

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

فصل ۲: گراف و مدل سازی

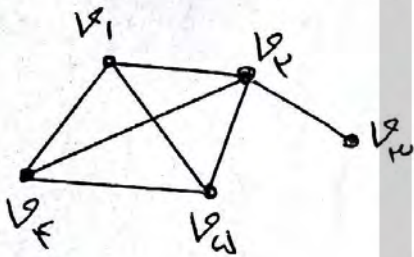
تعریف گراف:

گراف از تعدادی نقطه که به آنها رأس و تعدادی خط یا منحنی که به آنها یال می گوئیم تشکیل شده است.

گراف ساده:

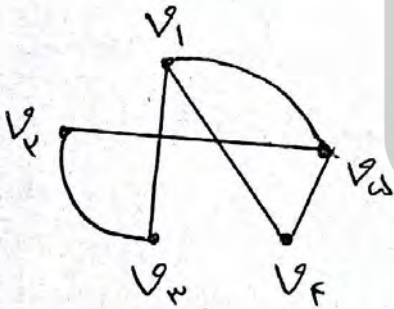
گراف ساده تشکیل شده از یک مجموعه منتهی و غیر تهی از نقاط مانند V (مجموعه رؤوس) و یک مجموعه منتهی از خط یا منحنی مانند E (مجموعه یالها) که مجموعه E زیر مجموعه ای از تمام زیر مجموعه های حوضوی V است.

گراف G با مجموعه رؤوس V و مجموعه یالهای E را بصورت $G(V, E)$ نشان می دهند.



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

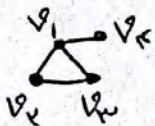
$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_2v_5\}$$



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

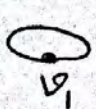
$$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_5, v_2v_5\}$$

تذکره ۴:



(۱) در گراف ساده بین هر دو رأس حداکثر یک یال وجود دارد.

(۲) یال v_1v_2 با یال v_2v_1 فرق ندارد و یکی هستند



(۳) یال بین یک رأس و همان رأس را طوقه یا حلقه می نامند

گراف ساده طوقه ندارد.



$v_1v_2 = v_2v_1$ یال چندگانه

(۴) ممکن است بین دو رأس چند تا یال باشد

که آنها را یال چندگانه می نامند.

گراف ساده یا چندگانه ندارد



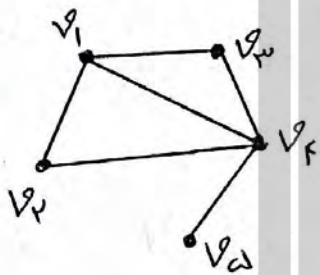
۵) یالی که روی آن جهت باشد یا جهت دار نامیده می شود
گراف ساده یا جهت دار ندارد.

$$v_1 v_2 = (v_1, v_2)$$

نتیجه: گراف ساده، گرافی است که بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال وجود داشته و یال طوقه، یال چندگانه و یال جهت دار ندارد.

تعریف مرتبه و اندازه گراف:

به تعداد رأس های گراف G ، مرتبه گراف گفته می شود که آنرا با $P(G)$ یا ساده تر با P نشان می دهیم همچنین به تعداد یالهای گراف G ، اندازه گراف گفته می شود که آنرا با $q(G)$ یا ساده تر با q نشان می دهیم.

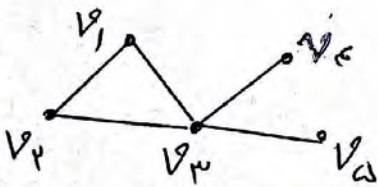


$$P(G) = P = 5 = \text{تعداد رأس ها} = \text{مرتبه}$$

$$q(G) = q = 4 = \text{تعداد یالها} = \text{اندازه}$$

درجه یک رأس:

درجه رأس v در گراف G برابر است با تعداد یالهایی از گراف G که به رأس v متصل اند و آنرا با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می دهیم. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر درجه یک رأس زوج باشد آنرا رأس زوج می نامند.



$$d(v_1) = 2$$

$$d(v_2) = 2$$

$$d(v_3) = 4$$

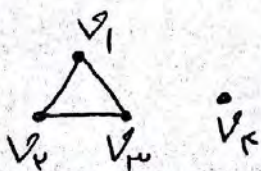
$$d(v_4) = 1$$

$$d(v_5) = 1$$

رأس تنها (انزوله):

به رأسی که درجه آن صفر باشد یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد

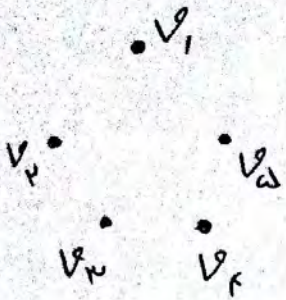
رأس تنها (انزوله) می گوئیم.



$$v_4 = \text{رأس تنها (انزوله)}$$

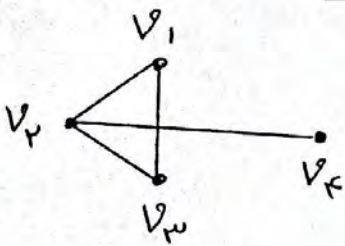
گراف تهی :

گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند یعنی هیچ یالی نداشته باشند، گراف تهی نامیده می‌شود.
بنابراین منظور از گراف تهی n رأسی، گرافی شامل n رأس تنها و بدون یال است.

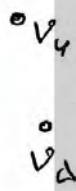
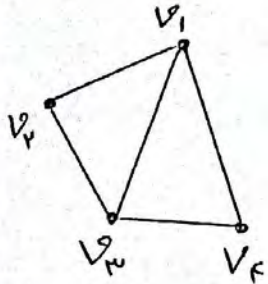


مثال ۱: نمودار گراف $G(V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

و $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4\}$ را رسم کنید



مثال ۲: در گراف مقابل، مجموعه رئوسها، مجموعه یالها، مرتبه، اندازه و درجه رئوسها را مشخص کنید.

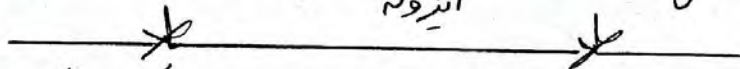


$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \Rightarrow P = 5$$

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\} \Rightarrow q = 6$$

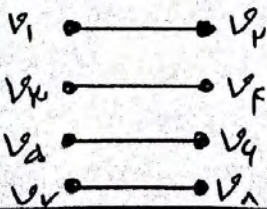
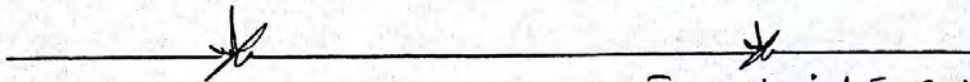
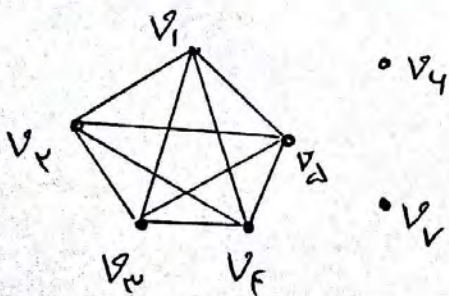
$$\deg(v_1) = 4 \text{ فرد}, \deg(v_2) = 2 \text{ زوج}, \deg(v_3) = 3 \text{ فرد}$$

$$\deg(v_4) = 3 \text{ فرد}, \deg(v_5) = 1 \text{ فرد}, \deg(v_5) = 0 \text{ انزوله}, \deg(v_4) = 0 \text{ انزوله}$$

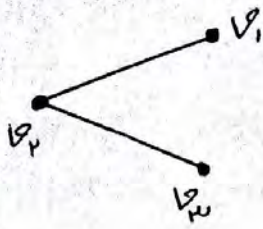


مثال ۳: گرافی از مرتبه ۷ و اندازه ۱۰ را رسم کنید که دو رأس انزوله داشته باشد.

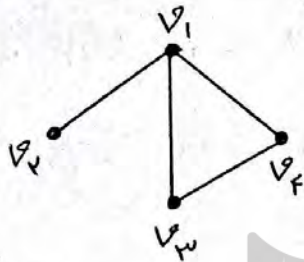
$$P = 7 \text{ و } q = 10$$



مثال ۴: گرافی از مرتبه ۸ با حداقل یال و چنانکه رسم کنید که رأس تنها نداشته باشد.



تعریف: دو رأس مجاور (همسایه) :
 دو رأسی که توسط یال به هم وصل شده باشند
 را ، دو رأس مجاور (همسایه) می‌گویند. در شکل
 مقابل رأس‌های v_1 و v_2 مجاورند یا برعکس v_1
 و v_3 مجاورند ولی v_2 و v_3 مجاور (همسایه) نیستند.



مجموعه همسایه‌های یک رأس :
 مجموعه همه رأس‌هایی در تراف G که با
 رأس v مجاورند را مجموعه همسایه‌های
 رأس v می‌نامند. اگر مجموعه همسایه‌ها
 بمقابل v باشد آنرا با علامت $N_G[v]$ و اگر شامل v نباشد را با
 علامت $N_G(v)$ نشان می‌دهند. در ترافت فوق :

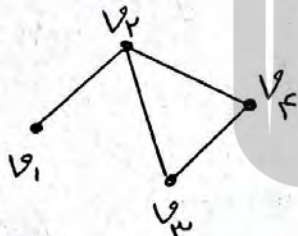
$$N_G[v_1] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$$

$$N_G(v_2) = \{v_1\}$$

$$N_G(v_3) = \{v_1, v_4\}$$

$$N_G[v_4] = \{v_1, v_3, v_4\}$$



دو یال مجاوره
 دو یال را مجاور می‌گوئیم ، هرگاه رأسی وجود
 داشته باشد که هر دو یال به آن وصل باشند
 در ترافت مقابل یالهای v_1, v_2 و v_3, v_4 مجاورند (هر دو به v_2 وصل‌اند)
 ولی یالهای v_1, v_3 و v_2, v_4 مجاور نیستند.

