درس اوّل : تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع بـه کمـک تبـدیلات مـی تـوان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبـدیلات را معرفـی می کنیم.

الف : انتقال های افقی و عمودی

قسمت اوّل : انتقال عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می تـوان انتقال عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) + k = y_\circ + k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) - k = y_\circ - k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ - k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم.

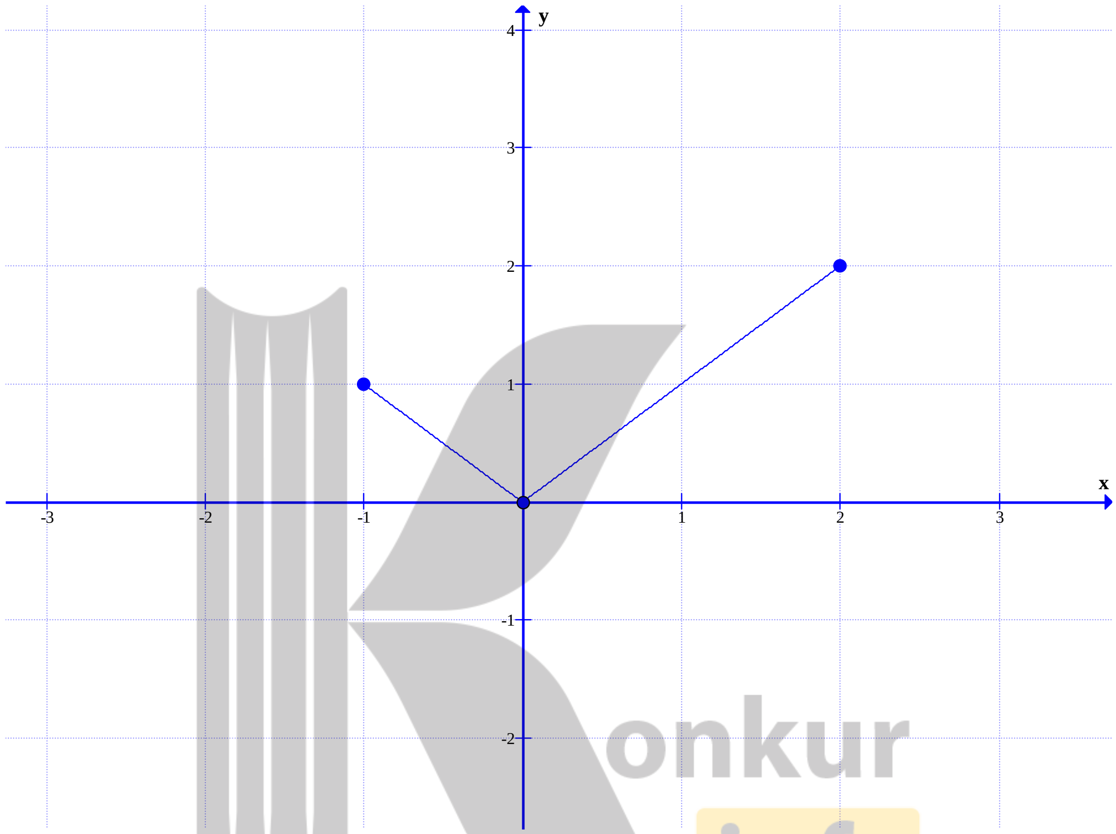
۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله‌ی $[-۱,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

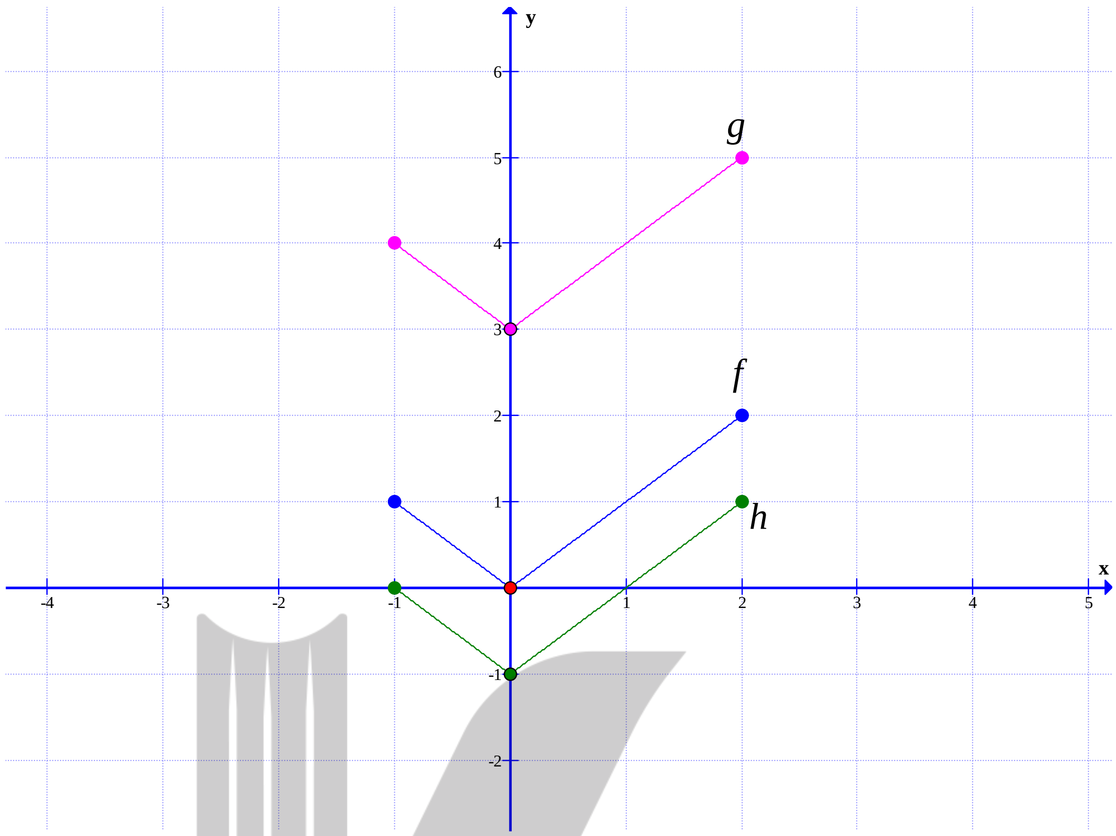
الف : نمودار تابع $g(x) = |x| + ۳$ را رسم کنید. ب : نمودار تابع $h(x) = |x| - ۱$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x|$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

x	-۱	۰	۲
y	۱	۰	۲

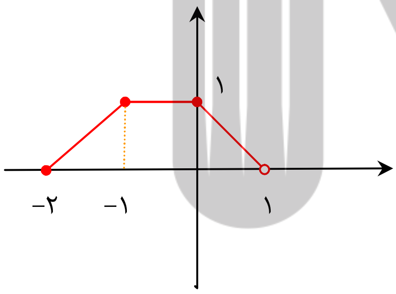


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین منتقل می کنیم.



نتیجه: در انتقال عمودی طول نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط عرض آنها به اندازه‌ی k اضافه یا کم می شود.

تمرین ۱ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=f(x)-۲$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

قسمت دوّم : انتقال افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_{\circ},y_{\circ})$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انتقال افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x)=f(x+k)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_{\circ}-k)=f(x_{\circ}-k+k)=f(x_{\circ})$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_{\circ}-k,y_{\circ})$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x)=f(x-k)$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_{\circ}+k)=f(x_{\circ}+k-k)=f(x_{\circ})$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ}+k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y=f(x+k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع $y=f(x-k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم.

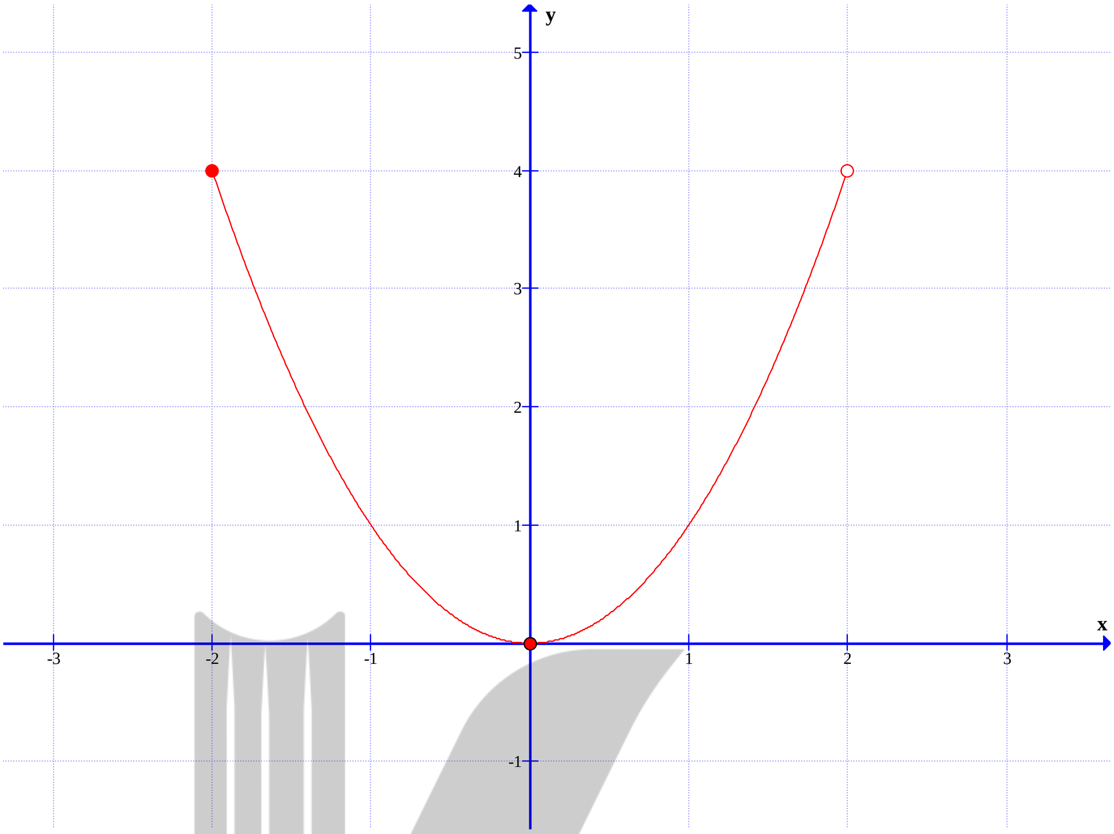
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=(x+۳)^{۲}$ را رسم کنید.

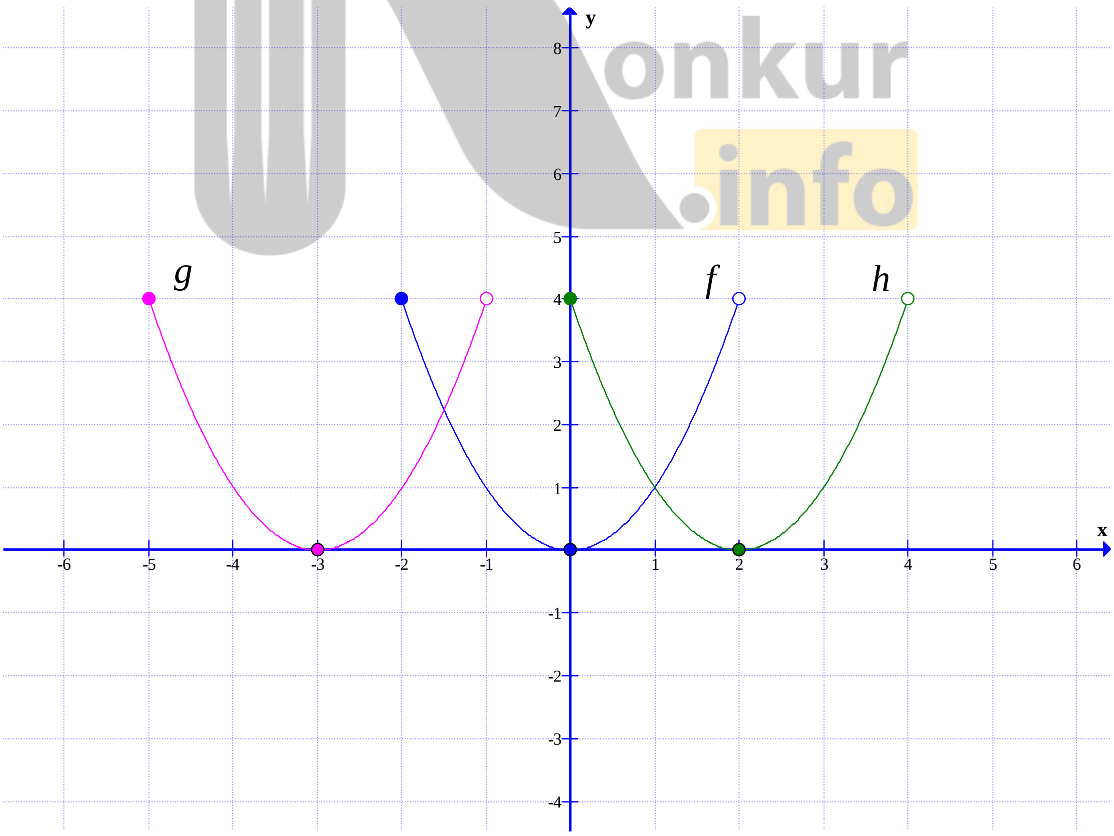
ب : نمودار تابع $h(x)=(x-۲)^{۲}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

x	-۲	۰	۲
y	۴	۰	۴

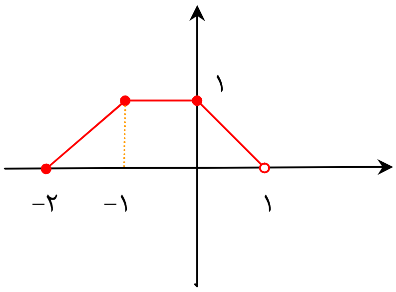


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل می کنیم.



نتیجه: در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط طول آنها بـه انـدازه‌ی k واحـد اضافه یا کم می شود.

تمرین ۲ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

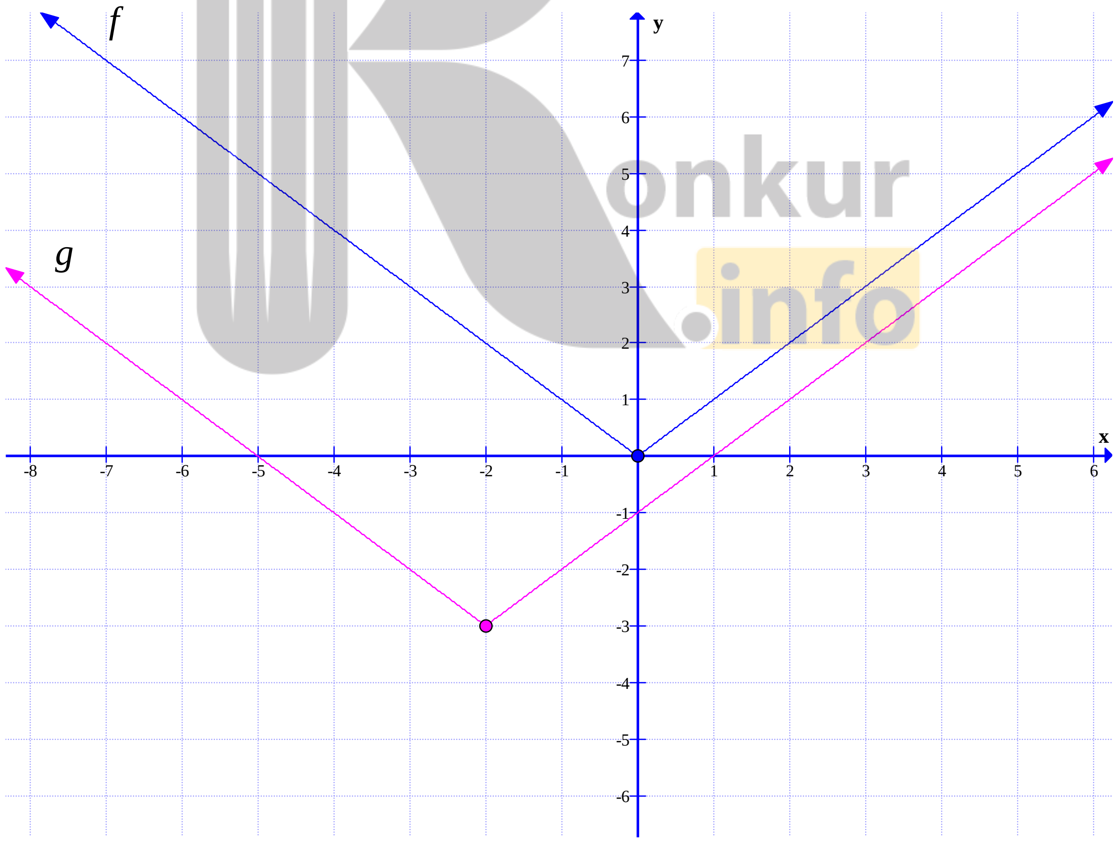
ب : نمودار تابع $g(x)=f(x-۲)$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

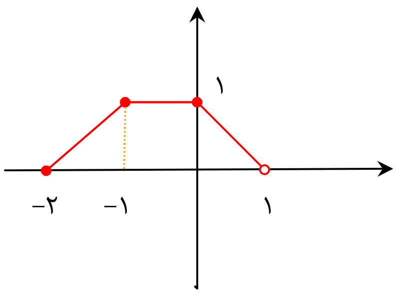
توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم[1]. بـه مثال زیر توجه کنید.

مثال : برای رسم نمودار تابع $g(x)=|x+۲|-۳$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



[1] . لازم نیست ترتیبی برای انتقال افقی و عمودی در نظر بگیریم.

تمرین ۳ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=f(x-۲)+۱$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

تمرین۴ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و سپس به کمک آن نمـودار توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف) $g(x)=\sin x+۲$ ب) $h(x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ج) $k(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})+۱$

***

ب : انبساط و انقباض عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف شده باشد،آنگاه

$$g(x_۰)=kf(x_۰)=ky_۰$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_۰,ky_۰)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنیم ولی طول نقـاط را ثابت نگه داریم.

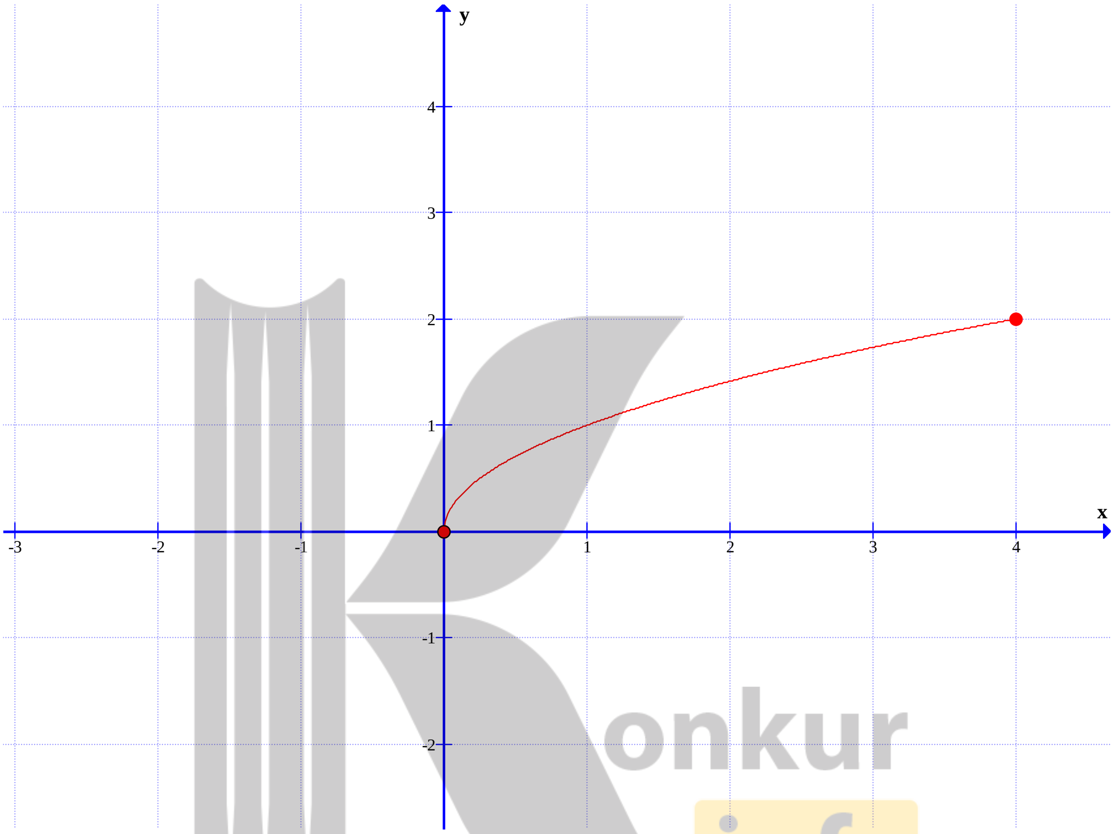
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[۰,۴]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=۳\sqrt{x}$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

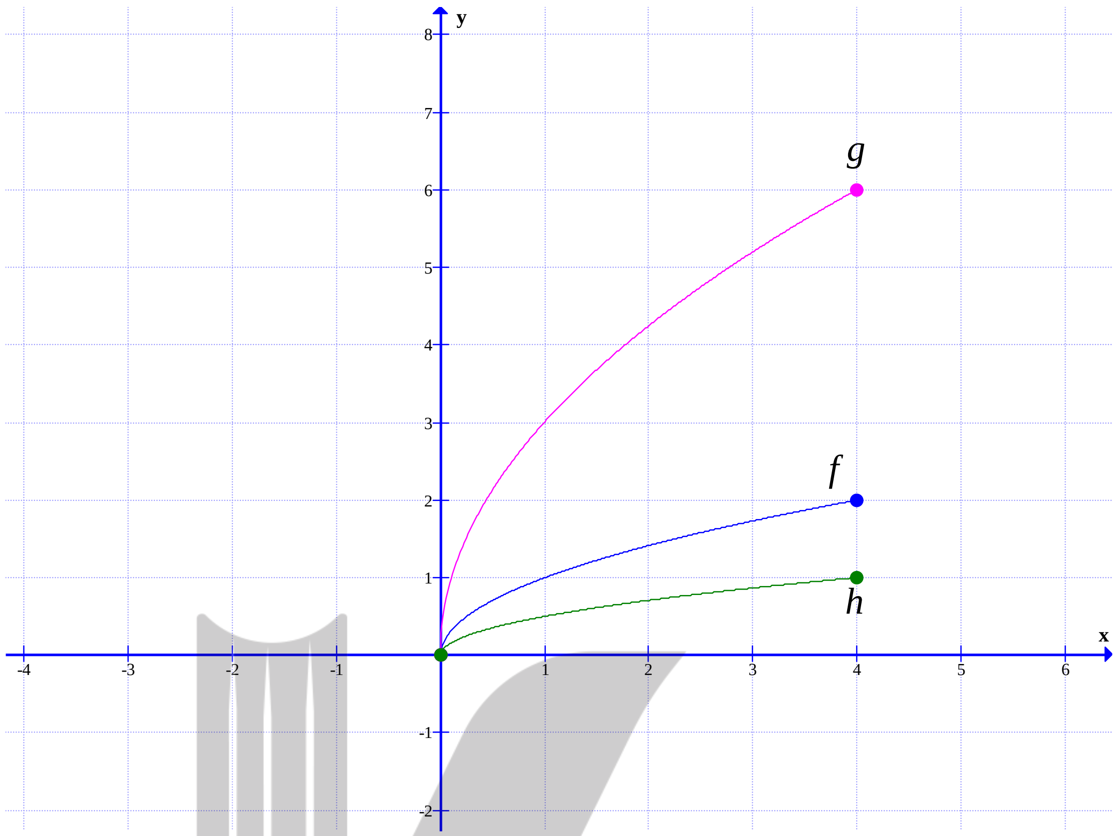
x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g طول نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم ولی عـرض نقـاط را در ضریب $f(x)$ ضرب می کنیم.

