بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور
WWW.KONKUR.INFO
Konkur.info
https://konkur.info

فصل ۳ : ترکیبیات (شمارش)

یادآوری مطالب سالهای قبل:

۱) اصل ضرب: اگر کاری در مرحله اول به m روش و در مرحله دوم به n روش و در مرحله سوم به P روش و ... انجام شود کل کار به $m \times n \times p \times \dots$ روش انجام می شود

مثال) با حروف کلمه STOP چند کلمه چهار حرفی با تکرار حروف می توان نوشت در صورتیکه:

الف) با حرف T شروع شود $1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$

ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود $1 \times 4 \times 4 \times 1 = 16$

---

۲) جایگشت: تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز را جایگشت آن n شی متمایز نامیده و برابر است با: $n!$

مثال) ۵ دانش آموز به چند طریق می توانند در یک صف بایستند؟

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

---

۳) n نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند بطوریکه:

الف) k نفر مشخص همواره کنار هم باشند — جواب $= (n-k+1)! \times k!$

ب) k نفر مشخص همواره کنار هم نباشند — جواب $= n! - (n-k+1)! \times k!$

مثال) به چند طریق می توان ۷ دانش آموز را در یک صف قرار داد بطوریکه:

الف) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم باشند.

جواب $= (7-2+1)! \times 2! = 6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440$

ب) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم نباشند

جواب $= 7! - (7-2+1)! \times 2! = 7! - 6! \times 2! = 5040 - 1440 = 3600$

---

۴) تذکر مهم: $1! = 1$ $\quad 0! = 1$

https://konkur.info

۵) جایگشت k شی از n شی متمایز:
تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن k شی از n شی متمایز را با علامت $P(n,k)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم: $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

مثال) با حروف کلمه FAMILY و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی شامل حرف M می‌توان ساخت؟
حل: قرار دادن حرف M در یکی از چهار مکان به ۴ طریق ممکن است و پر کردن سه مکان با مانده توسط ۵ حرف باقیمانده به صورت زیر ممکن است: حالت $P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=60$
حالت $4\times 60=240$ طبق اصل ضرب

---

۶) ترکیب k شی از n شی متمایز:
اگر از بین n شی متمایز بخواهیم k شی ($k\le n$) را انتخاب کنیم و حالتهای کنار هم قرار گرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد آنرا یک ترکیب k شی از n شی می‌گوئیم و با علامت $C(n,k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم: $C(n,k)=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}$

مثال) به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک تیم ۳ نفری انتخاب کرد؟

$$C(8,3)=\frac{8!}{3!\times 5!}=56$$

---

۷) جایگشتهای با تکرار:
اگر n شی متمایز داشته باشیم بطوریکه p تای آنها از نوع اول، q تای آنها از نوع دوم و r تای آنها از نوع سوم و ... باشد تعداد کل جایگشتهای اشیاء برابر است با: $\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times\cdots}$

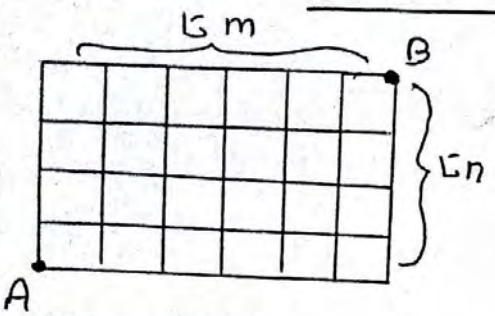
مثال) ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره در یک هتل اسکان یابند؟
جواب $=\frac{9!}{2!\times 3!\times 4!}=\frac{362880}{288}=1260$

https://konkur.info

مثال) با حروف کلمه ساسانیان چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

۲ تا = تعداد س ۲ تا = تعداد ن ۲ تا = تعداد ل
۳ تا = تعداد الف ۱ تا = تعداد ی

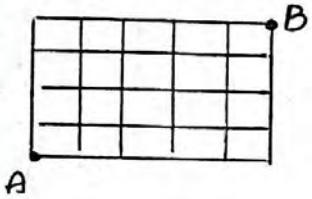
$$\frac{8!}{2!\times3!\times2!\times1!} = \frac{40320}{24} = 1680$$



۸) اگر یک شبکه $n \times m$ مطابق شکل مقابل داشته باشیم و فقط به راست یا بالا حرکت کنیم تعداد مسیرها از A به B برابر است با:

$$\text{تعداد مسیرها} = \frac{(n+m)!}{n! \times m!}$$

مثال) چند مسیر از A به B وجود دارد بطوریکه فقط مجاز باشیم به راست یا بالا حرکت کنیم؟



$$\text{جواب} = \frac{(4+5)!}{4! \times 5!} = \frac{362880}{2880} = 126$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

با ارقام ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟ (۰/۷۵ نمره)

۲ تا = تعداد ۱
۳ تا = تعداد ۲

$$\text{جواب} = \frac{7!}{2! \times 3!} = 420$$

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

با حروف کلمه «می سی سی پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟ (۱ نمره)

۴ تا = تعداد (ی)
۲ تا = تعداد (س)

$$\text{جواب} = \frac{8!}{4! \times 2!} = 840$$

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد بطوریکه: (۱/۲۵ نمره)

