2+4$$



$f(x)=(x-1)^2$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow (x-1)^2=-(x+1)^2+4 \rightarrow (x-1)^2+(x+1)^2=4$$

روش تشریحی $\Rightarrow x^2-\cancel{2x}+1+x^2+\cancel{2x}+1=4 \rightarrow 2x^2+2=4 \rightarrow 2x^2=2$

$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ طول نقاط تلاقی

گزینه ۲ :

مثال: کنکور تجربی ۹۹

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

$g(x)=\sqrt{x-۱۲}+۲$

$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x-۱۲}+۲ \xrightarrow[۲]{\text{به توان}} \cancel{x}=(\cancel{x}-۱۲)+۴\sqrt{x-۱۲}+۴$

$۸=۴\sqrt{x-۱۲} \xrightarrow{\div ۴} ۲=\sqrt{x-۱۲} \xrightarrow[۲]{\text{به توان}} ۴=x-۱۲ \Rightarrow x=۱۶$

$f(۱۶)=\sqrt{۱۶}=۴$ نقطهٔ برخورد $A(۱۶,۴)$

$OA=\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵۶+۱۶}=\sqrt{۲۷۲}=\sqrt{۱۶\times۱۷}=۴\sqrt{۱۷}$

گزینهٔ ۳

مثال: کنکور تجربی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x\,;(x>۱)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

قرینه نسبت به محور xها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

انتقال عمودی ۱۶ واحد به بالا : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \overset{\div 2}{\Rightarrow} (x-1)^2 = 9$$

$$\overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \rightarrow x = 4 \\ x-1 = -3 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$ غ‌ق‌ق

$f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8$ $\quad$ $A(4,8)$ $\quad$ نقطه برخورد

$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$ $\quad$ گزینه ۱

نکته: گاهی اوقات مختصات نقطه‌ای روی $f(x)$ داده می‌شود و مختصات نقطه متناظر با آن

در $a\,f(bx+c)+d$ خواسته می‌شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم نمودار

رنیم می‌داریم روی نقطه داده شده اعمال می‌کنیم. همچنین برای تأثیر c، d را می‌گذاریم، معکوس

$y=bx+c$ را بدست آوریم.

مثال: نقطه $A(-1,2)$ روی نمودار $y=f(x)$ است. نقطه متناظر با آن روی نمودار

$y=4f(2x-5)-7$ ، $A'(a,b)$ است. $a-b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 3 ✓ ۳) 2 ۴) 4

$$t=2x-5 \Rightarrow t+5=2x \xrightarrow{\div 2} x=\frac{t+5}{2}=\frac{-1+5}{2}=2=a$$

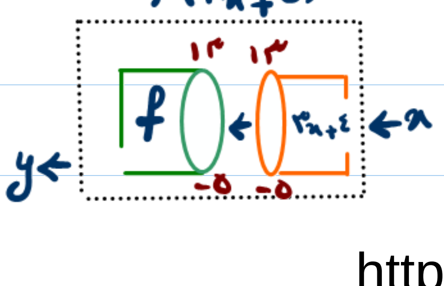
$$b=2\times 4-7=-1 \Rightarrow A'(2,-1) \longrightarrow a-b=2-(-1)=3$$

گزینه ۲

نکته: در تابع $y=af(bx+c)+d$ ، a و d روی برد f و b و c روی دامنه f تأثیری ندارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y=f(x)$ بازه $(-5,14)$ باشد دامنه تابع $y=f(3x+4)$ را بیابید.

$f(3x+4)$



https://konkur.info

$$-5 < 3x+4 < 13 \xrightarrow{-4} -9 < 3x < 9$$

$$\xrightarrow{\div 3} -3 < x < 3$$

$$D_{f(3x+4)} = (-3, 3)$$

مثال: اگر برد تابع f بازه $(-2,4)$ باشد، برد تابع $g(x)=3f(x+1)-1$ را بیابید.

بی‌تاثیر

$$-2 < f(x) < 4 \longrightarrow -2 < f(x+1) < 4 \xrightarrow{\times 3} -6 < 3f(x+1) < 12$$

$$\xrightarrow{-1} -7 < 3f(x+1)-1 < 11 \Rightarrow -7 < g(x) < 11$$

$$R_{g(x)} = (-7, 11)$$

توابع چند جمله‌ای :

توابعی که ضابطه آن‌ها به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ است و در

آن a_n تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چند جمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

دقت کنید توان x ها باید اعداد حسابی باشند. بیشترین توان x ها درجه چند جمله‌ای است.

مثال: کدام یک از توابع زیر چند جمله‌ای است؟

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$ نیست

ب) $g(x) = 4x^2 + \sqrt{5}x - 1$ هست (تابع درجه دوم)

پ) $h(x) = \sqrt{x+2}$ نیست

ت) $q(x) = 7x + \frac{1}{2}$ هست (تابع خطی)

ث) $p(x) = 5$ هست (ثابت)

ج) $k(x) = x^{\frac{1}{2}} + 4x$ نیست

نکته: توابع خطی، همانی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندجمله‌ای هستند.

$y=ax+b$ $y=x$ $y=c$ $y=ax^2+bx+c$

نکته: دامنه تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. همچنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجه فرد هم $\mathbb{R}$ است.

تابع چندجمله‌ای درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ که در آن $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$ باشد را یک تابع چندجمله‌ای درجه سوم می‌نامیم.

مانند: $f(x)=2x^3-\frac{1}{4}x^2+\sqrt{5}x+\pi$

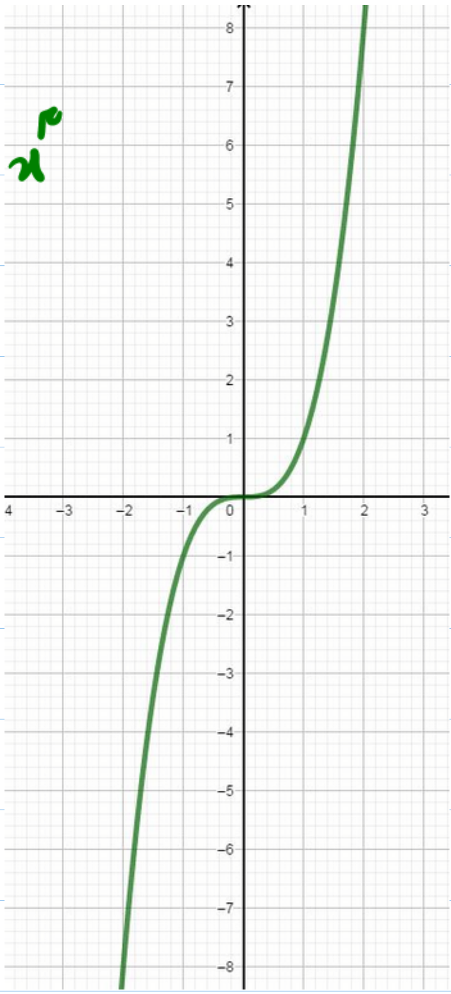
$g(x)=8x^3+1$ و $h(x)=5x^3-7x^2$

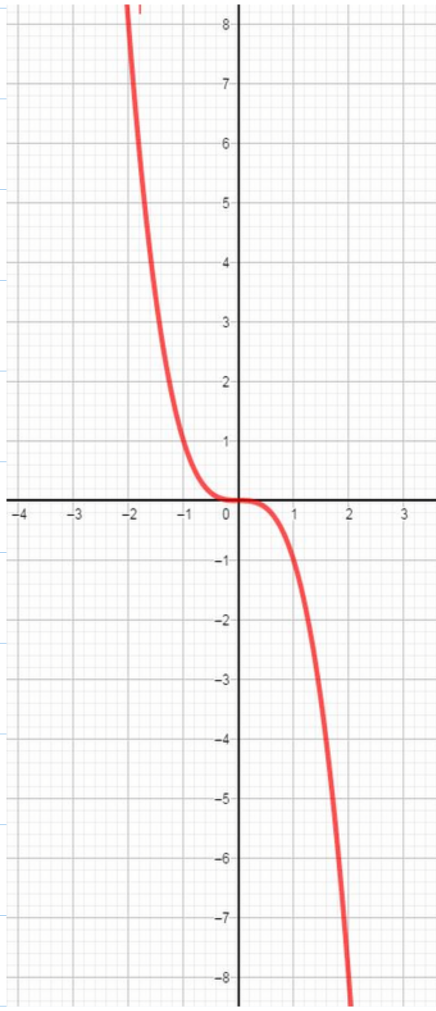
نمودار توابع $y=x^3$ و $y=-x^3$

x	-1	0	1	2
$y=-x^3$	1	0	-1	-8

x	-1	0	1	2
$y=x^3$	-1	0	1	8

$y=x^3$





$y=-x^3$

هر دو نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکر: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم نمودارها کمک می‌گیریم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^3+3x^2+3x+\underbrace{5}_{1+4}$ را رسم کنید.

