

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

درس اول : مربع های لاتین

مقدمه

فرض کنید که سه دبیر به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند، در یک روز و در سه جلسه ی (اول، دوم و سوم) در سه کلاس A و B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه ی درسی دارد و هر دبیر در هر یک از کلاس ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به نظر شما چگونه برنامه ریزی شود که این شرایط محقق گردد؟ حتماً جدولی مانند جدول زیر پیشنهاد می کنید و برنامه را مطابق جدول زیر اعلام می کنید.

جلسات کلاس ها	جلسه ی اول	جلسه ی دوم	جلسه ی سوم
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی

البته واضح است که می توان جدول فوق را به شکل دیگری نیز تکمیل کرد. اکنون اگر به جای نام سه دبیر مذکور به ترتیب اعداد ۱ و ۲ و ۳ قرار دهیم و یک جدول 3×3 تشکیل دهیم. خواهیم داشت.

جلسات کلاس ها	جلسه ی اول	جلسه ی دوم	جلسه ی سوم
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

با توجه به دو جدول فوق موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف : در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.	A: هیچ دبیری در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
ب : در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.	B: هر یک از دبیران در تمام کلاسها تدریس داشته اند.
ج : هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.	C: هیچ دبیری در یک کلاس دو بار تدریس نکرده است.
د : هر یک از اعداد در تمام ستون ها آمده است.	D: هر یک از دبیران در هر یک از جلسه ها تدریس داشته است.

به نظر شما این پاسخ درست است؟ به رنگ ها توجه کنید.

A: هیچ دبیری در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.	الف : در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.
B: هر یک از دبیران در تمام کلاسها تدریس داشته اند.	ب : در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.
C: هیچ دبیری در یک کلاس دو بار تدریس نکرده است.	ج : هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.
D: هر یک از دبیران در هر یک از جلسه ها تدریس داشته است.	د : هر یک از اعداد در تمام ستون ها آمده است.

لذا شایسته است. جدول اخیر را به شکل زیر نمایش دهیم.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

این مربع شرایط مورد نظر، در ابتدای مطلب را محقق می سازد. چنین مربع هایی را **مربع لاتین** می نامند. این قبیل مسائل، به کمک مفهومی موسوم به **مربع های لاتین** قابل حل است. در این درس می خواهیم با این مفهوم و کاربرد هایی از آن بیشتر آشنا شویم.

مربع لاتین

یک جدول مربعی از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n پر شده است و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، را **مربع لاتین** از مرتبه n می نامند و هر یک از اعداد درون مربع را یک **درایه** می گویند.

هر مربع لاتین در صورت لزوم با یک حرف بزرگ لاتین نام گذاری می شود.

مثال (۱) دو مربع لاتین 3×3 و دو مربع لاتین 4×4 در زیر نمایش داده شده است.

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

(د)

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

(ج)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(ب)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(الف)

مثال ۲) مربع 3×3 زیر یک مربع لاتین نیست. زیرا در سطر و ستون های آن عدد تکراری مشاهده می شود.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۳	۲	۱

تمرین ۱: یک مربع لاتین از مرتبه‌ی چهار رسم کنید.

پاسخ:

۱	۲	۴	۳
۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۳	۲

تمرین ۲: با توجه به مربع لاتین زیر، حاصل $x + yz$ را به دست آورید.

x	۲	z
۲	y	۳
۱	۳	۲

پاسخ: با توجه به تعریف مربع لاتین، واضح است که $x = 3$ و $y = 1$ و $z = 1$ پس

$$x + yz = 3 + (1)(1) = 4$$

تمرین برای حل:

۳: دو مربع لاتین از متفاوت مرتبه‌ی ۵ بنویسید.

۴: چند مربع لاتین از مرتبه‌ی ۱ وجود دارد؟ چرا؟

۵: چند مربع لاتین از مرتبه‌ی ۲ وجود دارد؟ چرا؟

۶: آیا با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، مربع حاصل یک مربع لاتین است؟ چرا؟

مربع لاتین چرخشی

مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

ملاحظه می کنید که درایه‌ی آخر سطر اول، همان درایه اول سطر دوم است. این قاعده در سطرهای بعد نیز رعایت شده است.

اگر در یک مربع لاتین درایه‌ی آخر یک سطر، درایه‌ی اول سطر بعد باشد، این مربع لاتین را **مربع لاتین چرخشی** می نامند.

مثال: مربع زیر، یک مربع لاتین چرخشی 5×5 است.

۲	۴	۳	۵	۱
۱	۲	۴	۳	۵
۵	۱	۲	۴	۳
۳	۵	۱	۲	۴
۴	۳	۵	۱	۲

مربع لاتین جایگشتی

در یک مربع لاتین با اعمال یک جایگشت (تبدیل یک درایه به یک درایه‌ی دیگر) روی درایه‌های آن، یک مربع لاتین جدیدی بدست می آید (چرا؟^۱). مربع جدید را مربع لاتین حاصل اعمال جایگشت روی درایه

های آن یا **مربع لاتین جایگشتی** می نامند؟

مثال: مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

^۱. زیرا اگر لاتین نباشد، به این معنی است که در مربع اولیه عضو تکراری وجود داشت که با لاتین بودن آن متناقض است.

اگر در این مربع، عدد ۱ به ۳ و عدد ۲ به ۲ و عدد ۳ به ۴، عدد ۴ به ۴ به ۱ تبدیل شود، مربع جدید یک مربع لاتین است.

۳	۲	۴	۱
۱	۳	۲	۴
۴	۱	۳	۲
۲	۴	۱	۳

تمرین ۷: با اعمال جایگشت روی ۳ و ۲ و ۱ یک مربع لاتین دیگر بنویسید.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

پاسخ:

۱ → ۳

۲ → ۱

۳ → ۲

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

مربع لاتین استاندارد

یک مربع لاتین مرتبه‌ی n را استاندارد می‌نامند، هرگاه سطر اول آن اعداد از ۱ تا n به ترتیب از چپ به

راست نوشته شده باشد.

۴	۲	۳	۵	۱
۱	۳	۵	۴	۲
۳	۴	۲	۱	۵
۲	۵	۱	۳	۴
۵	۱	۴	۲	۳

(ب)

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۳	۴	۱	۲
۳	۱	۲	۵	۴
۲	۴	۵	۳	۱
۴	۵	۱	۲	۳

(الف)

توجه: اگر یک مربع لاتین استاندارد نباشد، می

توان با اعمال یک جایگشت مناسب آن را به

صورت استاندارد درآورد. کار کردن با مربع های

لاتین استاندارد، اغلب آسانتر است.