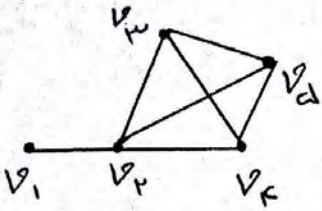
بزرگترین و کوچکترین درجه ترافت :

بزرگترین درجه در بین درجه رأسی ترافت را $\Delta(G)$

درجه گفته و آنرا با نماد $\delta(G)$ یا ساده تر δ (دلتای بزرگ) نمایش

می‌دهیم و کوچکترین درجه در بین درجه رأسی ترافت را

مینیمم درجه گفته و آن را با نماد $\delta(G)$ یا δ (دلتای گویا) نشان می‌دهیم.



$$\deg(v_1) = 1$$

$$\deg(v_2) = 4$$

$$\deg(v_3) = \deg(v_4) = \deg(v_5) = 3$$

$$\delta = 1 \quad \Delta = 4$$

ممکن است یک گراف چند رأس از درجه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد

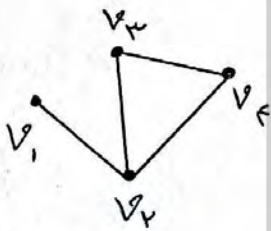
تذکر مهم:

۱) در هر گراف، رأسی که به همه رأس‌های دیگر وصل باشد را، رأس

فعل می‌گوئیم پس:

$$\deg(\text{رأس فعل}) = P - 1$$

(P = مرتبه گراف = تعداد رأس‌ها)



$$P = 4$$

$$\text{رأس فعل} = v_2 \Rightarrow \deg(v_2) = 3 = 4 - 1 = P - 1$$

۲) چون بیشترین درجه رأس در یک گراف P رأسی وقتی درست می‌آید

که آن رأس به همه $(P-1)$ رأس دیگر وصل شود پس:

$$\Delta \leq P - 1$$

مثلاً اگر گراف از مرتبه 4 (رأسی) باشد در این صورت: $\Delta \leq 4$

۳) اگر در یک گراف از مرتبه P (P رأسی)، K رأس فول (از درجه $P-1$) داشته

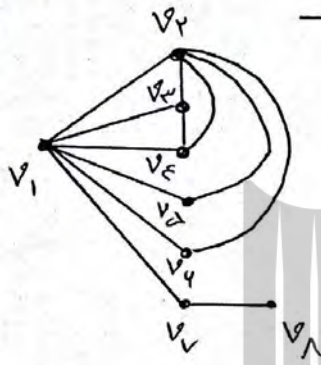
$$\delta \geq K$$

مثال ۱: نشان دهید گرافی وجود ندارد که درجه‌های آن 2 و 2 و 3 و 4 باشد.

حل: $P = 5$ پس باید $\Delta \leq 4$ در صورتی که ماکزیمم درجه 4 است پس چنین گرافی وجود ندارد.

مثال ۲: نشان دهید گرافی با درجه‌های ۲، ۳، ۴، ۴ و ۴ وجود ندارد.

حک: $P=7$ است پس سه رأس فول یعنی از درجه $P-1=4$ داریم در نتیجه $K=3$ است و باید $K \geq 3$ باشد در حالی که $K=2$ است پس چنین گرافی وجود ندارد.



مثال ۳: گرافی رسم کنید که درجه رأس‌ها بصورت ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ باشد.

$$\deg(v_1) = 4 \quad \deg(v_2) = 5$$

$$\deg(v_3) = \deg(v_4) = 3$$

$$\deg(v_5) = \deg(v_6) = \deg(v_7) = 2 \quad \deg(v_8) = 1$$

ارتباط درجه‌ها با تعداد یالها در گراف:

قضیه: اگر G یک گراف با مرتبه P و اندازه q و $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رئوس آن باشد در این صورت مجموعه درجات رئوس با دو برابر تعداد یالها برابر است یعنی:

$$\sum_{i=1}^P \deg v_i = \deg v_1 + \deg v_2 + \dots + \deg v_p = 2q$$

$P =$ تعداد رأس‌ها
 $q =$ تعداد یالها

اثبات: گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ را در نظر می‌گیریم. یکی یکی یالهای گراف را اضافه می‌کنیم. با اضافه کردن یال اول دو رأس درجه یک بدست می‌آید (درجه بقیه فعلاً صفر است) پس مجموع درجه‌ها برابر ۲ است. یال دیگری اضافه می‌کنیم مجموع درجه‌ها برابر ۴ می‌شود با اضافه کردن هر یال، به مجموع درجه‌ها، دو واحد اضافه می‌شود پس مجموع درجه‌ها دو برابر تعداد یالها می‌شود.

(هماهنگ - دیماه ۹۷) :

ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است (انتهی)

اثبات: فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد در این صورت :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس گراف G عددی زوج است

یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج است از طرفی $\sum_{v \in B} \deg(v)$ نیز زوج است بنابراین

تفاضل آنها نیز زوج است بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج است و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است.

مثال ۱) در یک گراف از مرتبه ۱۰ و اندازه ۳۳، $\Delta = 7$ و $\delta = 4$ است تعداد رأس های درجه ۷ و ۴ را بدست آورید.

گراف فقط رأس هایی از درجه $\Delta = 7$ و $\delta = 4$ دارد

$P = 10$, $q = 33$

$4x =$ جمع رأس های درجه ۴ $\Rightarrow x =$ تعداد رأس های از درجه ۴

$7y =$ جمع رأس های درجه ۷ $\Rightarrow y =$ تعداد رأس های از درجه ۷

$$\begin{cases} x + y = P = 10 \\ 4x + 7y = 2q = 2(33) = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 7y = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

پس گراف ۴ رأس درجه ۴ و ۴ رأس از درجه ۷ دارد.

مثال ۲) گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۴، دو رأس از درجه ۵ $\Delta = 5$ ، یک رأس از درجه ۲ و یک رأس از درجه $\delta = 1$ دارد این گراف چند رأس درجه ۳ دارد؟

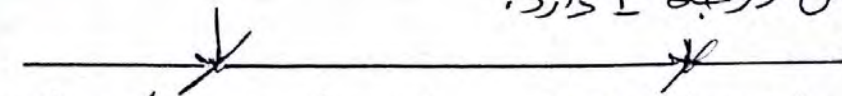
$P = 8$ و $q = 14$

۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۵ و ۵ : درجه ها

$\underbrace{\quad\quad\quad}_x$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_y$

$$\begin{aligned} \text{تعداد راس‌ها} &= 2 + x + y + 1 + 1 = p = 8 \Rightarrow x + y = 4 \\ \text{مجموع درجه‌ها} &= 4 + 4 + 2x + 3y + 2 + 1 = 2q = 2(14) = 28 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس یک راس درجه ۳ دارد.

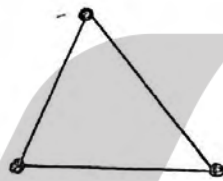


گراف اویلری (لئونارد اویلر - ریاضیدان سوئیسی):

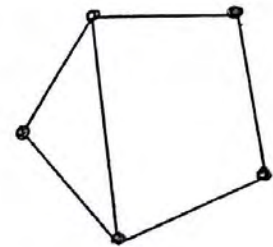
یک گراف ساده یا چندگانه را اویلری می‌گویند هرگاه بتوان از یک رأس حرکت کرد و هر یال را یکبار بی‌مورد و به رأس اولیه بازگشت.



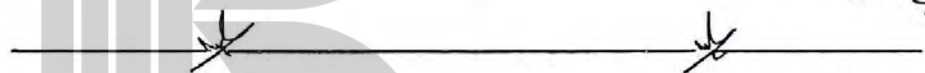
اویلری است



اویلری است

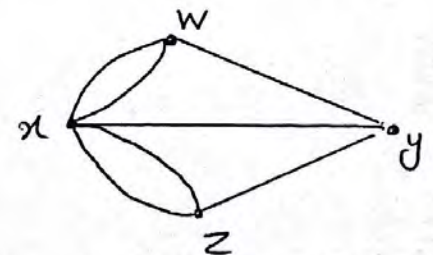
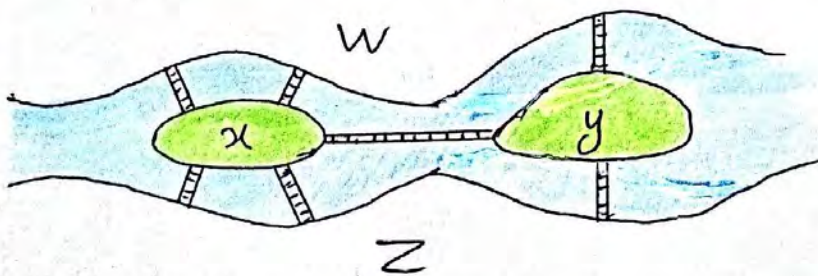


اویلری نیست



مسئله تاریخی:

شهر کو نیلسبرگ (در روسیه) از چهار ناحیه x و y و z و w که توسط هفت پل روی رودخانه (در قرن ۱۸ میلادی) به یکدیگر متصل شده بودند، تشکیل شده است. مردم شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها به نقطه شروع حرکت بازگشت یا نه؟ اویلر ثابت کرد این کار امکان پذیر نیست.



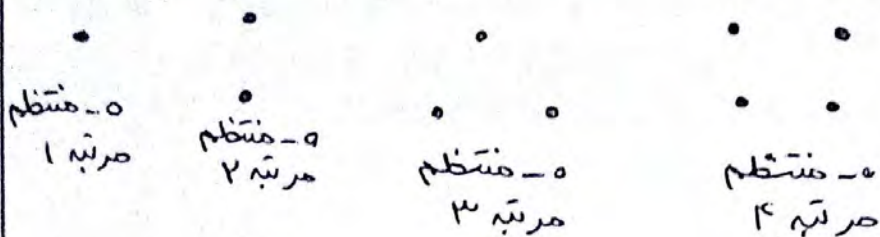
(تَرَاف ناحیه‌ها و پل‌ها)

تَرَاف ساده نیست چون بین دو راس w و x بیش از یک یال وجود دارد. چون در هر راس باید از یک یال وارد و از یک یال دَیِر خارج شویم آنرا این کار امکان پذیر باشد باید درجه همه راس‌ها زوج باشد درجه y زوج نیست پس این کار امکان ندارد.