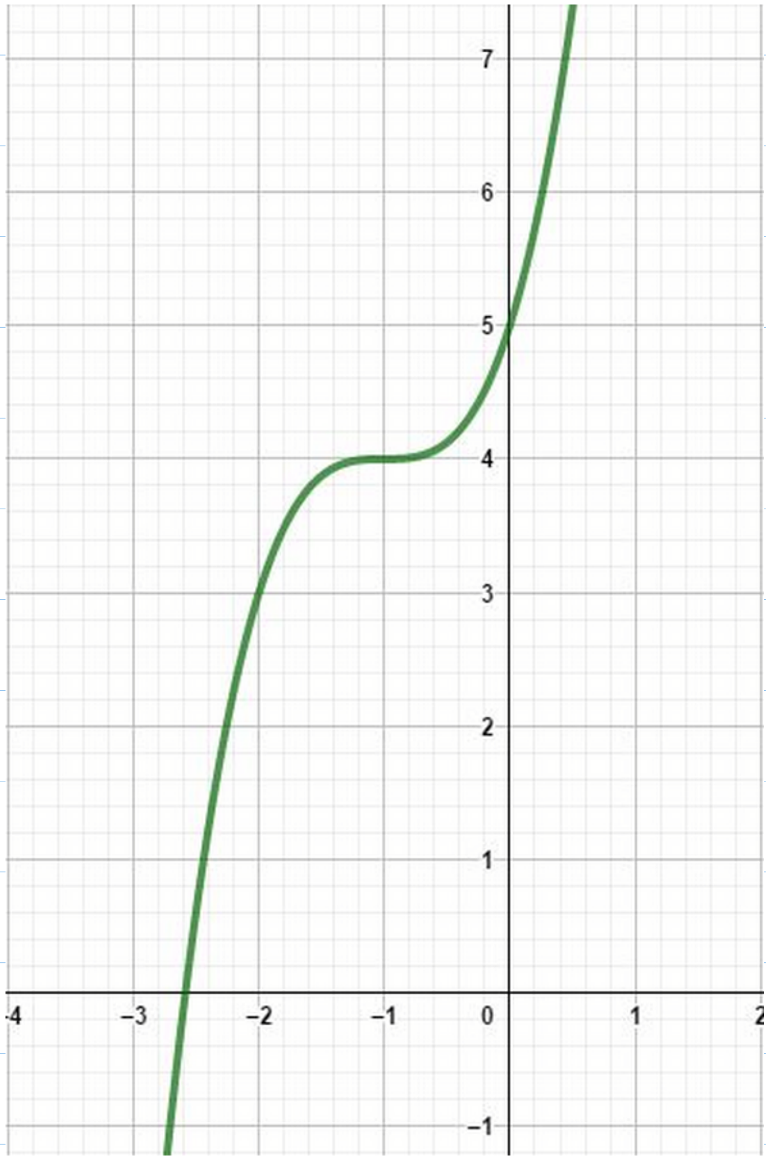
باید تابع درجه سوم را به صورت $y=k(x-a)^3+b$ در آوریم.

یادآوری: اتحاد مکعب دوجمله‌ای:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$f(x) = \underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{\text{اتحاد}} + 4 = (x+1)^3 + 4$$

نمودار $y = x^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.



https://konkur.info

کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y = x^3$، ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ۶

ب) $y = (x-2)^3$ ۹

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

ت) $y = (x+1)^3 - 1$ ۷

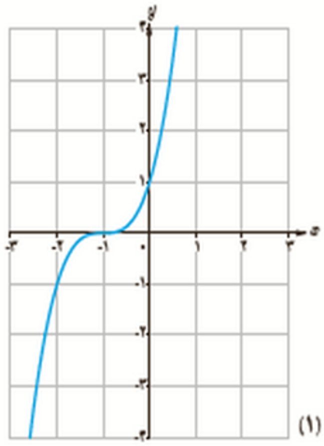
ث) $y = -x^3$ ۵

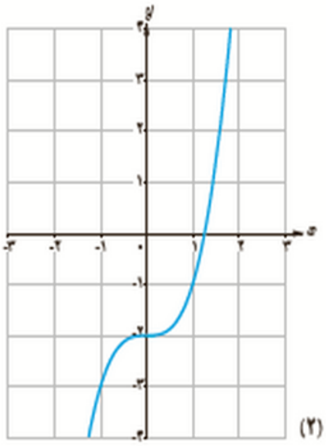
ج) $y = (x+1)^3$ ۱

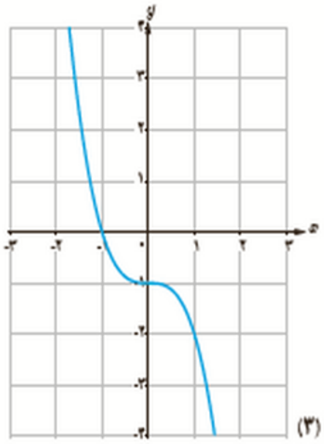
چ) $y = x^3 + 1$ ۴

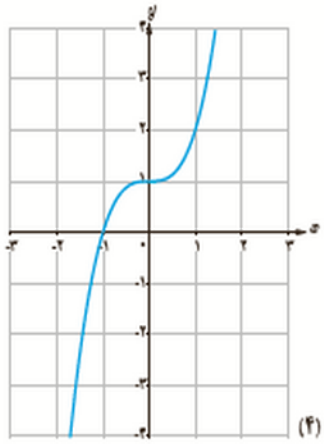
ح) $y = -x^3 - 1$ ۳

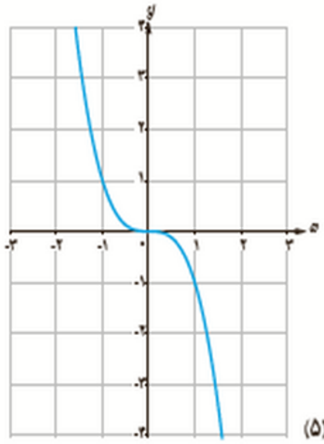
خ) $y = x^3 - 2$ ۲

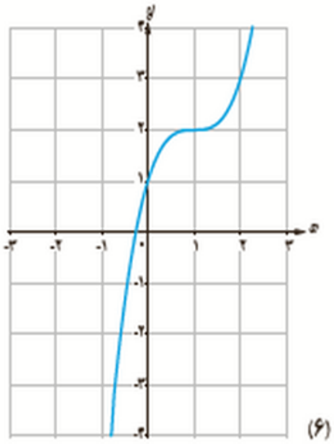

(۱)

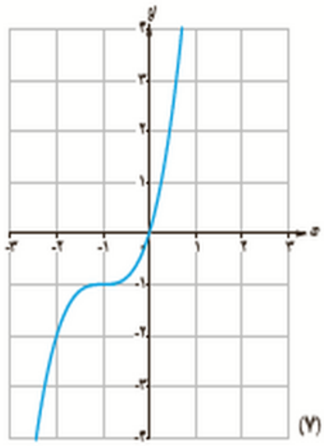

(۲)