در شکل مقابل مربع «الف»، استاندارد است ولی مربع «ب» استاندارد نمی باشد.

اگر در مربع «ب» هر جا عدد ۱ را به ۴ و عدد ۵ را به ۴ و عدد ۴ را به ۱ تبدیل کنیم، یک مربع لاتین

استاندارد مرتبه‌ی ۵ به دست می آید.

تمرین برای حل :

۲	۴	۳	۵	۱
۱	۲	۴	۳	۵
۵	۱	۲	۴	۳
۳	۵	۱	۲	۴
۴	۳	۵	۱	۲

۸: مربع لاتین مقابل، را در نظر بگیرید.

الف : با اعمال یک جایگشت دلخواه روی مربع مقابل، یک مربع لاتین دیگر تشکیل دهید.

ب : با اعمال یک جایگشت مناسب روی درایه ها، یک مربع جدید تشکیل دهید که استاندارد باشد.

مربع تلفیقی

اگر درایه های دو مربع لاتین هم مرتبه را با حفظ ترتیب کنار هم قرار دهیم، گوییم این دو مربع لاتین تلفیق شده اند و مربع جدید را یک **مربع تلفیقی** (مربع بر هم نهی) می نامند.

مثال : در زیر ملاحظه می کنید که دو مربع لاتین A و B تلفیق شده اند و مربع C تشکیل شده است.

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۴۳ & ۱۴ & ۲۱ & ۳۲ \\ ۲۴ & ۳۱ & ۴۲ & ۱۳ \\ ۳۲ & ۴۳ & ۱۴ & ۲۱ \\ ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ \end{bmatrix}$$

واضح است که در مربع تلفیقی ممکن است درایه های یک سطر با درایه های سطر دیگر متفاوت باشند و یا اینکه درایه ها به ترتیب نباشند، لذا مربع تلفیقی لاتین نیست. اگر A و B دو مربع لاتین باشند، مربع تلفیقی آنها را با نماد $A \ominus B$ نمایش می دهند.

تمرین برای حل :

۹: دو مربع لاتین 3×3 بنویسید، طوری که مربع تلفیقی آنها درایه های تکراری نداشته باشد.

دو مربع لاتین متعامد

دو مربع لاتین متفاوت را **متعامد** گوئیم ، هرگاه مربع حاصل از تلفیق آنها ، درایه های تکراری نداشته باشد.

مثال: دو مربع لاتین زیر متعامد هستند. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه های تکراری ندارد.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline b & c & a \\ \hline c & a & b \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline c & a & b \\ \hline b & c & a \\ \hline a & b & c \\ \hline \end{array} \Rightarrow A \ominus B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ac & ba & cb \\ \hline bb & cc & aa \\ \hline ca & ab & bc \\ \hline \end{array}$$

مثال: دو مربع لاتین زیر متعامد نیستند. زیرا مربع تلفیقی آنها دو درایه ی تکراری دارد.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline \end{array} \Rightarrow A \ominus B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۴۳ & ۱۴ & ۲۱ & ۳۲ \\ \hline ۲۴ & ۳۱ & ۴۲ & ۱۳ \\ \hline ۳۲ & ۴۳ & ۱۴ & ۲۱ \\ \hline ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ \\ \hline \end{array}$$

تذکر: برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین، به شکل زیر عمل می کنیم.

الف : دو درایه با اعداد یکسان در یکی از مربع ها در نظر می گیریم.

ب : دو درایه ی متناظر با آنها از مربع دیگر را بررسی می کنیم که اگر مساوی باشند، دو مربع متعامد نیستند.

این روش می تواند روش مناسب برای تشخیص متعامد نبودن دو مربع لاتین باشد. برای تشخیص متعامد

بودن دو مربع لاتین باید این بررسی را برای تمام درایه های مساوی مربع لاتین اولی انجام داد.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & a & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & a \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

تمرین ۱۰: در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

پاسخ: بله متعامد هستند. زیرا مربع لاتین حاصل از تلفیق آنها درایه های تکراری ندارد.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

پ:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

پاسخ: خیر متعامد نیستند. زیرا در جایگاه سطر اول سطر سوم و جایگاه سطر دوم و ستون دوم در مربع اول

درایه های یکسان (هر دو ۱) دارد که درایه های نظیر از مربع دوم مساوی (هر دو ۳) می باشند. مربع لاتین حاصل از تلفیق آنها درایه های تکراری ندارد.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

پ:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ: خیر متعامد نیستند. در جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول

درایه های یکسان (هر دو عدد ۲) وجود دارند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

تمرین ۱۱: درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : فقط یک مربع لاتین از مرتبه ی ۱ وجود دارد.

ب : هر دو مربع لاتین مرتبه ی ۲ متعامد هستند.

پ : مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد.

ت : با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین دیگری متعامد با آن به دست می آید.

ث : مربع حاصل از تلفیق (کنار هم قرار دادن درایه های نظیر) دو مربع لاتین، یک مربع لاتین است.

پاسخ: الف : درست ب : نادرست پ : نادرست ت : نادرست ث : نادرست

تمرین ۱۲: آیا دو مربع لاتین متعامد وجود دارد؟ چرا؟

پاسخ: خیر، زیرا فقط دو مربع لاتین مرتبه ی ۲ وجود دارد که مربع حاصل از تلفیق آنها دارای عضو تکراری است.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \ominus B = \begin{array}{|c|c|} \hline 12 & 21 \\ \hline 21 & 12 \\ \hline \end{array}$$

خواندنی :

الف : فقط یک مربع لاتین 1×1 وجود دارد که با خودش متعامد نیست.

ب : فقط دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد که متعامد نیستند.

ج : ثابت می شود که دو مربع لاتین 6×6 متعامد وجود ندارد.

د : برای مربع های لاتین $n \times n$ که در آن $n \neq 1, 2, 6$ باشد. مربع های لاتین متعامد وجود دارد.

تمرین ۱۳: دو مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید و به سئوالات داده شده پاسخ دهید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

الف : آیا این دو مربع لاتین متعامد هستند.

پاسخ : بله. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه‌ی تکراری ندارد.

$$A \ominus B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳۳ & ۴۴ & ۱۱ & ۲۲ \\ \hline ۴۱ & ۳۲ & ۲۳ & ۱۴ \\ \hline ۱۲ & ۲۱ & ۳۴ & ۴۳ \\ \hline ۲۴ & ۱۳ & ۴۲ & ۳۱ \\ \hline \end{array}$$

ب : با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را C بنامید.