g	x	۰	۱	۴
	y	۰	۳	۶

h	x	۰	۱	۴
	y	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱



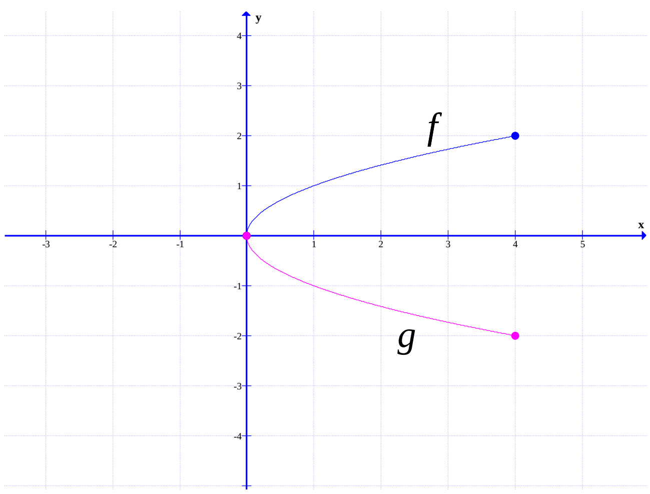
توجه :

۱ : اگر $k>1$ باشد. نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $0<k<1$ باشد. نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y=-f(x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-\sqrt{x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۵ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=۲\cos x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

***

ج : انبساط و انقباض افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{۱}{k}x_۰)=f(\frac{۱}{k}\times kx_۰)=f(x_۰)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{۱}{k}x_۰,y_۰)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی طول نقاط را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

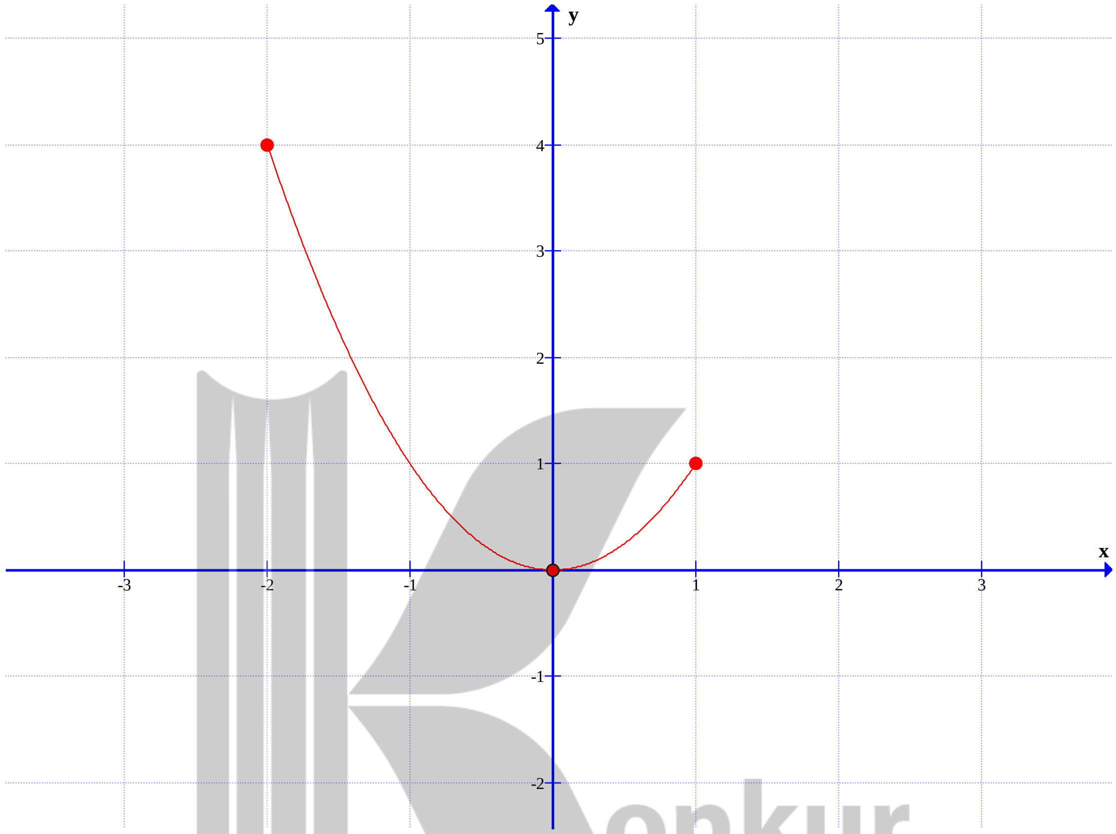
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=(۲x)^۲$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=(\frac{۱}{۳}x)^۲$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

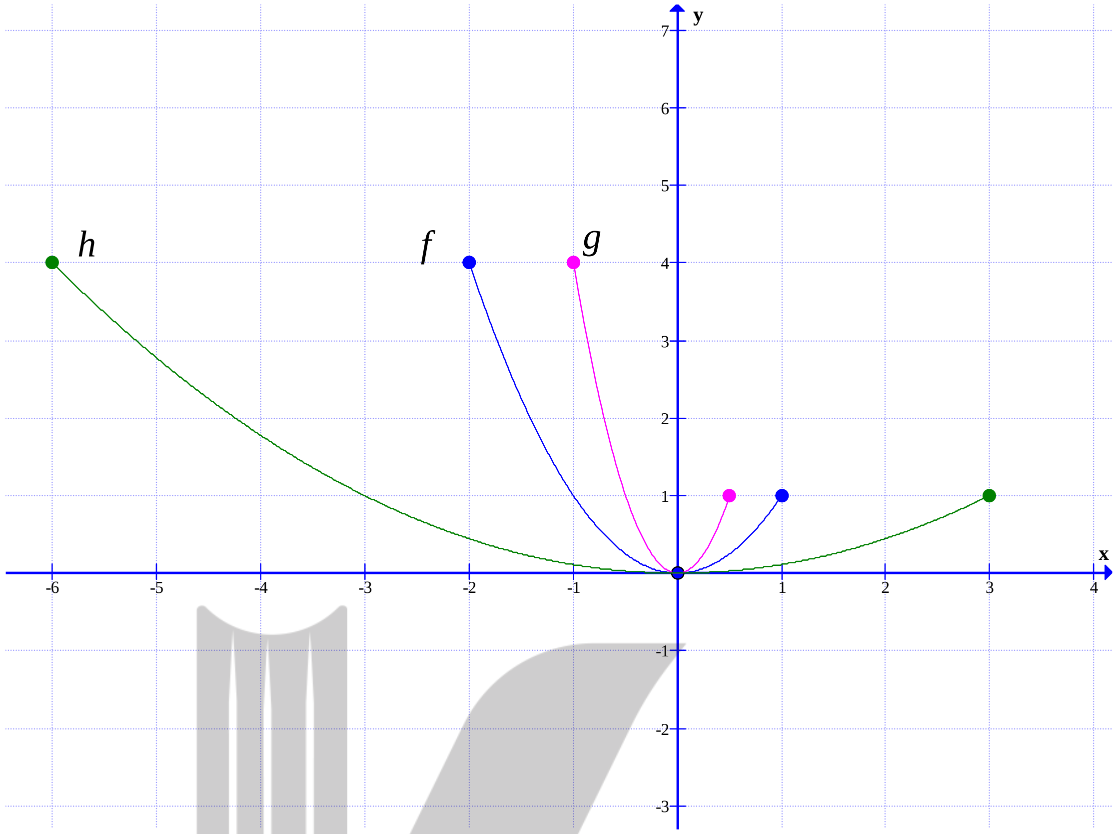
x	-۲	۰	۱
y	۴	۰	۱



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g عرض نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم ولی طـول نقـاط را در معکوس ضریب x ضرب می کنیم.

g	x	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$
	y	۴	۰	۱

h	x	-۶	۰	۳
	y	۴	۰	۱



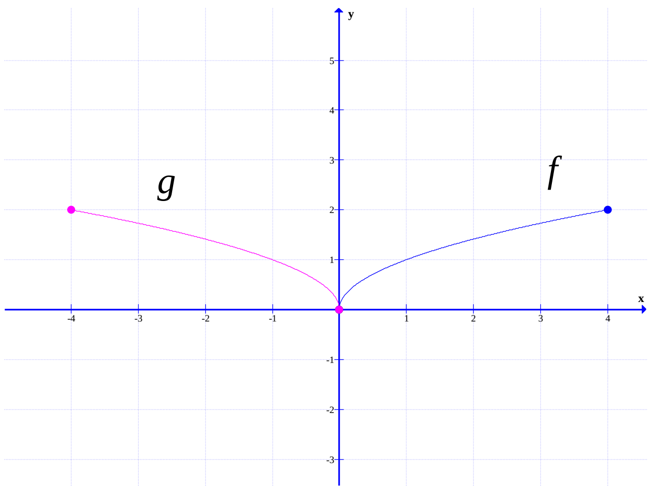
توجه :

۱ : اگر $k>1$ باشد. نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $0<k<1$ باشد. نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y=f(-x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۶ : نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=\sin ۲x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض های افقی و عمودی را با همدیگر انجام دهیم. برای مثال اگر نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=۳f(۲x)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{x_{\circ}}{۲})=۳f(۲\times\frac{x_{\circ}}{۲})=۳f(x_{\circ})$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_{\circ}}{۲},۳y_{\circ})$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=۳f(۲x)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را سه برابر کرده و طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می کنیم.

توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض های افقی و عمودی را به همراه انتقال عمودی یا افقی استفاده کنیم.

مثال الف : برای مثال اگر نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(۲x+۱)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(\frac{x_{\circ}-۱}{۲})=f(۲\times\frac{x_{\circ}-۱}{۲}+۱)=f(x_{\circ}-۱+۱)=f(x_{\circ})$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_{\circ}-۱}{۲},y_{\circ})$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی طول نقاط را ابتدا در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و سپس یک واحد از آن کم کنیم.

مثال ب : اگر نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(۲x)+۱$ تعریف شده باشد. آنگاه

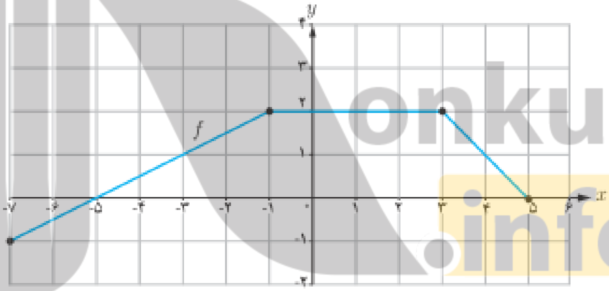
$$g(\frac{x_۰}{۲})=f(۲\times\frac{x_۰}{۲})+۱=f(x_۰)+۱=y_۰$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_۰}{۲},y_۰+۱)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x)+۱$، کافی است، طول نقاط نمودار $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و به عرض نقاط یک واحد اضافه کنیم.

تمرین ۷ : اگر نمودار تابع f به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $g(x)=f(۲x+۱)$ ب) $h(x)=f(۲x)-۳$ ج) $k(x)=۲f(x)-۱$

***

نتیجه : خلاصه‌ی آنچه که در این درس بیان شده است برای تابع $y=f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k به شکل زیر بیان می شود.

<table>
<tr><th>تابع جدید</th><th colspan="2">نحوه‌ی تبدیل</th><th>نتیجه</th></tr>
<tr><td>$y=f(x)+k$</td><td rowspan="3">طول نقاط ثابت می ماند.</td><td>به عرض نقاط k واحد اضافه می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(x)-k$</td><td>از عرض نقاط k واحد کم می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=kf(x)$</td><td>عرض نقاط در k ضرب می شود.</td><td>اگر ۰ < k < ۱
نمودار در جهت عمودی منقبض می شود.
اگر k > ۱
نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(x+k)$</td><td rowspan="3">عرض نقاط ثابت می ماند.</td><td>از طول نقاط k واحد کم می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(x-k)$</td><td>به طول نقاط k واحد اضافه می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(kx)$</td><td>طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود.</td><td>اگر ۰ < k < ۱
نمودار در جهت افقی منبسط می شود.
اگر k > ۱
نمودار در جهت افقی منقبض می شود.</td></tr>
</table>

تمرین برای حل :

۸ : نقطه‌ی $(-۸,۶)$روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. در هر یک از توابع زیر تعیین کنید که این نقطه بـه چه نقطه ای متناظر می شود.

۸- ۱) $g(x)=f(x)-۱$

۸- ۲) $g(x)=f(x)+۲$

۸- ۳) $g(x)=۳f(x)$

۸- ۴) $g(x)=f(۲x)$

۸- ۵) $g(x)=۳f(x-۱)$

۸- ۶) $g(x)=۵f(x+۱)+۲$

۹ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

۹- ۲) $g(x)=\sqrt{۲+x}$

۹- ۲) $g(x)=۲+\sqrt{x}$

۹- ۲) $g(x)=-۲\sqrt{x}$

۹- ۲) $g(x)=۲+\sqrt{x-۱}$

۹- ۲) $g(x)=\sqrt{۱-x}$

۹- ۲) $g(x)=\sqrt{۲x+۱}-۳$

۹ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنیـد. سـپس بـه کمـک تبـدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

الف) $g(x)=\cos ۲x-۱$

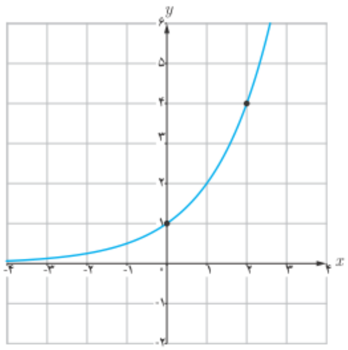
ب) $h(x)=۲\cos\frac{x}{۳}$

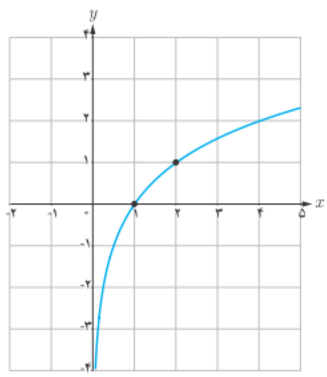
۱۰: در زیر نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=\log_۲^x$ و $y=\cos x$ رسم شده اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

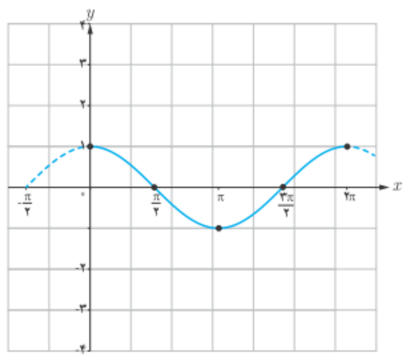
الف) $y=۲^{x-۱}+۲$

ب) $y=\log_۲^{x+۲}$

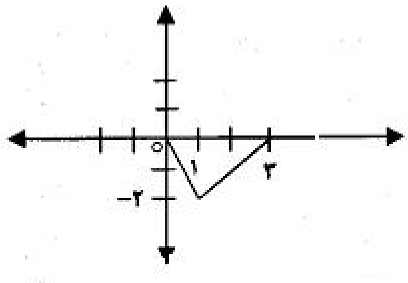
ج) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$







۱۱ : در زیر نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، سپس نمودار تابع $y = -۲f(x-۳)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۲ : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-۲,۱]$ و برد $(۱,۵]$ را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی های تبدیلات دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $g(x) = ۲f(x-۱) - ۳$

ب) $h(x) = f(\frac{۱}{۲}x) + ۱$

***

درس دوّم : تابع درجه۳ ، توابع یکنوا و تقسیم و بخش پذیری

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه‌ی۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع یکنوا می پردازیم و در نهایت تقسیم چندجمله ای ها و ویژگی های آن و همچنین بخش پذیری دو چندجمله ای را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : توابع چند جمله ای و تابع درجه۳

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می نامند.

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

الف) تابع ثابت

$f(x)=c$ تابع چندجمله ای از درجه صفر[1]

ب) تابع خطی

$f(x)=ax+b$ تابع چندجمله ای از درجه یک

ج) تابع درجه۲(سهمی)

$f(x)=ax^2+bx+c$ تابع چندجمله ای از درجه دو

د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ تابع چندجمله ای از درجه سه

مثال : نشان دهید که تابع زیر یک تابع چند جمله ای است. سپس درجه‌ی آن را بنویسید.

$$f(x)=x^2(1-x)^3$$

حل :

1 . برای تابع $f(x)=0$ درجه تعریف نمی شود.

$$f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۳}=x^{۲}(۱-۳x+۳x^{۲}-x^{۳})=x^{۲}-۳x^{۳}+۳x^{۴}-x^{۵}$$

این تابع چندجمله ای از درجه‌ی ۵ است.

توجه :

۱ : طبق تعریف توابع چندجمله ای، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و مثلثاتی چندجمله ای محسوب نمی شوند.

۲ : دامنه‌ی هر تابع چندجمله ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.(مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم.)

تمرین ۱ : تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله ای است. درجه‌ی توابع چندجمله ای را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x)=(x-۱)^{۲}+۳$

ب) $f(x)=\dfrac{۲x-۳}{x^{۲}+۵x-۱}$

پ) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۵x+۱}$

ت) $f(x)=|x-۲|$

ث) $f(x)=x(۲+x)(۲-x)+۱$

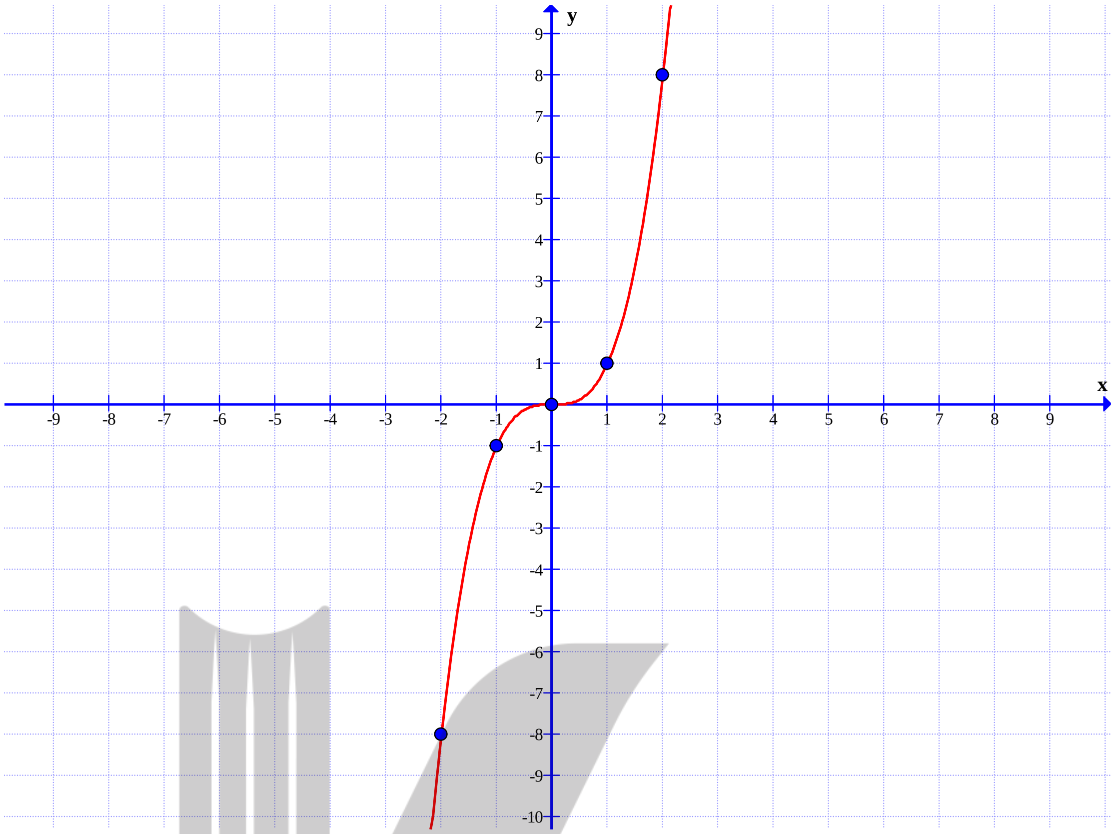
ج) $f(x)=\sin x$

ساده ترین تابع چندجمله ای درجه‌ی۳ به صورت زیر است.

$$f(x)=x^{۳}$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸



تمرین۲ : به دو طریق نشان دهید که تابع $f(x)=x^{۳}$ وارون پذیر است. سپس وارون آن را تعیین کنید.

تمرین۳ : به کمک رسم نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابـع زیـر را رسم کنید.

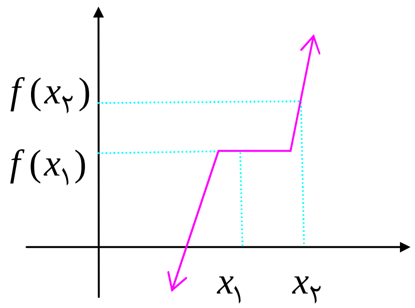
الف) $f(x)=(x+۱)^{۳}$ ب) $f(x)=-x^{۳}+۱$ ج) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$

***

قسمت دوّم : توابع یکنوا

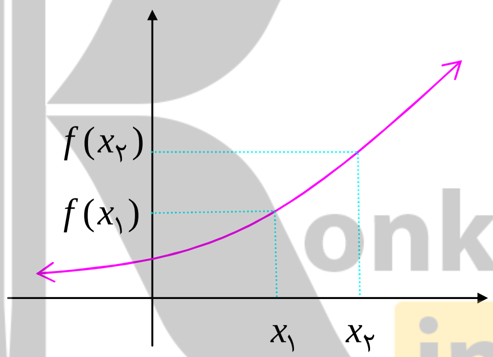
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f;x_1<x_2\rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$$



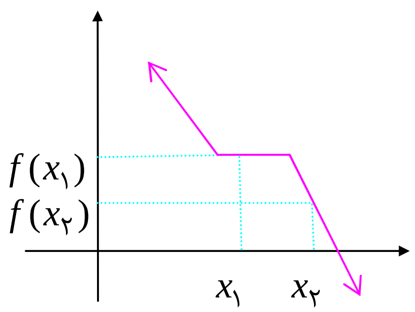
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f;x_1<x_2\rightarrow f(x_1)< f(x_2)$$



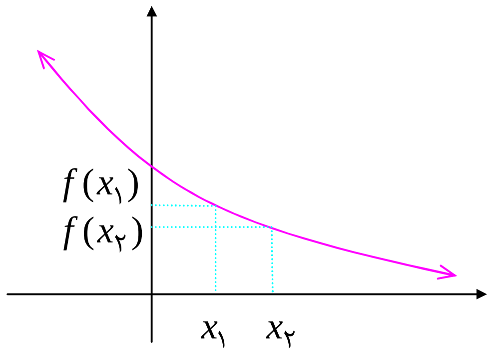
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f;x_1<x_2\rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$$



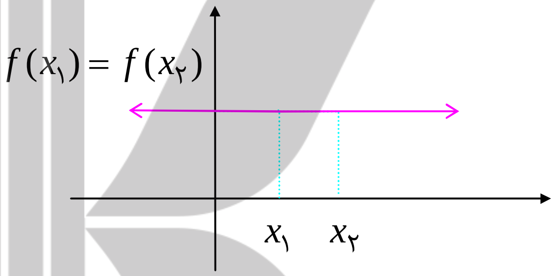
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش ثابت است، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$



توجه :

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می نامند.