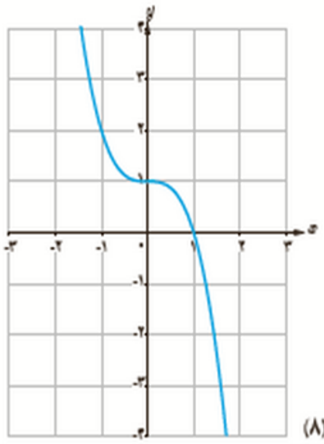

(۳)

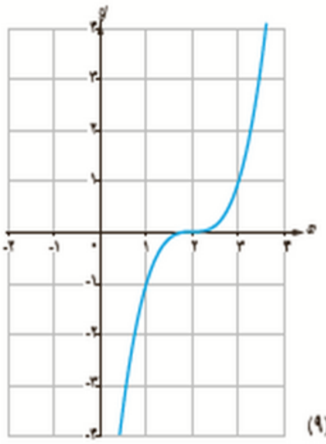

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)

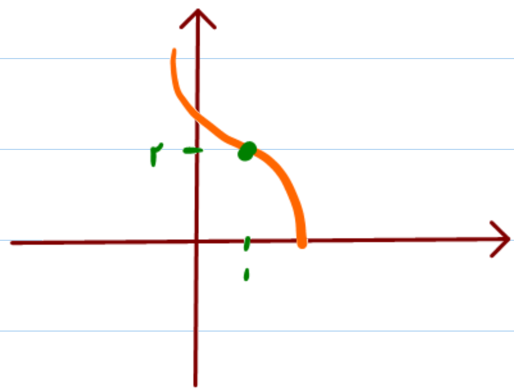

(۹)

نکته: در توابع درجه سوم به صورت $y=k(x-a)^3+b$ ، نقطه (a,b) مرکز تقارن است. می‌توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

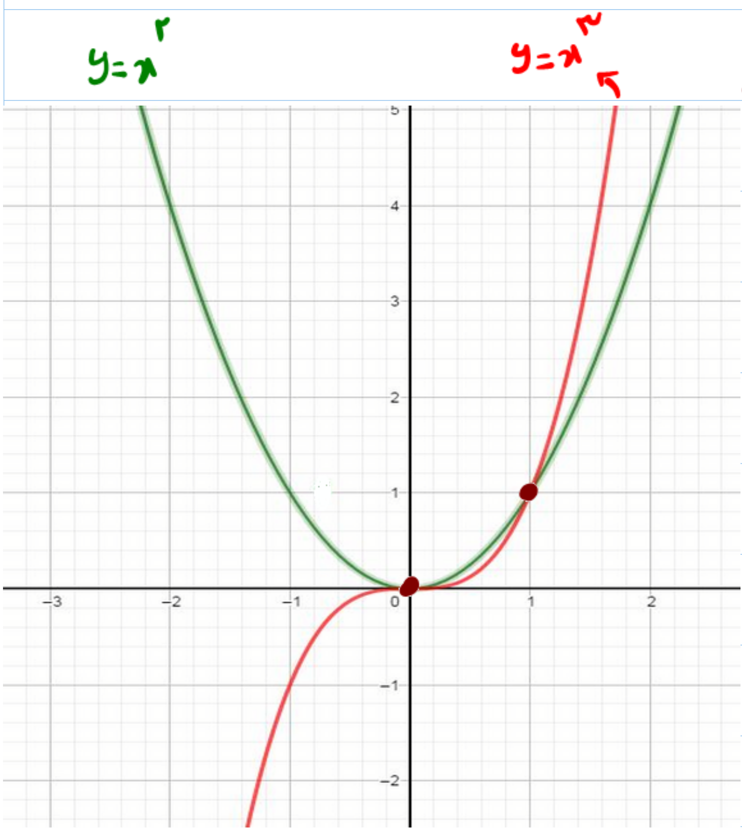
مثال: نمودار تابع $y=-(x-1)^3+2$ را رسم کنید.

پایه: $y=-x^3$

مرکز تقارن $(1,2)$



مقایسه نمودارهای $y=x^3$ و $y=x^2$:



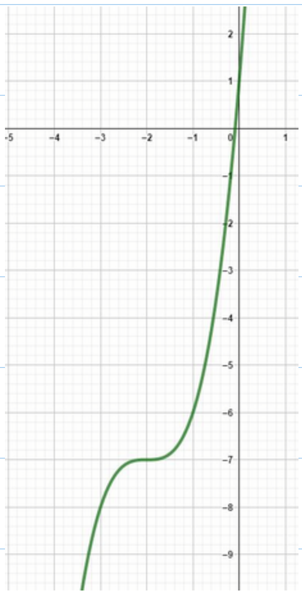
۱- دو نمودار در نقاط $(1,1)$ و $(0,0)$ متقاطع‌اند.

۲- برای $x>1$ ، $y=x^3$ بالای $y=x^2$ است.

۳- برای $0<x<1$ و $x<0$ نمودار $y=x^2$ بالای $y=x^3$ است.

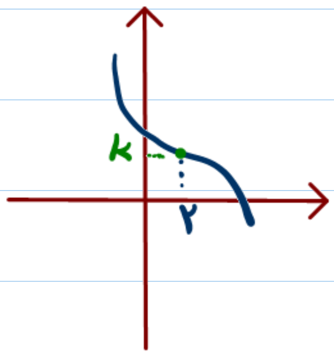
مثال: نمودار تابع $y=x^3+6x^2+12x+1$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

$y=\underbrace{x^3+3\times2x^2+3\times(2)^2x+8}_{\text{اتحاد}}-8+1=(x+2)^3-7$ مرکز تقارن $(-2,-7)$



از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند.

مثال: نمودار تابع $g(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ به شکل زیر است. مقدار a و b را بیابید.



مرکز تقارن $(2,k)$

در برعکس : ضریب x^3 منفی

از روی نمودار : $g(x)=-(x-2)^3+k=-(x^3+3x^2(-2)+3x(-2)^2+(-2)^3)+k$

$g(x)=\underline{-x^3}+6x^2-12x+8+k=\underline{-x^3}+ax^2+bx+c$

$\begin{cases}a=6\\b=-12\end{cases}$

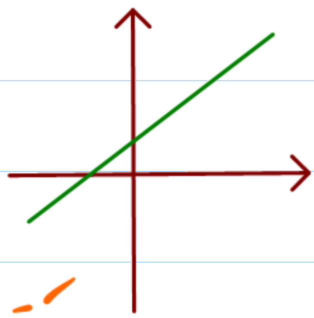
تعریف تابع صعودی :

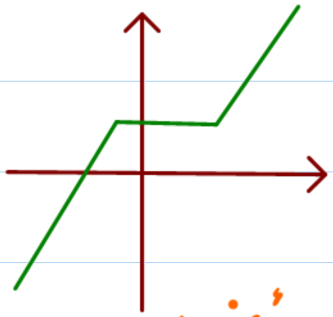
اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) \geq f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع صعودی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع صعودی، با افزایش x، y یا افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

مثال :





با حرکت از چپ به راست هیچگاه پایین نمی‌رویم

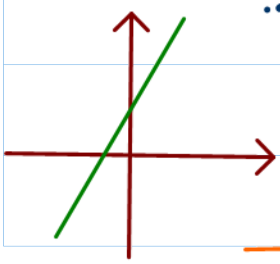
تعریف تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) > f(x_1)$ آنگاه تابع f را تابع اکیداً صعودی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً صعودی، با افزایش x، y هم افزایش می‌یابد.

مثال :



با حرکت از چپ به راست همواره بالا می‌رویم.