آیا دو مربع A و C متعامد هستند؟ چرا؟

پاسخ :

$$\begin{array}{l} ۱ \rightarrow ۲ \\ ۲ \rightarrow ۴ \\ ۳ \rightarrow ۳ \\ ۴ \rightarrow ۱ \end{array} \rightarrow C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ & ۴ \\ \hline ۲ & ۴ & ۳ & ۱ \\ \hline ۴ & ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۱ & ۳ & ۴ & ۲ \\ \hline \end{array} \quad A \ominus C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳۳ & ۴۱ & ۱۲ & ۲۴ \\ \hline ۴۲ & ۳۴ & ۲۳ & ۱۱ \\ \hline ۱۴ & ۲۲ & ۳۱ & ۴۳ \\ \hline ۲۱ & ۱۳ & ۴۴ & ۳۲ \\ \hline \end{array}$$

بله. زیرا مربع تلفیقی دو مربع A و C درایه‌ی تکراری ندارد.

تمرین ۱۴ : ثابت کنید که اگر دو مربع لاتین متعامد باشند. مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای

یکی از آنها به دست می‌آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است.

اثبات: فرض کنیم که دو مربع لاتین A و B متعامد بوده و مربع لاتین C مربع حاصل از اعمال جایگشت

روی اعضای B باشد. در این صورت دو درایه‌ی یکسان در مربع لاتین A را در نظر می‌گیریم. اگر درایه‌های

نظیر آنها در مربع لاتین C یکسان باشند، آنگاه نتیجه می‌شود که درایه‌های نظیر آنها در مربع لاتین B نیز

یکسان خواهند بود و این با متعامد بودن A و B تناقض دارد. پس A و C نیز متعامد می‌باشند.

تمرین ۱۵ : آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با

مربع اولیه متعامد باشد؟

پاسخ : خیر ممکن است متعامد نباشند. به مثال زیر دقت کنید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} ۱ \rightarrow ۲ \\ ۲ \rightarrow ۳ \\ ۳ \rightarrow ۱ \end{array} \Rightarrow B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

تمرین ۱۶: مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الف: سطر دوم و سوم مربع A را جابجا کنید و مربع حاصل را B بنامید. آیا دو مربع A و B متعامد هستند؟ چرا؟

پاسخ:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 33 & 11 & 22 \\ 12 & 23 & 31 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix}$$

دو مربع A و B متعامد هستند. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه‌ی تکراری ندارد.

ب: ابتدا سطر اول و سوم مربع A را جابجا کنید و مربع حاصل را C بنامید. سپس در مربع جدید یعنی C ، سطر دوم و سوم را جابجا کنید و مربع حاصل را D بنامید. آیا دو مربع A و D متعامد هستند؟ چرا؟

پاسخ:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 32 & 13 & 21 \\ 13 & 21 & 32 \\ 21 & 32 & 13 \end{bmatrix}$$

خیر متعامد نیستند. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه‌ی تکراری دارد.

پ: با توجه به قسمت های «الف» و «ب» به سؤالات زیر پاسخ دهید.

(* آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین متعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

پاسخ: خیر ممکن است متعامد باشند و ممکن است نباشند.

(* آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

پاسخ: خیر ممکن است متعامد باشند و ممکن است نباشند.

تمرین برای حل :

۱۷: در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف :

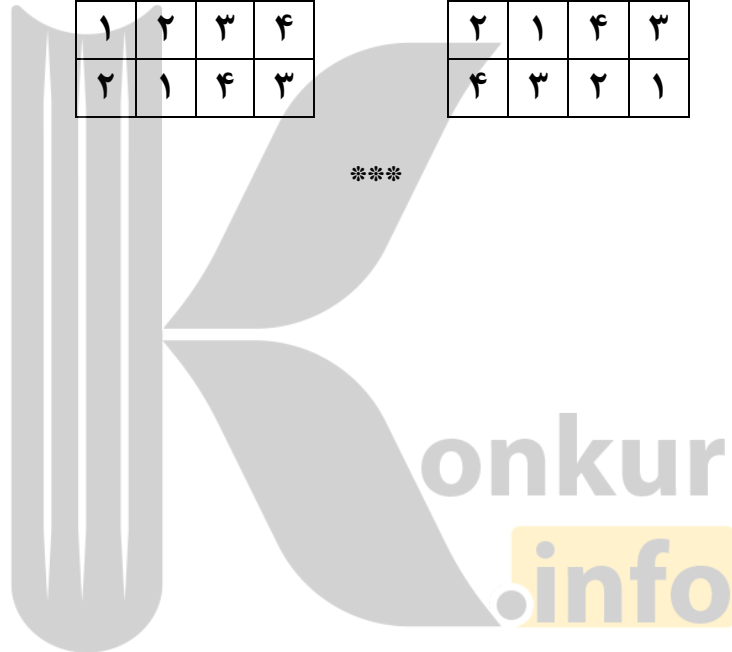
۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

ب :

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱



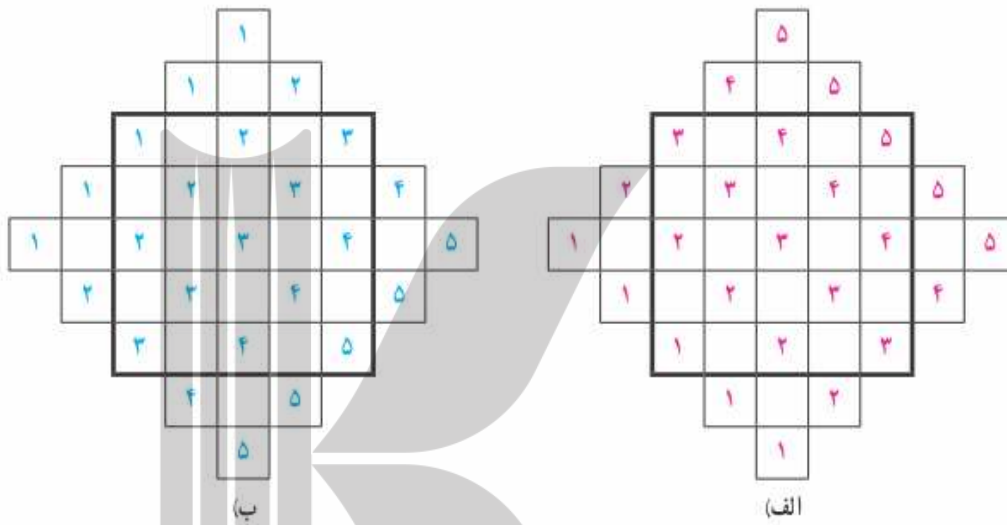
روش های ساخت مربع های لاتین متعامد^۲

روش اول: این روش را با ذکر مثال توضیح می دهیم. فرض کنید که می خواهیم، دو مربع لاتین متعامد

از مرتبه ی ۵ تشکیل دهیم.