گراف‌های منتظم:

گراف G از مرتبه P را r - منتظم می‌نامند هرگاه درجه هر رأس گراف G برابر r باشد $(0 < r \leq P-1)$

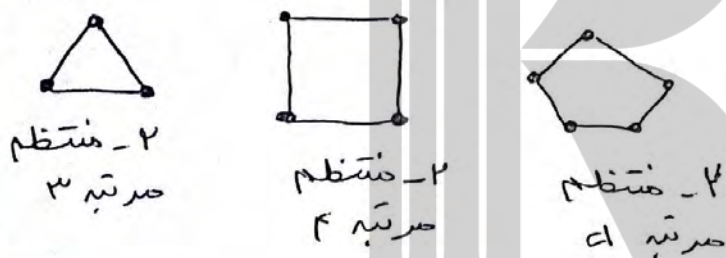
گراف‌های ۰ - منتظم



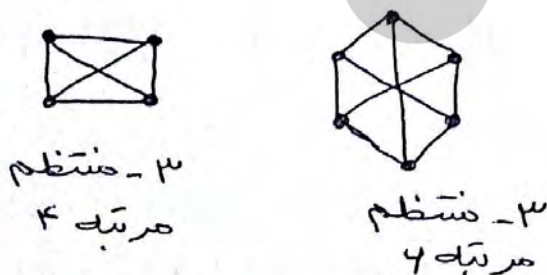
گراف‌های ۱ - منتظم



گراف‌های ۲ - منتظم



گراف‌های ۳ - منتظم



قضیه درجه‌ها در گراف منتظم:

در هر گراف r - منتظم با P رأس داریم: $Pr = 2q$

اثبات: می‌دانیم در هر گراف از مرتبه P (تعداد رأس) و اندازه (تعداد یالها) q مجموع درجه‌ها برابر $2q$ است.

$$r + r + r + \dots + r = 2q \Rightarrow Pr = 2q$$

تذکره: طبق قضیه بالا Pr عددی زوج است پس r نمی‌تواند فرد باشد

یعنی گراف فرد - منتظم مرتبه فرد ندارد

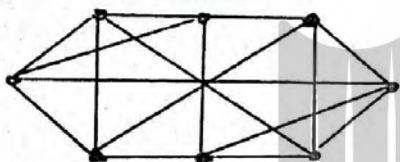
مثال گراف ۳ - منتظم مرتبه ۱ وجود ندارد.

مثال ۱) در یک گراف ۴ - منتظم داریم: $q = 3p - 1$ ، مرتبه و اندازه گراف را بدست آورده و گراف را رسم کنید.

$r = 4$

$Pr = 2q \Rightarrow P \times 4 = 2q \Rightarrow 2P = q$

$q = 3P - 1 \Rightarrow 2P = 3P - 1 \Rightarrow \boxed{P = 1} \Rightarrow \boxed{q = 14}$



یک گراف ۴ - منتظم مرتبه ۱ می باشد.

مثال ۲) با حذف ۱۶ یال از یک گراف ۷ - منتظم، گرافی ۳ - منتظم به وجود آمده است. مرتبه گراف را بدست آورید.

گراف ۷ - منتظم: $7P = 2q \Rightarrow q = \frac{7P}{2}$

گراف ۳ منتظم: $3P = 2q \Rightarrow q = \frac{3P}{2}$

$\frac{7P}{2} - 14 = \frac{3P}{2} \Rightarrow 7P - 32 = 3P \Rightarrow 4P = 32 \Rightarrow \boxed{P = 8}$

گراف های کامل:

گراف K_n از مرتبه n را گراف کامل می گویند هرگاه درجه هر رأس آن

$(n-1)$ باشد. به عبارت دیگر هر رأس آن با تمام رئوس دیگر مجاور باشد

گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم.

تذکر مهم:

۱) K_n یک گراف n رأسی و $n-1$ - منتظم است.

۲) یک گراف کامل n رأسی به تعداد $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!}$ یال دارد.

(۳) گراف کامل از مرتبه P را با K_P نیز نمایش می دهند

$(K_n = K_p)$

ساختار گراف های کامل تا مرتبه ۵ :

مرتبه (رأس) $n=p$	۱	۲	۳	۴	۵
نمودار					
اندازه (یالها) q	۰	۱	۳	۶	۱۰

درجه ها و تعداد یالهای گراف کامل :

درجه هر رأس در K_P برابر $P-1$ است، چون هر رأس به همه $P-1$ رأس های دیگر وصل است پس گراف کامل $(P-1)$ - منتظم است. به عنوان مثال K_5 همان گراف ۴ - منتظم است و اما تعداد یالها :

$$P(P-1) = 2q \Rightarrow (P-1) + (P-1) + \dots + (P-1) = 2q \Rightarrow \text{مجموع درجه ها}$$

$$\Rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow q(K_P) = \frac{P(P-1)}{2}$$

فرمول تعداد یالهای گراف کامل P رأسی

(مثال)

تعداد یالهای گراف K_5 تا $q(K_5) = \frac{5(5-1)}{2} = 10$

تعداد یالهای گراف K_7 تا $q(K_7) = \frac{7(7-1)}{2} = 21$

مثال ۱) حاصلضرب مرتبه در اندازه یک گراف کامل برابر 90 می باشد. این گراف چند منتظم است؟

$P =$ مرتبه $q =$ اندازه $P \cdot q = 90 \Rightarrow P \times \frac{P(P-1)}{2} = 90 \Rightarrow P \times P \times (P-1) = 180 = 4 \times 4 \times 5$

$\Rightarrow [P=4] \Rightarrow$ گراف K_4 است \Rightarrow گراف ۵ - منتظم است

مثال ۲) باکم کردن ۳۳ یال از یک گراف کامل، گراف ۴-منتظم برست می آید. مرتبه گراف کامل را برست آورید.

$$4P = 2q \Rightarrow q = 2P$$

$$q = \frac{P(P-1)}{2}$$

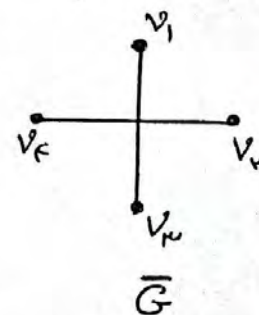
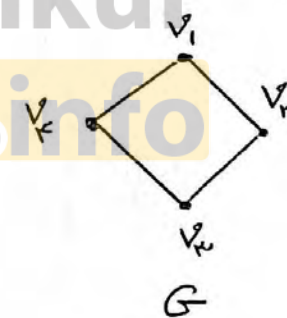
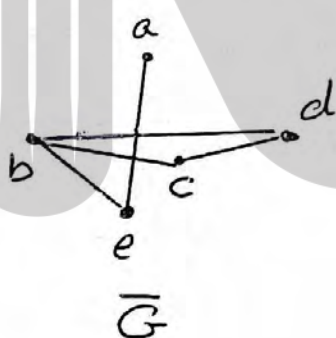
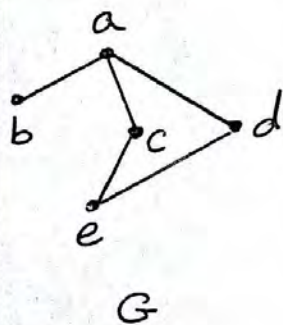
$$\frac{P(P-1)}{2} - 33 = 2P \Rightarrow P^2 - P - 44 = 4P \Rightarrow P^2 - 5P - 44 = 0$$

$$\Rightarrow (P-11)(P+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P=11 & \text{وق} \\ P=-4 & \text{غ} \end{cases} \Rightarrow K_{11} = \text{گراف مورد نظر}$$



مکمل گراف:

مکمل گرافی مانند G که آن را با \bar{G} (یا G^c) نمایش می دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن همان مجموعه رئوس گراف G است و بین دو رأس از G یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.



تذکر مهم:

۱) اگر تعداد یالهای گرافهای G و \bar{G} را با هم جمع کنیم، برابر تعداد یالهای گراف کامل K_P می شود یعنی:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2}$$

۲) درجه یک رأس در گراف G را اگر با درجه همان رأس در \bar{G} جمع کنیم درجه آن رأس در گراف کامل می شود یعنی:

$$\text{deg}_G(v) + \text{deg}_{\bar{G}}(v) = P-1$$

۳) مکمل گراف r -منتظم، گرافی \bar{r} -منتظم است و $r + \bar{r} = P-1$

۴) مکمل گراف کامل، گراف \emptyset است چون در گراف کامل تمام یالها رسم شده است.