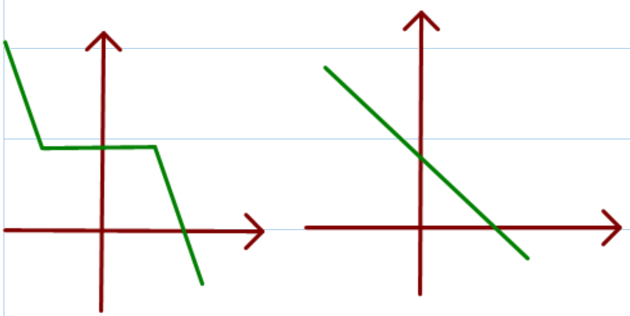
تعریف تابع نزولی :

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) \leq f(x_1)$ آنگاه تابع f را **تابع نزولی** می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x یا y کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

مثال :



با حرکت از چپ به راست هیچگاه بالا نمی‌رویم

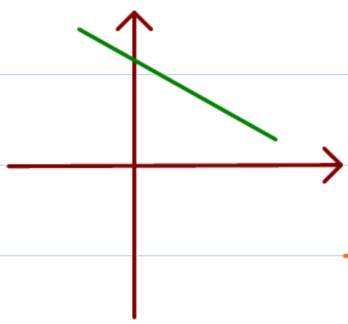
تعریف تابع اکیداً نزولی :

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$f(x_2) < f(x_1)$ آنگاه تابع f را **تابع اکیداً نزولی** می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیداً نزولی، با افزایش x ، y کاهش می‌یابد.

مثال :

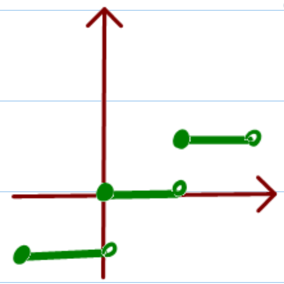


با حرکت از چپ به راست همواره پایین می‌رویم

نکته : هر تابع اکیداً صعودی ، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی ، نزولی هم هست .

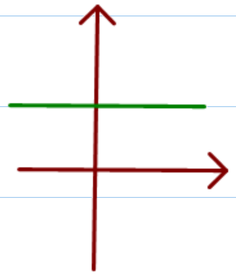
ولی عکس این مطلب درست نیست .

مثال : تابع $y=[x]$ ، صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست .



نکته : اگر با افزایش x ، y ثابت بماند می‌گوییم **تابع ثابت** است . تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی .

مثال :



تعریف تابع اکیداً یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A اکیداً یکنوا است .

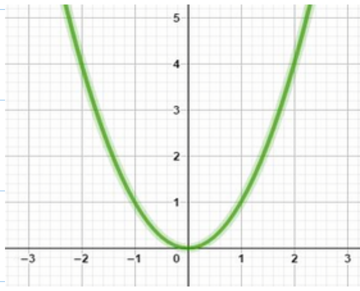
تعریف تابع یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A یکنوا است .

نکته : اگر در تابعی با افزایش x و حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی اوقات افزایش و گاهی اوقات کاهش یابد، این تابع را غیریکنوا می گوییم.

دقت کنید ممکن است تابعی روی دامنه اش غیریکنوا باشد ولی روی زیرمجموعه هایی از دامنه اش یکنوا باشد.

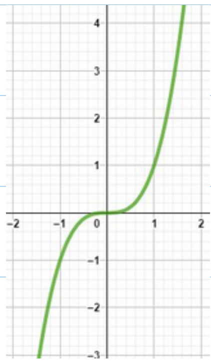
بررسی یکنوایی توابع معروف :

1) $y=x^2$



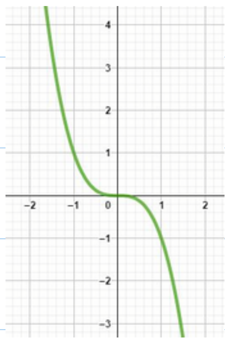
غیریکنوا ولی در $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی

2) $y=x^3$



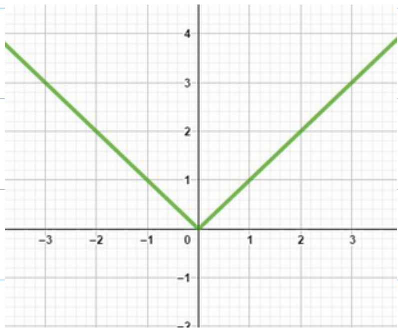
اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

3) $y=-x^3$



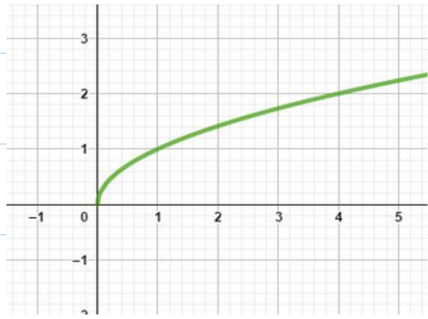
اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

۴) $y=|x|$



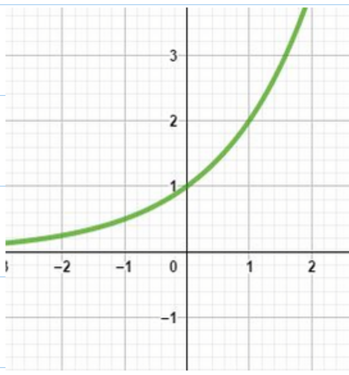
غیریکنوا
ولی در $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی
و در $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی

۵) $y=\sqrt{x}$



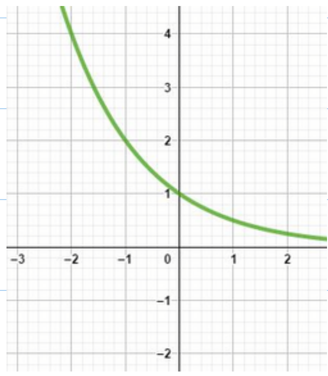
اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

۶) $y=a^x \quad (a>1)$



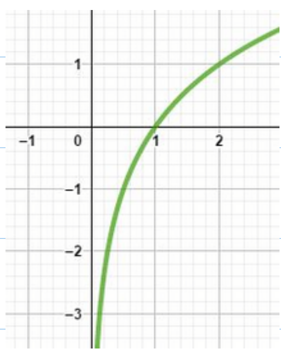
اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

۷) $y=a^x \quad (0<a<1)$



اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

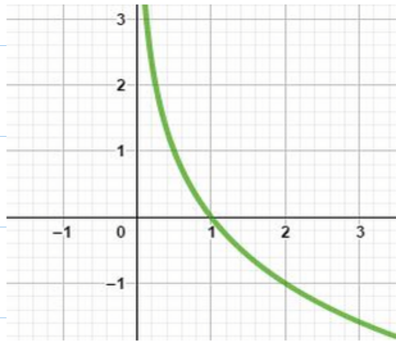
۸) $y=\log_a x \quad (a>1)$



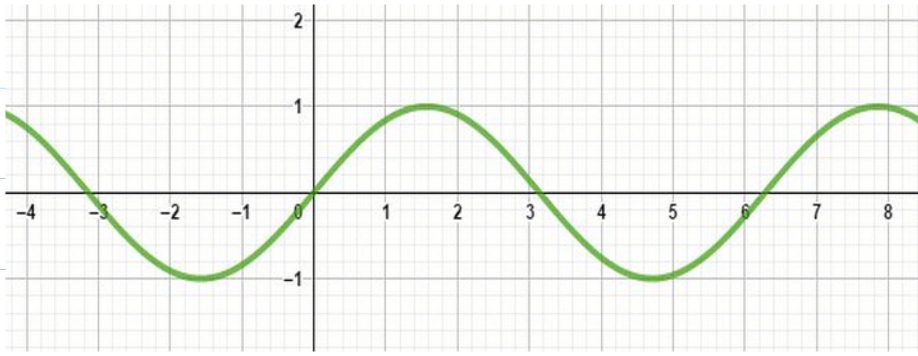
اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