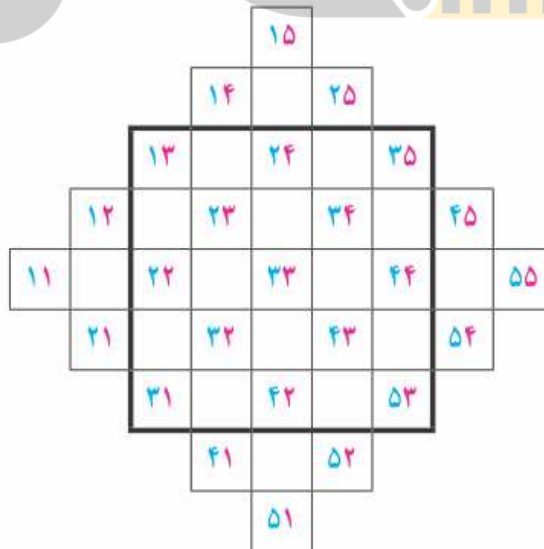
برای این کار ابتدا اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را با نظم خاصی (به نحوی چینش اعداد دقت کنید.) در دو

شکل « الف » و « ب » چیده شده اند.



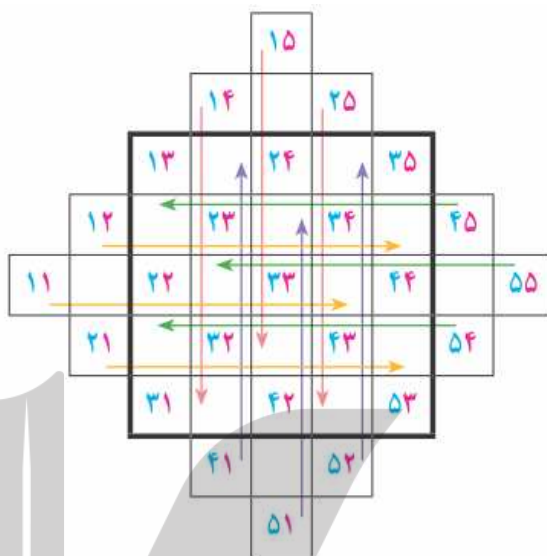
از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل های « الف » و « ب » ، شکل زیر به دست می آید که در آن

عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



² . در این کتاب فقط به روش های ساخت مربع های لاتین مرتبه ی فرد پرداخته می شود.

حال با پررنگ کردن مربع 5×5 وسط، در شکل مرحله‌ی دوّم و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن مربع های لاتین مورد نظر بدست می آید. توجه کنید که هر عدد خارج مربع به اندازه‌ی مرتبه‌ی مربع (که در اینجا ۵ می باشد.) انتقال افقی یا عمودی دارد.



با توجه به آنچه که گفته شد. مربع زیر را تکمیل نموده و سپس دو مربع لاتین تشکیل دهید.

۱۳		۲۴	۳۵
	۲۳		۳۴
۲۲		۳۳	۴۴
	۳۲		۴۳
۳۱		۴۲	۵۲

روش دوم: در این روش از ایده‌ی مربع های لاتین چرخشی استفاده می شود.

بدین شکل که ابتدا یک مربع لاتین چرخشی می سازیم و سپس سطرها یا ستون های متساوی الفاصله‌ی از ابتدا و انتها را جابجا می کنیم، تا مربع دیگر به دست آید. برای مثال اگر بخواهیم دو مربع لاتین مرتبه‌ی ۵ متعامد تشکیل دهیم به شکل زیر عمل می کنیم.

گام ۱: تشکیل مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

گام ۲: جابجایی سطرهای متساوی الفاصله

$$R_1 \leftrightarrow R_5$$

$$R_2 \leftrightarrow R_4$$

۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴	۵

واضح است که با تلفیق این دو مربع، عدد تکراری نخواهیم داشت.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

روش سوم: اساس این روش بر قطرهای مربع مبتنی است. بدین شکل

که ابتدا یک مربع از مرتبه‌ی فرد طوری تنظیم می کنیم که قطر اصلی آن مثلاً ۱ باشد. خانه های بالای قطر اصلی را به ترتیب به همان نظم قطر اصلی تکمیل می کنیم. خانه های پایین قطر اصلی را با توجه به تعریف

مربع لاتین تکمیل می کنیم. برای مثال به مربع مقابل دقت کنید.

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

اکنون به طور مشابه قطر فرعی را با همان نظم قبلی تکمیل می کنیم تا مربع جدید حاصل شود. واضح است که با تلفیق این دو مربع، عدد تکراری نخواهیم داشت.

تمرین ۱۸: دو مربع لاتین از مرتبه ۵ رسم کنید که متعامد باشند.

پاسخ: ابتدا یک مربع لاتین از مرتبه ۵ تشکیل می دهیم. سپس با توجه به تعویض سطرها مربع دیگری متعامد با آن می توان تشکیل داد.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

$$\begin{aligned} R_1 &\leftrightarrow R_5 \\ R_2 &\leftrightarrow R_4 \end{aligned} \Rightarrow$$

۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۱	۲	۳	۴	۵

ریاضی	فیزیک	شیمی
شیمی	ریاضی	فیزیک
فیزیک	شیمی	ریاضی

تمرین ۱۹: مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و سپس مربع لاتین دیگری تشکیل دهید که با آن متعامد باشد.

پاسخ: تعویض سطرها مربع دیگری متعامد با آن می توان تشکیل داد.

$$R_1 \leftrightarrow R_3 \Rightarrow$$

ریاضی	شیمی	فیزیک
فیزیک	ریاضی	شیمی
شیمی	فیزیک	ریاضی

تمرین ۲۰: در شکل زیر مربع های لاتین A و B متعامد هستند. خانه های خالی را کامل کنید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ \hline ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ \hline ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline & & & & \\ \hline ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ \hline & & & & \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ \hline \end{array}$$

پاسخ: با توجه با اینکه مربع B یک مربع لاتین و متعامد با A

است. لذا خانه های خالی را می توان به شکل زیر تکمیل کرد.