الف) کتابها یکی در میان قرار گیرند.

$$\text{جواب} = 6! \times 5!$$

ب) کتابهای ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند

$$\text{جواب} = 2! \times 5! \times 6!$$

https://konkur.info

(هماهنگ خرداد ۹۸)

با ارقام ۱ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟ (۱نمره)

۲ تا ۱ = تعداد ۱
۳ تا ۲ = تعداد ۲
۲ تا ۴ = تعداد ۴

$$\text{جواب} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 2!} = 3 \times 7!$$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (۱/۵ نمره)

الف) بصورت یک در میان قرار بگیرند $\text{جواب} = 5! \times 6!$

ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند $\text{جواب} = 7! \times 5!$

ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند. $\text{جواب} = 10! \times 2!$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (۱نمره)

الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. $\text{جواب} = 4! \times 3!$

ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند. $\text{جواب} = 4! \times 4!$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم) (۱نمره)

$$P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 1680$$

تعداد حالتهای ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی

https://konkur.info

حل معادلهٔ سیالهٔ خطی با ضرایب واحد:

قضیه: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با:

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

که همان تعداد انتخابهای دلخواه n شاخهٔ گل از بین k نوع گل است.

مثال ۱: معادله $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

$n=7$
$k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\times 7!} = 36$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دستهٔ گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل: تعداد گل‌های نوع اول را x_1 و نوع دوم را x_2 و نوع سوم را x_3 و نوع چهارم را x_4 درنظر می‌گیریم پس:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8$$

$n=8$
$k=4$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\times 8!} = 165$$

مثال ۳: به چند طریق می‌توانیم ۸ توپ یکسان را در جعبه‌هایی با شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ قرار دهیم؟

حل: تعداد توپهای جعبه اول را x_1 و جعبه دوم را x_2 و جعبه سوم را x_3 درنظر می‌گیریم پس:

$$x_1+x_2+x_3=8$$

$n=8$
$k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\times 8!} = 45$$

مثال ۴: شش شکلات یکسان را به چند طریق می‌توان بین علی، رضا و محمد تقسیم کرد بطوریکه به محمد دقیقاً ۲ شکلات برسد؟

x_1 = تعداد شکلاتهای علی
x_2 = تعداد شکلاتهای رضا
۲ = تعداد شکلاتهای محمد

$$x_1+x_2+2=6 \Rightarrow x_1+x_2=4$$
$$n=4,\ k=2$$
$$\binom{4+2-1}{2-1} = \binom{5}{1} = 5$$

https://konkur.info

نکته ریاضی:

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با:

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1}$$

مثال ۱: معادله $x_1+x_2+x_3=5$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد؟

$n=5$, $k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل: چون از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه باید انتخاب شود و جواب‌های معادله عدد طبیعی هستند

x_1 = تعداد گل‌های نوع اول

x_2 = تعداد گل‌های نوع دوم

x_3 = تعداد گل‌های نوع سوم

x_4 = تعداد گل‌های نوع چهارم

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9$$

$n=9$, $k=4$

$$\text{جواب} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{8}{3} = 56$$

حل معادله $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ به روش تغییر متغیر:

اگر در معادله سیاله شرط‌هایی به صورت $x_1 \geq a$ و $x_2 \geq b$ و ... داشته باشیم در اینصورت متغیر را تغییر داده و معادله را طبق شرایط زیر حل می‌کنیم:

$$x_1 \geq a \Rightarrow x_1 - a \geq 0 \xrightarrow{\text{اگر } x_1-a=y_1} x_1 = y_1 + a \text{ و } y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq b \Rightarrow x_2 - b \geq 0 \xrightarrow{\text{اگر } x_2-b=y_2} x_2 = y_2 + b \text{ و } y_2 \geq 0$$

مثال ۱: معادله $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب طبیعی دارد؟

$x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 = y_1+1$

$x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2+1$

$x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3+1$

$$y_1+1+y_2+1+y_3+1=7 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=4$$

$n=4$, $k=3$

$$\text{جواب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

konkur.info

https://konkur.info

مثال ۲: معادله $x_1+x_2+\cdots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1>1$ و $x_3>3$ باشد؟

$x_1>1 \Rightarrow x_1\geq 2 \Rightarrow x_1=y_1+2$

$x_3>3 \Rightarrow x_3\geq 4 \Rightarrow x_3=y_3+4$

$y_1+2+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14$

$\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=8$

$n=8,\ k=5$ $\quad \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+5-1}{5-1}=\binom{12}{4}=$

$=495$

مثال ۳: معادله $x_1+x_2+\cdots+x_4=12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟

$x_5>2 \Rightarrow x_5\geq 3 \Rightarrow x_5=y_5+3$

$x_3=4$

$x_1+x_2+4+x_4+y_5+3+x_4=12$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_4+y_5+x_4=5$

$n=5,\ k=5$ $\quad \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}=126$

مثال ۴: (هماهنگ کشوری - دی ماه ۹۷):

به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (انمره)

$x_1+x_2+x_3+x_4=8$ $\quad x_i\geq 1,\ i=1,2,3,4$

جوابهای طبیعی را خواسته است

$n=8,\ k=4 \Rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{8-1}{4-1}=\binom{7}{3}=35$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸):