9) $y=\log_a x \quad (0<a<1)$

اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

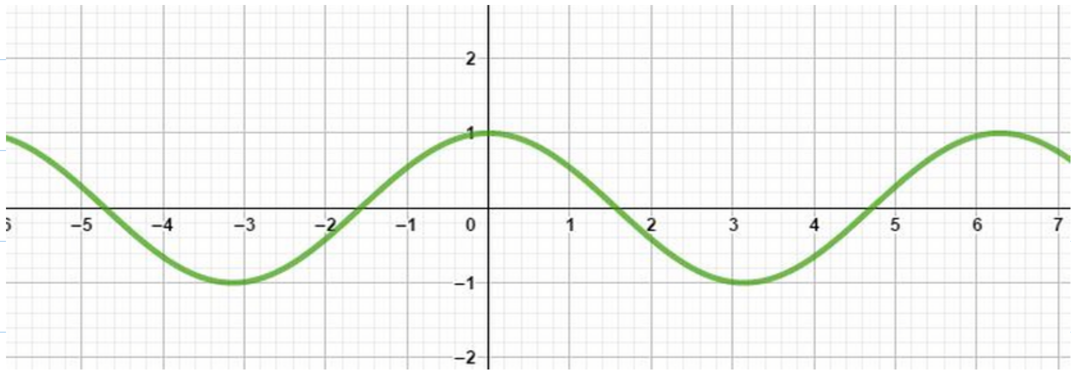


10) $y=\sin x$



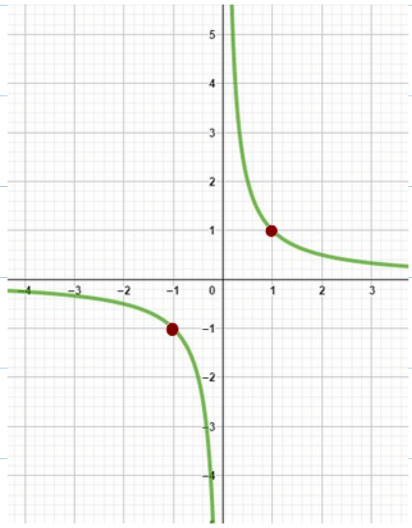
غیر یکنوا ولی مثلاً در $[0,\frac{\pi}{2}]$ تابع اکیداً صعودی و در $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ تابع اکیداً نزولی است.

11) $y=\cos x$



غیر یکنوا ولی مثلاً در $[0,\pi]$ تابع اکیداً نزولی و در $[\pi,2\pi]$ تابع اکیداً صعودی است.

۱۲) $y=\frac{1}{x}$

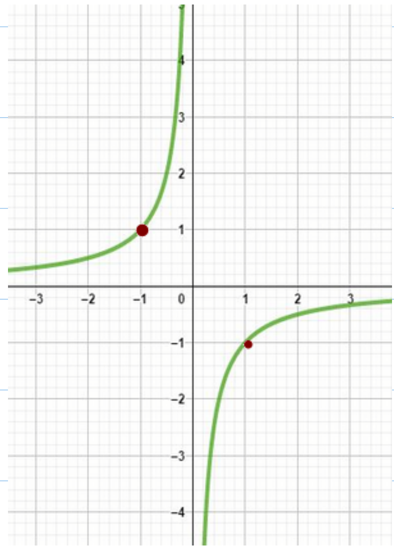


$-1<1 \to f(-1)<f(1)$
$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{-1} \qquad \overset{\shortparallel}{1}$

صعودی

نه یکنوا ولی در $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$
اکیداً نزولی است

۱۳) $y=-\frac{1}{x}$



$-1<1 \to f(-1)>f(1)$
$\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{1} \qquad \overset{\shortparallel}{-1}$

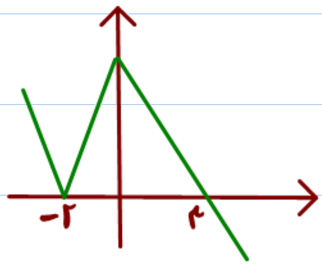
نزولی

نه یکنوا ولی در $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$

اکیداً صعودی است

مثال: با توجه به نمودار تابع f ، یکنوایی آن را بررسی کنید.

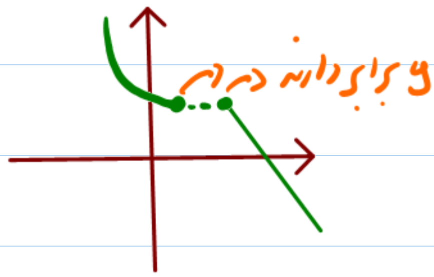
الف)



نه یکنوا ولی در $(-\infty,-2]$ و $[0,+\infty)$

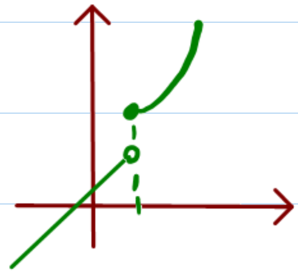
اکیداً نزولی و در $[-2,0]$ اکیداً صعودی

ب)



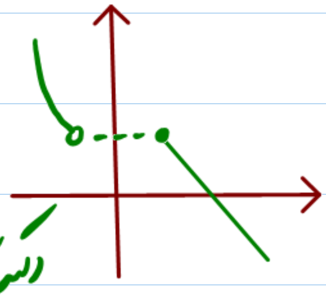
یکنوا (نزولی)

ث)



اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

ب)

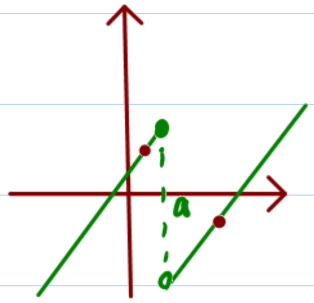


اکیداً یکنوا (اکیداً نزولی)

ج)

غیریکنوا

ت)



غیریکنوا

مثال: تابع $f=\{(1,2),(2,m-1),(3,7-m)\}$ صعودی است. حدود m را بیابید.

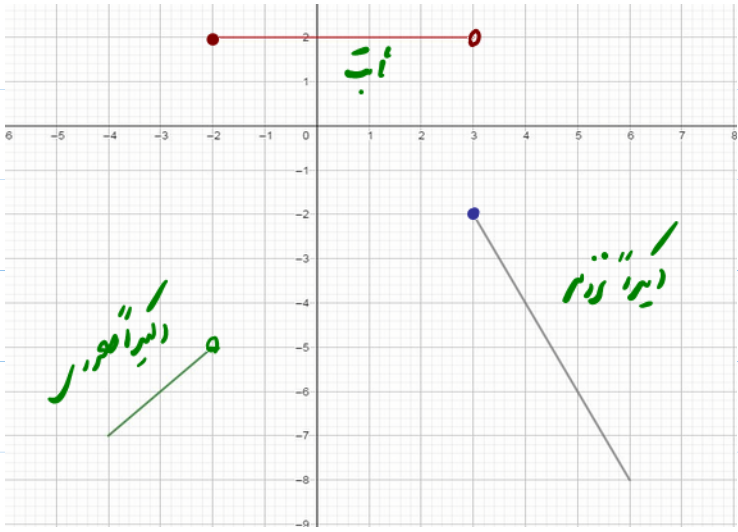
$$1<2 \to f(1)\leq f(2) \Rightarrow 2\leq m-1 \Rightarrow 3\leq m \qquad (1)$$

$$2<3 \to f(2)\leq f(3) \Rightarrow m-1\leq 7-m \Rightarrow 2m\leq 8 \to m\leq 4 \qquad (2)$$

$$(1)\cap(2) \Rightarrow \quad 3\leq m\leq 4$$

مثال: تابع $y=\begin{cases} x-3 & x<-2 \\ 2 & -2\leq x<3 \\ -2x+4 & x\geq 3 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صعودی است.

بیشترین مقدار برای a را محاسبه کنید.



تابع صعودی : $(-\infty, 4)$

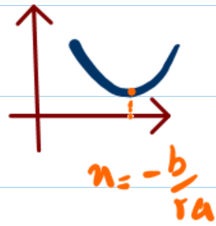
$\downarrow$

a

$\Rightarrow a = 4$

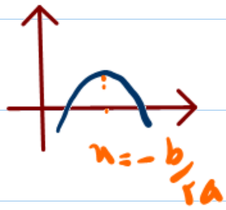
نکته : طبق گزینه دیدیم تابع $y=ax^2+bx+c$ روی $\mathbb{R}$ غیر یکنوا است ولی

الف) $a>0$



اکیداً نزولی $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و اکیداً صعودی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

ب) $a<0$



اکیداً صعودی $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ و اکیداً نزولی $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

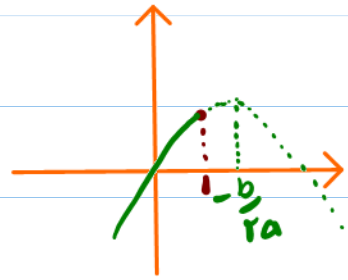
همچنین می‌توان گفت سهمی در هر بازه‌ای که رأس سهمی درون آن بازه باشد غیر یکنوا است.