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ \hline \end{array}$$

تمرین برای حل:

۲۱: به روش دلخواه دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ تشکیل دهید.

کاربردهای مربع لاتین متعامد

یکی از مهمترین کاربردهای مربع های لاتین برنامه ریزی است. تنظیم برنامه‌ی کلاسی مانند آنچه که در مقدمه‌ی این درس بیان شد، از ساده ترین کاربردهای مربع لاتین است.

برنامه ریزی برای استفاده غیر همزمان از منابع و امکانات و نیروی انسانی به شکل مثال های بعد از جمله کاربردهای مربع های لاتین متعامد می باشد.

مثال ۱: قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین رنگ سازی و ۳ نوع رنگ متفاوت در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع رنگ دقیقاً یک بار کار کرده باشد و هر رنگ در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای حل این مسئله برنامه ریزی کنید.

پاسخ: کافی است دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ تشکیل دهیم. فرض کنید که W نام کارگرها و اعداد نوع ماشین و حروف لاتین نوع رنگ باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

$$A = \begin{array}{c|ccc} & W_1 & W_2 & W_3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 1 \\ \hline & 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{شنبه} \\ \text{یکشنبه} \\ \text{دوشنبه} \end{array}$$
$$B = \begin{array}{c|ccc} & W_1 & W_2 & W_3 \\ \hline & c & a & b \\ \hline & b & c & a \\ \hline & a & b & c \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{شنبه} \\ \text{یکشنبه} \\ \text{دوشنبه} \end{array}$$
$$A \Theta B = \begin{array}{c|ccc} & W_1 & W_2 & W_3 \\ \hline & 1c & 2a & 3b \\ \hline & 2b & 3c & 1a \\ \hline & 3a & 1b & 2c \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{شنبه} \\ \text{یکشنبه} \\ \text{دوشنبه} \end{array}$$

مثال ۲: قرار است ۴ مهندس کامپیوتر با ۴ کامپیوتر مختلف روی ۴ نرم افزار متفاوت در ۴ روز اول هفته کار کنند، به طوری که هر مهندس با هر کامپیوتر و هر نرم افزار دقیقاً یک بار کار کند و نیز هر نرم افزار در هر کامپیوتر دقیقاً یک بار استفاده شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

پاسخ: کافی است دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۴ تشکیل دهیم. فرض کنید که W نام مهندس ها و اعداد نوع کامپیوتر و حروف لاتین نوع نرم افزار باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	
$A =$	۲	۳	۴	۱	شنبه
	۳	۲	۱	۴	یکشنبه
	۴	۱	۲	۳	دوشنبه
	۱	۴	۳	۲	سه شنبه

	W_1	W_2	W_3	W_4	
$B =$	b	c	d	a	شنبه
	d	a	b	c	یکشنبه
	a	d	c	b	دوشنبه
	c	b	a	d	سه شنبه

	W_1	W_2	W_3	W_4	
$A \oplus B =$	۲b	۳c	۴d	۱a	شنبه
	۳d	۲a	۱b	۴c	یکشنبه
	۴a	۱d	۲c	۳b	دوشنبه
	۱c	۴b	۳a	۲d	سه شنبه

مثال ۳: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ ریزی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته، به گونه ای کار کنند که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار بکار گرفته شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

پاسخ: کافی است دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵ تشکیل دهیم. فرض کنید که W نام کارگرها و اعداد نوع ماشین ریسندگی و حروف لاتین نوع الیاف باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	
$A =$	۱	۴	۲	۵	۳	شنبه
	۴	۲	۵	۳	۱	شنبه ۱
	۲	۵	۳	۱	۴	شنبه ۲
	۵	۳	۱	۴	۲	شنبه ۳
	۳	۱	۴	۲	۵	شنبه ۴

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	
$B =$	c	a	d	b	e	شنبه
	e	c	a	d	b	شنبه ۱
	b	e	c	a	d	شنبه ۲
	d	b	e	c	a	شنبه ۳
	a	d	b	e	c	شنبه ۴

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
$A \oplus B =$	۱c	۴a	۲d	۵b	۳e	شنبه
	۴e	۲c	۵a	۳d	۱b	شنبه ۱
	۲b	۵e	۳c	۱a	۴d	شنبه ۲
	۵d	۳b	۱e	۴c	۲a	شنبه ۳
	۳a	۱d	۴b	۲e	۵c	شنبه ۴

تمرین برای حل :

۲۲: قرار است شش مدرس T_1 و T_2 و ... و T_6 در شش جلسه‌ی متوالی در شش کلاس C_1 و C_2 و ...

و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی کنید.

۲۳: در یک مسابقه‌ی اتومبیل رانی قرار است، ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت

مسیر مختلف مسابقه دهند، طوری که شرایط زیر برقرار باشد.

الف : هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند.

ب : هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند.

ج : هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند.

د : هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

برای این منظور برنامه ریزی کنید.

درس دوّم : مباحثی در ترکیبیات

در این درس ابتدا اصل جمع و اصل ضرب و همچنین بعضی از تکنیک ها و روش های شمارش مانند تبدیل و ترکیب جهت ورود به بحث مختصراً و با ذکر مثال را یادآوری نموده و در ادامه جایگشت های با تکرار را بیان می کنیم.

یادآوری و تکمیل

الف : اصل ضرب

اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله ی اول m انتخاب و برای انجام هر کدام از این m انتخاب، در مرحله ی دوّم n روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

اصل ضرب برای تعداد محدودی مرحله برای انجام یک کار قابل تعمیم است.

تمرین ۱ : یک کارخانه خودرو سازی، خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

حل : طبق اصل ضرب

$$۷ \times ۲ \times ۳ = ۴۲ \quad \text{تعداد حالت های انتخاب}$$

ب : معرفی نماد فاکتوریل

فرض کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با نماد $n!$ نمایش داده می شود، به شکل زیر تعریف می شود.

$$\text{اگر } n = 0 \text{ باشد. در این صورت } 0! = 1$$

$$\text{اگر } n = 1 \text{ باشد. در این صورت } 1! = 1$$

اگر $n > 1$ باشد. در این صورت $n!$ برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است. یعنی

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

مثال :

الف) $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

ب) $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

توجه : با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می توان نوشت که: $n! = n(n-1)!$

برای مثال : $6! = 6 \times 5!$

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم ، یک **جایگشت** از آن اشیاء می گوئیم.