۲ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است ولی یکنوا نیست.

۳ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

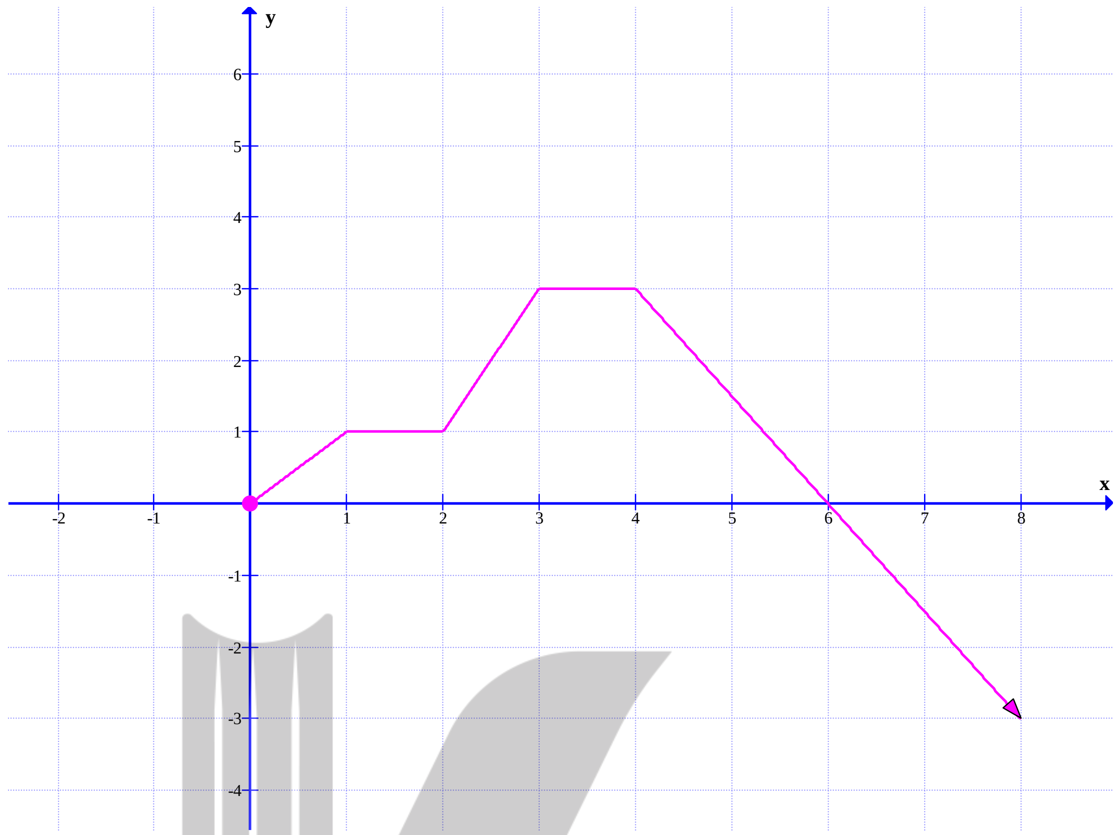
۴ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

تمرین۴ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب : نزولی یا صعودی بودن تابع در فاصله های زیر را بنویسید.

۱)[۰,۱]	۳)[۱,۴]	۵)[۳,۴]
۲) [۱,۲]	۴)[۳,۶]	۶)[۴,+∞)



تمرین ۵ : صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=[x-۱]$ را در دامنه اش به کمک تعریف بررسی کنید.

حل:

$f(x)=[x]-۱$

$x_۱<x_۲\to[x_۱]\le[x_۲]\to[x_۱]-۱\le[x_۲]-۱\to f(x_۱)\le f(x_۲)\Rightarrow$ تابع صعودی است.

تمرین۶ : صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کنید.

الف) $y=۲^{x+۱}$ ب) $y=-۳x+۲$

حل:

الف)

$x_۱<x_۲\to x_۱+۱<x_۲+۱\to ۲^{x_۱+۱}<۲^{x_۲+۱}\to f(x_۱)<f(x_۲)\Rightarrow$

تابع صعودی اکید است.

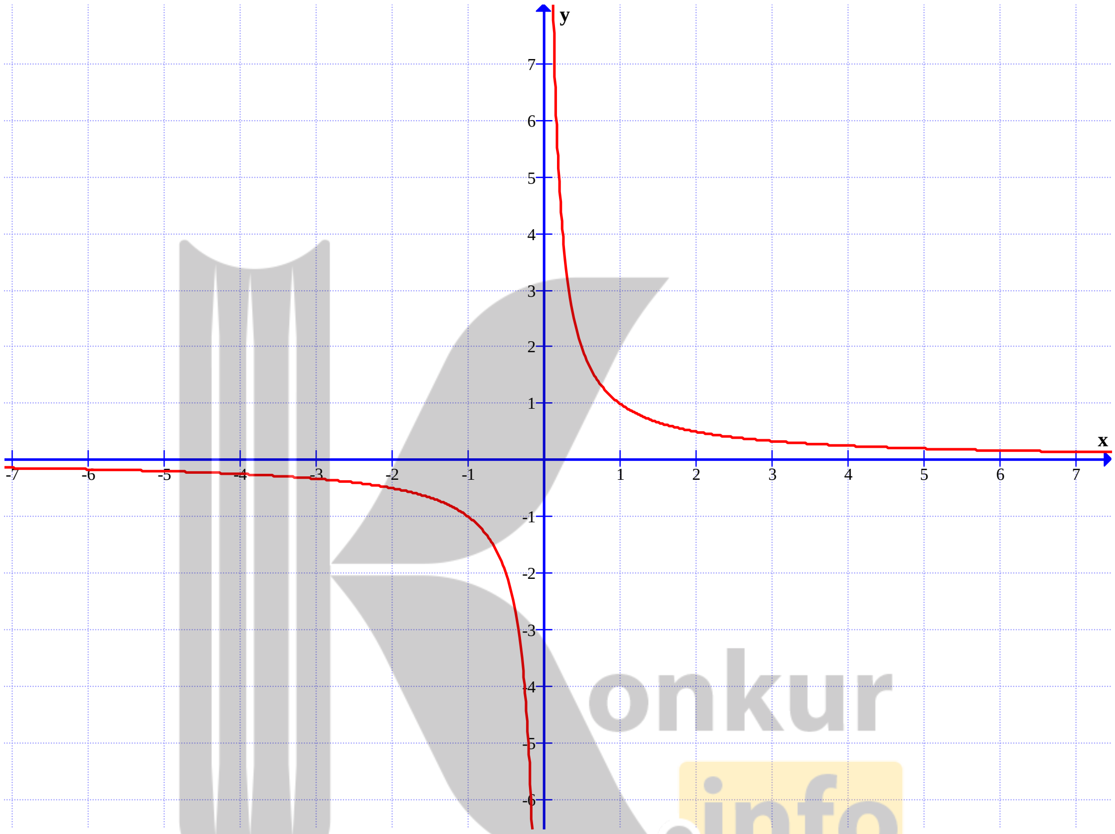
ب)

$x_۱<x_۲\to -۳x_۱>-۳x_۲\to -۳x_۱+۲>-۳x_۲+۲\to f(x_۱)>f(x_۲)\Rightarrow$

تابع نزولی اکید است.

توجه : اگر تابعی در یک فاصله شامل نقاط خارج از دامنه باشد، یکنوایی آن(صعودی و نزولی بودن) آن بررسی نمی شود.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید. واضح است که دامنه‌ی این تابع $R-\{۰\}$ است. همچنین این تابع نموداری به شکل زیر دارد.



بنابراین:

الف : تابع در فاصله‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی اکید است.

ب : تابع در فاصله‌ی $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است.

ج : تابع در فاصله‌ی $[-۱,۱]-\{۰\}$ ، نه صعودی و نه نزولی است.

د : صعودی و نزولی بودن تابع در یک فاصله شامل صفر، مثلاً $[-۱,۱]$ بررسی نمی شود.

تمرین۷ : ثابت کنید تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.

مثال : تابع $y=۲^{x+۱}$ صعودی اکید و تابع $y=-۳x+۲$ نزولی اکید است لذا یک به یک هستند.

تمرین برای حل :

۸ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله ای صعودی ، در چه فاصله ای نزولی و در چه فاصله ای ثابت است؟

الف) $f_۱(x)=|x+۲|-۳$

ب) $f_۲(x)=-x^۲-۶x+۱۰$

ج) $f_۳(x)=\sqrt{۱-x}$

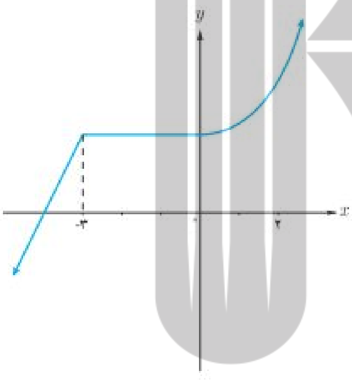
د) $f_۴(x)=|۱+x|+|۱-x|$

۹ : نمودار هر یک از توابع زیر را را رسم کنید. سپس تعیین کنید این تابع در چه فاصله ای صعودی و در چه فاصله ای نزولی است و در چه فاصله ای ثابت است؟

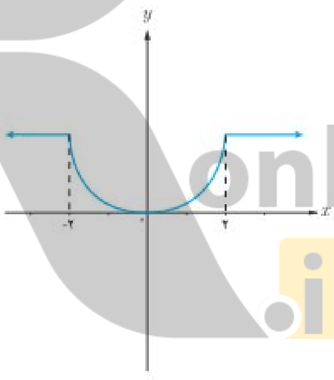
الف) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq -۱ \\ ۲ & x<-۱ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^۲ & x<-۲ \\ ۴ & -۲\leq x\leq ۱ \\ -x^۲-۲ & x>۱ \end{cases}$

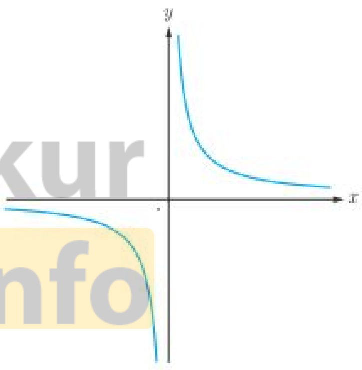
۱۰ : نمودار توابع f و g و h در زیر رسم شده اند.



$y=f(x)$



$y=g(x)$



$y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله هایی نزولی است؟

ج) تابع h در چه فاصله هایی اکیداً نزولی است؟

۱۱ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. تعیین کنید که کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود، اکیداً یکنوا است؟

الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$

ب) $g(x)=۲^{-x}$

ج) $h(x)=\log_۲^x$

۱۲ : تابع $f(x)=(x-۲)^{۳}+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

ج) ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را به دست آورید.

۱۳ : آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و نزولی باشد؟

۱۴ :

الف : اگر تابع f در یک فاصله اکیداّ صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب : اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۱۵: اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای $f-g$ می توان گفت؟

:۱۶

الف) فرض‌کنید تابع f در یک بازه اکیداّ صعودی باشد و bو a متعلق به این بازه باشند.اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\le b$

ب) اگر $\log(x+۱)\le\log(۲x-۳)$، حدود x را به دست آورید.

:۱۷

الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداّ نزولی باشد و b و a متعلق به این بازه باشند.اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴}\le(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود x را به دست آورید.

***

قسمت سوّم : تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

در سال های گذشته با تقسیم چندجمله ای ها بر یکدیگر آشنا شده اید. می دانید که برای تقسیم چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ که درجه‌ی $A(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه‌ی $B(x)$ باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می کنیم.

مقسوم   مقسوم علیه

$$\begin{array}{c|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \text{ خارج قسمت} \\ \cline{1-1} R(x) \text{ باقی مانده} & \end{array}$$

مرحله‌ی اوّل : ابتدا چند جمله ای های مقسوم ($A(x)$) و مقسوم علیه ($B(x)$) را استاندارد می کنیم.

مرحله‌ی دوّم : اوّلین جمله‌ی مقسوم را بر اوّلین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می کنیم (جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند.) و حاصل را به عنوان اوّلین جمله‌ی خارج قسمت قرار می دهیم.

مرحله‌ی سوّم : خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله ای مقسوم علیه ضرب می کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اوّلین باقی مانده را نتیجه می دهد.

مرحله‌ی چهارم: مانند مرحله‌ی دوّم ، این بار باقی مانده‌ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

توجه : مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه‌ی چندجمله ای باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-۳x^{۲}+۳x^{۳}+x^{۵}+۳x-۵)\div(۱+x^{۲})$$

حل : ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را استاندارد کرده و مطابق مراحل فوق عمل می کنیم.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+3x^3-3x^2+3x-5 & x^2+1 \\ \cline{2-2}
-x^5 - x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3+2x-3 \\ \cline{1-1}
2x^3-3x^2+3x-5 & \\
-2x^3 - 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
-3x^2+x-5 & \\
+3x^2+3 & \\ \cline{1-1}
x-2 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^5}{x^2}=x^3$$

$$\frac{2x^3}{x^2}=2x$$

$$\frac{-3x^2}{x^2}=-3$$

تمرین ۱۷ : تقسیم های زیر را انجام دهید و باقی مانده و خارج قسمت آنها را تعیین کنید.

۱) $(x^2-5x-1)\div(x-3)$

۲) $(3x^2+2x^3-4x-1)\div(x-1)$

۳) $(x^4-5x^2-1+7x)\div(-2+x)$

۴) $(x^5+1)\div(x^3+x^2-1)$

۵) $(x^3+x^2y-2y^3-xy^2)\div(x+y)$

تمرین۱۸ : مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم x^3+kx^2+2 بر $x-2$ برابر ۶ شود.

قضیه‌ی تقسیم

اگر چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ا ی غیر صفر $B(x)$ تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{r|l}
A(x) & B(x) \\ \cline{2-2}
\cdots & Q(x) \\ \cline{1-1}
R(x) &
\end{array}
$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x)+R(x)$$

$$\deg(R(x))<\deg(B(x))$$

مثال : تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱)\div(۲+x)$$

حل:

$$\begin{array}{r|l} -x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱ & x+۲ \\ \cline{2-2} {}_{+}x^{۳}-_{+}۲x^{۲} & -x^{۲}+۳x \\ \cline{1-1} ۳x^{۲}+۶x+۱ & \\ -۳x^{۲}+-۶x & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

$$\frac{-x^{۳}}{x}=-x^{۲} \qquad \frac{۳x^{۲}}{x}=۳x$$

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^{۲}+۳x)(x+۲)+۱=-x^{۳}-۲x^{۲}+۳x^{۲}+۶x+۱=-x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱$$

تمرین۱۹: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم $x^{۲}+kx+۱$ بر $x+۱$ برابر ۵ شود.

تمرین ۲۰ : مقدار k را چنان بیابید که چندجمله ای های $۳x^{۲}-۴x+۲$ و $kx^{۳}+۲x^{۲}-x$ در تقسیم بر $x+۱$ هم باقی مانده شوند.

بخش پذیری در چند جمله ای ها

چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود[2]. در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x)$$

تمرین ۲۱ : نشان دهید که $۳x^{۴}+۵x^{۳}+۶x^{۲}-۵+۷x$ بر $۳x+۵$ بخش پذیر است.

تمرین ۲۲ : نشان دهید که عبارت $۴x^{۵}-۳x^{۲}+x-۲$ بر $x-۱$ بخش پذیر است.

تمرین ۲۳ : مقدار k را طوری بیابید که $۴x^{۲}+kx+۲$ بر $x+۱$ بخش پذیر شود.

[2] . چند جمله ای $B(x)$ را عامل $A(x)$ نیز می نامند.

نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله ای $P(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c|c} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$P(x)=Q(x)\times(x-a)+R(x)$$

حال اگر قرار دهیم $x=a$

$$\Rightarrow P(a)=Q(a)\times\underbrace{(a-a)}_{\cdot}+R(a)\to P(a)=R(a)$$

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر $P(a)$ است.

تمرین ۲۴ : باقی مانده‌ی تقسیم $۳x^{۲}-۵x+۴$ بر $x-۱$ را حساب کنید.

تمرین ۲۵ : باقی مانده‌ی تقسیم $۲x^{۸}-۵x^{۲}+x+۳$ بر $x+۱$ را حساب کنید.

تمرین ۲۶ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ را حساب کنید. $(a\neq ۰)$

حل :

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R(x)$$

$$\to P(x)=a(x+\frac{b}{a})Q(x)+R(x)$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} P(-\frac{b}{a})=a\underbrace{(-\frac{b}{a}+\frac{b}{a})}_{\cdot}Q(-\frac{b}{a})+R(-\frac{b}{a})$$

$$\to P(-\frac{b}{a})=R(-\frac{b}{a})$$

یعنی برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ کافی است ریشه‌ی $ax+b$ را در عبارت $P(x)$ جایگزین کنیم.

نتیجه : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر $P(-\frac{b}{a})$ است.

تمرین ۲۷ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)=۴x^{۳}+۲x^{۲}-۳x+۵$ بر $۲x+۳$ را حساب کنید.

تمرین برای حل :

۲۸ : باقی مانده‌ی تقسیم $۳x^۲ - ۲x - ۸$ بر $x - ۲$ را حساب کنید.

۲۹ : مقدار m را طوری بیابید که $P(x) = x^۲ + mx - ۲$ بر $x - ۳$ بخش پذیر باشد.

۳۰ : نشان دهید که $P(x) = x^۴ - ۱۶$ بر $x - ۲$ بخش پذیر است.

۳۱ : باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^۳ + x - ۲$ بر $۲x + ۱$ را حساب کنید.

۳۲ : مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش پذیر باشد.

***

قسمت چهارم : معرفی چند اتحاد دیگر

در این جا در پی آن هستیم که چند اتحاد مفید دیگر را ارائه کنیم. در سال های قبل به یاد دارید که :

$$x^۲ - a^۲ = (x - a)(x + a)$$

$$x^۳ - a^۳ = (x - a)(x^۲ + ax + a^۲)$$

اکنون می خواهیم این اتحاد ها را تعمیم دهیم. برای این کار تمرین زیر را انجام دهید.

تمرین ۳۳ : از تقسیم $x^۴ - a^۴$ بر $x - a$ نشان دهید که

$$x^۴ - a^۴ = (x - a)(x^۳ + ax^۲ + a^۲x + a^۳)$$

نتیجه : برای هر عدد طبیعی n عبارت $x^n - y^n$ بر $x - y$ بخش پذیر است. همچنین :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + ... + xy^{n-۲} + y^{n-۱})$$

تمرین ۳۴ : عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^۵ - ۱$

ب) $x^۶ - ۶۴$

تمرین ۳۵ : اگر n فرد باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که :

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

حل : اگر در تساوی داده شده، مقدار y را به $-y$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x-(-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \ldots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون n فرد است لذا، $n-1$ زوج می باشد و .... . پس :

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

تمرین ۳۶ : عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^{7} + 128$$

حل :

$$A = x^{7} + 128 = x^{7} + 2^{7}$$

$$= (x+2)(x^{6} - x^{5}(2) + x^{4}(2)^{2} - x^{3}(2)^{3} + x^{2}(2)^{4} - x(2)^{5} + (2)^{6})$$

$$= (x+2)(x^{6} - 2x^{5} + 4x^{4} - 8x^{3} + 16x^{2} - 32x + 64)$$

تمرین ۳۷ : اگر n زوج باشد، به کمک فوق اتحاد ثابت کنید که :

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

حل : اگر در تساوی داده شده، مقدار y را به $-y$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$x^n - (-y)^n = (x-(-y))(x^{n-1} + x^{n-2}(-y) + \ldots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1})$$

از طرفی چون n زوج است لذا، $n-1$ فرد می باشد و ..... پس :

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

تمرین۳۸ : عبارت زیر را طوری تجزیه کنید که $x+2$ یک عامل آن باشد.

$$A = x^{4} - 16$$

توجه : اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد. به کمک اتحادهای فوق داریم:

الف :

$$a^n - ۱ = (a - ۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + a^{n-۳} + a^{n-۴} + ... + a^۲ + a + ۱)$$

مثال :

$$x^۷ - ۱ = (x - ۱)(x^۶ + x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱)$$

ب : در حالتی که n فرد باشد.

$$a^n + ۱ = (a + ۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + a^{n-۳} - a^{n-۴} + ... + a^۲ - a + ۱)$$

مثال :

$$x^۷ + ۱ = (x + ۱)(x^۶ - x^۵ + x^۴ - x^۳ + x^۲ - x + ۱)$$

مثال : عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^۷ - x^۳$$

حل :

$$A = x^۷ - x^۳ = x^۳(x^۴ - ۱) = x^۳(x - ۱)(x^۳ + x^۲ + x + ۱)$$

تمرین برای حل :

۳۹ : عبارت $x^۶ - ۱$ را طوری تجزیه کنید که $x - ۱$ یک عامل آن باشد.

۴۰ : عبارت $x^۶ - ۱$ را طوری تجزیه کنید که $x + ۱$ یک عامل آن باشد.

۴۱ : عبارت $x^۵ + ۳۲$ را طوری تجزیه کنید که $x - ۲$ یک عامل آن باشد.

۴۲ : تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $x^۵ - y^۵ =$

۲) $x^۴ - y^۴ =$

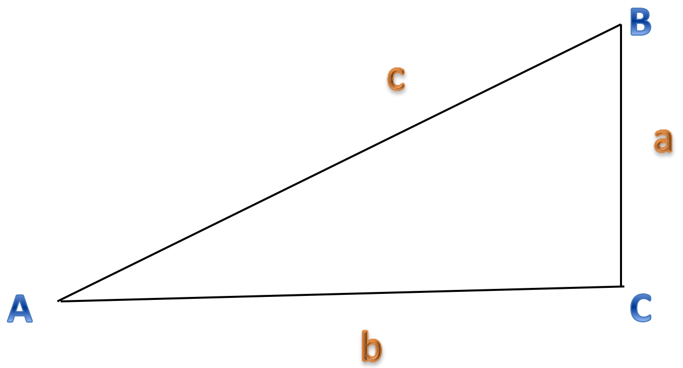
۳) $۱ - x^۶ =$

۴) $x^۵ - ۳۲y^۵ =$

***

نسبت های مثلثاتی

- **نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه**



$$\sin_{\hat{A}} = \frac{a}{c} \qquad \tan_{\hat{A}} = \frac{a}{b}$$

$$\cos_{\hat{A}} = \frac{b}{c} \qquad \cot_{\hat{A}} = \frac{b}{a}$$

- **نسبت های مثلثاتی زاوایای متمم**

به دو زاویه ای که مجموع آن ها برابر ۹۰ درجه باشد ، زاوایای متمم می گویند.