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\cdots+x_4=12$ باشرط $x_1>2$ و $x_3\geq 4$ را محاسبه کنید (انمره)

$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow x_1=y_1+3$

$x_3\geq 4 \Rightarrow x_3=y_3+4$

$y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_3+4+x_4=12$

$\Rightarrow y_1+x_2+x_3+x_4+y_3+x_4=5$

$n=5,\ k=4$ $\quad \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{5+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=252$

konkur.info
https://konkur.info

(هماهنگ دیماه ۹۸):

معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1>2$ و $x_3>3$ باشند (۱ نمره)

$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow x_1=y_1+3$

$x_3>3 \Rightarrow x_3\geq 4 \Rightarrow x_3=y_3+4$

$y_1+3+x_2+y_3+4+x_4+x_5=14$

$\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=7$

$n=7, k=5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{11}{4}=330$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_5=10$ با شرط $i=2,3,4,5$ و $x_i>0$ را محاسبه کنید (۱ نمره)

$x_2>0 \Rightarrow x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$

$x_3>0 \Rightarrow x_3\geq 1 \Rightarrow x_3=y_3+1$

$x_4>0 \Rightarrow x_4\geq 1 \Rightarrow x_4=y_4+1$

$x_5>0 \Rightarrow x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$

$x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$

$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$

$n=6, k=5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{10}{4}=210$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم (۱٫۲۵ نمره)

$x_1+x_2+\dots+x_5=11$ ، $x_2\geq 2$ و $x_5\geq 4$

$x_2\geq 2 \Rightarrow x_2=y_2+2$

$x_5\geq 4 \Rightarrow x_5=y_5+4$

$x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4=11$

$\Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5=5$

$n=5, k=5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{9}{4}=126$

مثال) معادله $x_1+x_2+\dots+x_5=11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i\geq 1$ و $i=1,2,3,4,5$)

$x_1\geq 1 \Rightarrow x_1=y_1+1$ $x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$ $x_3\geq 1 \Rightarrow x_3=y_3+1$ $x_4\geq 1 \Rightarrow x_4=y_4+1$

$x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$ $y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=11 \Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

konkur.info

https://konkur.info

مربع های لاتین:
یک جدول مربعی از اعداد ۱و۲و...و n به شکل یک مربع n×n را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱و۲و...و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد مربع لاتین می نامیم به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می گوییم.

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

در حالت کلی شکل زیر یک مربع لاتین n×n است که به آن مربع لاتین چرخشی می گوییم

۱	۲	۳	.....	n-۱	n
n	۱	۲	.....	n-۲	n-۱
n-۱	n	۱	.....	n-۳	n-۲
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
۲	۳	۴	.....	n	۱

تذکر مهم:
مربع لاتین از هر مرتبه ای وجود دارد.
یک مربع لاتین ۱×۱ داریم ← [۱]

ساخت مربع لاتین:
روش چرخشی: در سطر اول اعداد n و ... و ۳ و ۲ و ۱ را می گذاریم آخرین عدد سطر اول را که n است در ابتدای سطر دوم نوشته و بقیه عددها را در سطر دوم تک تک به راست می بریم و این کار را تکرار می کنیم.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

تذکر مهم:
کل مربع های لاتین مرتبه ۳ دو نوع هستند

a	c	b
c	b	a
b	a	c

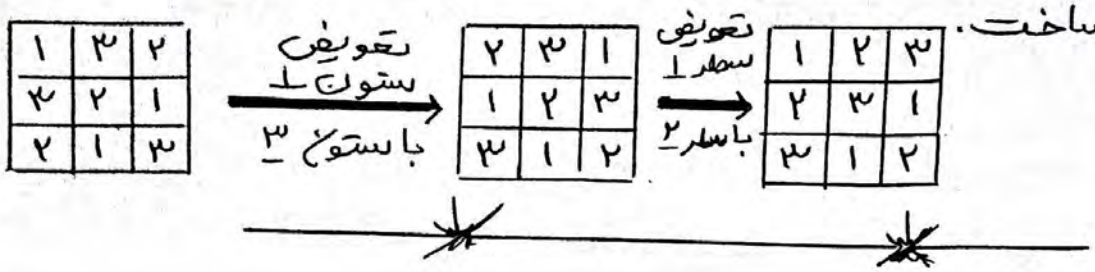
روی قطر اعداد غیر تکراری اند

a	b	c
c	a	b
b	c	a

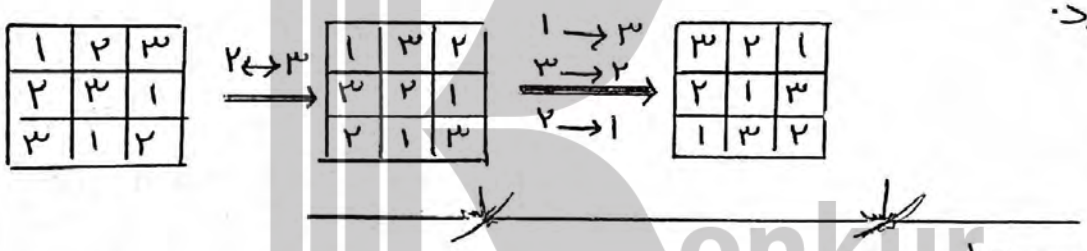
روی قطر اعداد مساویند

https://konkur.info

روش جابجایی سطر و ستون:
با تعویض جای هردو سطر یا هردو ستون یک مربع لاتین می‌توان مربع لاتین جدیدی ساخت.