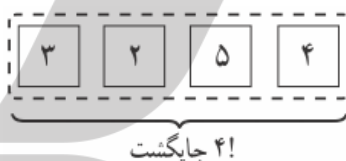
مثلاً: تعداد حالت های صف گرفتن چهار دانش آموز کنار هم برابر با $4!$ است.

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیء (نفر) متمایز برابر $n!$ است.

تمرین ۲ : با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ، یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل می دهیم. تعداد کل رمز هایی که می

توان تشکیل داد، را تعیین کنید.

حل : این رقم به $4!$ طریق می توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.



توجه : گاهی برای شماش در حالت های خاص، باید روش هایی همچون دسته بندی اشیاء استفاده کرد. به

مثال زیر توجه کنید.

مثال : فرض کنید می خواهیم با سه حرف «چ» و «پ» و «ژ» و ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷

کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف : تعداد کل رمز هایی که می توان تشکیل داد.

ب : تعداد رمز هایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

ج : تعداد رمز هایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

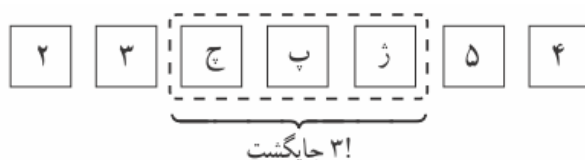
د : تعداد رمز هایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

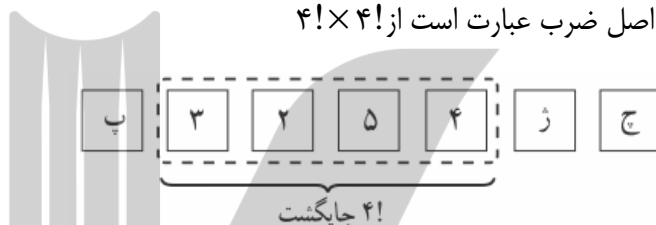
الف : ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به $7!$ طریق می توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید

کنند.

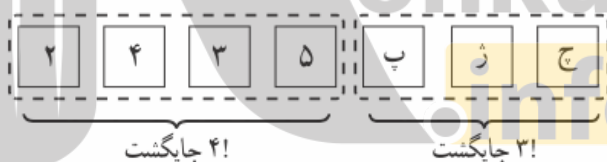
ب : کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء در نظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این صورت ۵! جایگشت دارند. در هر جایگشت، سه حرف داده شده هم در عین حال که کنار هم هستند، ۳! جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای مورد نظر برابر $۵! \times ۳!$ می شوند.



ج : مشابه قسمت قبل، ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و ۴! جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده، هم ۴! در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از $۴! \times ۴!$



د : حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می کنیم که روی هم دو شیء شده است و ۳! حروف در کنار هم و ۴! نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند. لذا طبق اصل ضرب تعداد رمزهای مورد نظر عبارتند از $۲! \times ۳! \times ۴!$



تمرین ۳: ۵ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق (در یک ردیف) قرار بگیرند؟ اگر بخواهیم:

الف: همواره دانش آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب : دانش آموزان به صورت یک در میان قرار بگیرند (هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند).

ج : اگر دانش آموزان پایه‌ی یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می توان آنها را به صورت یک در میان قرار داد؟

حل: اگر دانش آموزان را دسته بندی کنیم، خواهیم داشت:

الف) $2! \times 4! \times 5!$

ب) $4! \times 5!$

البته می توان به صورت زیر نیز مسئله را حل کرد.

$$5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5! \times 4!$$

ج) $(5 \times 5!) \times 2$

تمرین ۴: ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ حک

کرده ایم. چنانچه پرچم ها کنار هم در یک ردیف قرار گیرند،

الف: تعداد کل حالت های کنار هم قرار گرفتن میله های پرچم را حساب کنید.

ب: تعداد حالت هایی را حساب کنید که میله ی پرچم های با شماره های غیر اول در مکان های زوج باشند.

حل:

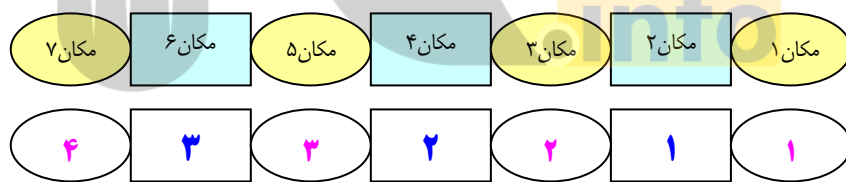
الف

تعداد کل حالت ها $7! = 5040 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

ب:

۶ و ۴ و ۱ پرچم های غیر اول

۷ و ۵ و ۳ و ۲ پرچم های اول



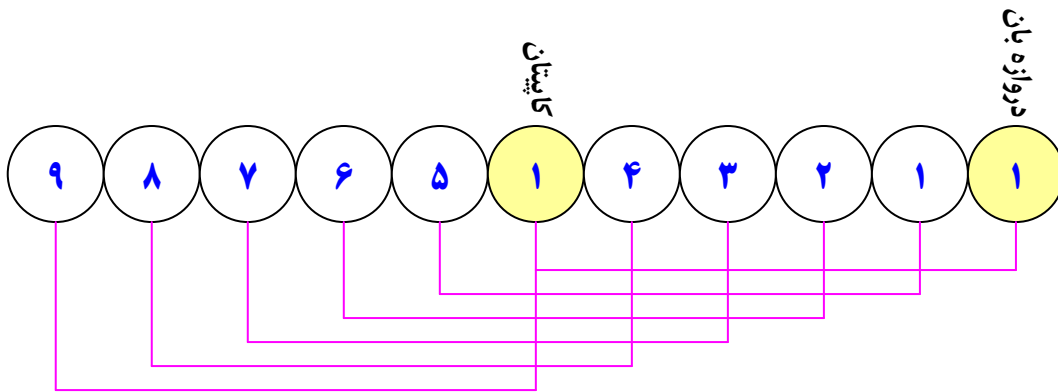
تعداد حالت ها $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4 \times 3! = 144$

تمرین ۵: یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه ی شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی

یادگیری بیندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم، دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه ی تعداد حالت

هایی که در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

حل :

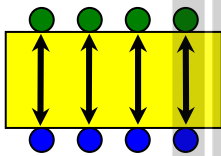


تعداد حالت های مورد نظر $= 2 \times 6 \times 9!$

تمرین ۶: می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل

بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

حل: مسئله را به این صورت بیان می کنیم :



مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبروی هم داریم که می خواهیم ۴ جفت

برادر را روی آنها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به $4!$ حالت امکان پذیر

است. از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می خواهند روی آن بنشینند ۲

حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل

شمارش باید $4!$ در $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ضرب شود. بنابراین جواب مسئله $4! \times 2^4$ است.