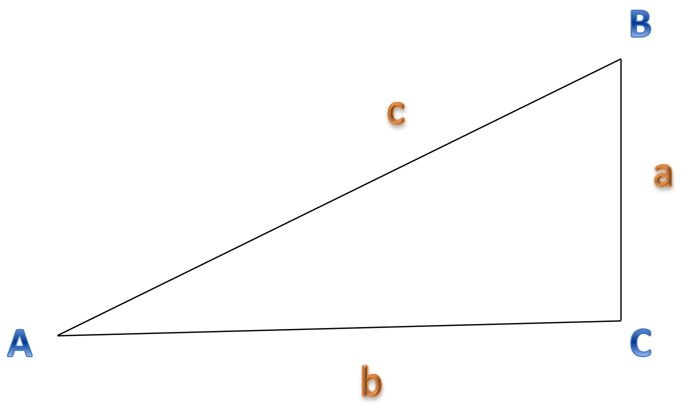
$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = tan\alpha$$

همچنین در هر مثلث قائم الزاویه ای داریم:



$$\hat{A} + \hat{B} = ۹۰$$

$$\sin_{\hat{A}} = \cos_{\hat{B}} \qquad \cos_{\hat{A}} = \sin_{\hat{B}}$$

$$\tan_{\hat{A}} = \cot_{\hat{B}} \qquad \cot_{\hat{A}} = \tan_{\hat{B}}$$

- نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم $\frac{\pi}{۲}$ رادیان اختلاف دارند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\tan\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی زوایای مکمل**

به دو زاویه ای که مجموعشان برابر ۱۸۰ درجه باشد، زوایای مکمل می گویند.

$$\sin(\pi - \alpha) = sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی برای دو زاویه ای که با هم π رادیان اختلاف دارند.**

$$\sin(\pi + \alpha) = -sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = cot\alpha$$

- **نسبت های مثلثاتی دو زاویه قرینه**

$$\sin(-\alpha) = -sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -cot\alpha$$

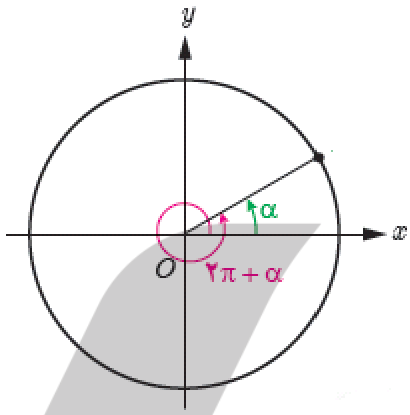
• نسبت های مثلثاتی زوایای هم انتها

زاویه هایی مانند α و ۲π + α که انتهای کمان های آن ها بر هم منطبق می شود را زوایای هم انتها گویند.

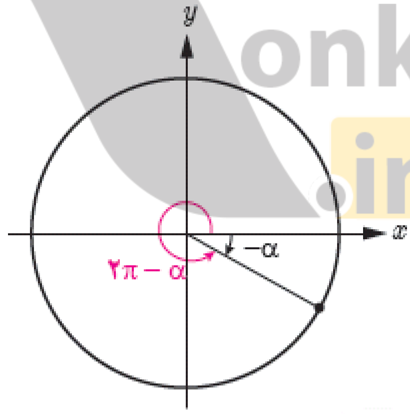
$$\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha \qquad \cot(۲k\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

دقت شود که k هر عدد صحیحی می تواند باشد.



با استدلالی مشابه از آنجا که زوایای α− و $۲k\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند، نسبت های مثلثاتی زوایای α− و $۲k\pi - \alpha$ نیز با هم برابرند.



مثال: نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را بدست آورید.

a) $\frac{-۷\pi}{۶}$ b) ۳۹۰ c) $\frac{۱۱\pi}{۶}$

پاسخ)

a)

$$\sin\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \tan\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\left(\frac{-۷\pi}{۶}\right) = \cot\left(-\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\cot\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\sqrt{۳}$$

b)

$$\sin(۳۹۰) = \sin\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۳۹۰) = \cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۳۹۰) = \tan\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = tan\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۳۹۰) = \cot\left(۲\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = cot\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \sqrt{۳}$$

c)

$$\sin\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{۱}{۲}$$

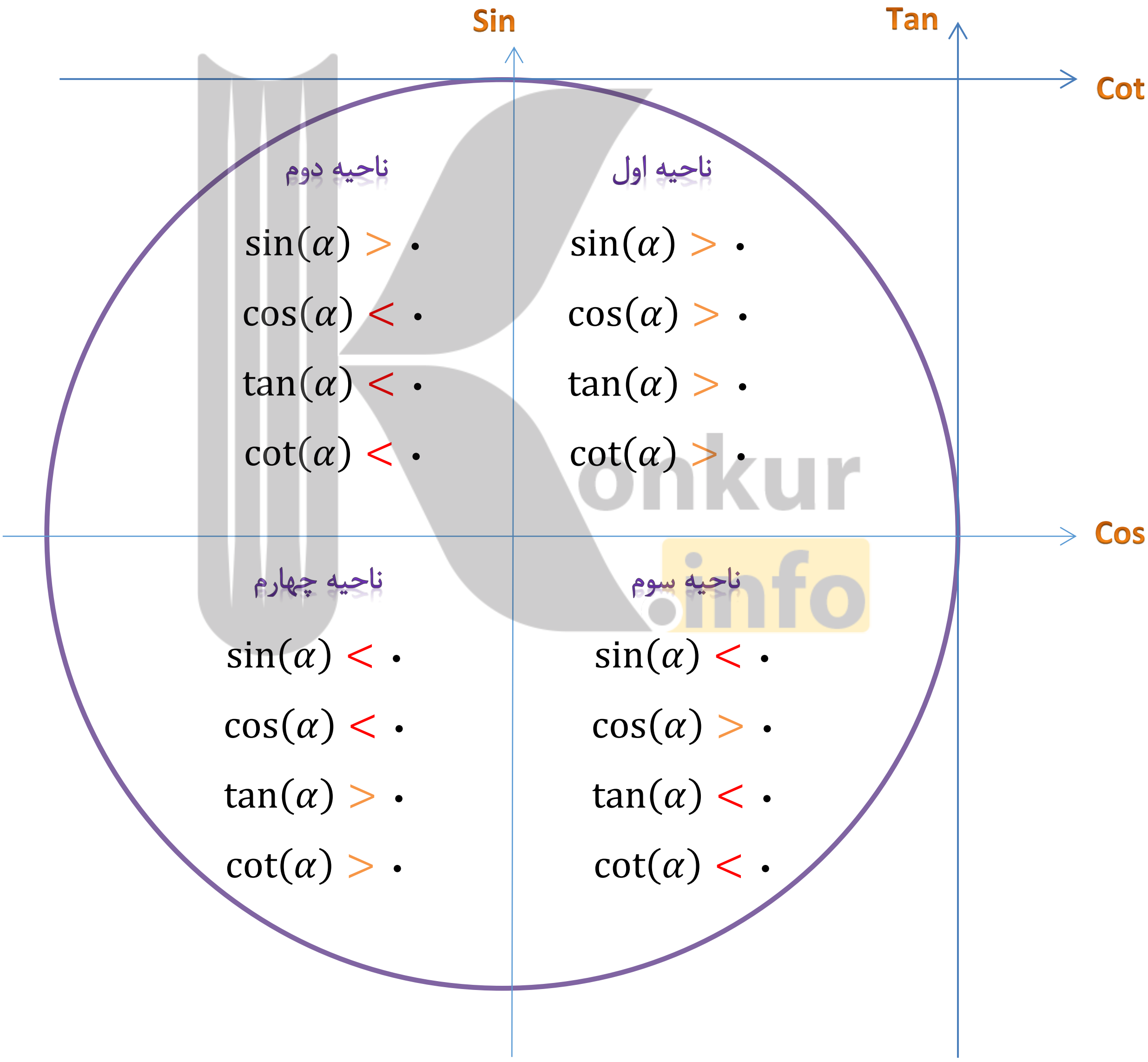
$$\cos\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right) = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\sqrt{۳}$$

نکته: هر گاه انتهای کمان زاویه ای در ناحیه ی

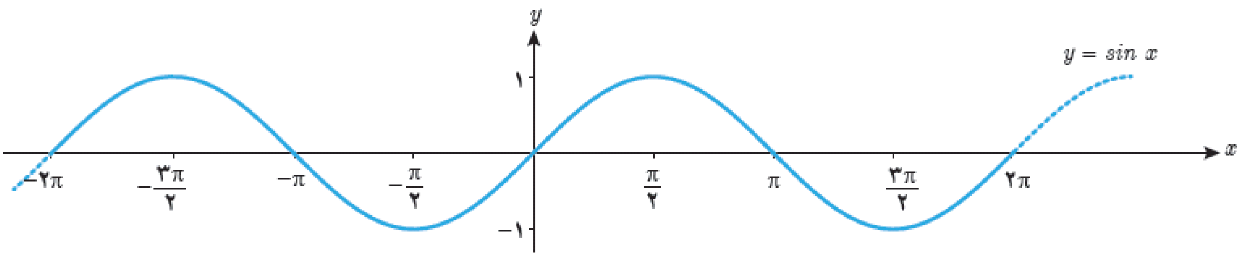
- **اول** باشد، همه ی نسبت های مثلثاتی آن زاویه **مثبت** اند.
- **دوم** باشد، فقط sin **مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** هستند.
- **سوم** باشد، sin و cos **منفی** و tan و cot **مثبت** اند.
- **چهارم** باشد، فقط cos **مثبت** و بقیه نسبت ها **منفی** اند.



توابع مثلثاتی

- **sin**

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع sin x همواره x را برحسب رادیان در نظر میگیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.به طور مثال منظور از sin ۴ سینوس ۴ رادیان و منظور از $\sin ۴^{\circ}$ سینوس ۴ درجه است.

نکته ۲: تابع sin x در بازه هایی به طول ۲π تکرار می شود یعنی داریم:

$$\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

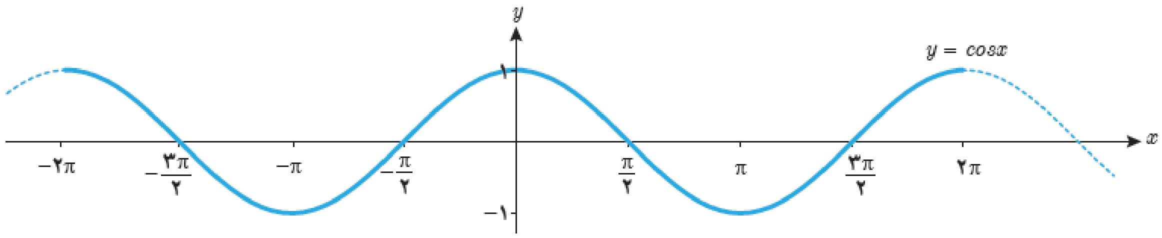
نکته ۳: دامنه تابع sin کل اعداد حقیقی(R) و برد آن بازه بسته $\left[-۱ \text{ و } +۱\right]$ می باشد.

نکته ۴: تابع sin محور x هارا در ضرایب صحیح π قطع می کند.

نکته ۵: گاهی به نمودار تابع $y = sinx$ موج سینوسی می گویند.

- **cos**

نمودار این تابع به شکل زیر است:



نکته ۱: در تابع cos x همواره x را برحسب رادیان در نظر می گیریم مگر اینکه صریحا گفته شود x بر حسب درجه است.

نکته ۲: تابع cos x در بازه هایی به طول ۲π تکرار می شود یعنی داریم:

$$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

نکته۳: دامنه تابع cos کل اعداد حقیقی(R) و برد آن بازه بسته $\left[-۱ \text{ و } +۱\right]$ می باشد.

نکته۴: تابع cos محور x هارا در ضرایب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$ قطع می کند.

نکته۵: گاهی به نمودار تابع $y = cosx$ موج کسینوسی می گویند.

نکاتی در مورد رسم نمودار توابع مثلثاتی به کمک انتقال:

۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(x-\theta)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+\theta)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه θ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

۳) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)-a$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را به اندازه a واحد به سمت بالا پایین دهیم.

۵) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

۷) برای رسم نمودار تابع $y=f(ax)$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

۸) برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{x}{a})$ کافی است طول همه ی نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را a برابر کنیم.

۹) برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

۱۰) برای رسم نمودار تابع $y=\frac{1}{k}f(x)$ کافی است عرض همه ی نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

۱۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در سمت چپ محور xها قرار دارد را حذف و سمت راست محور xها را در سمت چپ قرینه کنیم.

۱۲) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم سپس آن قسمت از نمودار را که در زیر محور yها قرار دارد را حذف و قرینه آن را در بالای محور yها رسم کنیم.

اتحاد های مثلثاتی

- $\sin^۲ x + cos^۲ x = ۱$
- $\sin^۲ x = ۱ - cos^۲ x$
- $cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $\tan x = \frac{۱}{\cot x}$
- $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$
- $\tan x \times \cot x = ۱$
- $۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \qquad (\cos \alpha \neq ۰)$
- $۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x} \qquad (\sin \alpha \neq ۰)$

به کمک روابط بالا می توانیم اتحاد های کمکی زیر را استخراج کنیم:

$$(\sin x \pm \cos x)^۲ = ۱ \pm ۲ \sin x \times \cos x$$

$$\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\sin^۶ x + \cos^۶ x = ۱ - ۳\sin^۲ x \cos^۲ x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \times \cos x}$$

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

$$\sin(x+y)=\sin x\times\cos y+\cos x\times\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\times\cos y-\cos x\times\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\times\cos y-\sin x\times\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\times\cos y+\sin x\times\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\times\tan y}$$
$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\times\tan y}$$

چند اتحاد پر کاربرد و مهم

$$\sin(۲x)=۲\sin x\times\cos x$$
$$\cos(۲x)=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$$

از رابطه بالا دو اتحاد مهم زیر بدست می آید که به فرمول های توان شکن معروف اند:

$$\cos^{۲}x=\frac{۱+\cos(۲x)}{۲}$$
$$\sin^{۲}\mathrm{x}=\frac{۱-\cos(۲\mathrm{x})}{۲}$$

نکته تستی: با استفاده از اتحاد های مجموع و تفاضل به رابطه مهم زیر می رسیم:

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{۲}\sin(x\pm\frac{\pi}{۴})$$
$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

حد و پیوستگی

مفهوم حد و فرایند های حدی

همسایگی

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می نامیم.

یعنی اگر $x_0 \in (a,b)$ آنگاه بازه (a,b) یک همسایگی x_0 است.

اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b) - \{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می نامیم.

همسایگی راست x_0

اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x_0, x_0 + r)$ را یک همسایگی راست x_0 می نامیم.

همسایگی چپ x_0

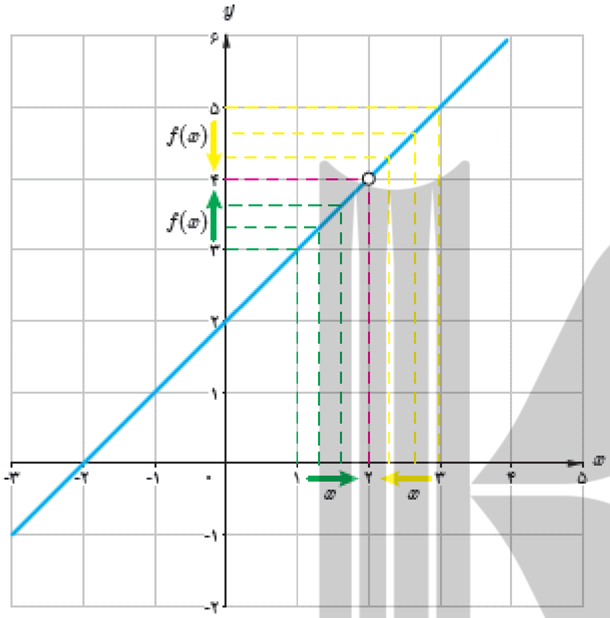
اگر $r > 0$ باشد، بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم.

تعریف حد تابع

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد. می گوییم **حد تابع f وقتی x به a نزدیک می شود برابر عدد حقیقی L است** و می نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

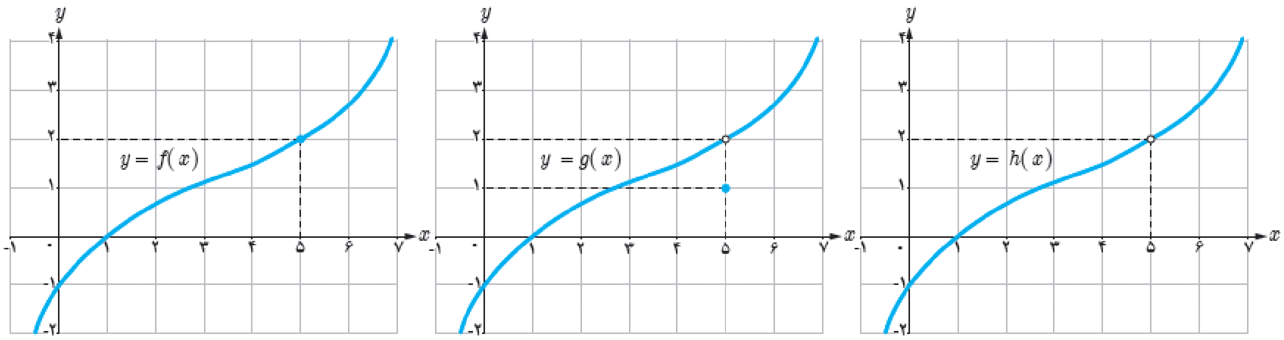
عدد L را حد تابع f در نقطه a می نامیم.



تابع f(x)=x+۲ را در نظر بگیرید که نقطه (۲،۴) از آن جدا شده باشد. همانطور که در نمودار این تابع مشاهده می کنید وقتی که x را با مقادیر بزرگ تر یا کوچک تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می کنیم. مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می شوند. در این حالت می گوییم حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می شود برابر ۴ است و می نویسیم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۴$$

نکته: نمودار سه تابع g،f و h را در نظر بگیرید.



بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه چند حالت وجود دارد که در زیر به سه مورد آن اشاره می کنیم:

۱. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد و حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در این نقطه برابر باشد.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

مانند تابع f که حدش با مقدارش در نقطه ۵ برابر است.

$$\lim_{x \to ۵} f(x) = f(۵) = ۲$$

۲. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد باشد ولی حد تابع در نقطه a با مقدار تابع در همان نقطه برابر نباشد.

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

مانند تابع g که حدش با مقدارش در نقطه ۵ برابر نیست.

$$\lim_{x \to ۵} g(x) = ۲$$

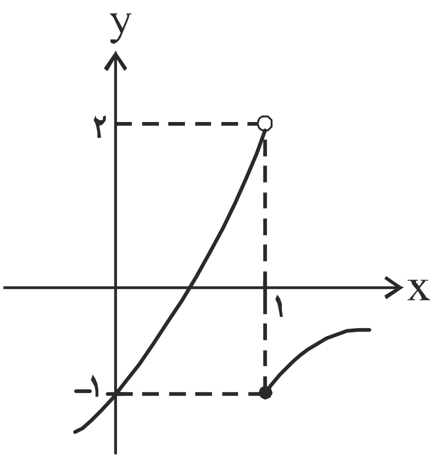
$$g(۵) = ۱$$

۳. تابع در نقطه $a \in R$ تعریف نشده باشد ولی در نقطه a حد داشته باشد.

مانند تابع h که در نقطه ۵ تعریف نشده است ولی در این نقطه دارای حد می باشد.

$$\lim_{x \to ۵} h(x) = ۲$$

حد های یک طرفه



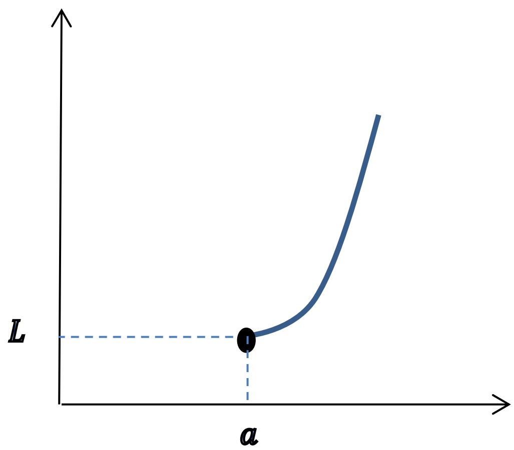
نمودار تابعی مانند f(x) را در نظر بگیرید:

در این تابع می بینیم که اگر متغیر x را با مقادیر **کوچک تر** از ۱ به ۱ نزدیک کنیم مقادیر f(x) به عدد ۲ نزدیک می شوند و اگر متغیر x را با مقادیر **بزرگ تر** از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، مقادیر f(x) به عدد ۲- نزدیک می شوند. در این صورت می گوییم حد تابع f در نقطه ۱ وجود ندارد ولی تابع در این نقطه دارای حدود چپ و راست می باشد.

حد راست

اگر تابع f در یک **همسایگی راست** نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم **حد راست** تابع f در نقطه x = a برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک شود.

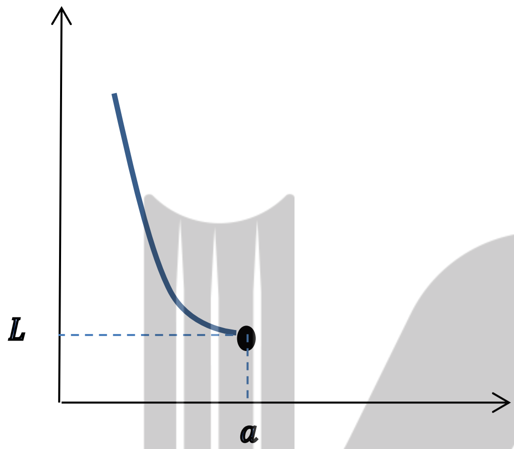
در این صورت می نویسیم: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$



حد چپ

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد چپ تابع f در نقطه x=a برابر عدد L است هرگاه تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

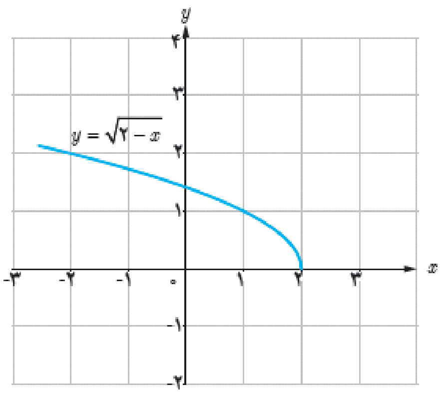


نکته: حد تابع f در نقطه $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x = a$ موجود و با هم برابر باشند.

با توجه به نکته بالا می توان گفت که حد تابع f در نقطه $x = a$ موجود نیست اگر:

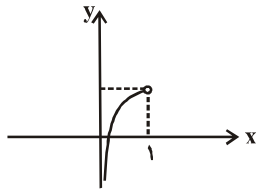
۱. حد چپ و راست در نقطه a موجود ولی دو مقدار متفاوت داشته باشند.
۲. یکی از حد های چپ یا راست وجود نداشته باشد(تابع در همسایگی چپ یا راست تعریف نشده باشد.

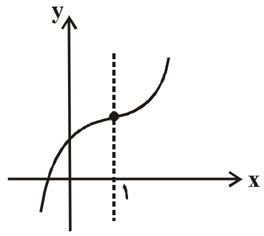
به طور مثال تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ در نقطه $x = ۲$ حد ندارد چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.

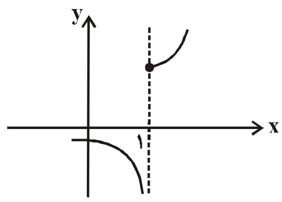


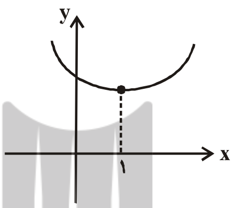
مثال ۱:

کدام‌یک از نمودارهای زیر نشان دهنده‌ی تابعی است که در نقطه‌ی $x=1$ حد راست دارد ولی حد چپ ندارد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ)

در گزینه‌های «۲» و «۴» تابع موردنظر در $x=1$ دارای حد راست و چپ می‌باشد. در گزینه‌ی «۱» تابع حد چپ دارد و حد راست ندارد و در گزینه‌ی «۳» تابع حد راست دارد ولی حد چپ ندارد.