مثال : تابع درجه دوم $f(x)=(k+2)x^2+x$ با دامنه $(-\infty, 1]$ صعودی است.

حدود k را بیابید.

$a<0 \Rightarrow k+2<0 \Rightarrow k<-2 \qquad (1)$

$$x_{\text{رأس سهمی}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \xRightarrow{\times(-1)} \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+4}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+5}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$		-2	$+\infty$
$2k+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2(k+2)$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2k+5}{2(k+2)}$	$+$	0	$-$	ن ت	$+$

$$-\frac{5}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{5}{2} \leq k < -2$$

مثال: تابع نمایی $y = (k^2-1)^x$ اکیداً صعودی است. حدود k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k^2 - 1 > 1 \Rightarrow k^2 > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \ \text{یا} \ k < -\sqrt{2}$$

قضیه:

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

ب) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات : الف) چون تابع f اکیداً صعودی است پس اگر $\underbrace{a>b}_{\text{فرض}}$ آنگاه $\underbrace{f(a)>f(b)}_{\text{حکم}}$.

حال اگر عکس نقیض این گزاره بنویسیم اثبات انجام می‌گیرد :

اگر $f(a)\leq f(b)$ آنگاه $a\leq b$ ∎

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکر : پس می‌توان گفت اگر تابع f (اکیداً) صعودی باشد و f را از دو طرف نامساوی حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند ولی اگر f (اکیداً) نزولی باشد، با حذف آن از دو طرف، جهت نامساوی برعکس می‌شود.

مثال : اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ نزولی باشد و $f(a^2-1)>f(3a+3)$، حدود a را بیابید.

$$f(a^2-1)>f(3a+3) \xrightarrow{f\ \text{نزولی}} a^2-1<3a+3$$

ریشه‌ها: -1 ، $+4$

$$a^2-3a-4<0 \Rightarrow (a+1)(a-4)<0 \Rightarrow -1<a<4$$

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $16^{2x-2} \geq 8^{3x-1}$

$(2^4)^{2x-2} \geq (2^3)^{3x-1} \Rightarrow \cancel{2}^{8x-8} \geq \cancel{2}^{9x-3} \xRightarrow[\text{اکیداً صعودی}]{a>1} 8x-8 \geq 9x-3$

$8x-9x \geq -3+8 \Rightarrow -x \geq 5 \Rightarrow x \leq -5 \rightarrow$ ج.م $= (-\infty, -5]$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2$ دامنه: $(x+1) > 0 \Rightarrow x > -1$ (1)

$\cancel{\log_{\frac{1}{2}}}(x+1) > \cancel{\log_{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \xRightarrow[\text{اکیداً نزولی}]{0<a<1} x+1 < \frac{1}{4} \rightarrow x < \frac{1}{4}-1$

$x < -\frac{3}{4}$ (2) $\quad (1)\cap(2) \quad -1 < x < -\frac{3}{4} \rightarrow$ ج.م $= \left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

پ) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2}$

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2x+1} > \left((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}\right)^{x+2} \Rightarrow (\cancel{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^{2x+1} > (\cancel{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^{-x-2}$

$\xrightarrow[\text{اکیداً نزولی}]{0<a<1} 2x+1 < -x-2 \Rightarrow 2x+x < -2-1 \Rightarrow 3x < -3$

$a = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\Rightarrow x < -1 \rightarrow$ ج.م $= (-\infty, -1)$

نکته :

۱) اگر توابع f و g صعودی باشند آنگاه $f+g$ هم صعودی است .

۲) اگر توابع f و g نزولی باشند آنگاه $f+g$ هم نزولی است .

۳) اگر توابع f و g صعودی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم صعودی است .

۴) اگر توابع f و g نزولی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم نزولی است .

۵) اگر f صعودی باشد آنگاه $-f(x)$ نزولی است .

و اگر f نزولی باشد آنگاه $-f(x)$ صعودی است .

۶) اگر f صعودی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ نزولی است .

۷) اگر f نزولی باشد و مقادیر f همگی مثبت یا همگی منفی باشد آنگاه $\frac{1}{f}$ صعودی است .

۸) اگر f صعودی و g نزولی باشد $f-g$ صعودی و $g-f$ نزولی است .

مثال: اگر f تابعی نزولی با مقادیر منفی باشد، کدام تابع نزولی است؟

۱) $y = 2^x f(x)$ ✓   ۲) $y = \dfrac{f(x)}{2^x}$ ۳) $y = 2^x + f(x)$ ۴) $y = 2^x - f(x)$

تابع f تابعی نزولی با مقادیر منفی است. پس تابع $-f$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است.

همچنین تابع $y = 2^x$ تابعی صعودی با مقادیر مثبت است. پس ضرب این دو تابع یعنی

$y = 2^x \times (-f) = -2^x f$ تابعی صعودی است. پس $y = 2^x f$ تابعی نزولی است.

مثال: اگر $f+g$ و $g-f$ توابعی نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند، کدام تابع صعودی است؟

۱) f ۲) g ۳) $-f$ ۴) $-g$ ✓

$$h = \overset{\text{نزولی}}{(f+g)} + \overset{\text{نزولی}}{(g-f)} = \overset{\text{نزولی}}{2g} \Rightarrow k = \overset{\text{منفی}}{-\tfrac{1}{2}}\overset{\text{نزولی}}{(2g)} = \overset{\text{صعودی}}{-g}$$

یادآوری:

در پایه‌های پایین‌تر با تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای آشنا شدید.

مراحل این تقسیم عبارت بودند از:

۱) استاندارد نوشتن مقسوم و مقسوم‌علیه.

۲) تقسیم جمله اول مقسوم بر جمله اول مقسوم‌علیه و نوشتن حاصل آن در خارج قسمت و ضرب آن در مقسوم‌علیه و کم کردن حاصل آن از مقسوم برای یافتن مقسوم جدید.

۳) تقسیم جمله اول مقسوم جدید بر جمله اول مقسوم‌علیه و انجام مرحله ۲.

۴) تکرار مرحله ۳ تا جایی که درجه مقسوم جدید (همان باقی‌مانده) از درجه مقسوم‌علیه کمتر شود.

نکته: اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم‌علیه m باشد ($m \leq n$)، درجه خارج قسمت $n-m$ و درجه باقی‌مانده حداکثر $m-1$ خواهد بود.

مثال: چندجمله‌ای $3x^3+2x^4-1$ را بر x^2-2 تقسیم کنید.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 3x^3 - 1 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2}
-(2x^4 - 4x^2) & 2x^2 + 3x + 4 \\ \cline{1-1}
3x^3 + 4x^2 - 1 & \\
-(3x^3 - 6x) & \\ \cline{1-1}
4x^2 + 6x - 1 & \\
-(4x^2 - 8) & \\ \cline{1-1}
6x + 7 &
\end{array}
$$

مقسوم

مقسوم علیه

خارج قسمت

باقیمانده

$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

$\frac{3x^3}{x^2} = 3x$

$\frac{4x^2}{x^2} = 4$

روش هورنر برای تقسیم چندجمله‌ای درجه n بر درجه یک به صورت $x+a$:

این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم :

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 + 8x^2 + 5x - 7 & x+2 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

ضرایب یک چندجمله‌ای مقسوم

ریشه مقسوم علیه $(x+2=0)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
3 & & 8 & & 5 & & -7 \qquad -2 \\
 & \xrightarrow{\times(-2)} & -6 & \xrightarrow{\times(-2)} & -4 & \xrightarrow{\times(-2)} & -2 \\
3 & & 2 & & 1 & & -9
\end{array}
$$

باقیمانده

خارج قسمت : $3x^2 + 2x + 1$

قضیه تقسیم (الگوریتم تقسیم) برای چندجمله‌ای‌ها:

اگر $P(x)$ و $B(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $B(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آنگاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند به طوری که:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & B(x) \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \overline{R(x)} & \end{array}$$

$$P(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

که در آن درجه $R(x)$ از درجه $B(x)$ کمتر است.