تمرین ۷: ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در

یک ردیف بچینیم. به نظر شما این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر:

الف : هیچ محدودیتی نباشد.

ب : همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند.

پ : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

ت : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

حل :

الف : چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیتی به $9!$ طریق امکان پذیر است.

ب : ۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک دسته کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی ، روی هم ۶ شیء محسوب می شوند و تعداد جایگشت آنها!۶ خواهد بود. از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد!۴ طریق با هم امکان جابجایی دارند. لذا طبق اصل ضرب ، جواب مسئله !۴×۶ است.

پ : باید کتاب ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند.

RFRFRFR

لذا برای ریاضی ها !۵ و برای فیزیک ها !۴ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل !۴×۵ روش چیدن امکان پذیر است.

ت : کتابهای خاص را به عنوان یک دسته سه تایی که به !۳ طریق کنار هم قرار می گیرند، در نظر می گیریم. از طرفی این دسته به همراه ۶ کتاب باقی مانده به !۷ طریق می توان کنار هم چید. در نتیجه بنا به اصل ضرب این مسئله به !۷×۳ روش امکان پذیر است.

تمرین ۸: برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن !۴×۷ باشد.

حل : ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم کنار هم باشند.

پ : ترتیب و ترکیب

در انتخاب r شیء از n شیء بدون تکرار اشیاء دو حالت وجود دارد.

الف : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم باشد. این نوع انتخاب را **ترتیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : تعداد کلمات سه حرفی که با ۷ حرف کلمه ی «خوزستان» تشکیل می شوند، برابر است با:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (حروف) مهم است. برای مثال کلمات « ستا » با « تاس » تفاوت دارند. به همین دلیل از ترتیب استفاده شد.

ب: اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم نباشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی ۷ عضوی $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ، برابر است با:

$$C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (عضوها) مهم نیست. برای مثال زیر مجموعه های $\{a, b, c\}$ با $\{b, a, c\}$ تفاوت ندارد. به همین دلیل از ترکیب استفاده شد.

توجه: برخی از حالت های خاص ترکیب بصورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} 1) \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 & 3) \binom{n}{2} &= \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ 2) \binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n & 4) \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

تمرین ۹: اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی

می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد.

حل:

$$A = \text{تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه‌ی } A = \binom{4}{2}$$

$$B = \text{تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه‌ی } B = \binom{5}{3}$$

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی ۵! می باشد. لذا طبق اصل ضرب، جواب

$$\text{مسئله } 5! \times \binom{5}{3} \times \binom{4}{2} \text{ است.}$$

ت: جایگشت های با تکرار (جایگشت های متمایز)

گاهی اوقات برای شمارش در حالت های خاص باید از روش هایی همچون تقسیم کل جایگشت های ممکن بر تعداد حالت هایی که تکراری یا بی اثر محسوب می شوند، استفاده کنیم. به مسئله ی زیر توجه کنید.

در پاسخ به این مسئله که با ارقام ۸۵۸۸۵ چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟ چنین می توان گفت که تعداد کل حالت ها برابر $5!$ می شوند ولی چون رقم ۸ سه بار تکرار شده و جایجایی آنها تأثیر روی تعداد ندارد و همچنین رقم ۵ دو بار تکرار شده و جایجایی آنها نیز تأثیری روی تعداد نخواهد داشت. لذا باید تعداد کل را بر $3!$ و $2!$ تقسیم کنیم. در نتیجه تعداد ترتیب ارقام ۸۵۸۸۵ حاصل تقسیم زیر است.

$$\frac{5!}{2! \times 3!}$$

که با نماد $\binom{5}{2,3}$ نیز نمایش داده می شود.

نتیجه: تعداد جایگشت های n شیئی در صورتی که n_1 شیئی از نوع a و n_2 شیئی از نوع b و ... و در نهایت n_m شیئی از نوع z باشند از رابطه ی زیر بدست می آید. $(n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m)$

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_m!}$$

مثال: با حروف کلمه ی BANANA چند جایگشت وجود دارد؟

حرف	B	A	N	جمع
تعداد	۱	۳	۲	۶

$$\binom{6}{1,3,2} = \frac{6!}{1! \times 3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 60$$

تمرین ۱۰: با حروف کلمه ی «ایرانیان» چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

حل:

حرف	آ	ی	ر	ن	جمع
تعداد	۳	۲	۱	۲	۸

$$\binom{8}{3,2,1,2} = \frac{8!}{3! \times 2! \times 1! \times 2!} = 1680$$

تمرین ۱۱: با ارقام ۲۸۵۸۸۸۵ چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

حل:

رقم	۲	۸	۵	جمع
تعداد	۱	۴	۲	۷

$$\binom{7}{1,4,2} = \frac{7!}{1! \times 4! \times 2!} = 105$$

تمرین ۱۲: با ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۷ و ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان نوشت؟

حل:

عدد	۵	۷	۶	جمع
تعداد	۲	۳	۱	۶

تعداد کدها $\binom{6}{2,3,1} = \frac{6!}{2! \times 3! \times 1!} = 60$

تمرین ۱۳: می خواهیم روی تعدادی جعبه‌ی حاوی اجناس تولید شده‌ی خاصی را کد گذاری و هر جعبه را

با یک کد، شامل ۹ حرف a و a و b و a و c و c و d و d و d از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را

می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

حل:

حرف	a	b	c	d	جمع
تعداد	۳	۱	۲	۳	۹

تعداد جعبه‌ها $\binom{9}{3,1,3,2} = \frac{9!}{3! \times 1! \times 3! \times 2!} = 5040$

تمرین ۱۴: ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

حل:

اتاق	اتاق a	اتاق b	اتاق c	جمع
تعداد	۲	۲	۳	۷

تعداد حالت‌ها $\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$

ث: محاسبه‌ی تعداد جواب های صحیح و نامنفی یک معادله‌ی سیاله با ضرایب واحد

گاهی لازم می شود که تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$ (یک عدد طبیعی) را تعیین کنیم. برای آشنایی به روش تعیین تعداد جواب ها به مسئله‌ی زیر دقت کنید.

مسئله: شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل سه شاخه گل ، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک انتخاب کند. اگر از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود باشد. تعیین کنید که به چند طریق می تواند دسته گل انتخاب کند.