روش جایگشت:
می‌توانیم بدون تغییر جای سطرها و ستونها، جای خود عددها را با هم عوض کنیم مثلاً به‌جای تمام ۳ها ۲ بنویسیم و برعکس یا همه ۱ها را به ۲ و همه ۲ها را به ۳ و همه ۳ها را به ۱ تبدیل کنیم و ... می‌گوئیم جایگشت روی اعداد اعمال کرده‌ایم با این روش مربع لاتین جدیدی ساخته می‌شود.



دو مربع لاتین متعامد:
فرض کنیم A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند بطوریکه از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است اگر هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند می‌گوئیم دو مربع لاتین A و B متعامدند.

$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳&۲&۱\\\hline ۱&۳&۲\\\hline ۲&۱&۳\\\hline\end{array}$ $B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲&۱&۳\\\hline ۱&۳&۲\\\hline ۳&۲&۱\\\hline\end{array}$ $\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳۲&۲۱&۱۳\\\hline ۱۱&۳۳&۲۲\\\hline ۲۳&۱۲&۳۱\\\hline\end{array}$

متعامدند
چون عدد تکراری ندارد

$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱&۲&۳\\\hline ۳&۱&۲\\\hline ۲&۳&۱\\\hline\end{array}$ $B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳&۱&۲\\\hline ۲&۳&۱\\\hline ۱&۲&۳\\\hline\end{array}$ $\Rightarrow\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱۳&۲۱&۳۲\\\hline ۳۲&۱۳&۲۱\\\hline ۲۱&۳۲&۱۳\\\hline\end{array}$

متعامد نیست
چون عدد تکراری دارد

تذکر مهم:
دو مربع لاتین ۲×۲ متعامد وجود ندارد

https://konkur.info

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۷):
دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید (۱٫۵ نمره)
(شبیه خرداد ۹۹)

$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&2\\\hline 3&2&1\\\hline 2&1&3\\\hline\end{array}$ $B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 3&2&1\\\hline 1&3&2\\\hline\end{array}$ $\Longrightarrow$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 12&31&23\\\hline 33&22&11\\\hline 21&13&32\\\hline\end{array}$

(هماهنگ کشوری شهریور ۹۸):
قرار است چهار مدرس T_1 و T_2 و T_3 و T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1 و C_2 و C_3 و C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند برای این منظور برنامه ریزی کنید (۱ نمره)

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

این جدول یکی از پاسخ‌های ممکن است

(روش چرخشی)

(هماهنگ دیماه ۹۸):
بررسی کنید آیا دو مربع لاتین ۳×۳ روبرو متعامدند؟ (۰٫۷۵ نمره)

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3&1&2\\\hline 2&3&1\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline 3&1&2\\\hline\end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 11&22&33\\\hline 32&13&21\\\hline 23&31&12\\\hline\end{array}$

متعامدند زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم

(هماهنگ خرداد ۹۸):
اگر سه دوست هم سانی، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ (۱٫۵ نمره)

	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

مربع کت‌ها

	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
A	۲	۱	۳
B و	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

مربع پیراهن‌ها

$\Longrightarrow$

	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

https://konkur.info

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):
قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد برای این منظور برنامه ریزی کنید (انمره)

حل: برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر می گیریم مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کننده الیاف است.

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

$=A$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$=B \Rightarrow$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر دایره نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست نشان دهنده نوع الیاف است

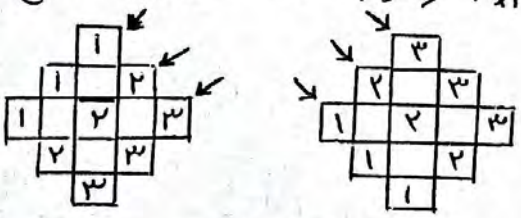
(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):
مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴ و ۳ و ۲ و ۱ یک مربع لاتین جدید بدست آورید. (انمره)

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

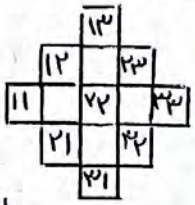
۴→۱، ۳→۴، ۲→۳، ۱→۲

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد:
به عنوان مثال نحوه ایجاد دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ (مرتبه فرد است) را توضیح می دهیم:



دو شکل مانند روبرو ایجاد می کنیم ⇐



حالا دو شکل را با هم ترکیب می کنیم ⇐

می آوریم

همان طور که می بینید همه عددها با هم متفاوتند اعداد خارج مربع را به روش زیر داخل مربع

۱) عدد بالایی را سه تا می آوریم پایین
۲) عدد چپی را سه تا می بریم راست
۳) عدد پایینی را سه تا می بریم بالا
۴) عدد راستی را سه تا می بریم چپ