مثال ۲: حد چپ تابع $y=\left[\frac{1}{x}\right]$ در نقطه‌ی $x=\frac{-1}{10}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱۱

۲) ۹-

۳) ۱۰-

۴) ۱۱-

پاسخ)

گزینه‌ی «۳»

وقتی $x \to \left(\frac{-1}{10}\right)^-$، یعنی $x < \frac{-1}{10}$ پس $\frac{1}{x} > -10$، لذا:

$$\left[\frac{1}{x}\right]=-10$$

نکته:اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آن ها در a وجود داشته باشد آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند یعنی:

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ **آنگاه:**

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

بنابراین دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به جز احتمالا خود a) با هم برابر باشند، مقدار حد آن ها نیز در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

به طور مثال مقدار حد راست تابع $f(x) = \frac{[x]}{x}$ **در نقطه x=۰ برابر صفر است چون در این ناحیه تابع f با تابع g(x)=۰ برابر است.**

قضایای حد

قضیه ۱: حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر نقطه دلخواه برابر مقدار ثابت c است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

قضیه ۲: هر چند جمله ای مانند $p(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله ای در نقطه a برابر است یعنی:

$$\lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0$$

قضیه ۳: اگر دو تابع g و f در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = L_1 . L_2$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

قضیه ۴: فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شه باشد،آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال ۱: اگر f و g در اطراف $x=a$ تعریف شده و هر دو در این نقطه دارای حد باشند و $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)=-۶$ ، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to a}(f^۲+g^۲)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ)

گزینه‌ی «۲»

اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_۲$ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_۱+L_۲=۱\\ \lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)=L_۱L_۲=-۶\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}L_۱=۳,L_۲=-۲\\ \text{یا}\\ L_۲=۳,L_۱=-۲\end{array}\right.$$

$$\lim\limits_{x\to a}(f^۲+g^۲)(x)=\lim\limits_{x\to a}f^۲(x)+\lim\limits_{x\to a}g^۲(x)=۹+۴=۱۳$$

مثال ۲: اگر $f(x)=\begin{cases}۳x^۲+x-۲ & x>۰\\ ۵x+۱ & x<۰\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) -۴

پاسخ)

گزینه‌ی «۲»

$$\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱}{۲x}-\frac{x}{۲})=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(\frac{۱-x^۲}{۲x})=f(\frac{۰^+}{-۲})=f(۰^-)=۵(۰)+۱=۱$$

حد تابع

یادآوری ۱- حد توابع جبری به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن

هر گاه در محاسبه حد به حالتی رسیدید که هم صورت و هم مخرج صفر شده بود این حالت را مبهم نامیده و سعی می کنیم این حالت را رفع کنیم. برای این کار باید عاملی که باعث صفر شدن صورت و مخرج شده است را پیدا کرده و آن را از صورت و مخرج حذف کنیم. در بیشتر مواقع وقتی $x \to a$ عبارت $x-a$ را عامل صفر کننده ی صورت و مخرج میدانیم.

پس باید سعی کنیم $x-a$ را از صورت و مخرج بیرون بکشیم. در چند جمله ای ها این کار را با تقسیم بر $x-a$ انجام میدهیم.

مثال: حدهای خواسته شده زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{1-x^2}$

ب) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

پ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{3-4x+x^2}$

ت) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-3x-2}$

یادآوری ۲ - حد توابع رادیکالی به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن

در توابع رادیکالی برای از بین بردن رادیکال که بتوانیم $x-a$ را بیرون بیاوریم باید به فرجه دقت کنیم. اگر فرجه زوج باشه اتحاد مزدوج و اگر با فرجه ۳ مواجه بودید از اتحاد چاق و لاغر کمک بگیرید تا عامل $x-a$ بیرون بیاید.

مثال: حدهای خواسته شده را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16}$

ب) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{3-\sqrt{x+3}}{x-6}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\frac{2x^2-x-3}{4x^2-4x-3}$

ت) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{1-x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}} \dfrac{۲x+\sqrt{x}-۱}{۴x-۱}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-۴\sqrt{x}+۳}{۱-x^{۲}}$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. خرداد۹۸ تجربی

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}$$

مثال: حد تابع روبرو را در صورت وجود بیابید. تیر ۹۸ تجربی

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^{۲}-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۲x-۳}{x-\sqrt{x+۶}}$$

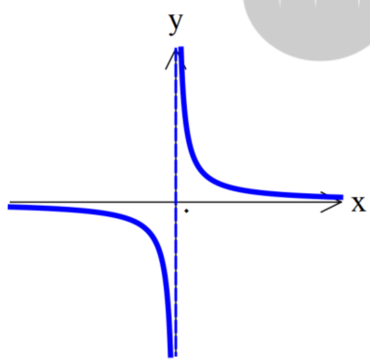
حد نامتناهی

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد. مفهوم $\lim_{x\to a^{+}} f(x)=+\infty$ این است که مقدار تابع f میتواند از هر عدد مثبتی بیشتر شود هر گاه x بتواند از سمت راست به مقدار دلخواه به a نزدیک شود.

و مفهوم این است که $\lim_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$ این است که مقدار تابع میتواند از هر عدد منفی کمتر شود هرگاه x بتواند از سمت چپ به مقدار دلخواه a به نزدیک شود.

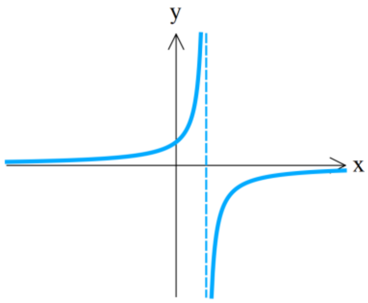
در شکل زیر میخواهیم حد تابع را اطراف $x=۰$ بررسی کنیم:

یعنی باید بررسی کنیم وقتی از سمت راست به $x=۰$ نزدیک میشویم چه اتفاقی برای $f(x)$ میفتد و وقتی از سمت چپ به $x=۰$ نزدیک میشویم چه اتفاقی برای $f(x)$ میفتد.

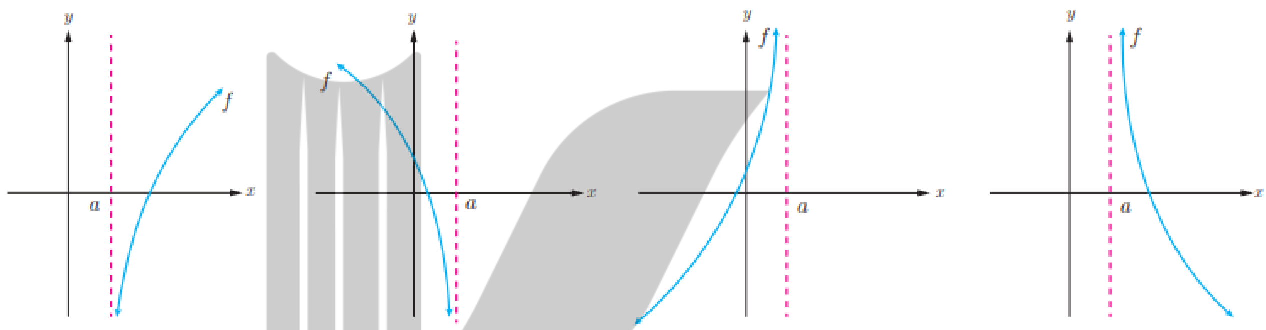


$$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۱}{x}=-\infty \quad و \quad \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱}{x}=+\infty$$

📖 **مثال:** در شکل زیر تابع f رسم شده است. $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ را بیابید.



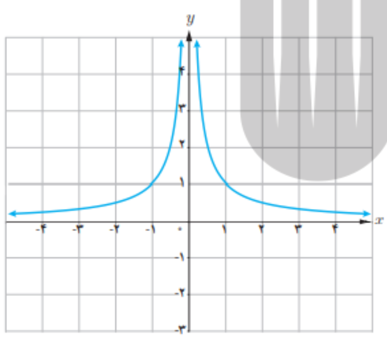
📖 **مثال:** در شکل های زیر حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.



$\lim_{x\to a^+} f(x)=$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=$ $\lim_{x\to a^-} f(x)=$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=$

📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ به صورت روبرو است. حاصل

$\lim_{x\to ۰} f(x)$ ؟



📖 **مثال:** نمودار تابع را $f(x)=\log_۳^{x+۱}$ رسم کنید و از روی شکل حاصل حد $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

قضایای حدهای نامتناهی

۱) اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n = ج \\ -\infty & n \neq ج \end{cases}$

۲) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ آنگاه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه a حد نامتناهی (بینهایت) دارد و علامت بی نهایت را با توجه به علامت L و علامت مقادیر تابع مخرج در همسایگی محذوف مورد نظر تعیین می کنیم.

مثال: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x+4}{2-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x}{1-x^2}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ شهریور۹۸

ت) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+1}{(x+3)^2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x+1}{|x-2|}$

ج) $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{[x]-3}{x+2}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x^2}$ خرداد۹۹

نکته: در توابعی که مثلثاتی هستند حتماً باید دقت کنید که تابع مثلثاتی داده شده در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد و علامت مخرج را از روی ربع دایره مشخص کنید.

📖 **مثال:** حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} \tan x$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}} \tan x$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \cot x$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} \cot x$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱}{۱-\cos x}$ شهریور۹۸تجربی

📖 **مثال:** حد تابع زیر را بدست آورید. $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} \dfrac{[x]-۳}{x-۳}$

📖 **مثال:** حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} \dfrac{[x]}{\sin x}$

تعریف حد در بینهایت

هنگامی که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ حد مورد نظر را حد در بینهایت میگوییم.

◆منظوراز $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده است و $f(x)$ را میتوان به هرمقدار دلخواه به L نزدیک کرد مشروط براینکه x بزرگ شود. (یعنی x به سمت مثبت ∞ میل کند)

◆منظوراز $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده است و $f(x)$ را میتوان به هرمقدار دلخواه به L نزدیک کرد مشروط براینکه x به اندازه کافی کوچک شود. (یعنی x به سمت منفی ∞ میل کند)

در این نوع حدها میخواهیم رفتار تابع را در ∞ بررسی کنیم.

اگر عبارت داده شده چند جمله ای باشد، فقط جمله ای که بیشترین توان را دارد در اولویت قرار میدهیم.

به طور مثال: $\lim\limits_{x \to +\infty} (۲x - ۱) = \lim\limits_{x \to +\infty} ۲x = +\infty$ یا $\lim\limits_{x \to +\infty} (-۵x + ۳) = \lim\limits_{x \to +\infty} -۵x = -\infty$

مثال: حدود زیر رامحاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(۷ - \dfrac{۳}{x^۲} \right)$

ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{۱۵x - ۹}{۱۲x + ۲}$

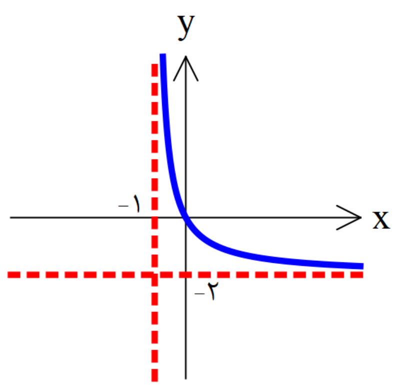
مثال: حد تابع $f(x) = \dfrac{-۳x^۷ + ۵x^۲}{۲x^۳ + ۹}$ وقتی $x \to -\infty$ میل میکند برابر .... میباشد. شهریور۹۸

مثال: جای خالی را کامل کنید. دی۹۷

حد تابع وقتی $x \to -\infty$ برابر .... است.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x > ۰ \\ \dfrac{۵x^۲ - ۳x}{-x^۲ + ۱} & x \le ۰ \end{cases}$$

مثال: با استفاده از نمودار تابع $y=f\left(x\right)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}} f\left(x\right)$

خرداد ۹۸ تجربی

مثال: تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر **۱۰-** باشد.

مثال: تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر **۲** باشد.

مثال: حد تابع های روبرو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^{۲}+۳}}{۵x-۴}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x^{۳}+۴x-۱}{۱-x^{۲}}$$

خرداد۹۹

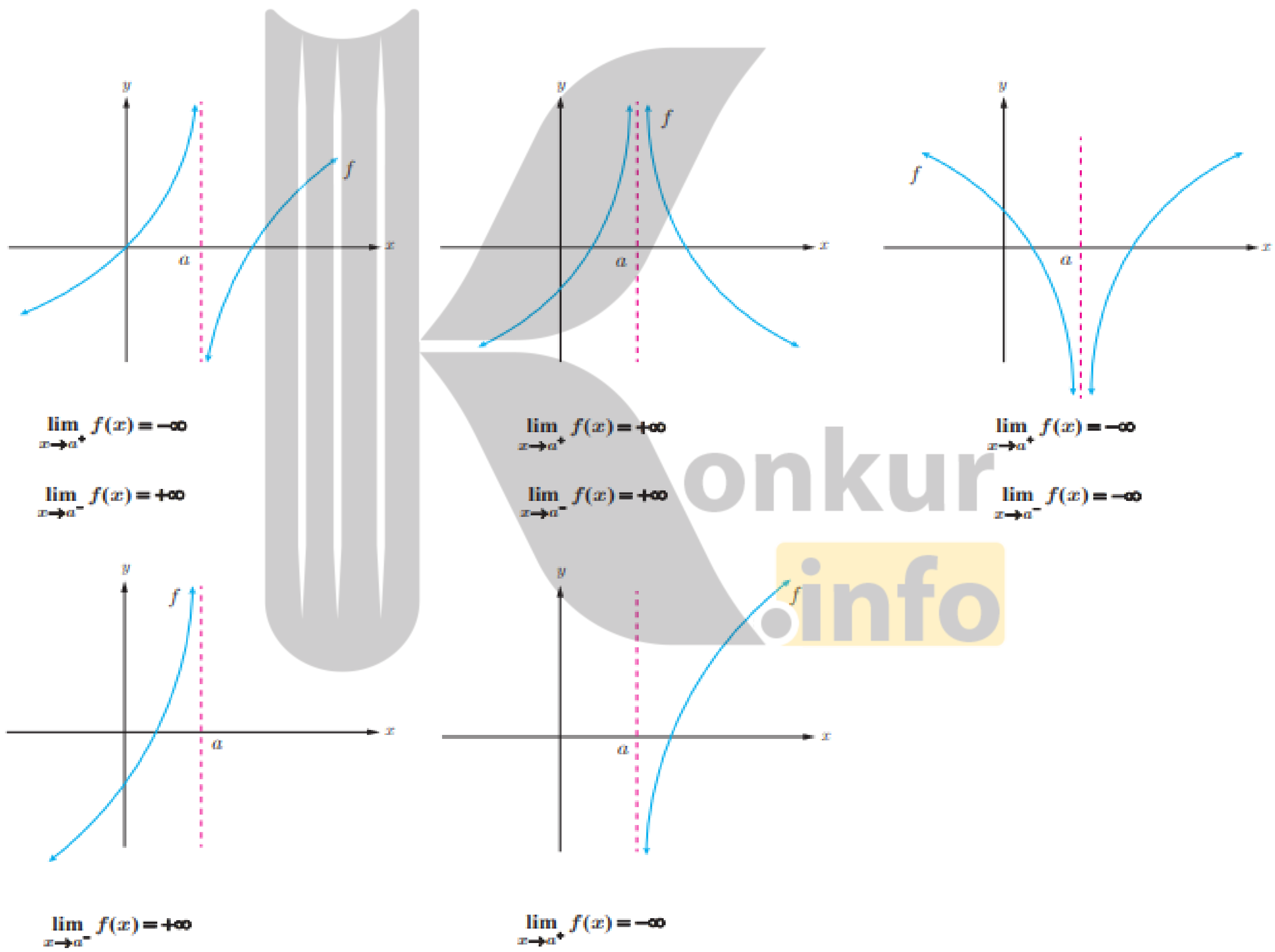
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۳}-x+۱}{۴x^{۳}+۲x-۱}$$

مثال: حد تابع روبرو را بیابید. دی ۹۷

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5+3x^3+1}{-3x^5+3x^2+3}$$

مجانب قائم :

خط $x=a$ را مجانب قائم منحنی تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه: $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ یعنی هرکدام از حالتهای زیر اتفاق بیفتد خط $x=a$ را مجانب قائم گوییم.



نکته: برای یافتن مجانب قائم توابع کسری باید ریشه های مخرج را بیابیم و حد تابع وقتی(ریشه مخرج $\to x$) را محاسبه کنیم. اگر جواب ∞ شد یعنی آن ریشه مخرج مجانب بوده است.

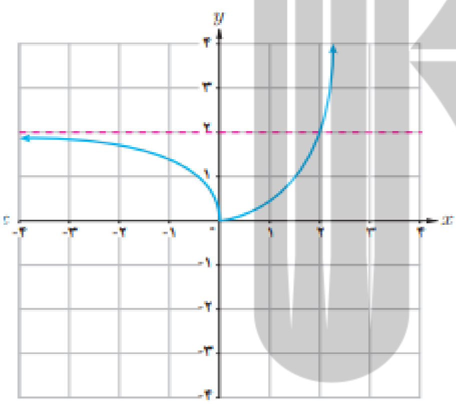
نکته: همواره حواستان به دامنه تابع باشد که محدود نباشد و به زبانی بهتر دقت کنید x اصلا میتواند به سمت ∞ میل کند یا خیر. مثلا در تابع $\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x^۲-۳x-۴}$ اصلا نیازی به کار خاصی نیست و میگوییم تابع مجانب قائم ندارد زیرا دامنه تابع محدود است.

مجانب افقی:

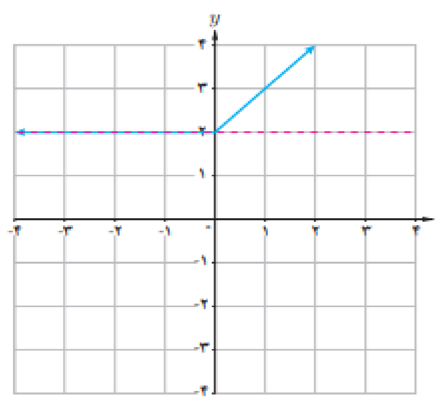
خط $y=b$ را مجانب افقی منحنی تابع $y=f(x)$ میگوییم هرگاه : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

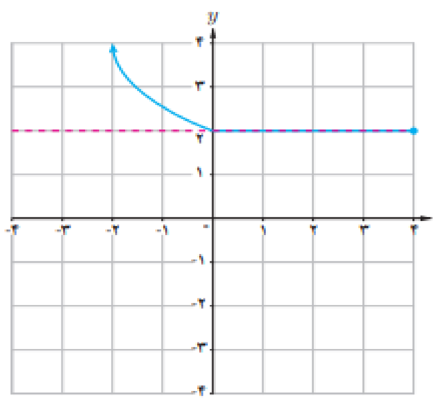
پس برای یافتن مجانب افقی حد تابع را وقتی $x\to\infty$ می یابیم اگر جواب یک عدد شد آن عدد مجانب افقی است.

نکته: ممکن است در تابعی فقط وقتی $x\to+\infty$ یا وقتی $x\to-\infty$ جواب عدد شود. یعنی در یک سمت منحنی فقط مجانب افقی داشته باشیم. مثل شکل زیر که سمت $-\infty$ مجانب افقی داریم.



نکته: ممکن است تابعی به صورت تابع ثابت به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برود. در این صورت آن خط ثابت مجانب افقی تابع است. مثلِ:

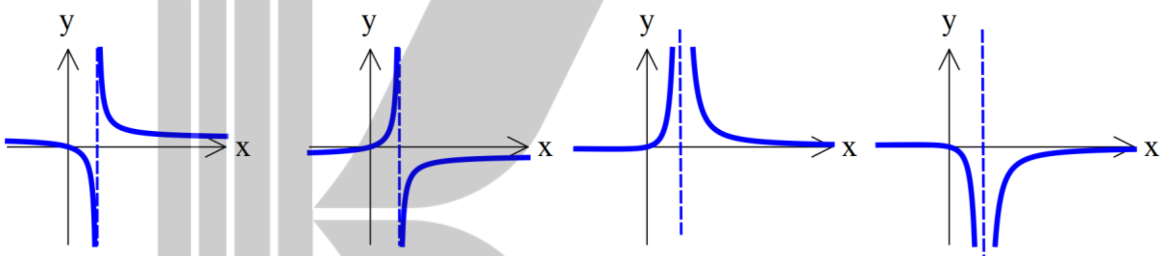




مثال: مجانب های قائم و افقی بیابید. $f(x)=\dfrac{3x}{x^3-1}$ دی۹۷

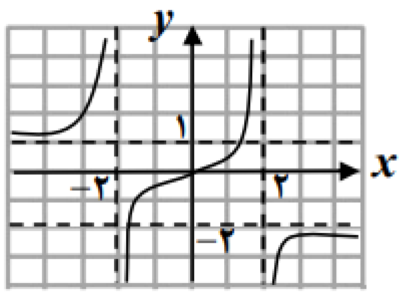
مثال: مجانب های تابع $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|-1}$ را بیابید.

مثال: کدام شکل وضعیت تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ درست نشان میدهد؟



مثال: کدام یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب قائم $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ هستند؟ دلیل؟ خرداد۹۸

📖 **مثال:** با توجه به شکل مجانب های افقی تابع را بنویسید. خرداد۹۸



📖 **مثال:** مجانب قائم و افقی تابع $y=\dfrac{x+3}{2-x}$ را بیابید. شهریور۹۸

📖 **مثال:** نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد.خرداد۹۹

الف) $f(1)=f(-2)=0$

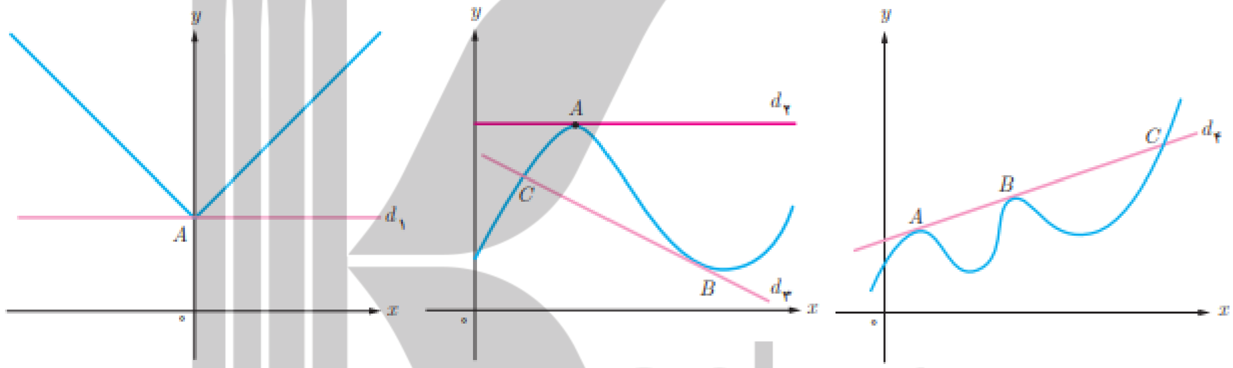
ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

پ) خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.

آشنایی با مفهوم مشتق

قبل از ورود به مبحث مشتق لازم است مفهوم خط مماس بر منحنی را بررسی کنیم.

اشتباه متداول درمورد تعریف خط مماس از خط مماس بر دایره نشات می گیرد. خط مماس بر دایره خطی است که با دایره یک نقطه مشترک دارند. اما در تمام منحنی ها به این صورت نیست. به منحنی ها زیر دقت کنید و مشخص کنید خط داده شده درکدام نقطه برمنحنی مماس است؟



فرض کنید P نقطه ای نقطه ای روی منحنی با طول a باشد.اگر حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته و مقدار آن برابر m باشد، در این صورت خط مماس بر نمودار f در نقطه P ، خطی است که از نقطه P گذشته و شیب آن برابر m است. در واقع مشتق در یک نقطه برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه مورد نظر است.