اگر $R(x)=0$ باشد $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال: الگوریتم تقسیم را برای تقسیم $P(x)=x^3+2$ بر $B(x)=x-1$ بنویسید.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \end{array}$$

$R(x)$

$$Q(x)=x^2+x+1$$

$$x^3+1=(x-1)(x^2+x+1)+3$$

قضیه (۱): باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک $ax+b$ برابر $p(-\frac{b}{a})$ است. یعنی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک کافی است ریشه چندجمله‌ای درجه یک (مقسوم‌علیه) را به جای متغیر $p(x)$ (مقسوم) قرار دهیم.

اثبات: اگر الگوریتم تقسیم را بنویسیم، داریم:

$$p(x) = (ax+b)Q(x) + \overset{\text{عدد}}{R}$$

اگر به جای x ریشه مقسوم‌علیه ($x=-\frac{b}{a}$ ← $ax=-b$ ← $ax+b=0$) را قرار دهیم داریم:

$$p(-\tfrac{b}{a}) = 0 \times Q(-\tfrac{b}{a}) + R \Rightarrow p(-\tfrac{b}{a}) = R$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^5-4x^4+3x^2-x+1$ بر $x-2$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow p(2)=R$$

$$p(2)=2^5-4(2)^4+3(2)^2-2+1=32-32+12-2+1=11$$

مثال: اگر چندجمله‌ای $p(x)=3x^7-4ax-5$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، a را بیابید.

$$x-1=0 \to x=1 \to p(1)=0 \to p(1)=3(1)^7-4a(1)-5=0$$

$$3-4a-5=0 \to -4a=2 \to a=-\frac{1}{2}$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۴

به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $p(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است.

کوچکترین ریشه معادله $p(x)=0$ کدام است؟

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \to p(-2)=0 \Rightarrow p(-2)=(-2)^4+a(-2)^3-8(-2)=0$$

$$16-8a+16=0 \to -8a=-32 \to a=4$$

$$p(x)=x^4+4x^3-8x=0 \Rightarrow x^4+4x^3-8x=(x+2)Q(x)$$

1	4	0	-8	0	-2
	$\times(-2)$ -2	$\times(-2)$ -4	$\times(-2)$ 8	$\times(-2)$ 0	
1	2	-4	0	0	

باقیمانده

$$Q(x)=x^3+2x^2-4x+0$$

$$p(x)=(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0 \Rightarrow (x+2)x(x^2+2x-4)=0$$

$$x+2=0 \rightarrow \underline{x=-2}$$

$$\underline{x=0}$$

$$x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2+2x=4 \Rightarrow x^2+2x+1=4+1 \Rightarrow (x+1)^2=5$$

$$\xRightarrow{\sqrt{}} x+1=\pm\sqrt{5} \Rightarrow \underline{x=\sqrt{5}-1},\ \underline{x=-\sqrt{5}-1}\ ✓$$

گزینه ۴

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $\underbrace{x^4-ax^3+x^2+b}_{p(x)}$ بر $x+1$ برابر 9 است. اگر این چندجمله‌ای بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، a,b را بیابید.

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=9 \Rightarrow p(-1)=(-1)^4-a(-1)^3+(-1)^2+b=9$$

$$1+a+1+b=9 \Rightarrow a+b=7 \qquad (1)$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow p(2)=0 \Rightarrow p(2)=2^4-a(2)^3+(2)^2+b=0$$

$$16-8a+4+b=0 \Rightarrow -8a+b=-20 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ -8a+b=-20 \end{cases}$$

$$9a=27 \rightarrow a=3$$

$$3+b=7 \rightarrow b=4$$

مثال: کنکور ۹۹ ریاضی خارج:

به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $p(x)=2x^4+ax^3+2x^2-3x$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده $p(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -8 ۳) 4 ۴) 6

$$2x-1=0 \to x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4+a\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times 8} 1+a+4-12=0 \to a=7$$

$$p(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x \Rightarrow x+2=0 \to x=-2$$

$$p(-2)=2(-2)^4+7(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)=32-56+8+6=-10$$

گزینه ۱

مثال: اگر $f(2x-1)=x-3$ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-3$ را بیابید.

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow f(3)=R$$

باید عددی را جای x در $f(2x-1)$ قرار دهیم که $f(3)$ بدست آید:

$$2x-1=3 \Rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2$$

$$f(2x-1)=x-3 \xrightarrow{x=2} f(2(2)-1)=2-3 \rightarrow f(3)=-1=R$$

مثال: چندجمله‌ای $p(x)=x^8+3x^7+ax^2-9$ بر $x+3$ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده

تقسیم چندجمله‌ای $p(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) -14 ۲) -12 ۳) -10 ۴) -8

$$x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow p(-3)=0 \rightarrow p(-3)=(-3)^8+3(-3)^7+a(-3)^2-9=0$$

$$3^8-3^8+9a-9=0 \rightarrow 9a=9 \Rightarrow a=1 \Rightarrow p(x)=x^8+3x^7+x^2-9$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2+1)=R \Rightarrow p(-1)=R$$

$$p(-1)=(-1)^8+3(-1)^7+(-1)^2-9=1-3+1-9=-10$$ گزینه ۳

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های $p(x)+x$ و $xQ(x)$ بر $x-2$ به‌ترتیب

3 و 4 است. اگر چندجمله‌ای $kp(x)+Q^2(x)+1$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد،

مقدار k کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۵ ۳) ۴- ۴) ۴

$x-2=0 \to x=2 \to p(2)+2=3 \Rightarrow p(2)=1$

$\to x=2 \to 2Q(2)=4 \to Q(2)=2$

$x=2 \to kp(2)+Q^2(2)+1=0$

$\Rightarrow k\times1+(2)^2+1=0 \to k+5=0 \to k=-5$

گزینه ۱

روش یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای از درجه بزرگتر از یک:

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم. فقط دقت کنید درجه باقی‌مانده از درجه مقسوم‌علیه کمتر است.

مثلاً اگر مقسوم‌علیه از درجه دو باشد باقی‌مانده حداکثر از درجه یک است و می‌توانیم باقی‌مانده

را به صورت $ax+b$ بنویسیم. برای محاسبه ضرایب باقی‌مانده باید کاری کنیم $Q(x)$ حذف شود.

از ریشه‌های مقسوم‌علیه برای این کار استفاده می‌کنیم. به‌عبارت دیگر ریشه‌های مقسوم‌علیه

باعث تساوی مقسوم و باقی‌مانده می‌شود :

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-\alpha)(x-\beta) \\ \hline & Q(x) \\ \overline{R(x)} & \end{array}$$

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+R(x)$$

$$x=\alpha \rightarrow P(\alpha)=\cancel{(\overset{0}{\alpha-\alpha})(\alpha-\beta)Q(\alpha)}+R(\alpha) \Rightarrow P(\alpha)=R(\alpha)$$

$$x=\beta \rightarrow P(\beta)=\cancel{(\beta-\alpha)(\overset{0}{\beta-\beta})Q(\beta)}+R(\beta) \Rightarrow P(\beta)=R(\beta)$$

مثال : باقی‌مانده تقسیم $x^5+3x^4+5x^2-1$ را بر x^2-1 بدست آورید.

$$\begin{array}{l|l} x^5+3x^4+5x^2-1 & x^2-1 \\ \hline & Q(x) \\ \overline{R(x)=ax+b} & \end{array}$$

$$x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P(1)=1^5+3(1)^4+5(1)^2-1=R(1)=a(1)+b$$

$$\Rightarrow 1+3+5-1=a+b \rightarrow a+b=8 \qquad (1)$$

$$x=-1 \Rightarrow P(-1)=(-1)^5+3(-1)^4+5(-1)^2-1=R(-1)=a(-1)+b$$

$$\Rightarrow -1+3+5-1=-a+b \Rightarrow -a+b=6 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ -a+b=6 \end{cases} \qquad a+7=8 \rightarrow a=1$$

$$2b=14 \rightarrow b=7$$

$$R(x)=x+7$$

مثال: کنکور ریاضی ۹۹

باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است.

باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $2x^2-x-1$ کدام است؟

۱) $-x+4$ ۲) $x+4$ ۳) $2x+6$ ۴) $2x-4$

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow p(1)=8$$

$$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right)=5$$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & 2x^2-x-1 \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

$$R(x)=ax+b$$

$$p(x)=(2x^2-x-1)Q(x)+(ax+b)$$

$$p(x)=(x-1)(2x+1)Q(x)+(ax+b)$$

$$x=1 \Rightarrow P(1)=\overset{0}{(1-1)}\cancel{(2+1)Q(1)}+(a+b)=8 \Rightarrow a+b=8 \quad (1)$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)\overset{0}{\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)}\cancel{Q\left(-\frac{1}{2}\right)}+a\left(-\frac{1}{2}\right)+b=5$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}a+b=5 \quad (2)$$

$$\times\frac{1}{2}\begin{cases} a+b=8 \\ -\frac{1}{2}a+b=5 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}b=9 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} b=\frac{18}{3}=6$$

$$a+6=8 \longrightarrow a=2$$

$$\Rightarrow R(x)=2x+6$$

گزینه ۳

مثال: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-4 و x^2-9 به ترتیب $x+6$ و $4x+1$ است. باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-5x+6 کدام است؟

۱) $2x+5$ ۲) $5x+2$ ۳) $5x-2$ ۴) $2x-5$

$$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+(x+6) \Rightarrow P(2)=2+6=8$$

$$P(x)=(x^2-9)Q_2(x)+(4x+1) \Rightarrow P(3)=4\times3+1=13$$

$$P(x)=(x^2-5x+6)Q_3(x)+(ax+b)=(x-2)(x-3)Q_3(x)+(ax+b)$$

$$P(2)=\cancel{(\overset{\text{صفر}}{2-2})(2-3)Q(2)}+(a(2)+b)=8 \Rightarrow 2a+b=8$$

$$P(3)=\cancel{(3-2)(\overset{\text{صفر}}{3-3})Q(3)}+(a(3)+b)=13 \to 3a+b=13$$

$$-\begin{cases}2a+b=8\\ 3a+b=13\end{cases}$$

$$a=5 \qquad 10+b=8 \to b=-2$$

گزینه ۳ : $R(x)=5x-2$

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)(x-3)$ برابر $2x+5$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x-3$ را محاسبه کنید.

$$f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+(2x+5)$$

$$x-3=0 \to x=3 \to f(3)=R$$

$$f(3)=\cancel{(3-1)(\overset{\text{صفر}}{3-3})Q(3)}+(6+5)=11=R$$

نکته: اگر یک چندجمله‌ای بر حاصل‌ضرب چند، چندجمله‌ای بخش‌پذیر باشد، بر هر یک از این چندجمله‌ای‌ها هم بخش‌پذیر خواهد بود.

مثال: اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^5+mx^2+nx+42$ بر x^2-4 بخش‌پذیر باشد، m و n را بیابید.

پس طبق نکته چون P بر $(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر است پس هم بر $x+2$ بخش‌پذیر است هم بر $x-2$. ادامه به عنوان تمرین.

روش دیگر برای یافتن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله درجه ۲

این روش را با حل یک مثال توضیح می‌دهیم.

می‌خواهیم باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^5+3x^4+5x^2-1$ را بر x^2-1 بیابیم.

مرحله اول: مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $x^2-1=0 \to x^2=1$

مرحله دوم: مقسوم را برحسب x^2 مرتب می‌کنیم: $(x^2)^2x+3(x^2)^2+5x^2-1$

مرحله سوم: جای x^2 مقدارش را در مقسوم می‌گذاریم تا باقی‌مانده بدست آید:

$x^2=1 \rightarrow R = 1\times x + 4(1)^2 + 5\times 1 - 1 = x+4+5-1 = x+7$

تذکر: گاهی اوقات نیاز است مرحله سوم، چند بار تکرار شود.

مثال: کنکور ریاضی خارج ۹۴

اگر عبارت x^4+ax^2-bx+4 بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow x^2=2x-1$

$(x^2)^2+ax^2-bx+4 \Big|_{x^2=2x-1} = (2x-1)^2+a(2x-1)-bx+4$

$= 4x^2-4x+1+2ax-a-bx+4 \Big|_{x^2=2x-1}$

$= 4(2x-1)-4x+2ax-a-bx+5 = \underline{8x}-\underline{\underline{4}}-\underline{4x}+2ax-a-bx+\underline{\underline{5}}$

$= 4x+2ax-bx-a+1 = x(4+2a-b)-a+1 = 0$

$\begin{cases} 4+2a-b=0 \\ -a+1=0 \rightarrow a=1 \end{cases}$ $\quad 4+2-b=0 \rightarrow b=6$ گزینه ۴

معرفی چند اتحاد جدید :

در سال های گذشته با اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر آشنا شدید :

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$$

می خواهیم اتحادهای فوق را برای توان های بیشتر از ۳ ، تعمیم دهیم :

۱) تقسیم $\underbrace{x^n-y^n}_{P}$ بر $x-y$:

$$x-y=0 \to x=y \to P(y)=y^n-y^n=0=R$$

پس x^n-y^n همواره بر $x-y$ بخش پذیر است.

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1}) \qquad n\in\mathbb{N}$$

۲) تقسیم $\underbrace{x^n-y^n}_{P}$ بر $x+y$:

$$x+y=0 \to x=-y \to P(-y)=(-y)^n-y^n \xlongequal{n=\text{زوج}} y^n-y^n=0$$

پس x^n-y^n برای n های زوج بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots+xy^{n-2}-y^{n-1})\ :\ n=2k$$

۳) تقسیم $\underbrace{x^n+y^n}_{P}$ بر $x+y$:

$$x+y=0 \to x=-y \to P(-y)=(-y)^n+y^n$$

پس x^n+y^n برای n های فرد بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots-xy^{n-2}+y^{n-1})\ :\ n=2k+1$$

سوال: تحت چه شرایطی برای n، x^n+y^n بر $x-y$ بخش پذیر است؟

$$x-y=0 \to x=y \to P(y)=y^n+y^n\neq 0$$

هیچگاه x^n+y^n بر $x-y$ بخش پذیر نیست.

مثال: کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{(x^4-1)(x+2)}{x^2+x-2}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2\times1+x\times1^2+1^3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}}=x^3+x^2+x+1$

ب) $\dfrac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^{10}} = \dfrac{1^5+t^5}{1-t^{10}}$

$= \dfrac{\cancel{1+t^5}}{(1-t^5)\cancel{(1+t^5)}} = \dfrac{1}{1-t^5}$

ج) $\dfrac{(6^9+1)(5^9+5^8+5^7+\dots+1)}{(5^{10}-1)(6^8-6^7+6^6-\dots+1)}$

$6^9+1=(6+1)(6^8-6^7+6^6-\dots+1)$

$5^{10}-1=(5-1)(5^9+5^8+\dots+1)$

عبارت $= \dfrac{(6+1)\cancel{(6^8-6^7\dots+1)}\cancel{(5^9+5^8+\dots+1)}}{(5-1)\cancel{(5^9+5^8+\dots+1)}\cancel{(6^8-6^7-\dots+1)}}$

$= \dfrac{7}{4}$

مثال: اگر $f(x)=\dfrac{x^8-1}{(x^3+x)(x^6-x^4+x^2-1)}$ ، مقدار $f(-\frac{2}{3})$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

مخرج $= x\underbrace{(x^2+1)}_{\text{لاغر}}\underbrace{((x^2)^3-(x^2)^2+x^2-1)}_{\text{چاق}} = x\left((x^2)^4-1\right)=x(x^8-1)$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^8 - 1}}{x(\cancel{x^8 - 1})} = \frac{1}{x}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۱