مثال) تعداد یالهای گراف G با تعداد یالهای گراف \bar{G} برابر است. مرتبه گراف در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده ای دارد؟

$$q(G) = q(\bar{G})$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 2q(G) = \frac{P(P-1)}{2}$$

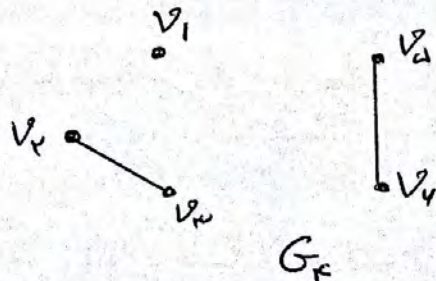
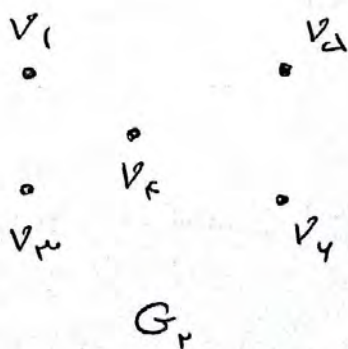
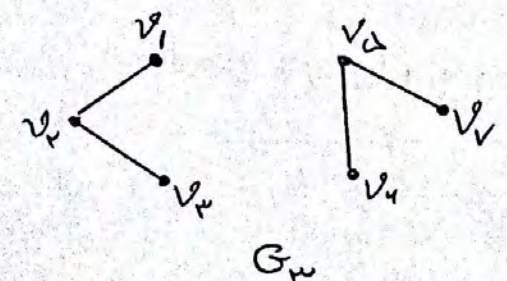
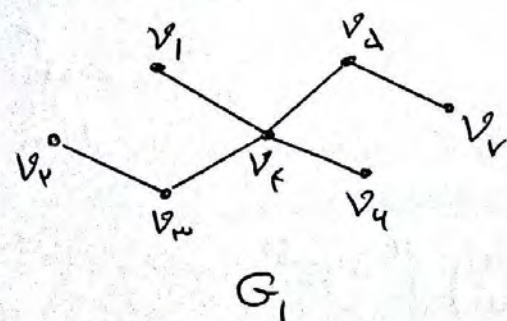
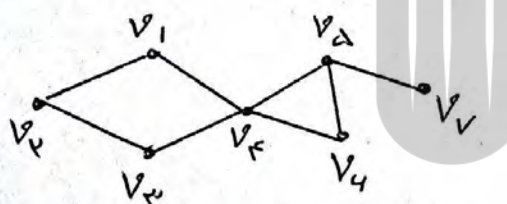
$$\Rightarrow q(G) = \frac{P(P-1)}{4}$$

q باید عددی صحیح باشد یعنی $4 | P(P-1)$ می دانیم هر عدد صحیح مانند P به یکی از صورتهای $4k$ و $4k+1$ یا $4k+2$ یا $4k+3$ است اگر $P=4k$ یا $P=4k+1$ باشد $P(P-1)$ مضرب ۴ می شود پس مرتبه یا بر ۴ بخش پذیر است یا اینکه با بقیمانده ای برابر ۱ در تقسیم بر ۴ دارد.

زیرگراف:

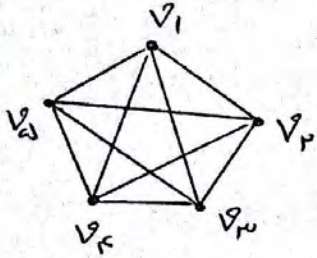
یک زیرگراف از گراف G ، گرافی است که مجموعه رئوس آن زیرمجموعه ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یالهای آن زیرمجموعه ای از مجموعه یالهای G باشد.

مثال: ۴ زیرگراف از گراف مقابل را رسم کنید.

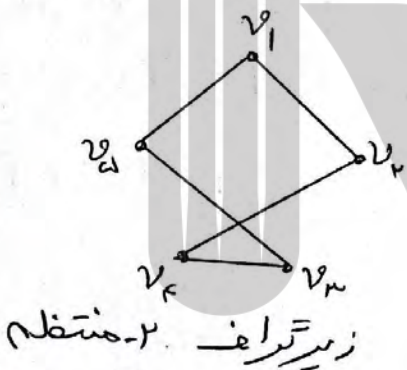
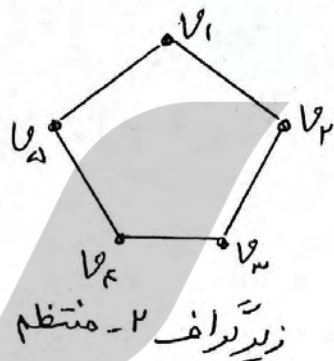
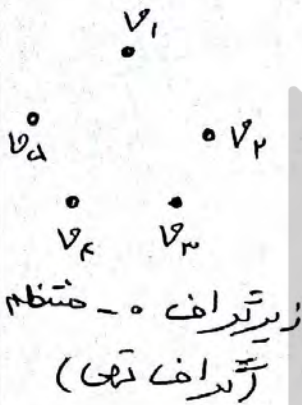


تذکره ۴۴: هر گراف، زیرگراف خودش است.

مثال ۲: پنج زیرگراف K_5 را بنویس منتظم از گراف K_5 با رأس های $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ را رسم کنید.



حل: گراف K_5 بصورت مقابل است اگر قرار باشد زیرگراف K_5 و K_3 منتظم باشد K_2 نمی تواند فرد باشد (فرد منتظم مرتبه فرد نداریم) پس:



نکته ریاضی:

تعداد زیرگراف های کامل در گراف کامل K_p برابر است با: $2^p - 1$

اثبات: می دانیم: $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی

تعداد زیرگراف های کامل در K_p $= \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p} = 2^p - 1$

مثال: گراف K_4 چند زیرگراف کامل دارد؟

تا $4^3 = 4^4 - 1 = 2^4 - 1 = 15$ جواب

تقریب ۱: گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۱۰ است. اگر $\deg_G(v) = ۳$ باشد
 $q(G)$ و $\deg_{\bar{G}}(v)$ را بدست آورید.

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 10 + q(\bar{G}) = \frac{12 \times 11}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = ۵۶$$

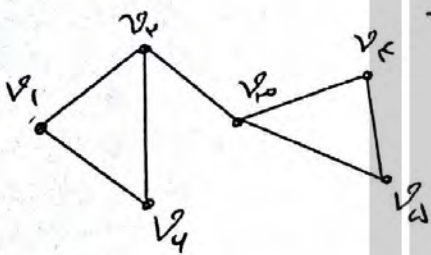
$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = P-1 \Rightarrow ۳ + \deg_{\bar{G}}(v) = 12-1 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(v) = ۸$$

تقریب ۲: مکمل گرافی از مرتبه P که $(2P-1)$ - منتظم است، گرافی
 ۲- منتظم است. P را بدست آورید.

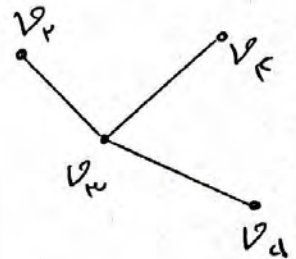
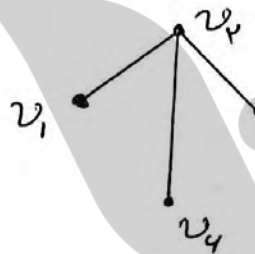
$$r = 2P - 1$$

$$r' = 2$$

$$r + r' = P - 1 \Rightarrow 2P - 1 + 2 = P - 1 \Rightarrow \boxed{P = 4}$$



تقریب ۳: گراف G بصورت مقابل است.
 الف) زیر گرافی ۴ راسی از اندازه ۳ رسم کنید



ب) G چند زیر گراف دارد که دور اس از درجه ۳ داشته باشد.

حل: مطابق شکل بالا: v_2 و v_3 باید باشند. یا v_1, v_4 می تواند باشد یا
 نباشد (حالت ۲) یا v_3, v_4 هم می تواند باشد یا نباشد (حالت ۱) پس
 طبق اصل ضرب $2 \times 2 = 4$ زیر گراف با دور اس از درجه ۳ می توانیم داشته باشیم

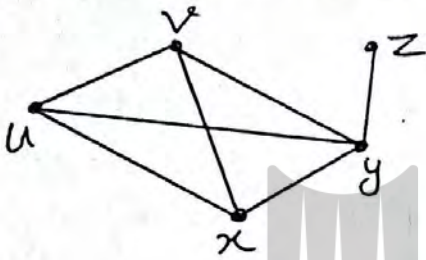
تکته ریاضی:

گراف G از مرتبه P و اندازه q است تعداد زیر گراف های هم مرتبه با G
 برابر است با: 2^q

مثال: گراف تقریب ۳ در بالا از اندازه $q=7$ است چند زیر گراف هم مرتبه
 با خودش دارد؟ تا $2^7 = 2^7 = 128$ جواب

مسیر در گراف :

فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v (که به آن $u-v$ مسیری گوئیم) در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دو به دو همسایر در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود بطوریکه هر دو رأس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یالهای طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است. (مثال)



$u-v$ یک $u-v$ مسیر به طول ۱

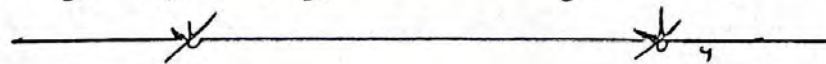
$u-x-v$ یک $u-v$ مسیر به طول ۲

$u-x-y-v$ یک $u-v$ مسیر به طول ۳

$u-x-y-z$ یک $u-z$ مسیر به طول ۴

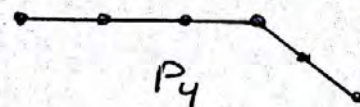
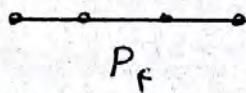
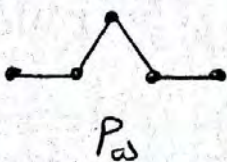
تذکره مهم :

- ۱) هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است
- ۲) تعداد مسیرهای به طول صفر برابر تعداد رأس‌ها (مرتبه گراف) است
- ۳) تعداد مسیرهای به طول ۱ همان تعداد یالهای گراف (اندازه گراف) است
- ۴) جهت حرکت در مسیر مهم نبوده و فقط یالهای طی شده مهم است. در مثال بالا مسیر $u-x-y-v$ با مسیر $v-y-x-u$ فرقی ندارد و یک مسیر است.



تعریف مسیر n رأسی :

گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را مسیر n رأسی گفته و با P_n نمایش می‌دهیم (مثال)

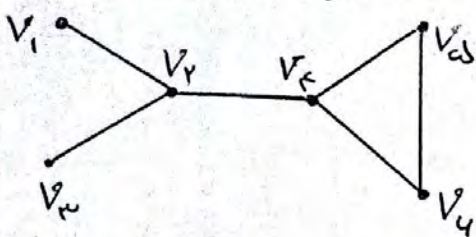


تذکره مهم :

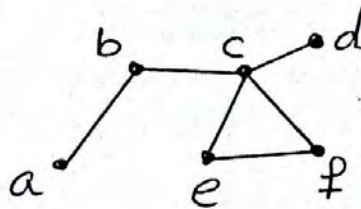
طول مسیر P_n برابر $n-1$ است (تعداد رأس‌ها یک واحد بیشتر از طول مسیر است)

گراف‌های همبند :

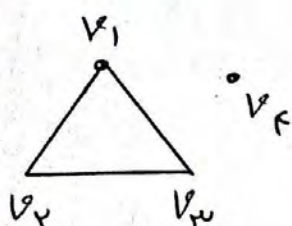
گراف G را همبند می‌گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت آنرا ناهمبند می‌گوییم.