در این صورت مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطه a مینامیم و با $f'(a)$ نشان می دهیم.

تعریف اول مشتق $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف

اگر مشتق تابع f در نقطه a وجود داشته باشد(حد فوق وجود داشته باشد) میگوییم تابع f در نقطه a مشتق پذیر است.

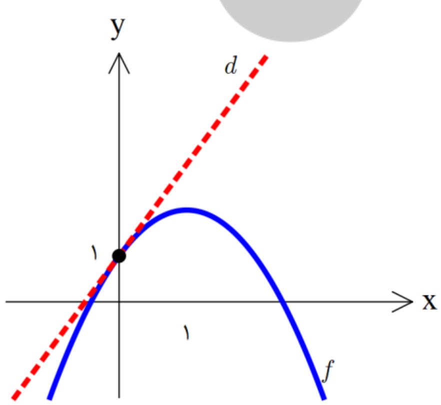
تعریف دوم مشتق $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تعریف

📖 **مثال:** با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=2x^2+3x$ را در $x=1$ بیابید.

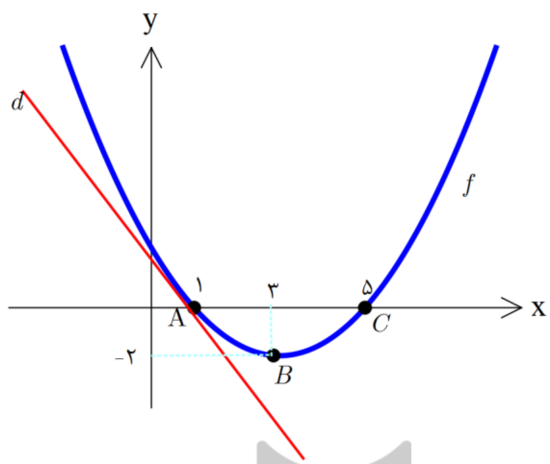
📖 **مثال:** در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مقدار $f'(1)$ را با تعریف بیابید.

📖 **مثال:** در شکل روبرو تابع $f(x)=-(x+1)^2+2$ رسم شده است.

شیب خط d را بیابید.



مثال: در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=۱$ برنمودار f مماس شده است. خرداد۹۹



الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=۱$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C,B مقایسه کنید.

مثال: شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲+۱$ را در نقطه ای به طول $x=۲$ واقع بر منحنی بیابید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $y=\sqrt{x}$ را در نقطه ای به طول ۴ روی منحنی بنویسید.

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)$ را در نقطه $x=۳$ بیابید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $y=-x^{۲}$ را در نقطه ای به طول **۲**$-$ روی منحنی بنویسید.

مثال: اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ باشد، با استفاده از تعریف، مشتق تابع f را بر حسب x به دست آورید.

سپس مقدار $f'(۲)$ را حساب کنید.

مثال: اگر $f(x)=۱-۲x$ باشد، $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید. دی۹۷

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^{۳}-۲$ را با استفاده از تعریف، مشتق در نقطه ای به طول $x=-۱$ به دست آورید.

خرداد۹۸ تجربی

مثال: اگر $f\left(x\right)=۵x^{۲}-x+۷$ باشد، ضابطه $f'\left(x\right)$ را به دست آورید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $f\left(x\right)=-x^{۲}+۱۰x$ را در نقطه $A(۲,f\left(۲\right))$ بنویسید. خرداد۹۹

مثال: اگر $f\left(x\right)=۲x^{۲}-۳x+۴$ باشد،

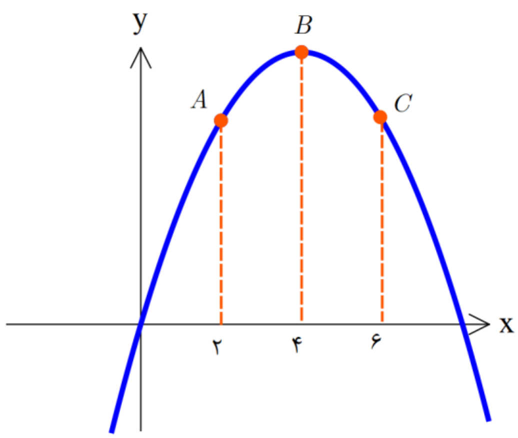
الف) مقدار $f'\left(۳\right)$ را به دست آورید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی f در نقطه ای به طول **۳** واقع بر آن را بنویسید.

نکته: برای یافتن شیب خط مماس باید تعریف مشتق در نقطه نوشته شود. اما اگر صورت مساله تاکید بر تعریف نداشته باشد، میتوان با قوانین مشتق گیری که بعدا خواهیم خواند شیب مماس، یا همان مشتق در نقطه را محاسبه کرد. چون بعضی از مشتق گیری با تعاریف منجر به محاسبات و رفع ابهام های دشواری خواهد شد که در برنامه درسی شما نمیگنجد.

📖 **مثال:** در شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=8x-x^2$ رسم شده است.

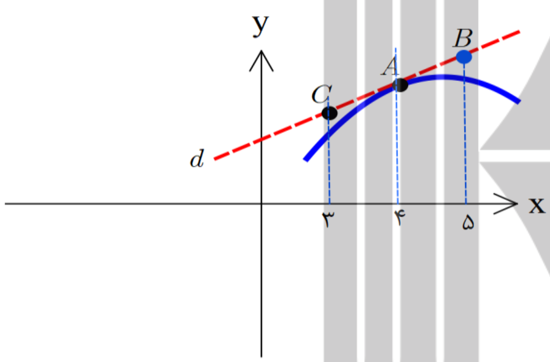
نقاط A, B, C را با هم مقایسه کنید.



📖 **مثال:** در شکل مقابل خط d بر نمودار f مماس شده است. اگر $f'(4)=1/5$, $f(4)=24$

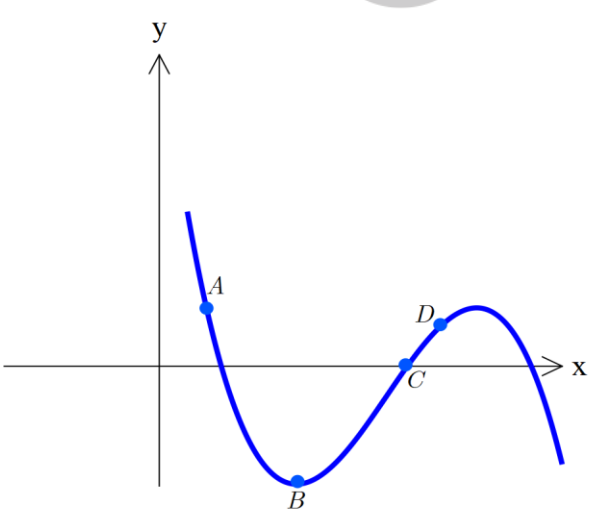
با توجه به شکل، مختصات نقاط A, B, C را بیابید. دی۹۷

تیر۹۸ تجربی



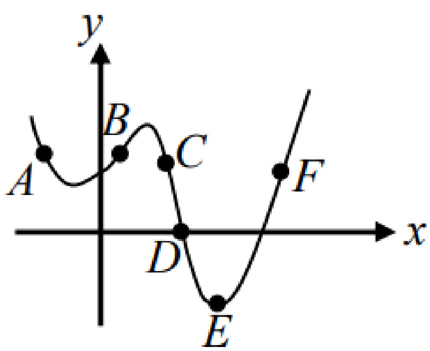
📖 **مثال:** نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده

در جدول نظیر کنید. شهریور۹۸



مقدار مشتق	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-2
نقطه				

📖 **مثال:** با توجه به نمودار داده شده، گزینه مناسب را انتخاب کنید.شهریور۹۸



در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم میشود؟

الف) B ب) E

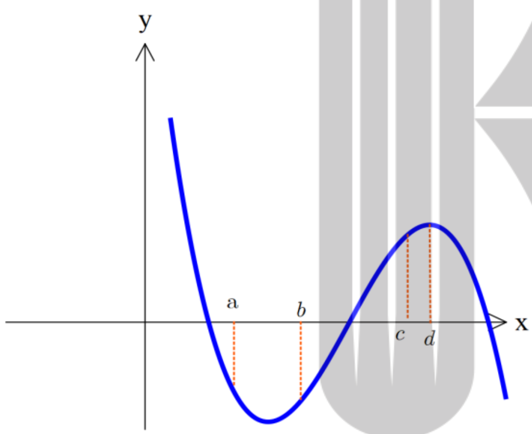
شیب خط مماس در نقطه F چه علامتی دارد؟

الف) مثبت   ب) منفی

شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه D نسبت به نقطه B چگونه است؟

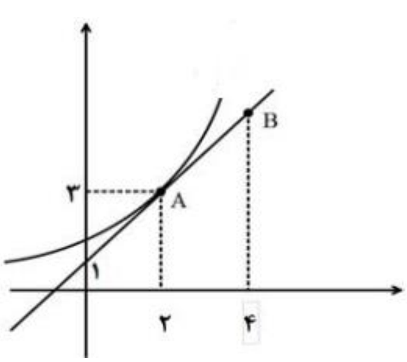
الف) بیشتر   ب) کمتر

📖 **مثال:** با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل نقاط به طولهای d, c, b, a را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید. دی۹۸تجربی



مقدار مشتق	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{-۱}{۲}$	۲
نقطه				

📖 **مثال:** در شکل روبرو نمودار تابع و خط مماس بر آن در نقطه $x = ۲$ رسم شده است.



الف) مشتق تابع در نقطه $x = ۲$ را بیابید.

ب) معادله خط مماس بر نمودار در نقطه A را بیابید.

مشتق پذیری و پیوستگی

مشتق پذیری در یک نقطه

مشتق تابع در واقع شیب خط مماس بر منحنی است. یعنی اگر تابعی در یک نقطه حد مورد نظر در ابتدای فصل مشتق را داشت، میگوییم تابع در آن نقطه مشتق پذیر است.

قضیه: اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه در $x=a$ پیوسته است. خرداد۹۸

پس برای آنکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱- تابع در $x=a$ پیوسته باشد.

۲- مشتق چپ و راست در $x=a$ موجود و برابر باشند. (منظور از موجود بودن آن است که جواب حدهای فوق عدد شود)

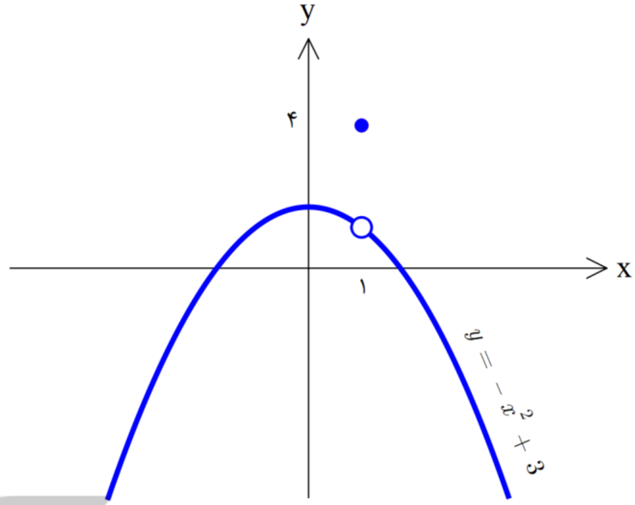
نتیجه مهم این است که اگر تابعی در نقطه پیوسته نباشد، مشتق پذیر نیست.

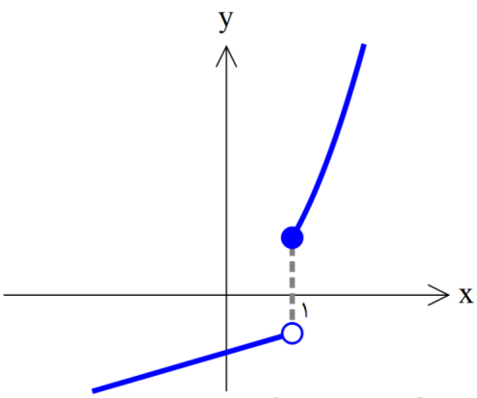
مشتق چپ و مشتق راست

در نقطه $x=a$ شیب نیم مماس چپ رامشتق چپ میگوییم و به صورت $f'_{-}(a)=\lim\limits_{x\to a^{-}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نمایش میدهیم.

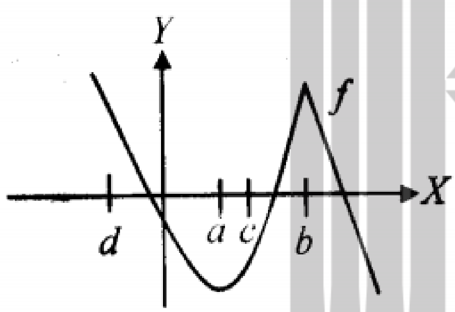
درنقطه $x=a$ شیب نیم مماس راست رامشتق راست میگوییم.وبه صورت $f'_{+}(a)=\lim\limits_{x\to a^{+}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نمایش میدهیم.

📖 **مثال:** در تابع های رسم شده زیر مشخص کنید در نقطه $x=1$ تابع مشتقپذیر است؟





📖 **مثال:** با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سوالات زیر پاسخ دهید. دی۹۷

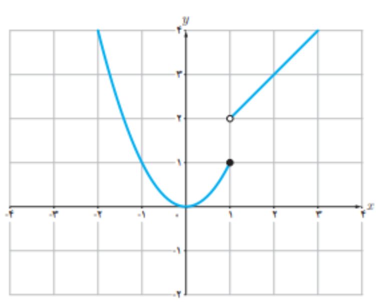


الف) طول نقطه ای که مماس در آن افقی است.

ب) طول نقطه ای که مشتق در آن مقداری منفی است.

پ) طول نقطه ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست.

📖 **مثال:** چرا در شکل روبرو تابع در نقطه $x=1$ مشتق پذیر نیست؟



📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۱ \\ ۲ & x=۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. میخواهیم از روی نمودار تابع و یکبار هم با استفاده از مشتق تابع، مشتق پذیری تابع در $x=۲$ را بررسی کنیم.

📖 **مثال:** مشتق پذیری تابع روبرو را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۰ \\ x^{۲}-۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<۰ \\ x & x\geq ۰ \end{cases}$

نشان دهید که $f'_{+}(۰)$ و $f'_{-}(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

مثال: به کمک تعریف مشتق،مشتق پذیری تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ را در $x=-۲$ بررسی کنید.

دلایل مشتق پذیر نبودن تابع

◆تابع در نقطه مورد نظر پیوسته نیست.

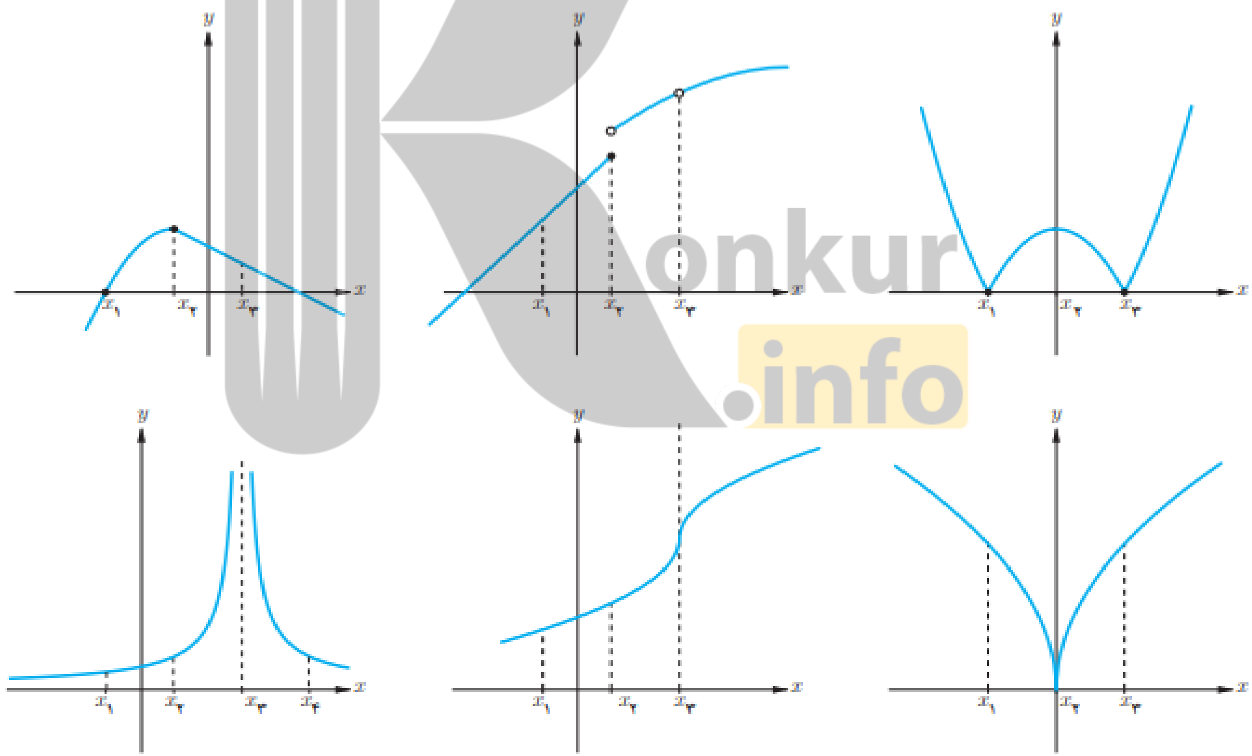
◆تابع پیوسته است اما مشتق چپ و راست شرایط زیر را دارند:

۱- هر دو موجود ولی نابرابر هستند. (**نقطه گوشه ای**)

۲- یکی موجود و دیگری نامتناهی است.(**نقطه گوشه ای**)

۳- هر دو نامتناهی هستند. (**مماس قائم**)

مثال: در شکل های رسم شده زیر در کدام نقطه یا نقاط تابع مشتق پذیر نیست؟ چرا؟

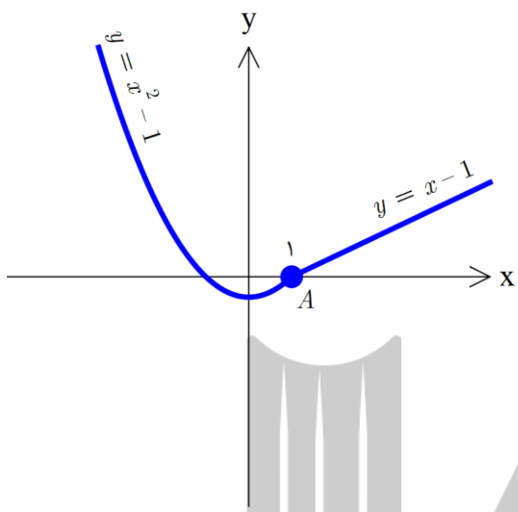


مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید . سپس معادله نیم مماس راست و نیم مماس چپ را در $x=2$ بنویسید.

مثال: یک تابع مثال بزنید که در نقطه $x=4$ پیوسته باشد ولی مشتق پذیر نباشد.

مثال: در شکل زیر مشتق چپ و راست را از روی شکل در نقطه A یافته و نشان دهید در این مشتق پذیر نیست.



مثال: مشتق پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

مثال: مشتق پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

تعریف **دامنه تابع مشتق:**

نقاطی از دامنه تابع f که در آنها تابع دارای مشتق باشد را دامنه مشتق پذیری گوییم . یعنی از روی دامنه تابع باید نقاط مشتق ناپذیر را کم کنیم. $D_{f'} = D_f - \{$ نقاط مشتق ناپذیر $\}$

مثال: تابع $f(x) = |(x-۳)(x+۱)|$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟ دامنه تابع مشتق را بیابید.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x+۱ & x \neq ۲ \\ ۴ & x = ۲ \end{cases}$ داده شده است.

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید.

ب) ضابطه f' را به دست آورید.

ج) نمودار f و f' را رسم کنید.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۵x & x \leq -۱ \\ ۳ & -۱ < x < ۲ \\ -۴x+۵ & x \geq ۲ \end{cases}$ داده شده است.

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید.

ب) ضابطه f' را به دست آورید.

ج) نمودار f و f' را رسم کنید.

محاسبه تابع مشتق بعضی توابع

چند جمله ای ها

① $y = k \rightarrow y' = 0$ (k عدد ثابت)

② $y = x \rightarrow y' = 1$

③ $y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$

④ $y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

$$y = 3\left(x^2 + 1\right)^4 - 3x^5$$

$$y = 1 - \frac{x}{3} + 5x^3$$

$$y = 2\left(2 - \frac{x}{3}\right)^4$$

اعمال روی توابع در مشتق:

⑤ $y = f \pm g \rightarrow y' = f' \pm g'$

⑥ $y = f.g \rightarrow y' = f'.g + g'.f$

⑦ $y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

در تابع های کسری مشتق تابع $y=\frac{۱}{x}$ را به عنوان حالت خاص به یاد داشته باشید.

$$\boxed{y=\frac{۱}{x}\rightarrow y'=\frac{-۱}{x^{۲}}}$$

مثال: اگر $g'(۲)=۵, f'(۲)=۳$ حاصل عبارت $(۲g-f)'(۲)$ برابر ....است. دی۹۷

مثال: مشتق بگیرید. ساده کردن لازم نیست.

$$f(x)=\frac{x^{۳}+۱}{۵x-۱}$$

مثال: با استفاده از قوانین، مشتق بگیرید.

$f(x)=\left(\frac{۲}{۲x-۱}\right)^{۵}$ دی۹۷

$f(x)=(x^{۴}-۳x)^{۵}$ خرداد۹۸

$f(x)=(x^{۲}+۲x+۱)^{۵}$ تیر۹۸

$f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$ دی۹۸

مثال: مشتق بگیرید.

$$g(x)=(x^2+x)\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$$

مثال: مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست)خرداد۹۹

الف) $f(x)=\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8$

ب) $g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{3x+2}\right)$

مشتق توابع رادیکالی

(حالت خاص $y=\sqrt{x}\rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$) $y=\sqrt{u}\rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ⑧

(حالت خاص $y=\sqrt[3]{x}\rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$) $y=\sqrt[3]{u}\rightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ ⑨

📖 **مثال:** مشتق بگیرید.

$$y=\sqrt{x^{۳}+۱}$$

$$y=\sqrt{x+۲}$$

$$y=\sqrt[۳]{x^{۲}+x}$$

📖 **مثال:** مشتق بگیرید.

(دی۹۷) $g(x)=x^{۲}\sqrt{x+۱}$

(خرداد۹۸) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{۱-x}$

(تیر۹۸) $g(x)=\dfrac{۵x^{۲}-x}{\sqrt{x}}$

(دی۹۸) $g(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

مثال: مشتق بگیرید.

ب) $g(x)=\left(\sqrt{۵-۷x}\right)\left(۴-\frac{x}{۳}\right)$

الف) $f(x)=\frac{\sqrt{۳x}}{x^{۲}+۱}$

مثال: مشتق بگیرید.

ب) $g(x)=\frac{۳}{x^{۲}+۱}$

الف) $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{۳}$

مثال: اگر $f(x)=۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}+...+\frac{۱}{x^{۶}}$ مقدار $f'(۱)$ را بیابید.

مثال: اگر $f(x)=\frac{ax^{۲}+a}{\sqrt{۳x+۱}}$ و $f'(۱)=\frac{۲۱}{۸}$ ، مقدار a را بیابید.