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

مربع لاتین متعامد دوم

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

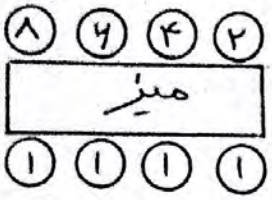
مربع لاتین متعامد اول

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

https://konkur.info

تمرینات مهم فصل ۳ - درس ۱ با پاسخ تشریحی

۱) می خواهیم ۸ نفر را که دوبدو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟



حل: ۸ صندلی داریم صندلی اول به ۸ روش پر می شود روبه روی او برادرش است که به یک روش پر می شود و بهمین ترتیب ... : $۸\times۶\times۴\times۲=۳۸۴$

---

۲) (هماهنگ دیماه ۹۷): اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ دراینصورت چندکد یا رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هریک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟ (انفره)

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۳}\times ۵!=۷۲۰۰$$

---

۳) (هماهنگ شهریور ۹۸): ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم این عمل به چند روش امکان پذیر است اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد: $۸!$ = جواب

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند: $۵!\times۴!$ = جواب

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند: $۴!\times۵!$ = جواب

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

$$۶!\times۳!=\text{جواب}$$

---

۴) برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $۴!\times۷!$ باشد.

جواب: می خواهیم ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را در یک خط مستقیم مرتب کنیم بطوریکه همه دانش آموزان پایه ریاضی کنار هم باشند

---

۵) با ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان ساخت؟ $\frac{۶!}{۲!\times۲!}=۱۸۰$

https://konkur.info

۶) می‌خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف a و a و a و b و a و c و c و c و d و d و d از بقیه متمایز کنیم حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه متمایز کنیم؟

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 3!} = 5040$$

---

۷) ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار گیرند؟

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

---

۸) به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

الف) به دلخواه انتخاب کنیم

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$

$$\text{جواب} = \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4}$$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم $\binom{10}{4} = \binom{11-1}{5-1}$ = جوابهای طبیعی

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؟

(جواب صفحه ۸۸ جزوه)

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+0+y_4+5+x_5=11$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+y_4+x_5=6 \Rightarrow \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

$x_3=0$

$x_4 \geq 5 \Rightarrow x_4 = y_4 + 5$

---

۹) مطلوبست تعداد جوابهای صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر با شرطهای داده شده:

الف) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ $\quad x_i \geq 0$, $i=1,2,3,4,5$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$$

$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

$x_2 > 0 \Rightarrow x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$

$x_3 > 0 \Rightarrow x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = y_3 + 1$

$x_4 > 0 \Rightarrow x_4 \geq 1 \Rightarrow x_4 = y_4 + 1$

$x_5 > 0 \Rightarrow x_5 \geq 1 \Rightarrow x_5 = y_5 + 1$

konkur.info

https://konkur.info

ب) $x_1+x_2+\cdots+x_4=12$

$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow x_1=y_1+3$

$x_4\geq 4 \Rightarrow x_4=y_4+4$

$x_1\geq 2$ و $x_4\geq 4$

$y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_4+4+x_4=12$

$\Rightarrow y_1+x_2+x_3+x_4+y_4+x_4=5$

$n=5$, $k=4$ $\Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1}=\binom{10}{5}$

ب) $x_1+x_2+\cdots+x_5=11$

$x_1\geq 1 \Rightarrow x_1=y_1+1$

$x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$

$\vdots$

$x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$

$1\leq i\leq 5$ و $x_i\geq 1$

$y_1+1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=11$

$\Rightarrow y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$

$n=6$, $k=5$ $\Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

(روش اول)

$\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}$ (روش دوم) جوابهای طبیعی معادله مورد نظر است

ت) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7$

$3x_2<7 \Rightarrow$ یا $x_2=0$ یا $x_2=1$ یا $x_2=2$

$1\leq i\leq 4$ و $x_i\geq 0$

متغیر x_2 دارای ضریب است روی x_2 بحث می‌کنیم

$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$

یا

$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

یا

$x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

پس جوابها $36+15+3=54$ تا است.

ت) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3$

$1\leq i\leq 4$ و $x_i\geq 0$

متغیر x_2 دارای رادیکال است روی x_2 بحث می‌کنیم $x_2=0$ یا 1 یا 4

$x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

یا

$x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

یا

$x_2=4 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \xrightarrow{x_i\geq 0} \binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

$10+6+3=19$ تا جواب

https://konkur.info

۱۰) به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

x_1 = تعداد توپهای نفر اول
x_2 = تعداد توپهای نفر دوم
x_3 = تعداد توپهای نفر سوم

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=5 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{3}=21$

---

۱۱) به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

حل: تعداد جوابهای طبیعی مورد نظر است $\binom{8-1}{4-1}=\binom{7}{3}=35$

---

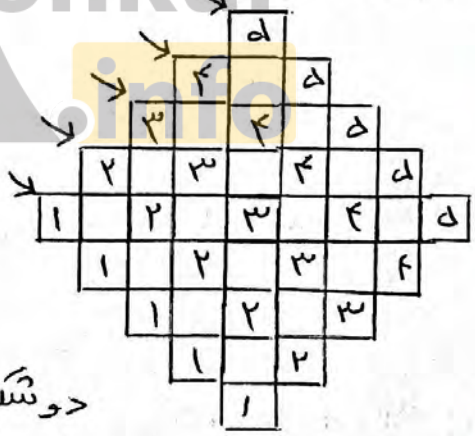
۱۲) به سوالات زیر جواب دهید:

الف) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول بدست می آید؟ خیر

ب) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیر متعامد با مربع لاتین اول بدست می آید؟ خیر

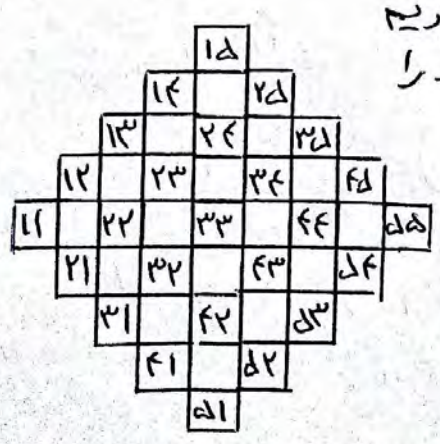
---

۱۳) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه 5×5 بنویسید



دو شکل را با هم ترکیب می کنیم

عددهای بالایی را ۵ تا پایین و عددهای پایینی را ۵ تا بالا می بریم
عددهای سمت چپ را ۵ تا به راست و عددهای سمت راست را ۵ تا به چپ می بریم:



۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

$\Rightarrow$

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

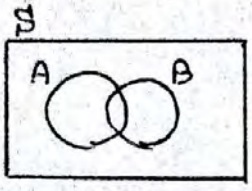
دو تا مربع لاتین متعامد مرتبه ۵

https://konkur.info

اصل شمول (شامل بودن) و عدم شمول:

الف) برای دو مجموعه:

تعداد عضوهایی که به مجموعه A یا به مجموعه B تعلق دارند برابر است با:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

واضح است که تعداد عضوهایی که به هیچ یک از مجموعه‌های A و B تعلق ندارد برابر است با:

$$|\overline{A \cup B}| = |\bar{A} \cap \bar{B}| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B|$$

تذکر مهم:

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که بر k بخشپذیرند برابر است با: $\left[\frac{n}{k}\right]$ = خارج قسمت تقسیم n بر k

---

مثال: چند عضو از مجموعه $S = \{n \in N \mid n \leq 400\}$ نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیرند؟

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, 400\} \Rightarrow |S| = 400$$

$$A = \text{بر ۲ بخشپذیر} \Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{2}\right] = 200$$

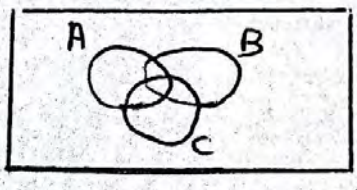
$$B = \text{بر ۳ بخشپذیر} \Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{3}\right] = 133$$

$$A \cap B = \text{بر ۲ و ۳ بخشپذیر} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{400}{2 \times 3}\right] = \left[\frac{400}{6}\right] = 66$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 200 + 133 - 66 = 267$$

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 400 - 267 = 133$$

ب) برای سه مجموعه:



تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از سه مجموعه A یا B یا C تعلق دارد برابر است با:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

واضح است که: $|(A \cup B \cup C)'| = |A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C|$

https://konkur.info

مثال ۱: چند عدد طبیعی مانند n، بطوریکه $1 \leq n \leq 400$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخشپذیر نباشد؟

$S = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 400\} \Rightarrow |S| = 400$

$A =$ بر ۳ بخشپذیر $\Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{3}\right] = 133$

$B =$ بر ۴ بخشپذیر $\Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4}\right] = 100$

$C =$ بر ۵ بخشپذیر $\Rightarrow |C| = \left[\frac{400}{5}\right] = 80$

$A \cap B =$ بر ۳ و ۴ بخشپذیر $\Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{400}{[3,4]}\right] = \left[\frac{400}{12}\right] = 33$

$A \cap C =$ بر ۳ و ۵ بخشپذیر $\Rightarrow |A \cap C| = \left[\frac{400}{[3,5]}\right] = \left[\frac{400}{15}\right] = 26$

$B \cap C =$ بر ۴ و ۵ بخشپذیر $\Rightarrow |B \cap C| = \left[\frac{400}{[4,5]}\right] = \left[\frac{400}{20}\right] = 20$

$A \cap B \cap C =$ بر ۳ و ۴ و ۵ بخشپذیر $\Rightarrow |A \cap B \cap C| = \left[\frac{400}{[3,4,5]}\right] = \left[\frac{400}{60}\right] = 6$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$= 133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6 = 240$

$|(A \cup B \cup C)'| = |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - 240 = 160$

مثال ۲: چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ و ۶ بخشپذیر نباشد؟

$|S| = 350$ و $[4,5] = 20$ ، $[4,6] = 12$ ، $[5,6] = 30$ ، $[4,5,6] = 60$

$|A| = \left[\frac{350}{4}\right] = 87$ $\quad [B] = \left[\frac{350}{5}\right] = 70$ $\quad C = \left[\frac{350}{6}\right] = 58$

$|A \cap B| = \left[\frac{350}{20}\right] = 17$ $\quad |A \cap C| = \left[\frac{350}{12}\right] = 29$ $\quad |B \cap C| = \left[\frac{350}{30}\right] = 11$