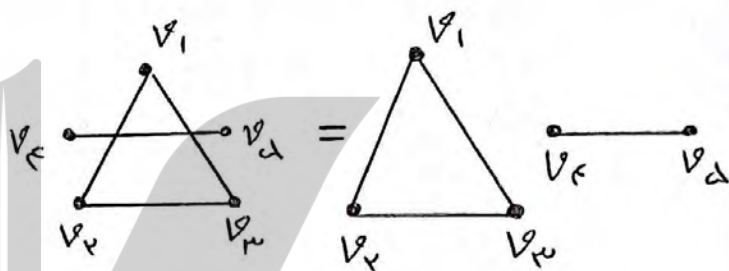
همبند



همبند



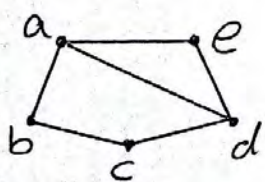
ناهمبند



ناهمبند

دور در گراف :

یک دور به طول m در گراف G دنباله‌ای از $m+1$ رأس که رأس‌های متوالی مجاور بوده و m رأس اول آن دوباره دوستانه بوده و رأس آخر همان رأس اول باشد حداقل طول دور برابر ۳ می‌تواند باشد.

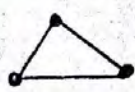


$abcd a$ = دوری به طول ۴

$a e d a$ = دوری به طول ۳

تعریف دور n رأسی :

گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را دور n رأسی گفته و با نماد C_n نشان می‌دهند (مثال)



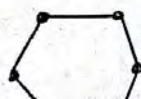
C_3



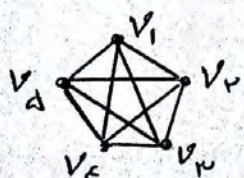
C_4



C_5

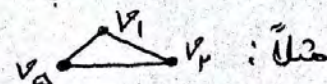


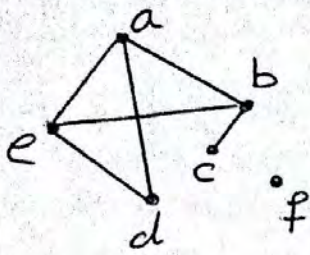
C_6



مثال) گراف K_5 چند زیر گراف بصورت C_3 دارد؟

جواب $= \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$





(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۹) (نمره ۱/۲۵)
 گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.
 الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید

جواب: $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید
 جواب: a, b, e, d, a

ج) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

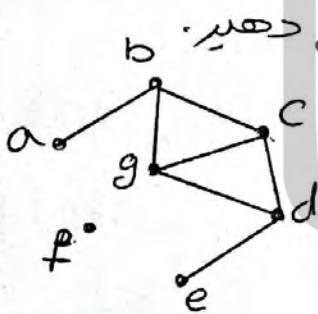
جواب: a, d, e, b, c = مسیر به طول ۴
 a, e, b, c = مسیر به طول ۳

(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۹)

در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف \bar{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید (نمره ۰/۷۵)

$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = P - 1 \Rightarrow 9 + 12 = P - 1 \Rightarrow P = 22$$

(هماهنگت کشوری - دیماه ۹۷) (نمره ۱/۵)



با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.
 الف) یک $a-c$ مسیر به طول ۳ بنویسید.
 جواب: $abgc$

ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

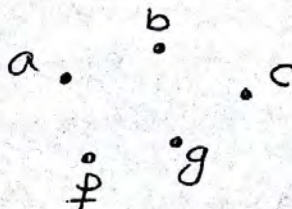
جواب: $bcdgb$

ج) درجه رأس a در گراف \bar{G} را تعیین کنید.

جواب: $\deg_{\bar{G}}(a) = 5$

د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟
 جواب: خیر. چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد.

ه) یک زیرگراف تهی H از G رسم کنید.



(هماصنک کشوری - دیماه ۹۷) (انفرد)

گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یالهای $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (ج) پاسخ دهید:

الف) مجموعه همسایگی باز راس d را بنویسید. $N_G(d) = \{b, e\}$: جواب

ب) اندازه گراف را مشخص کنید: $q = 4$: جواب

ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

$12 =$ مجموع درجات رئوس

(هماصنک کشوری - دیماه ۹۷) (انفرد)

گراف کامل K_p دارای ۳۲ یال است. در این گراف، مرتبه گراف $\Delta(G)$ را مشخص کنید (انفرد)

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 32 \Rightarrow$$

$$p(p-1) = 64 = 8 \times 8 \Rightarrow \boxed{p=9}$$

$$\Delta(G) = p-1 = 9-1 = 8$$

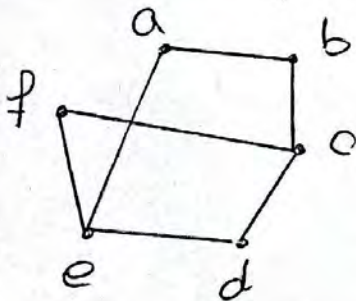
$$\delta(G) = 8$$

(هماصنک شهریور ۹۸) (۲ نفره)

گراف G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یالهای

$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ زیر را در نظر بگیرید:

الف) نمودار گراف را رسم کنید.



ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید. $N_G[b] = \{a, b, c, f\}$

ج) یک مسیر به طول ۵ از a به d بنویسید.

b, a, e, f, c, d

(هماصنک کشوری - شهریور ۹۸) (انفرد)

تیب گراف K_n که رئوس غیرتهی K - منظم رسم کنید بطوریکه:

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



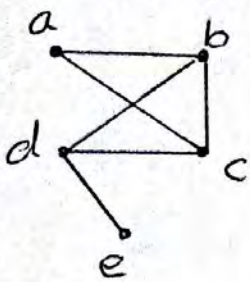
(الف)



(ب)

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۲۵، ۱ نمره)

الف) گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



$\chi(G) = 1$

الف) $\chi(G)$ را مشخص کنید

$q = 4$

ب) اندازه گراف را تعیین کنید

ج) مجموعه همسایگی بسته راس b را بنویسید.
 $N_G(b) = \{b, a, c, d\}$

$\chi = c$

د) اگر $N_G(d) = \{e, \chi, b, a, c\}$ باشد، χ کدام راس است؟

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

$(0 < k < n)$

الف) گراف k - منتظم از مرتبه n را ترسیم کنید

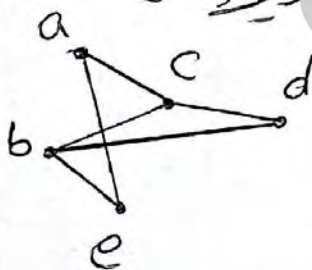
جواب: گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر k باشد

ب) آیا گراف 3 - منتظم از مرتبه k وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

جواب: وجود ندارد زیرا: تناقض $d \times 3 = 2q \Rightarrow d \times 3 = 2q$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸) (۱ نمره)

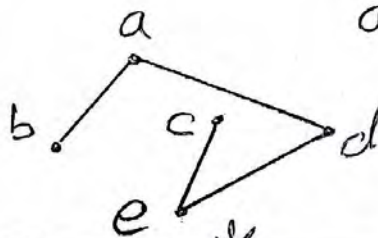
الف) گراف G بصورت مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) دوری به طول 4 مشخص کنید.

جواب: a, c, d, b, e, a

ب) ممکن گراف G را رسم کنید.



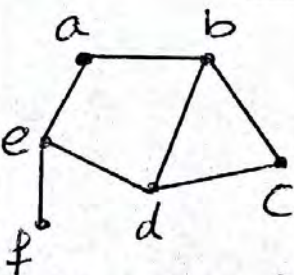
(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) (۵، ۱ نمره)

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

$P = 4, q = 7$

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.

$N_G(b) = \{a, d, c\}$



$q(\bar{G}) + q(G) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) + 7 = \frac{4(4-1)}{2}$

$\Rightarrow q(\bar{G}) = 8$

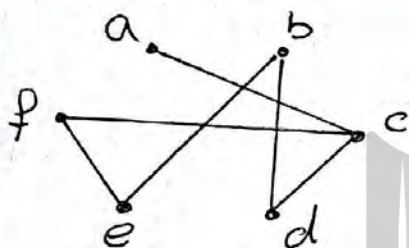
$\Rightarrow \sum deg_G^v = 2q = 2 \times 8 = 16$

ج) مجموع درجه‌های راس‌های گراف \bar{G} را مشخص کنید

تذکره مهم: شامل رأس a نیست $\rightarrow N_G(a) =$ مجموعه همسایگی باز رأس a
 شامل رأس a است $\rightarrow N_G[a] =$ مجموعه همسایگی بسته رأس a

تمرینات مهم فصل ۱ درس ۱ با پاسخ *

۱) گراف G با مجموعه رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید:



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
 $p = 4$ $q = 7$

ب) درجه رأس های G را مشخص نمایید.

$deg(a) = deg(d) = deg(e) = deg(f) = 2$ $deg(b) = deg(c) = 3$

ج) کدام رأس های گراف G با رأس f مجاورند؟ رأس های c و e

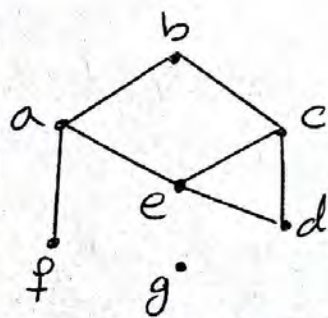
د) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $2q = 2 \times 7 = 14$

۲) گراف H با مجموعه رأس های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_1v_4\}$ مفروض است.

بدون کشیدن نمودار آن به قسمتهای (الف) تا (د) در مورد گراف H پاسخ دهید.