مشتق تابع مرکب

$$y=\left(fog(x)\right)\to y'=g'(x).f'\left(g(x)\right)$$

یعنی در مشتق تابع مرکب اول مشتق تابع داخلی ضربدر مشتق تابع بیرونی به ازای تابع داخلی.

مثال: مشتق تابع $y=\sqrt{x^۳+۱}$ را با استفاده از مشتق تابع مرکب بیابید.

مثال: اگر $g\left(x\right)=f\left(\frac{۱}{x}\right)$ و $f'(x)=x^۲+۱$ مشتق تابع g را در $x=۲$ بیابید.

مثال: اگر $g(x)=x^۴+۲x$ و $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ باشد، مقدار مشتق fog را در $x=۰$ محاسبه کنید.

مثال: اگر $f\left(x\right)=x^۳+۵x$ باشد، با استفاده از مشتق تابع مرکب ، مشتق تابع $y=f\left(\sqrt{x}\right)$ را بیابید.

آهنگ تغییرات

تعریف: در تابع $y=f(x)$ نسبت تغییرات تابع Δy به تغییرات متغیر Δx را آهنگ تغییرات می گویند.

$$\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\text{آهنگ تغییر } y \text{ نسبت به } x$$

آهنگ متوسط تغییر : هنگامی که متغیر از a به b تغییر می کند مقدار $b-a$ را نمو متغیر و مقدار $f(b)-f(a)$ را نمو تابع می نامند و نسبت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع مینامیم.

نکته: اگر قرار دهیم $b-a=h$ مقدار متوسط تغییر تابع به صورت $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ خواهد بود.

📖 **مثال:** در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ تغییر تابع را وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییر می کند بدست آورید. (نهایی دی۸۹)

📖 **مثال:** آهنگ تغییرات تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲$ وقتی x از ۲ به ۲/۲ تغییر کند را به دست آورید. (نهایی خرداد۸۷)

مثال: تابع با ضابطه ی $f\left(x\right)=\sqrt{x-۱}$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی x از $x_۱=۱$ تا $x_۲=۵$ تغییر میکند تعیین کنید. (نهایی دی۹۰)

مثال: یک توده باکتری پس از ساعت t دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+۲t^۲$ گرم است. آهنگ تغییرمتوسط جرم این توده در بازه زمانی $[۳,۴]$ چقدر است؟ دی۹۷

مثال: یک توده باکتری پس از ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۱\leq t\leq ۴$ چند گرم افزایش می یابد؟ خرداد۹۹

مثال: آهنگ تغییرمتوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ را وقتی متغیر از $x_۱=۲$ به $x_۲=۷$ تغییر میکند را به دست آورید. شهریور۹۸

مثال: تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. اگر x مدت زمان پس از تولد(برحسب ماه) باشد، حساب کنید که آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

دی۹۸

آهنگ لحظه ای تغییر تابع : در تابع f مقدار $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را آهنگ لحظه ای تغییر تابع در نقطه a مینامیم.

تذکر : آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f(x)$ در نقطه a همان تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه a است.

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2-t$ بر حسب متر داده شده است. تعیین کنید که در چه زمانی سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی با هم برابرند؟ خرداد۹۸

مثال: یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+۲t^{۳}$ گرم است.

الف)آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[۳,۴]$ چقدر است؟

ب)آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t=۳$ چقدر است؟ تیر۹۸، خرداد۹۹

سرعت یک متحرک

الف) سرعت متوسط : سرعت متوسط همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f\left(t\right)$ نسبت به متغیر t است .

اگر متحرکی با سرعت $S=f\left(t\right)$ حرکت کند در این صورت: $\dfrac{f(t)-f(t_{\circ})}{t-t_{\circ}}=$ سرعت متوسط

ب) سرعت لحظه ای : سرعت لحظه ای برابر است با حد سرعت متوسط وقتی t به $t_{\circ}$ میل می کند که آن را با $V\left(t_{\circ}\right)$ نمایش میدهیم.

$$V \text{ سرعت متوسط } =\lim_{t\to t_{\circ}}\frac{f(t)-f(t_{\circ})}{t-t_{\circ}}$$

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x\left(t\right)=۳t^{۲}-۴t+۲$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t=۱$ و $t=۳$ محاسبه کنید. (نهایی خرداد ۹۰)

📖 **مثال:** معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x = t^{2} - 5t + 6$ است.

اولاً: سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 3$ تا $t = 5$ محاسبه کنید. ثانیاً : آهنگ آنی تغییرات x را در $t = 2$ به دست آورید. نهایی شهریور۸۶

📖 **مثال:** موشکی به طور قائم رو به بالا پرتاب شده است. اگر این موشک پس از t ثانیه s متر را طی کند و معادله حرکت آن به صورت $s = 180t - 5t^{2}$ باشد، سرعت موشک را ۵ ثانیه بعد ار پرتاب حساب کنید. نهایی شهریور۷۹

مشتق پذیری در یک بازه

الف) بازه باز : تابع f روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) بازه بسته تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و در a دارای مشتق راست(اول پیوستگی راست بررسی شود) ودر b دارای مشتق چپ باشد (اول پیوستگی چپ داشته باشد)

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & ۱<x\le ۳ \end{cases}$ را در بازه های خواسته شده بررسی کنید.

الف) بازه $[-۲,۳]$

ب) بازه $[۱,۳]$

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-۱|$ را در بازه های خواسته شده بررسی کنید.

الف) بازه $(-۲,۱)$

ب) بازه $(۲,۳)$

مثال: دو بازه باز مثال بزنید که در یکی از آنها تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ مشتق پذیر باشد و دردیگری مشتق پذیر نباشد.

تعریف مشتق دوم

مشتقِ $y=f(x)$ یعنی $y'=f'(x)$ را در صورتی که وجود داشته باشد مشتق اول مینامیم و مشتقِ $y'=f'(x)$ را در صورت وجود مشتق دوم مینامیم و با $y''=f''(x)$ نشان می دهیم.

نکته: اگر معادله حرکت یک متحرک $s=f(t)$ باشد، مشتق اول آن یعنی $s'=f'(t)$ را **سرعت** می نامند و با $v(t)$ نمایش می دهند. مشتق دومِ $f(t)$ یا مشتق $v(t)$ را **شتاب متحرک** می گویند و با $a(t)$ نشان می دهند یعنی:

$$v(t)=f'(t)$$
$$a(t)=v'(t)=f''(t)$$

📖 **مثال:** معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x=t^۳-۵t+۶$ است. شتاب این متحرک را در زمان $t=۳$ محاسبه کنید.

📖 **مثال:** اگر $f(x)=\sin^۲ x-\cos^۲ x$ باشد مقدار $f''(\frac{\pi}{۴})$ را بیابید.

کاربرد مشتق

یکنوایی تابع و رابطه آن با مشتق

در فصل اول تابع صعودی و نزولی را آموختیم .

طبق فصل اول:

تابع f را در بازه ای **صعودی** میگوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه در این بازه : $a<b \Rightarrow f(a)\le f(b)$

تابع f را در بازه ای **نزولی** میگوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه در این بازه : $a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b)$

حال در فصل جدید میخواهیم تعریف جدیدی از صعودی و نزولی بودن را ارائه بدهیم.

از روی شکل تابع مشخص است که وقتی تابع صعودی است شیب خط مماس مثبت است یعنی می توان نتیجه گرفت وقتی تابع صعودی است مشتق مثبت است. و همین طور در مورد تابع نزولی.

پس میتوان تعریف جدید زیر را در نظرگرفت:

تابع پیوسته f در بازه (a,b) اکیداً صعودی است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ)>0$

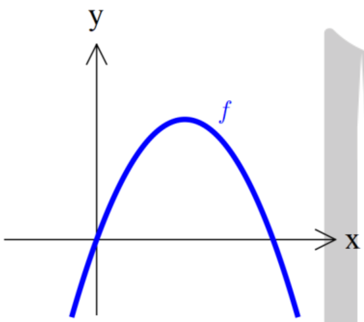
تابع پیوسته f در بازه (a,b) اکیداً نزولی است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ)<0$

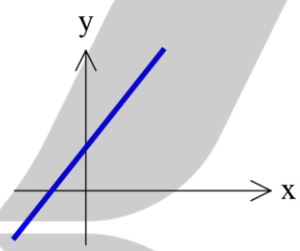
تابع پیوسته در بازه (a,b) ثابت است $\Leftrightarrow x_\circ \in (a,b); f'(x_\circ)=0$

برای یکنوایی تابع پیوسته $f(x)$ (برای صعودی یا نزولی بودن تابع) ابتدا از تابع مشتق میگیریم ، سپس تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم. بازه هایی که مشتق مثبت است تابع صعودی و بازه هایی که مشتق منفی است تابع نزولی است.

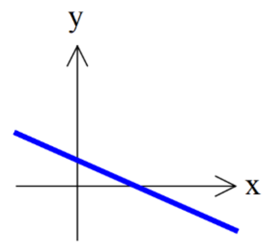
مثال: یکنوایی تابع $f(x)=x^{2}-4x$ را مشخص کنید. (ازدوراه، شکل و مشتق)

مثال: نمودار تابع f در شکل روبرو آمده است. با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودار های زیر، نمودار مشتق تابع f است؟

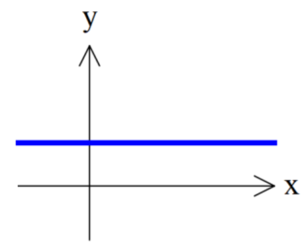




پ



ب



الف

مثال: با رسم تابع $f(x)=x^{2}+1$ مشخص کنید کجا صعودی و کجا نزولی است سپس همین موضوع را با مشتق بررسی کنید.

مثال: جدول تغییرات تابع $f(x) = -2x^2 + 8x$ را رسم کنید و از روی جدول مشخص کنید کجاها صعودی و کجاها نزولی است؟

مثال: جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 12x$ را رسم کنید و از روی جدول مشخص کنید کجاها صعودی و کجاها نزولی است؟

تعریف اکسترمم تابع

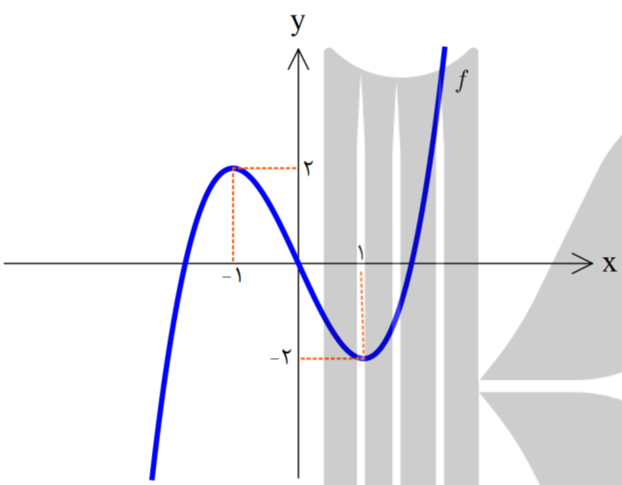
گوییم تابع در نقطه ای به طول a **ماکزیمم نسبی** دارد هرگاه همسایگی از a موجود باشد که در تمام نقاط این همسایگی نقطه a عرض بیشتری داشته باشد. و تابع در نقطه ای به طول a دارای **مینیمم نسبی** است هرگاه همسایگی از a موجود باشد که در تمام نقاط این همسایگی نقطه a عرض کمتری داشته باشد.

نکته: اگر وضعیت تابع پیوسته در نقطه ای به این صورت باشد که قبل از آن نقطه مشتق منفی و بعد از آن نقطه مشتق مثبت باشد، آن نقطه را مینیمم و اگر قبل نقطه مشتق مثبت و بعد از آن مشتق منفی باشد آن نقطه را ماکزیمم می گوییم.

x		a	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

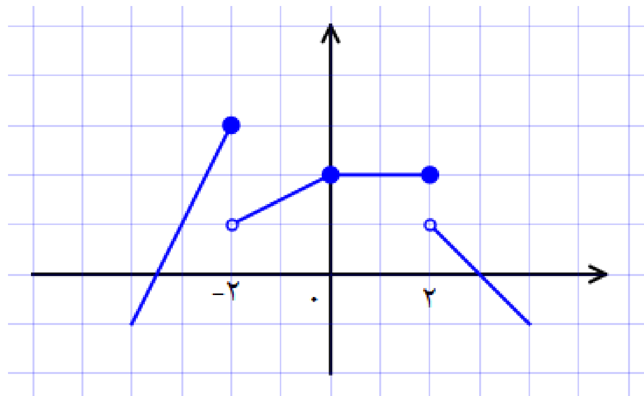
x		a	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

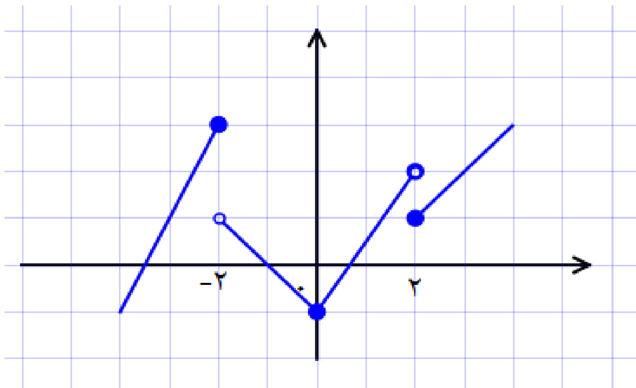
مثال: در شکل روبرو تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۳x$ را رسم کرده ایم.در کدام بازه ها تابع صعودی و در کدام بازه ها تابع نزولی است؟ (از روی شکل) سپس جدول تغییرات مشتق را رسم کنید و دوباره به سوالات بالا پاسخ دهید.



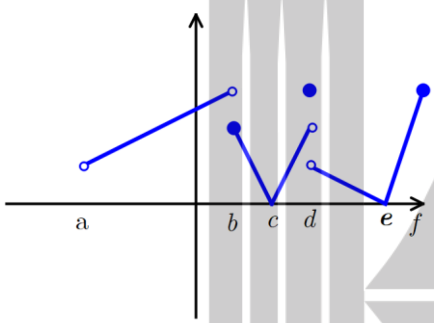
مثال: وضعیت یکنوایی و طول نقاط اکسترمم تابع $y=-x^{۳}+۳x$ را مشخص کنید.

📖 **مثال:** در توابع رسم شده زیر نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را مشخص کنید.

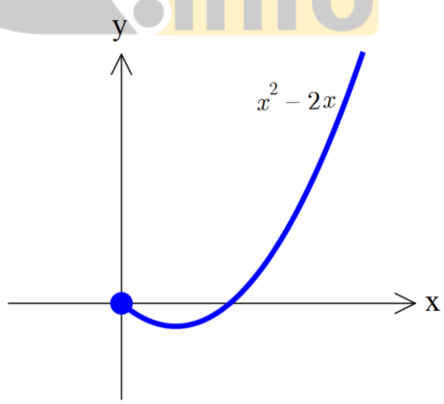


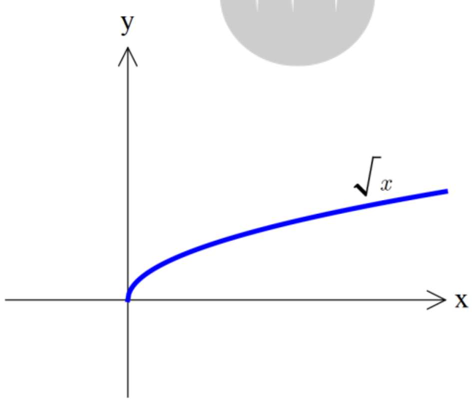


📖 **مثال:** در چند نقطه از شکل مقابل اکسترمم نسبی داریم.



📖 **مثال:** وضعیت اکسترمم نسبی هر یک از توابع زیر را در بازه ی داده شده بررسی کنید.





مثال: جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{3}-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. شهریور۹۸

مثال: با رسم جدول تغییرات تابع $f(x)=x^{3}+x^{2}-9x-10$ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را در صورت وجود بیابید. دی۹۸

مثال: نقاط اکسترمم تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+\frac{1}{2}x^{2}$ را بیابید.

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را بیابید.

مثال: تابع $f(x)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}+۱۲x-۹$ را در نظر بگیرید. با رسم جدول تغییرات تابع ، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی را به دست آورید. خرداد۹۹

نکته: اگر نقطه (a,b) نقطه اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی) تابعی پیوسته باشد، در این صورت دو شرط زیر همواره برقرار است.

۱- نقطه مورد نظر در ضابطه تابع صدق میکند. یعنی $f(a)=b$

۲- طول نقطه مورد نظر ریشه مشتق اول تابع است. یعنی : $f'(a)=۰$

مثال: اگر تابع $f(x)=(۱-m)x^{۲}+(m^{۲}-۶)x+۱$ در نقطه ای به طول -۱ ماکزیمم داشته باشد، مقدار m چیست؟

📖 **مثال:** در تابع $y=ax^{3}+bx^{2}$ ضرایب را چنان بیابید که نقطه $(1,2)$ اکسترمم نسبی باشد.

📖 **مثال:** اگر نقطه $(-2,5)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^{3}+ax^{2}+b$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

📖 **مثال:** مقدار b,a را چنان بیابید که نقطه $A(-1,2)$ یک $\max$ نسبی تابع $f(x)=ax^{3}+bx^{2}$ باشد.

📖 **مثال:** اگر $(1,2)$ اکسترمم نسبی $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^{2}+2}$ باشد، b را بیابید.

📖 **مثال:** اگر تابع $f(x)=ax^{2}+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد مقادیر b,a را به دست آورید.

خرداد۹۸

مثال: اگر نقطه $(۲,۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b,d را به دست آورید. خرداد۹۹ خارج نوبت صبح

نکته: در تمام مسائل اکسترمم به نکات زیر دقت ویژه داشته باشید

۱- نقاط ابتدا و انتهای بازه ی بسته، نقاط اکسترمم نسبی نیستند.

۲- اگر تابع در $x=a$ دارای اکسترمم نسبی باشد و مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(a)=۰$

۳- لزومی ندارد تابع f در نقاط اکسترمم خود پیوسته یا مشتق پذیر باشد.

۴- هر نقطه بر روی تابع ثابت هم مینیمم نسبی است هم ماکزیمم نسبی است.

نکته : در تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ ریشه ساده یا ریشه از مرتبه فردِ $f'(x)=۰$، طول نقاط اکسترمم نسبی هستند و ریشه مضاعف یا ریشه مرتبه زوج طول نقاط اکسترمم نیستند.

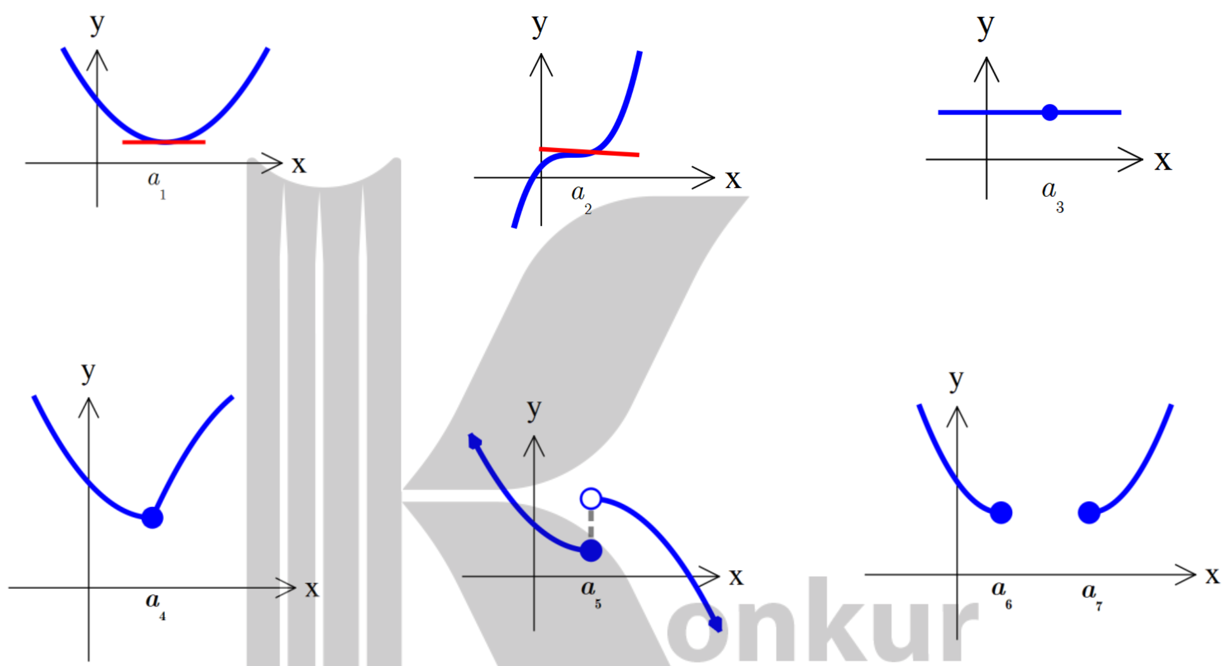
تعریف

نقطه بحرانی

فرض کنید $a \in D_f$ باشد. نقطه ای به طول a را بحرانی گوییم هرگاه: $f'(a)=0$ **یا** $f'(a)$ وجود نداشته باشد.

📖 **مثال:** نقطه بحرانی را تعریف کنید. خرداد۹۹ خارج

در تمام شکل های زیر تمام حالت های نقطه بحرانی آمده است:



نکته: هر اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است **اما** هر نقطه بحرانی لزوماً یک اکسترمم نسبی نیست.

در شکل بالا a_2, a_6, a_7 بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست. ولی در بقیه نقطه ها هر دو خاصیت رو داراست.

نکته: در حالت کلی برای یافتن نقاط بحرانی تابع پیوسته f ، باید ابتدا دامنه آن را یافته و تابع مشتق را به دست آوریم و نقاطی از دامنه که مشتق در آن صفر است **یا** مشتق وجود ندارد را بیابیم.

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^{3}-3x^{2}$ را بیابید.

در تابع با ضابطه $y=|f(x)|$ که در آن تابع f تابعی مشتق پذیر در R است، نقاط بحرانی تابع عبارتند از :

الف) ریشه های معادله $f(x)=0$ ب) ریشه های معادله $f'(x)=0$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x^{2}-4|$ را بیابید.

مثال: نقاط بحرانی $f(x)=||x|-2|$ را به دست آورید (در صورت وجود.)

اکسترمم مطلق

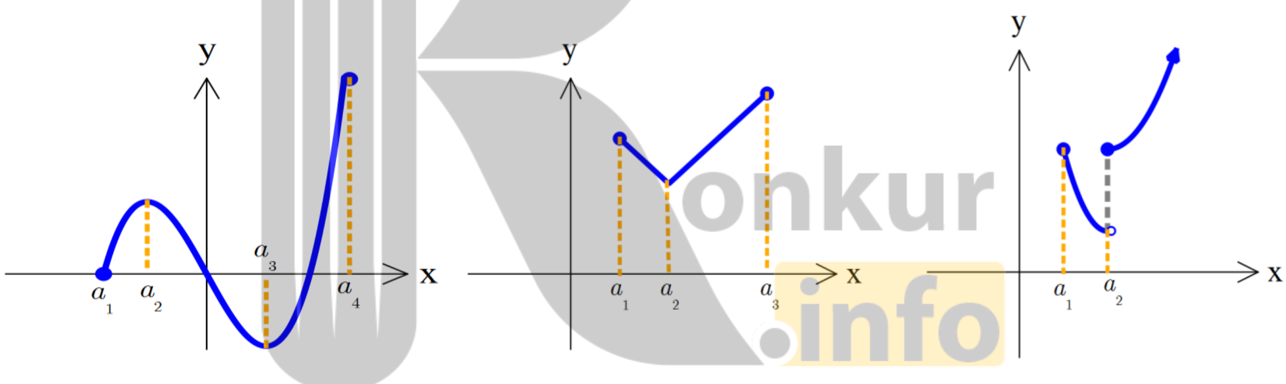
نقطه $M \in D_f$ را نقطهٔ **ماکزیمم مطلق** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(M) \geq f(x)$ در واقع ماکزیمم مطلق نقطه ای است که عرض آن از عرضِ تمام نقاط دامنه بزرگتر باشد.