$|A \cap B \cap C| = \left[\frac{350}{60}\right] = 5$ $\quad |A \cup B \cup C| = 143$

$|\overline{A \cup B \cup C}| = 350 - 143 = 187$

https://konkur.info

مثال) اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

$A=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d\neq 7\} \Rightarrow |A|=9\times9\times9\times9=9^4$

$B=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d\neq 8\} \Rightarrow |B|=9\times9\times9\times9=9^4$

$A\cap B=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d\neq 7,8\} \Rightarrow |A\cap B|=8\times8\times8\times8=8^4$

$|S|=$ تعداد کل ۴ رقمی ها $=10\times10\times10\times10=10^4$

$\bar{A}\cap\bar{B}=$ مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آن ها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ بکار رفته

$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=10^4-(9^4+9^4-8^4)=9744$

زمان لازم برحسب ثانیه $=9744\times5=48720$

تابع شماری:

نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه باشند تعداد توابع از A به B برابر است با:

$|B|^{|A|}=$ تعداد توابع از A به B

مثال) چند تابع از مجموعه $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ به مجموعه $B=\{b_1,b_2\}$ می توان نوشت؟

$|A|=3$ ، $|B|=2$ جواب $=|B|^{|A|}=2^3=8$ تا

نکته ۲: اگر $|A|=m$ ، $|B|=k$ باشد $m<k$ تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با:

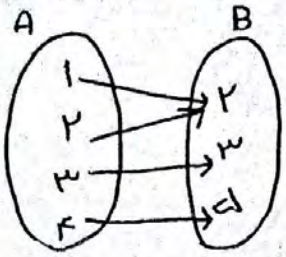
$$(k)_m=\frac{k!}{(k-m)!}$$

مثال) به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد)

تعداد حالتهای ممکن $=(8)_4=\frac{8!}{4!}=1680$ که معادل است با پیدا کردن تعداد توابع های یک به یک از مجموعه ای ۴ عضوی به مجموعه ای ۸ عضوی

https://konkur.info

نکته ۳: تابع f از مجموعه A به مجموعه B را پوشا می نامند هرگاه برد تابع f، شامل کل اعضای B باشد به عبارت دیگر به هر عضو B یک پیکان رسم شود و آنرا بصورت زیر نشان می دهند.



پوشا است

$A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $\quad B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

$f: A \longrightarrow B$ $\quad Rp=B$

برای پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B از فرمولهای زیر استفاده می کنیم که همان اصل شمول و عدم شمول است:

$$A_j=\{f: A \longrightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j \;,\; 1 \leq i \leq n \;,\; 1 \leq j \leq m\}$$

$$|S| = |B|^{|A|} = m^n \qquad |A_1| = |A_2| = \dots = |A_m| = 2^m$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \dots = |A_2 \cap A_3| = \dots = 1 \;,\; |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_m| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_m}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$$

مثال ۱: (هماهنگ کشوری - دی ماه ۹۸):

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید (۱/۷۵ نمره)

$$A_j=\{f: A \longrightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j \;,\; 1 \leq i \leq 4,\; 1 \leq j \leq 3\}$$

$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ $\Rightarrow |A|=4$, $|B|=3$

$|S| = 3^4 = 81$ $\quad |A_i| = 2^4 = 16$ $\quad |A_i \cap A_j| = 1$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 81 - (16+16+16-1-1-1+0)$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \quad \text{تا}$$

konkur.info

https://konkur.info

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷)
به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده شود؟ (۲ نمره)

حل: جواب همان تعداد تابع‌های پوشا از مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است که در صفحه ۱۰۰ مثال ۱ حل شد.

نکته کنکوری:
تعداد تابع‌های پوشا از مجموعه m عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B از فرمول زیر بدست می‌آید:

$|A|=m$ $\quad Rf=B$
$|B|=3$ $\quad f:A\to B$

$$\boxed{\text{جواب} = 3^m - (3\times 2^m - 3)}$$

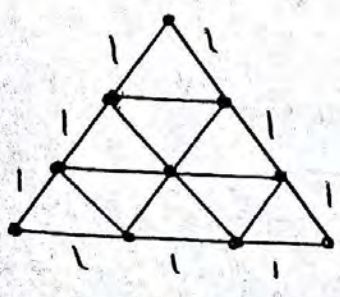
مثال) تعداد تابع‌های پوشا از مجموعه ۴ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B چندتا است؟

$m=4$

$$\text{جواب} = 3^4 - (3\times 2^4 - 3) = 36$$

اصل لانه کبوتری:
اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m>n$ و همه کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

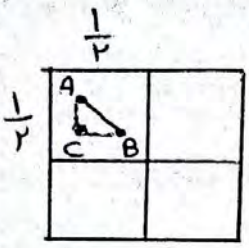
مثال ۱: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



حل: اگر تعداد نقطه‌ها را کبوتر و تعداد مثلث‌های کوچک را لانه در نظر بگیریم $n=9$ و $m=10$ و $m>n$ و با توجه به اینکه طول ضلع هر مثلث کوچک ۱ واحد است طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه داخل یک مثلث قرار می‌گیرد که فاصله آن دو نقطه کمتر از ۱ واحد است

https://konkur.info

مثال ۲: که نقطه درون مربعی به ضلع ۱ انتخاب شده است، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