$P = 4$, $q = 4$, $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = deg(v_4) = 3$, $2q = 12$

۳) گراف G را در نظر بگیرید.



الف) مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ $E(G) = \{ab, bc, cd, ce, de, ea, af\}$

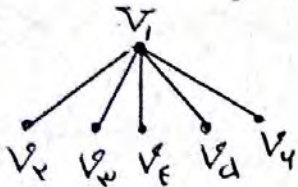
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$

ج) مجموعه همسایه های رأس های f , g و e را بنویسید.

$N_G(f) = \{a\}$ $N_G(g) = \emptyset$ $N_G(e) = \{a, c, d\}$

د) اگر $N_G(x) = \{a, c, d\}$ آنگاه x کدام رأس است؟ x رأس e است.

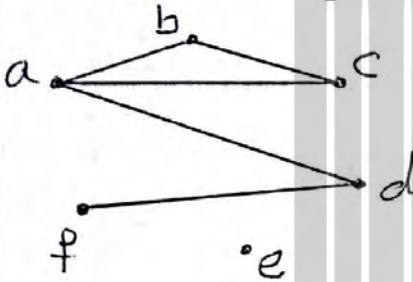
۳) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_i)$ دارای d عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 4$ تک‌عضوی باشند. گراف G را رسم کنید.



$$P=4 \Rightarrow N_G(v_1) = d$$

پس v_1 به تمام رئوس دیگر وصل است و چون $N_G(v_i)$ تک‌عضوی است پس v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 به یک رأس وصل هستند که همان v_1 است.

۴) در گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:



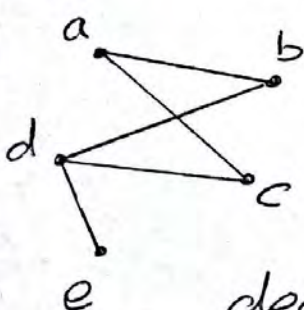
$$N_G(a) = \{b, c, d\} \quad N_G(b) = \{a, c\}$$

$$N_G(c) = \{a, b\} \quad N_G(d) = \{a, f\}$$

$$N_G(e) = \{ \} \quad N_G(f) = \{d\}$$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.
 $P=4, q=5$

۵) گراف G رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف G را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف \bar{G} را تعیین نمایید.



$$P=5, q=4$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 4 + q(\bar{G}) = \frac{5 \times 4}{2}$$

$$\Rightarrow q(\bar{G}) = 4 \Rightarrow \text{مجموع درجه‌های رئوس } \bar{G} = 2q(\bar{G}) = 8$$

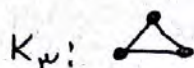
$$\text{deg}_G(a) + \text{deg}_{\bar{G}}(a) = P-1 \Rightarrow 2 + \text{deg}_{\bar{G}}(a) = 5-1 \Rightarrow \text{deg}_{\bar{G}}(a) = 2$$

$$\text{deg}_G(c) + \text{deg}_{\bar{G}}(c) = P-1 \Rightarrow 3 + \text{deg}_{\bar{G}}(c) = 5-1 \Rightarrow \text{deg}_{\bar{G}}(c) = 1$$

K_1 : •

K_2 : —

۶) گراف‌های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.



(7) در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف 2-منتظم از مرتبه n رسم کنید.



ب) $n=5$
 $r=2$



ب) $n=4$
 $r=2$



الف) $n=4$
 $r=1$

د) $n=7$
درجه فرد ندارد

ج) $n=7$
 $r=3$



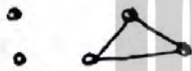
ث) $n=4$
 $r=4$

ه) رأس درجه فرد ندارد

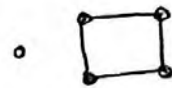
ت) $n=5$
 $r=3$

(8) برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف 4-رأسی رسم کنید بطوریکه:

ب) دو رأس تنها داشته باشد



الف) یک رأس تنها داشته باشد



د) پنج رأس تنها داشته باشد



ب) چهار رأس تنها داشته باشد امکان ندارد



ج) سه رأس تنها داشته باشد

(9) هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند 4 نفر از آنها هر کدام دقیقاً با 2 نفر دست داده‌اند، نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با 4 نفر دست داده باشد.

حل: هفت نفر را رؤس گراف در نظر می‌گیریم و 2 نفری را که با هم دست داده‌اند بهم وصل می‌کنیم، 4 تا رأس درجه 2 خواهیم داشت اگر نفر هفتم با 4 نفر دست داده باشد درجه آن 4 است و فقط یک رأس درجه فرد داریم که امکان پذیر نیست.

(10) علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از 4 نفر دیگر باشد یا نباشد:

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

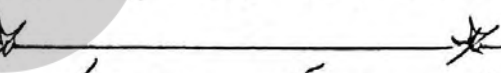
$e = \text{مهرداد}$ ، $d = \text{ناصر}$ ، $c = \text{محمد}$ ، $b = \text{اسما}$ ، $a = \text{علی}$

که در فهرست دوستان x است (x, y)

تمام حالتها ممکن $= \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d)\} \Rightarrow ۲۰ = \text{جمعاً}$

ب) اگر بودن در فهرست دوستان ، رابطهای دو طرفه داشته باشند یعنی هر دو نفر یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست ، در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد ؟
 حل : فقط ۱۰ حالت کنی می تواند وجود داشته باشند.

$\{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$



۱۱) یک گراف ۹ راسی رسم کنید بطوریکه :

الف) دورهایی به طول ۴ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

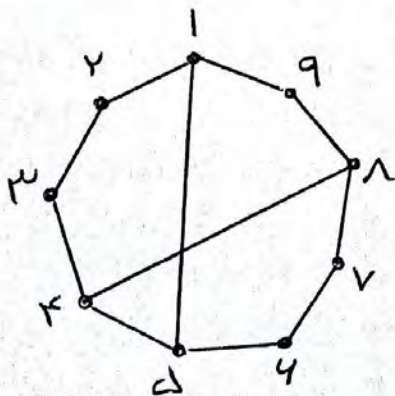
$۱۵۴۷۸۹۱ = \text{دوره به طول } ۶$ ، $۱۲۳۴۵۱ = \text{دوره به طول } ۴$

$۱۲۳۸۷۴۵۱ = \text{دوره به طول } ۷$

$۱۲۳۴۵۴۷۸۹۱ = \text{دوره به طول } ۹$

دوره به طولهای دیگر وجود ندارد.

ب) دورهایی به طول ۴ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



$۱۲۳۴۵۱ = \text{دوره به طول } ۴$

$۱۵۴۷۸۹۱ = \text{دوره به طول } ۶$

$۱۲۳۴۸۷۴۵۱ = \text{دوره به طول } ۸$

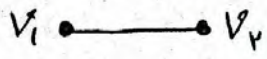
$۱۲۳۴۵۴۷۸۹۱ = \text{دوره به طول } ۹$

دوره به طولهای دیگر وجود ندارد.

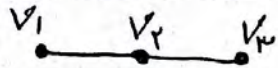
۱۲) فرض کنید G یک گراف باشد و $K \geq \deg(G)$ ، درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید:

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است
 جواب: درست است

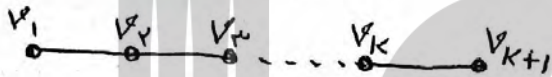
فرض کنید v_1 یک رأس از گراف باشد چون $K \geq \deg(G)$ پس v_1 به حداقل یک رأس دیگر مانند v_2 وصل است.



چون $\deg(v_2) \geq K$ پس v_2 به حداقل یک رأس دیگر وصل است.



و اگر همین طور ادامه دهیم نمودار زیر قابل رسم است که یک مسیر به طول K است.



ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است.

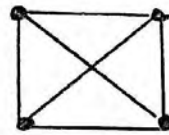
جواب: نادرست است $\deg(G) \geq 2$ ولی مسیر به طول ۳ ندارد



۱۳) یک گراف K رأسی غیر دهی K - منتظم یکسید که:

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

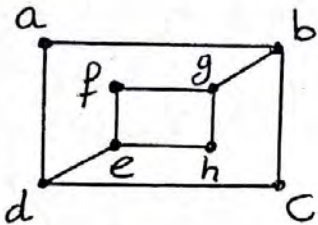
الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد



درس ۱ : مدل سازی با گراف

تعریف مجموعه احاطه‌گر :

زیر مجموعه D از راس‌های گراف را مجموعه احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر راس از گراف که در D نباشد، حداقل به یکی از راس‌های D وصل باشد.

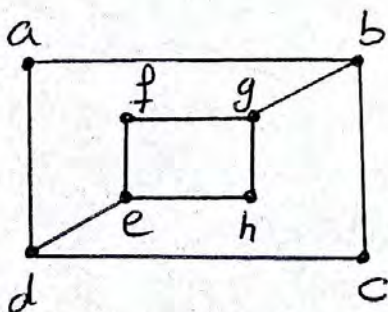


در گراف مقابل $D = \{a, f, h, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است چون راس‌های دیگر گراف که در D نیستند (یعنی راس‌های b, d, e, g) به یکی از راس‌های D

وصل هستند مجموعه $D = \{a, b, g, e, d\}$ هم می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر دیگر باشد چون راس‌های دیگر گراف که در D نیستند به یکی از راس‌های D وصل هستند. در گراف G هر راس خودش و همه راس‌های دیگر گراف G را پوشش می‌دهد و احاطه می‌کند.

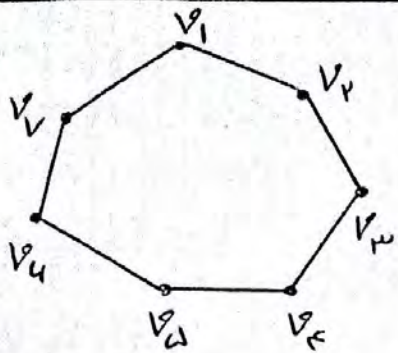
تعریف مجموعه احاطه‌گر مینیمم :

در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه (یا مجموعه‌ها) که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم نامیده و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ (گامای جی) نشان می‌دهیم به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک γ -مجموعه هم می‌گوییم.