نقطه $M \in D_f$ را نقطهٔ **مینیمم مطلق** گوییم هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(M) \leq f(x)$ در واقع مینیمم مطلق نقطه ای است که عرض آن از عرضِ تمام نقاط دامنه کوچکتر باشد.

یک نکته بسیار مهم در مورد اکسترمم نسبی

۱- نقاط تنها میتوانند مطلق باشند اما نسبی نیستند. ۲- ابتدا و انتهای بازه میتوانند مطلق باشند اما نسبی نیستند.

مثال: در شکل های زیر وجود نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق را بررسی کنید.



قضیه: اگر تابعی در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، حتما در این بازه دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.

دقت کنید اگربازه فوق باز باشد ممکن است اکسترمم مطلق نداشته باشد.

برای یافتن اکسترمم های مطلق تابع f در بازه $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی را در بازه (a,b) یافته و مقدار تابع را در این نقاط پیدا میکنیم. سپس این مقادیر را با مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می کنیم. نقطه یا نقاطی که دارای بیشترین عرض باشد، ماکزیمم مطلق و نقطه یا نقاطی که دارای کمترین عرض باشد مینیمم مطلق است.

مثال: ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲}$ را در بازه $[-۱,۶]$ بیابید.

مثال: اکسترمم های مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳x^{۴} - ۴x^{۳}$ را در بازه $[-۱,۲]$ بیابید.

مثال: اکسترمم مطلق و نسبی $f(x) = x^{۳} - ۲x^{۲} - ۴x + ۶$ را در بازه $[-۳,۴]$ بیابید و مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟

مثال: تابعی رسم کنید که f ماکزیمم مطلق داشته باشد، اما $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

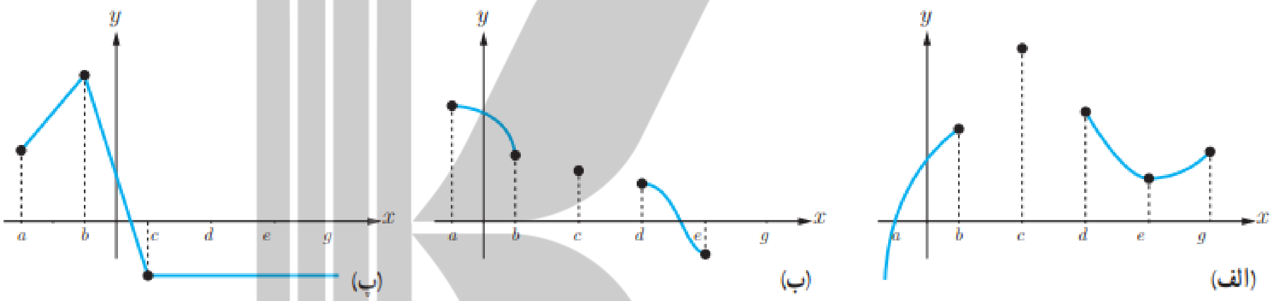
مثال: الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = -۲x^۳ + ۹x^۲ - ۱۳$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

ب) اکسترمم های مطلق تابع f را در بازه ی $[-۱,۲]$ تعیین کنید. تیر۹۸

مثال: اکسترمم های مطلق تابع $g(x) = x^۳ + ۲x - ۵$ را در بازه $[-۲,۱]$ در صورت وجود تعیین کنید. شهریور۹۸ خرداد۹۹خارج نوبت عصر

مثال: تابع $f\left(x\right)=-۲x^{۳}+۳x^{۲}+۱۲x-۹$ را در نظر بگیرید.مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع را در بازه $\left[۰,۳\right]$ را به دست آورید. خرداد۹۹

مثال: در شکل های زیر نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی را مشخص کنید.



مثال: نمودار یک تابعی را بکشید که در نقطه $\left(۱,۲\right)$ ماکزیمم نسبی و در نقطه $\left(-۳,-۲\right)$ مینیمم نسبی و در $\left(-۵,۷\right)$ ماکزیمم مطلق داشته باشد.

نکته: تابع پیوسته در بازه بسته $\left[a,b\right]$ حتما اکسترمم مطلق دارد اما در بازه باز ممکن است مطلق نداشته باشد.

مثال: با رسم یک شکل نشان دهید تابع پیوسته ای مثل f در یک بازه بسته ماکزیمم مطلق دارد اما در یک بازه باز ماکزیمم مطلق ندارد.

بهینه سازی

وقتی با یک سری داده ها میخواهیم بیشترین یا کمترین مقدار یک عبارتی را به دست آوریم، با مسائل بهینه سازی سرو کار داریم. مثلا میدانیم $۲x + y = ۹$ مشخص است که y, x های زیادی در این عبارت صدق می کنند. وقتی از ما خواسته شود بگوییم بین آن y, x ها کدامشان بیشترین مقدار $xy^۲$ را خواهند ساخت، با مسائل بهینه سازی سر و کار داریم.

مثال: محیط مستطیلی ۲۰ سانتی متر است. ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن ماکزیمم شود.

مثال: اگر y, x دو عدد مثبت باشند که $xy = ۶$ ، مقدار مینیمم عبارت $P = ۲x + ۳y$ کدام است؟

📖 **مثال:** میخواهیم در کنار یک رودخانه زمینی مستطیل شکل بخریم و دور آن را حصور بکشیم(قسمتی که کنار رودخانه قرار دارد را حصار نکشید) اگر برای کشیدن حصار ۲۰ متر نرده داشته باشیم بیشترین مساحت ممکن برای زمین چقدر است؟

📖 **مثال:** اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود. دی۹۷

📖 **مثال:** اگر بین دو عدد حقیقی y, x رابطهٔ $10x - y = 5$ باشد، مقادیر y, x را طوری بیابید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم شود. تیر۹۸

مثال: دو عدد حقیقی b,a را طوری بیابید که داشته باشیم $2a+b=60$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن شود. شهریور۹۸

مثال: ورق فلزی مربع شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید. میخواهیم از چهارگوشهٔ آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمیگردانیم تا یک جعبه درباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر اندازه ممکن گردد. خرداد۹۸

مثال: اگر $2x+y=8$ ، بیشترین مقدار ممکن xy^3 چقدر است ؟

مثال: اگر $x+y=2$ کمترین مقدار x^3+y^3 چقدر است ؟

📖 **مثال:** هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت $۳۲cm^{۲}$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایین هر صفحه $۲cm$ و حاشیه های کناری هر کدام $۱cm$ در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

خرداد۹۹ داخل

📖 **مثال:** نشان دهید در بین تمام مستطیلهایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول وعرض آن هم اندازه باشد.

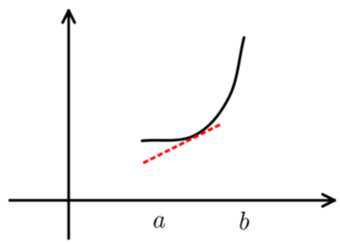
📖 **مثال:** ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دوراس آن روی محور طولها و دو راس دیگرش بالای محور طولها و روی سهمی به معادله $y = ۱۲ - x^{۲}$ باشند.

📖 **مثال:** در یک کره با شعاع ۴ یک استوانه محاط کرده ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

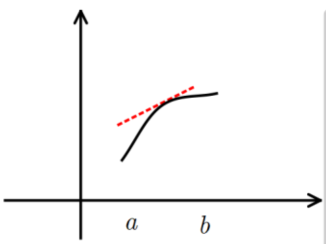
📖 **مثال:** یک مستطیل در یک نیمدایره به مساحت ۱۸π محاط شده است. بیشترین مساحت ممکن برای مستطیل چقدر است؟

تقعر و عطف منحنی

تعریف



در شکل روبرو در هر نقطه از بازه $[a,b]$ هر خط مماس بر منحنی، پایین منحنی قرار دارد اصطلاحا میگوییم تقعر منحنی رو به بالاست. (گودی منحنی رو به بالا)

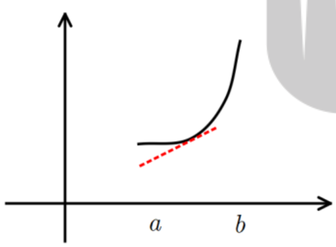


اگر در هر نقطه از بازه $[a,b]$ هر خط مماس برمنحنی، بالای منحنی قرار داشته باشند، اصطلاحاً می گوییم تقعر منحنی رو به پایین است. (گودی منحنی رو به پایین)

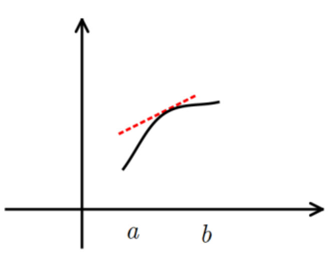
نکته: خطوط مماس زیر منحنی $\Longleftrightarrow$ جهت تقعر f رو به بالا

خطوط مماس بالای منحنی $\Longleftrightarrow$ جهت تقعر f رو به پایین

حال به شکل های بالا از منظری دیگر نگاه کنید :



در شکل روبرو شیب خطوط مماس در حال افزایش است. یعنی f' صعودی است.



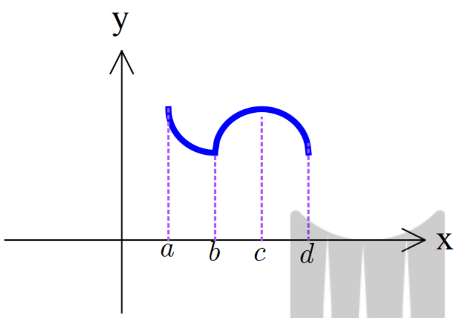
ودر شکل مقابل شیب خطوط مماس در حال کاهش است یعنی f' نزولی است.

نکته: f' صعودی $\Leftrightarrow$ شیب خطوط مماس صعودی $\Leftrightarrow$ تقعر رو به بالا

f' نزولی $\Leftrightarrow$ شیب خطوط مماس نزولی $\Leftrightarrow$ تقعر رو به پایین

مثال: شکل روبرو نمودار تابع f' است. جهت نمودار تابع f در کدام بازه رو به بالاست؟

نکته: هرجایی f' صعودی باشد تقعر رو به بالاست.

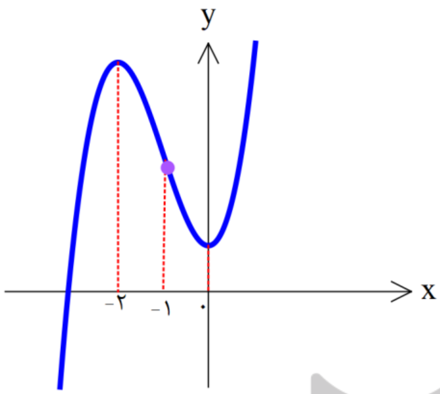


مثال: منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کرده و در بازه $[0,+\infty)$ خطوط مماس بر منحنی آنها را در برخی نقاط کشیده و جهت تقعر منحنی را مشخص کنید.

مثال: منحنی $f(x)=\frac{1}{x}$ را رسم کرده و جهت تقعر آن را در دامنه بیابید.

📖 **مثال:** در شکل مقابل نمودار تابع $f\left(x\right)=x^{3}+3x^{2}+1$ رسم شده است.

مشخص کنید در چه بازه ای تقعر رو به بالا و در چه بازه ای تقعر رو به پایین است.



📖 **مثال:** یک منحنی بکشید که در بازه $\left(-\infty,2\right)$ تقعر روبه پایین . در بازه $\left(2,+\infty\right)$ تقعر رو به بالاباشد.

📖 **مثال:** تابع را چنان رسم کنید که $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=f\left(3\right)=0$ و تابع در بازه $\left(-\infty,1\right)$ تقعر رو به بالا و در بازه $\left(1,+\infty\right)$ تقعر رو به پایین باشد.

نقطه عطف نمودار یک تابع

فرض کنید تابع f در نقطه $x=c$ پیوسته باشد. نقطه $(c,f(c))$ را نقطه عطف تابع گوییم هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد.

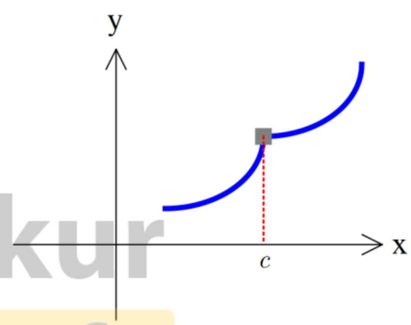
۱- نمودار در نقطه $(c,f(c))$ خط مماس داشته باشد(مماس چپ و راست فرق نداشته باشد)

یعنی یا $f'(c)$ موجود است و یا در این نقطه مماس قائم دارد. (تعریف مماس قائم صفحه ۶۷ جزوه آورده شده است)

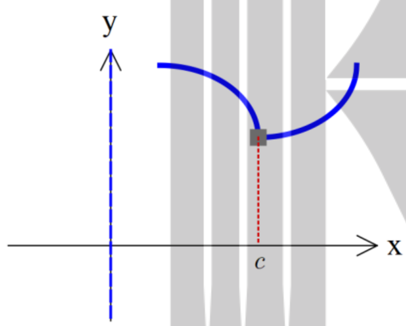
۲- جهت تقعر در نقطه $(c,f(c))$ تغییر کند.

خیلی مهم: به شکل های زیر دقت کنید، علت عدم وجود عطف در هر نقطه را مورد بررسی قرار داده ایم.

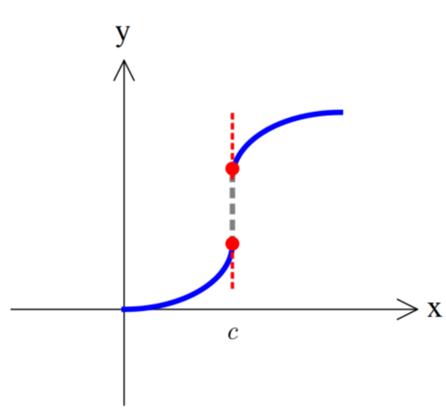
الف) تقعر اصلا عوض نشده پس c عطف نیست.



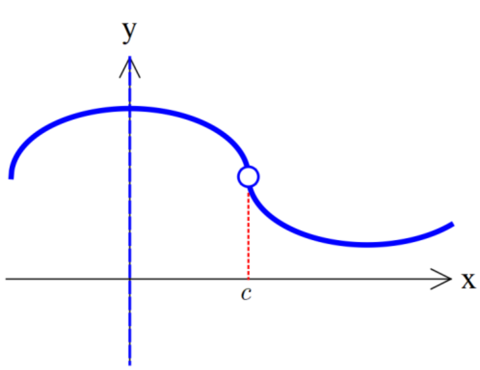
ب) تقعر عوض شده اما مماس واحد نداریم(نقطه زاویه دار یا گوشه ای داریم) پس c عطف نیست.



پ) جهت تقعر عوض شده مماس واحد هم داریم اما پیوسته نیست. پس c عطف نیست.



ت) جهت تقعر عوض شده اما پیوسته نیست پس c عطف نیست.



قبلاً گفتیم هر تابعی صعودی باشد مشتق آن مثبت است. از این نکته به این صورت استفاده میکنیم که :

تقعر f رو به بالا ← f' صعودی اکید ← پس $f''>0$

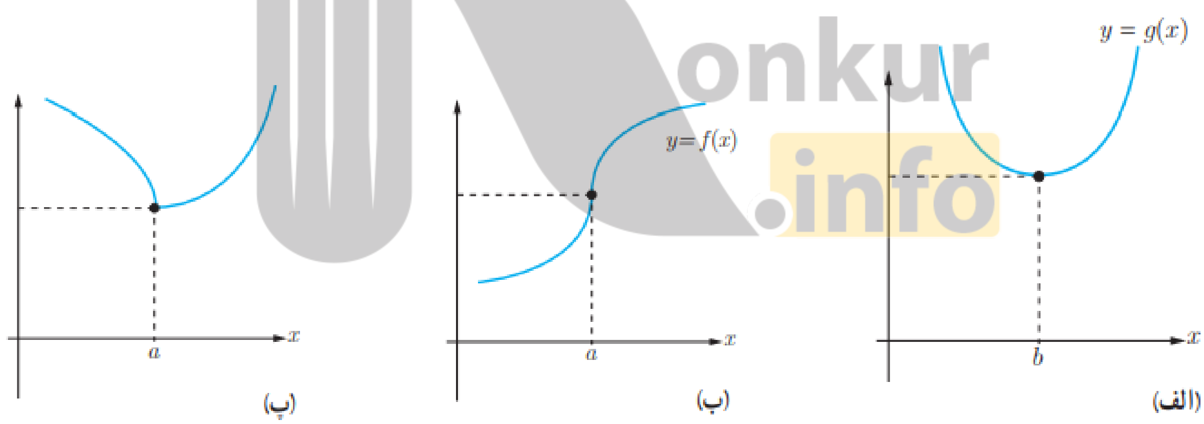
تقعر f رو به پایین ← f' نزولی اکید ← پس $f''<0$

قضیه تقعر :

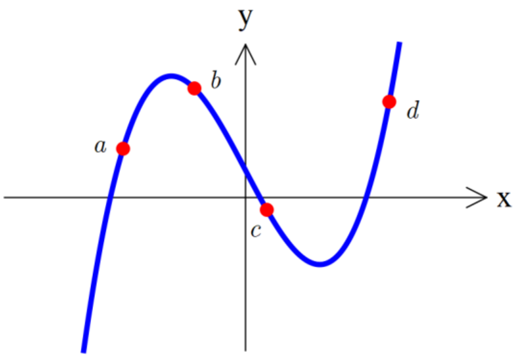
جهت تقعر رو به بالا $\Leftrightarrow$ $f''(x)>0$

جهت تقعر رو به پایین $\Leftrightarrow$ $f''(x)<0$

مثال: در هر یک از نمودارهای زیر نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس ب منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



📖 **مثال:** نمودار تابع f رسم شده است. به سوال های زیر پاسخ دهید.

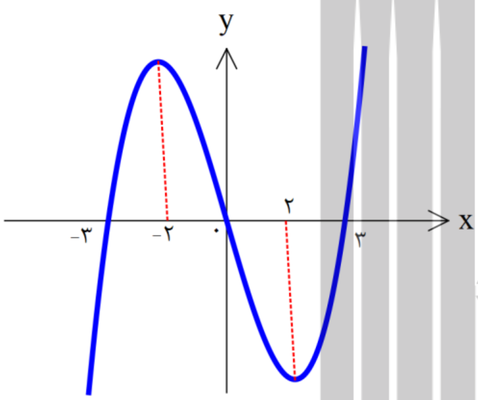


الف) در کدام نقطه از نقاط مشخص شده f'',f' هر دو منفی هستند؟

ب) در کدام نقطه f' منفی و f'' مثبت است؟

پ) در کدام نقطه f'',f' مثبت هستند؟

📖 **مثال:** نمودار تابع f رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) درچه بازه ای تقعر تابع f رو به بالاست؟

ب) در چه بازه ای تقعر تابع f رو به پایین است؟

پ) در چه بازه ای f اکیداً صعودی است و تقعر آن رو به پایین است؟

ت) در چه بازه ای تابع f اکیداً نزولی است و تقعر آن رو به بالاست؟

📖 **مثال:** در جملات زیر دقت کنید و علت نادرستی انها را مشخص کنید.

الف) هر جا جهت عطف تغییر کند آن نقطه عطف است.

ب) هر جا علامت f'' تغییر کند آن نقطه عطف است.

پ) هرنقطه ای f'' صفر شود آن نقطه عطف است.

ت) تابع اکیدا یکنوا عطف ندارد.

روش تعیین جهت تقعر نمودار یک تابع به کمک ضابطه آن: مشتق دوم تابع f را بدست آورده و سپس تعیین علامت میکنیم. هرجایی در جدول f'' مثبت بود تقعر رو به بالا و هر جایی در جدول f'' منفی بود تقعر رو به پایین است.

نوشته بالا خیلی دقیق و حرفه ای باید بررسی شود اما در حد ریاضی دبیرستان کفایت میکند.

📖 **مثال:** بازه ای بیابید که تقعر تابع $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ - ۱۸x^۲$ رو به پایین بوده و تابع در این بازه نزولی باشد.

📖 **مثال:** جهت تقعر تابع را به دست آورید. نقطه عطف را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$

ب) $g(x) = x^۳ - ۳x^۲ + x$

پ) $h\left(x\right)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$

ت) $f\left(x\right)=x^{۲}-۲\sin x$

📖 **مثال:** نقطه عطف منحنی $y=\sqrt[۳]{x}$ را بیابید.

📖 **مثال:** تابع $y=\left(x-۴\right)\sqrt[۳]{x}$ چند نقطه عطف دارد؟

📖 **مثال:** جهت تقعر ونقطه عطف منحنی تابع $f\left(x\right)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را بیابید. تیر۹۹

نکته: اگر نقطه $\left(a,b\right)$ نقطه عطف تابع پیوسته f باشد، همواره دو شرط زیر برقرار است.

۱- $f\left(a\right)=b$ (نقطه در منحنی صدق میکند) ۲- $f''\left(a\right)=۰$ (یعنی a ریشه f'' است)

📖 **مثال:** اگر $A\left(۱,-۱\right)$ نقطه عطف منحنی تابع $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{x^{۳}}$ باشد، $b-a$ را بیابید.

📖 **مثال:** مقادیر b,a را چنان بیابید که $A\left(۱,۱\right)$ نقطه عطف منحنی تابع $f\left(x\right)=ax^{۳}+bx^{۲}-۱$ باشد.خرداد۹۸

رسم نمودار تابع

در سال های گذشته بارسم توابع خطی و درجه دو (سهمی) و قدر مطلق آشنا شدید. امسال حالت خاص تابع درجه ۳ را آموختیم. اکنون میخواهیم توابع مختلف را با کمک نقاط مهم تابع و مشتق وعطف و مجانب ها رسم کنیم.

برای رسم توابع باید مراحل زیر را طی کرد و هرکدام را در صورت وجود پیدا کرد.

۱- ابتدا دامنه تابع را می یابیم.

۲- سپس f' را تعیین علامت میکنیم و صعودی و نزولی بودن و نقاط ماکزیمم و مینیمم را در صورت وجود می یابیم.

۳- تابع f'' را تعیین علامت میکنیم و وجود نقطه عطف و تقعر منحنی را بررسی میکنیم.

۴- محل تلاقی منحنی با محورهای مختصات را در صورت ساده بودن می یابیم.

۵- رفتار تابع را در بینهایت ها بررسی میکنیم. (این کار کمک می کند متوجه شویم برای رسم تابع از کجا شروع به رسم کنیم.)

۶- مجانب های تابع را درصورت وجود پیدا می کنیم.

📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x) = x^{۲} - ۲x$ را رسم کنید.

📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x^{۲}$ را رسم کنید.

📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x) = x^{۲} - ۲x$ را رسم کنید.

📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x) = (x-۱)^{۲}(x+۳)$ را رسم کنید.

📖 **مثال:** نمودار تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{x-۳}$ را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $f\left(x\right)=\frac{x+۴}{۲x+۱۰}$ را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $f\left(x\right)=-۲x\left(x+۳\right)^{۲}$ را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $f\left(x\right)=\frac{x-۱}{x+۱}$ را رسم کنید. تیر۹۹