حل: ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مربع کوچک را لانه درنظر می‌گیریم طبق اصل لانه کبوتری درون یکی از مربع‌های کوچک دو نقطه قرار می‌گیرد طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AC^2 + BC^2 \\ AC < \frac{1}{2} \ , \ BC < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 < (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB < \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال ۳: در کلاس ۴۰ نفره، حداقل چند نفر ماه تولدشان یکسان است؟

حل: ۴۰ نفر را کبوتر و ۱۲ ماه سال را لانه درنظر می‌گیریم

$$\begin{array}{r|l} 40 & 12 \\ -36 & (3) \\ \hline 4 & \end{array}$$

با میمانده صفر نشد پس حداقل $3+1$ یعنی ۴ نفر می‌توان یافت (اگر با میمانده صفر نشود یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌کنیم)

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در اینصورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال ۱: در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشد تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

$$k+1 = 7 \Rightarrow k = 6$$

تعداد لانه‌ها = تعداد ماه‌ها $= n$

تعداد کبوترها = تعداد دانش آموزان $= kn + 1 = 6 \times 12 + 1 = 73$

مثال ۲: در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

$$\left.\begin{array}{l} \text{هرسال} = 12 \text{ ماه} \\ \text{هرهفته} = 7 \text{ روز} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 12 \times 7 = 84 \qquad k+1 = 10 \Rightarrow k = 9 \qquad kn+1 = 9 \times 84 + 1 = 757 \text{ نفر}$$

konkur.info
https://konkur.info

تمرینات هم فصل ۳ درس ۲ با پاسخ تشریحی

۱) ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار بدهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+1=5 \Rightarrow k=4 \qquad kn+1=54 \Rightarrow 4n+1=54 \Rightarrow n=\left[\frac{53}{4}\right]=13$

پس n باید حداکثر ۱۳ باشد

---

۲) (هماهنگ شهریور ۹۸):
چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $1<n\leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخشپذیر نباشد. (۱٫۵ نمره)

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)=350-\left(\left[\frac{350}{4}\right]+\left[\frac{350}{6}\right]-\left[\frac{350}{12}\right]\right)$$
$$=234$$

---

۳) (هماهنگ خرداد ۹۸):
در بین اعداد ۱ تا ۹۰ ($1<n\leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخشپذیر باشند (۱٫۲۵ نمره)

$|A|=\left[\frac{90}{2}\right]=45$

$|B|=\left[\frac{90}{3}\right]=30$

$|A\cap B|=\left[\frac{90}{6}\right]=15$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
$=45+30-15=60$

---

۴) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1<n\leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخشپذیر باشند ولی بر ۷ بخشپذیر نباشند؟

$|A|=\left[\frac{200}{4}\right]=50$

$|B|=\left[\frac{200}{7}\right]=28$

$|A\cap B|=\left[\frac{200}{28}\right]=7$

$|A-B|=|A|-|A\cap B|=50-7=43$

---

۵) (هماهنگ - خرداد ۹۹):
در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟ (۱ نمره)

$k+1=7 \Rightarrow k=6$

$n=12$

$kn+1=6\times 12+1=73$

https://konkur.info

۶) (هماهنگ - خرداد ۹۸): ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است (۱/۲۵ نمره)

هر سال = ۱۲ ماه
هر هفته = ۷ روز
⇒ تعداد دلانه‌ها = ۷×۱۲ = ۸۴

$\frac{505}{84}$ ، $505 - 504 = 1$ ، $6+1=7$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است

---

۷) (هماهنگ - دیماه ۹۸): مجموعه اعداد $A=\{1,2,3,\dots,84\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است (۱ نمره)

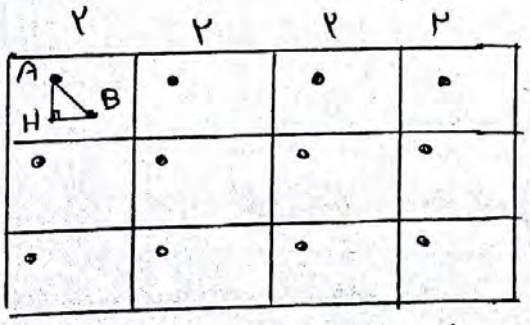
تعداد لانه‌ها = ۴۲ ، تعداد کبوترها = ۴۳

لانه ۱ و ۸۴ ، لانه ۲ و ۸۳ ، لانه ۳ و ۸۲ ، ... ، لانه ۴۲ و ۴۳

چنان چه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند آن گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

---

۸) (هماهنگ - شهریور ۹۸): ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد (۱/۵ نمره)



۱۲ مربع = تعداد لانه‌ها
۱۳ نقطه = تعداد کبوترها

طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند پس:

$AH<2$
$BH<2 \Rightarrow AH^2+BH^2<8 \Rightarrow AB^2<8 \Rightarrow AB<\sqrt{8}$

---

۹) (هماهنگ دیماه ۹۷): حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (۱/۵ نمره)

$n=365$

$Kn+1 = 19\times 365+1 = 6936$ ، $K+1=20 \Rightarrow K=19$

https://konkur.info

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور
WWW.KONKUR.INFO
Konkur.info
https://konkur.info