مجموعه احاطه‌گر مینیمم $D = \{b, e\}$

$$\gamma(G) = 2$$



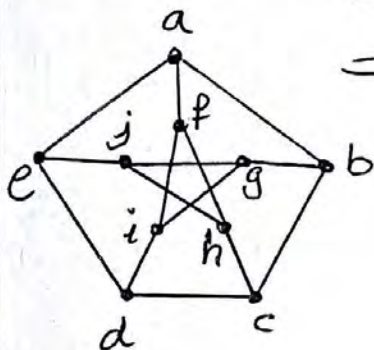
مثال) برای گراف مقابل که دور C_7 است مطلوبست محاسبه $\chi(G) = ?$ و یک مجموعه احاطه‌گر؟

یک مجموعه احاطه‌گر $= \{V_1, V_3, V_5, V_7\}$

یک مجموعه احاطه‌گر مینیم $= \{V_1, V_4, V_7\}$

یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم دیگر $= \{V_1, V_2, V_5\}$

$\chi(G) = 3$



مثال) در گراف مقابل که به گراف پترشن معروف است مطلوبست:

الف) دو مجموعه احاطه‌گر معرفی کنید.

$D = \{a, b, c, d, e\}$ یا $D = \{a, i, j, c\}$

ب) دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم معرفی کنید.

$D = \{a, i, h\}$ یا $D = \{a, g, c\}$ $\chi(G) = 3$

معرفی یک نماد:

می‌دانیم اگر x یک عدد صحیح باشد جزو صحیح x را با علامت $[x]$

نشان داده و آنرا بصورت زیر تعریف می‌کنیم $[x] = n \Leftrightarrow n < x < n+1$ $n \in \mathbb{Z}$

یا $[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ $[3] = 3$ $[4,7] = 4$

جزو صحیح عدد x را کف x نیز می‌گویند و آنرا با علامت $\lfloor x \rfloor$ نشان داده و به آن کف x می‌گویند.

اگر x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیح بعد از x از علامت $[x]$ استفاده می‌کنیم و آنرا سقف x می‌خوانیم در حالت کلی:

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lceil 3 \rceil = \lfloor 3 \rfloor = 3$$

$$\lceil 3,7 \rceil = \lfloor 3,7 \rfloor = 3$$

$$\lfloor 5,1 \rfloor = 5$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

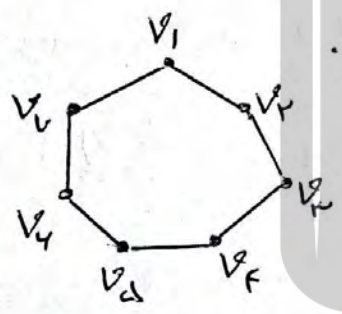
$$\lceil 3,7 \rceil = 4$$

$$\lceil 5,1 \rceil = 6$$

باتوجه به مثالهای بالا، اعداد کف و سقف در اعداد صحیح باهم برابرند

گران پایین $\gamma(G)$:

اگر G یک گراف n رأسی با کمترین درجه Δ باشد آنگاه: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$
 در گراف G عدد $\lceil \frac{n}{\Delta+1} \rceil$ را یک گران پایین $\gamma(G)$ می نامند یعنی $\gamma(G)$ نمی تواند از آن کمتر باشد



مثال ۱: عدد احاطه گری گراف C_7 را بیابید.

$$\Delta = 2 \quad n = 7$$

گراف ۲- منتظم است پس: $\gamma(G) \geq \lceil \frac{7}{2+1} \rceil = 3$

از طرفی $D = \{v_1, v_4, v_7\}$ یک مجموعه احاطه گر است پس $\gamma(G) \leq 3$

$$\left. \begin{matrix} \gamma(G) \geq 3 \\ \gamma(G) \leq 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \gamma(G) = 3$$

مثال ۲: (هماهنگت - خرداد ۹۹):

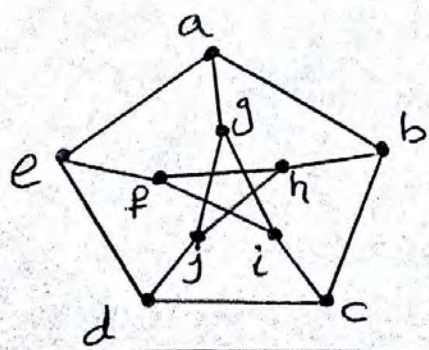
عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید (۱، ۲، ۵، ۸)

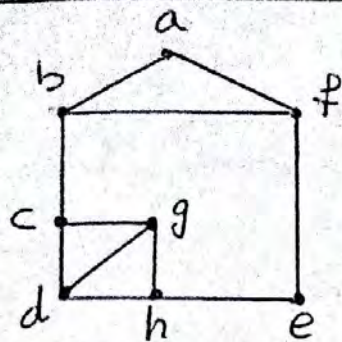
حل: در گراف مقابل $n=10$ و $\Delta=3$ پس:

$$\gamma(G) \geq \lceil \frac{10}{3+1} \rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$$

از طرفی $D = \{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه گری برای گراف است پس $\gamma(G) \leq 3$ بنابراین:

$$\gamma(G) = 3$$



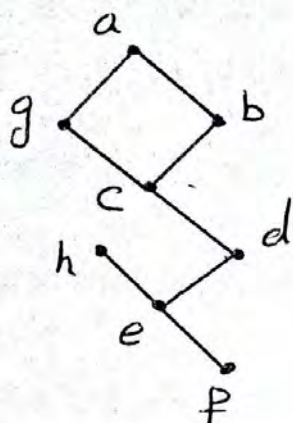


مسئله ۳: عدد احاطه تری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است.

پس: $\lfloor \frac{8}{3+1} \rfloor = 2$ از طرفی $\{f, g\}$ کل رأسها

را احاطه می کنند پس $\chi(G) < 2$ در نتیجه: $\chi(G)=2$



مسئله ۴: عدد احاطه تری گراف مقابل را بدست آورید.

حل: گراف از مرتبه $n=8$ و $\Delta=3$ است.

پس $\lfloor \frac{8}{3+1} \rfloor = 2$ به نظر می رسد که با ۲ رأس نمی توان

کل رأسها را احاطه کنیم زیرا برای احاطه کردن رئوس

a, b, c, d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه تر باشند

(چون $\lfloor \frac{4}{3+1} \rfloor = 2$) و برای احاطه کردن رئوس e, f, g و h حداقل یکی

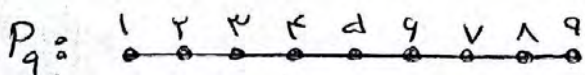
از آنها باید انتخاب شوند (چون $\lfloor \frac{3}{3+1} \rfloor = 1$) بنابراین حداقل ۳ رأس

باید در مجموعه احاطه تر باشند یعنی $\chi(G) \geq 3$ از طرفی چون $\{a, c, e\}$

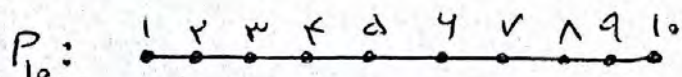
یک مجموعه احاطه تر است پس $\chi(G) \leq 3$ در نتیجه: $\chi(G)=3$

مسئله ۵: گرافهای P_9 و P_{10} را رسم کنید و عدد احاطه تری

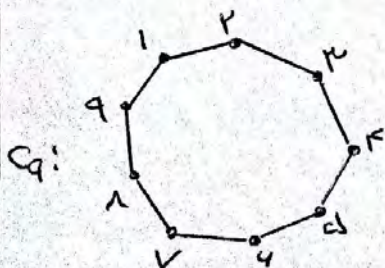
هر یک را مشخص کنید



$\chi(P_9) = \lfloor \frac{9}{2+1} \rfloor = 3$ از طرفی $\{2, 4, 6, 8\}$ یک مجموعه احاطه تر است پس $\chi(P_9) \leq 3$ در نتیجه: $\chi(P_9)=3$

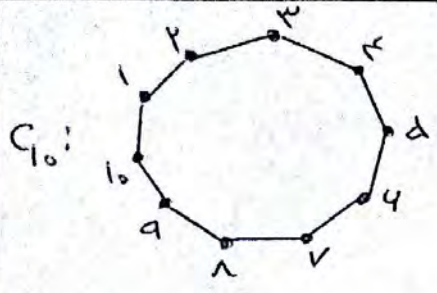


$\chi(P_{10}) = \lfloor \frac{10}{2+1} \rfloor = 4$ از طرفی $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ یک مجموعه احاطه تر است پس $\chi(P_{10}) \leq 4$ در نتیجه: $\chi(P_{10})=4$



$\chi(C_9) = \lfloor \frac{9}{2+1} \rfloor = 3$ از طرفی $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ یک مجموعه

احاطه تر است پس $\chi(C_9) \leq 3$ در نتیجه: $\chi(C_9)=3$



$\{1, 2, 7, 9\}$ از طرفی $\Delta(C_{10}) \geq \lfloor \frac{10}{2+1} \rfloor = 4$
 یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد پس $\Delta(C_{10}) = 4$

در نتیجه: $\Delta(C_{10}) = 4$

مثال ۴: (خاصیت دیماه ۹۸)
 اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیم درجه‌گراف باشد: (نمره ۱/۲۵)
 اطمینان گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ است.

جواب: اگر $n=10$ باشد C_{10} و P_{10} رسم شود چون $\Delta(G) = \lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor = 4$

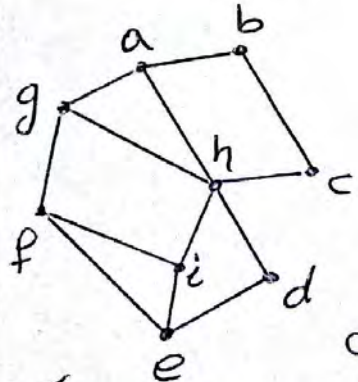
بسیار گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر بزرگتر از $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ باشد
 (یا برابر $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ نباشد)



$\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor = 2$

$\Delta(G) = 3$ ولی

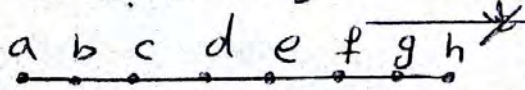
مجموعه احاطه‌گر مینیمال:
 مجموعه احاطه‌گر که با حذف هر یک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر
 نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌گوئیم.



مثال ۱: (خاصیت شهریور ۹۸)
 در گراف مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال
 انتخاب کنید پس با حذف برخی از رأس‌ها
 آنرا به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید (نمره)

یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال $= \{a, h, f, b\}$

اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بدست می‌آید



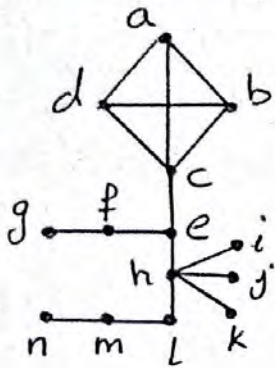
مثال ۲: (خاصیت شهریور ۹۸)

الف) گراف P_8 را رسم کنید. (نمره ۱/۵)
 ب) یک Δ - مجموعه از آنرا مشخص کنید.
 ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال Δ عضوی از آن مشخص کنید

$\{a, d, e, h\}$

★ (حل تمرینات مهم فصل ۲ درس ۲ با پاسخ) ★

۱۱ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



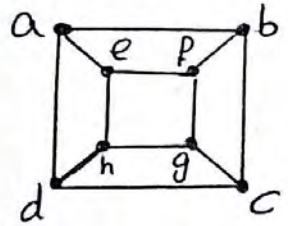
الف) $n=14$ و $\Delta=5$ پس: $\lfloor \frac{14}{5+1} \rfloor = 3$ $\chi(G) \geq 3$

اما حداقل یکی از رئوس a, b, c, d باید انتخاب شود چون باید a, b, c, d احاطه شود حداقل یکی

از رئوس e, f, g باید انتخاب شود تا گراف

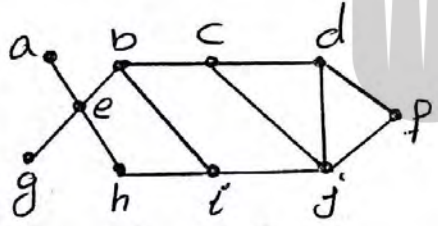
حاطه شود حداقل یکی از رئوس e, f, g باید انتخاب شود تا گراف h, i, j, k و l, m, n احاطه شود حداقل یکی از رئوس h, i, j, k باید انتخاب شود تا گراف l, m, n احاطه شود

بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد لذا $\chi(G) \geq 4$ از طرفی چون $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\chi(G) = 4$ پس $\chi(G) = 4$



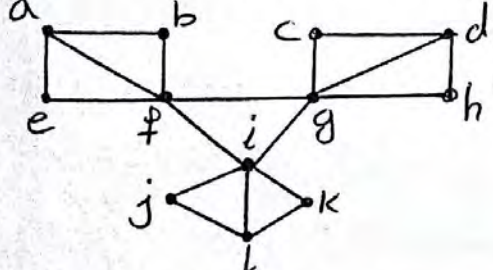
ب) $n=8$ و $\Delta=3$ پس $\lfloor \frac{8}{3+1} \rfloor = 2$ $\chi(G) \geq 2$ از طرفی

$\{h, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\chi(G) = 2$ پس: $\chi(G) = 2$



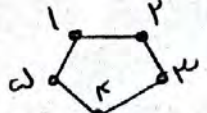
پ) $n=10$ و $\Delta=4$ پس $\lfloor \frac{10}{4+1} \rfloor = 2$ $\chi(G) \geq 2$ از طرفی

$\{e, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\chi(G) = 2$ پس: $\chi(G) = 2$



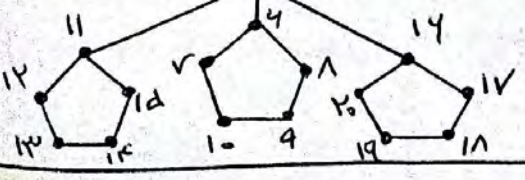
ت) $n=12$ و $\Delta=5$ پس $\lfloor \frac{12}{5+1} \rfloor = 2$ $\chi(G) \geq 2$

از طرفی $\{f, d, l\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد است لذا $\chi(G) = 3$ پس $\chi(G) = 3$



ث) $n=20$ و $\Delta=5$ پس $\lfloor \frac{20}{5+1} \rfloor = 4$ $\chi(G) \geq 4$

از طرفی $\{2, 4, 8, 16, 17, 19\}$ یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد است پس $\chi(G) = 8$



۳) اگر برای گراف G داشته باشیم $\chi(G) = 1$ در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟

حل: چون $\chi(G) = 1$ پس یک راس وجود دارد که با همه رئوس مجاور است در نتیجه: $\Delta(G) = P - 1$ پس $q_{\min} = P - 1$ و گراف می‌تواند حداکثر یک گراف کامل باشد پس $q_{\max} = \binom{P}{2}$

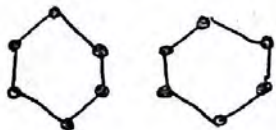
۳) $\chi(P_n)$ و $\chi(C_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

پاسخ: $\chi(C_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ و $\chi(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

۴) اگر G یک گراف k -منتظم n راسی باشد نشان دهید $\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor \leq \chi(G)$

حل: چون گراف k -منتظم است پس $\Delta = k$ و $\chi(G) \geq \lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor = \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$

۵) یک گراف ۲-منتظم ۱۲ راسی بکشید که عدد احاطه‌تری آن کمترین مقدار ممکن باشد.



حل: می‌دانیم: $\chi(G) \geq \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ پس $\chi(G) \geq \lfloor \frac{12}{3} \rfloor$

$\chi(G) \geq 4$ در شکل مقابل $\chi(G) = 4$



۶) یک گراف ۴ راسی که ۴-مجموعه آن به اندازه یک باشد رسم کنید



۷) یک گراف ۴ راسی که ۴-مجموعه آن به اندازه دو باشد رسم کنید

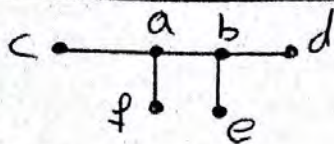
۸) فرض کنید n در k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$ روشی برای رسم یک گراف



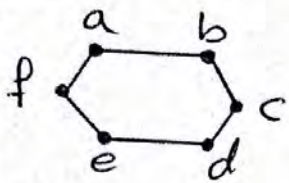
n راسی که عدد احاطه‌تری آن k باشد ارائه دهید

حل: کافیست $k-1$ راس انزوله قرار دهیم و در بقیه رئوس یک راس را به تمام رئوس دیگر وصل کنیم مثلاً: $n=7, k=3$ و $\chi(G)=3$

- ۹) (هماهنگ کشور) - خرداد ۹۹۹۸: گرافی ۴ راسی با عدد احاطه‌تری ۲ رسم کنید:
- الف) بطوریکه مجموعه احاطه‌تری با اندازه ۲ داشته باشد.
- ب) بطوریکه بیش از یک مجموعه احاطه‌تری با اندازه ۲ داشته باشد.



حل الف) گراف روبه‌رو از مرتبه ۴ و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گر یکتا $\{a, b\}$ است.



حل ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌تری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{a, d\}$, $\{f, c\}$, و $\{e, b\}$

۱۰) برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که:

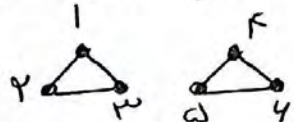
الف) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌تری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

حل: کافیست یک رأس انزوله باشد و در بقیه رئوس یک راس را به همه رئوس دیگر وصل کرد.

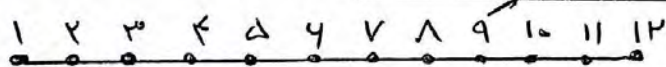
ب) چگونه می‌توانید یک گراف n راسی با عدد احاطه‌تری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

حل ب) کافیست دو گراف کامل K_n مجزا بکشید. مثلاً برای $n=4$ یک K_4 بکشیم

در قدرین ۹ مساحت (ب) می‌توانستیم گراف را بصورت زیر هم رسم کنیم.



مجموعه‌های $\{1, 2, 3\}$ و $\{4, 5, 6\}$ مجموعه احاطه‌ترین

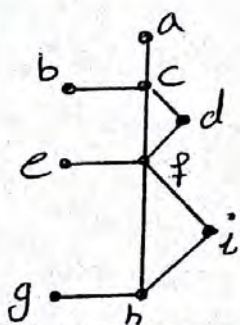


(هماصفت - دیباه ۹۷) ۱۱) گراف P_{12} را رسم کنید:

الف) یک ۸- مجموعه از آن مشخص کنید

حل: مجموعه $\{1, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5\}$ یک ۸- مجموعه است.

ب) یک مجموعه احاطه‌تر مینیمال ۴ عضوی از آن مشخص کنید $\{1, 11, 9, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$



(هماصفت - دیباه ۹۸)

برای گراف روبه‌رو: الف) یک مجموعه احاطه‌تر با ۴ عضو مشخص کنید $\{c, f, h, g\}$

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌تر مینیمال باشد $\{c, f, g\}$

(هماهنگت کشوری - خرداد ۹۸)

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل n رأسی، یال دارد. جواب: ۲۸

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ یا $3=5$ حداقل رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. جواب: ۳

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\chi(G)=1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است. جواب: $P-1$



(هماهنگت کشوری دیماه ۹۸)

درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است. جواب: نادرست



(هماهنگت - شهریور ۹۸)

جاهای خالی را پر کنید:

الف) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. جواب: همبند

ب) مقدار (C_n) به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: جواب: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



(هماهنگت کشوری - دیماه ۹۷)

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است. جواب: نادرست

ب) گراف 3 -منتظم از مرتبه n قابل رسم نیست.

جواب: درست

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>