اگر تعداد ستاره ها نشان دهنده‌ی شاخه گل باشد. جدول زیر می تواند جواب این مسئله باشد.

حالت (ردیف)	مریم	رُز	میخک
۱	*	*	*
۲	**	*	
۳	**		*
۴	*	**	
۵		**	*
۶	*		**
۷		*	**
۸	**		
۹		**	
۱۰			**

یعنی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ دارای ۱۰ جواب صحیح و نامنفی است. این جواب با توجه به قضیه‌ی

جایگشت با تکرار بین ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی جدول) قابل توجیه است.

$3 =$ تعداد ستاره های هر سطر $=$ تعداد شاخه‌ی گل انتخابی

$3 - 1 = 2 =$ تعداد خط های عمودی برای جدا کردن ۳ نوع گل

$5 = 3 + (3 - 1) =$ تعداد کل اشیاء (شامل ستاره ها و خط های عمودی)

اکنون چون جایجایی ستاره ها با هم (۳! حالت) ، دسته گل جدیدی تولید نمی کند و همچنین جایجایی خط

های عمودی با هم (۲!) $= (3 - 1)!$ حالت) دسته گل جدیدی تولید نمی کند. پس تعداد کل جایجایی اشیاء

یعنی ۵! برابر ۳! و ۲! تقسیم می کنیم.

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \binom{5}{2,3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

و در حالت کلی برای معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$ می توان نوشت:

$$n = \text{تعداد ستاره های هر سطر} = \text{تعداد شاخه های گل انتخابی}$$

$$r - 1 = \text{تعداد خط های عمودی برای جدا کردن } r \text{ نوع گل}$$

$$n + (r - 1) = \text{تعداد کل اشیاء (شامل ستاره ها و خط های عمودی)}$$

اکنون چون جایجایی ستاره ها با هم ($n!$ حالت)، دسته گل جدیدی تولید نمی کند و همچنین جایجایی خط

های عمودی با هم ($(r-1)!$ حالت) دسته گل جدیدی تولید نمی کند. پس تعداد کل جایجایی اشیاء

یعنی $(n - (r - 1))!$ را بر $n!$ و $(r - 1)!$ تقسیم می کنیم.

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \binom{n - (r - 1)}{n, (r - 1)} = \frac{(n - (r - 1))!}{n! \times (r - 1)!} = \binom{n + (r - 1)}{r - 1}$$

اکنون مسئله ی فوق را به هدف تعیین تعداد جوابهای طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$ به

شکل زیر مطرح می کنیم.

مسئله: شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل ۵ شاخه گل، از بین سه نوع

گل مریم، رُز و میخک انتخاب کند. اگر از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود باشد و خریدار باید از تمام انواع

گل بردارد. تعیین کنید که به چند طریق می تواند دسته گل انتخاب کند.

اگر تعداد ستاره ها نشان دهنده ی شاخه گل باشد. جدول زیر می تواند جواب این مسئله باشد.

حالت (ردیف)	مریم	رُز	میخک
۱	***	*	*
۲	**	**	*
۳	*	**	**
۴	*	*	***
۵	*	***	*
۶	**	*	**

یعنی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ دارای ۶ جواب طبیعی (صحیح و مثبت) است.

برای توجیه این جواب به شکل زیر عمل می کنیم.

ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برمی داریم. پس تعداد جواب ها معادله به شکل زیر تقلیل پیدا می کنند.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow \underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{y_2} + \underbrace{(x_3 - 1)}_{y_3} = 5 - (1 + 1 + 1)$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

اکنون تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $y_1 + y_2 + y_3 = 2$ را تعیین می کنیم.

$$\text{تعداد دسته گل ها} = \binom{n + (r - 1)}{r - 1} = \binom{2 + (3 - 1)}{3 - 1} = \binom{4}{2} = 6$$

در حال کلی برای تعیین تعداد جواب های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$

ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برمی داریم و لذا تعداد جواب های دلخواه به $n - r$ حالت تقلیل پیدا می کند.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$$

$$\rightarrow \underbrace{(x_1 - 1)}_{y_1} + \underbrace{(x_2 - 1)}_{y_2} + \underbrace{(x_3 - 1)}_{y_3} + \dots + \underbrace{(x_r - 1)}_{y_r} = n - (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_r)$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_r = n - r$$

اکنون تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله جدید را تعیین می کنیم.

$$\binom{(n - r) + (r - 1)}{r - 1} = \binom{n - 1}{r - 1}$$

نتیجه: اگر n یک عدد طبیعی فرض شود، در این صورت:

۱: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$ برابر $\binom{n + r - 1}{r - 1}$ است.

۲: تعداد جوابهای طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$ برابر $\binom{n - 1}{r - 1}$ است.

تمرین ۱۵: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x + y + z = 4$ را بدست آورید.

حل:

$$\binom{n + r - 1}{r - 1} = \binom{4 + 3 - 1}{3 - 1} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

تمرین ۱۶: تعداد جوابهای طبیعی معادله $x + y + z + t = 12$ را تعیین کنید.

حل:

$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{12-1}{4-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!} = 165$$

تمرین ۱۷: به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب

کرد؟

حل:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{8 + (4 - 1)}{4 - 1} = \binom{11}{3}$

تمرین ۱۸: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط

اینکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$$

تعداد جواب های طبیعی $\binom{9-1}{4-1} = \binom{8}{3}$

تمرین ۱۹: شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل ۵ شاخه گل، از بین سه

نوع گل مریم، رُز و میخک انتخاب کند. اگر از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود باشد و خریدار باید از حتماً و

حداقل یک شاخه گل مریم بر دارد. تعیین کنید که به چند طریق می تواند دسته گل انتخاب کند.

حل: معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ که در آن x_1 تعداد گل های مریم باشد را در نظر بگیرید. طبق مسئله

واضح است که :

$$x_1 > 1 \rightarrow x_1 \geq 2 \rightarrow \underbrace{x_1 - 2}_{y_1} \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow y_1 + 2 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 3$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{3 + (3 - 1)}{3 - 1} = \binom{5}{2} = 10$

تمرین ۲۰: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط اینکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد.

حل:

$$x_1 > 1 \rightarrow x_1 \geq 2 \rightarrow \underbrace{x_1 - 2}_{y_1} \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 2$$

$$x_3 > 3 \rightarrow x_3 \geq 4 \rightarrow \underbrace{x_3 - 4}_{y_3} \geq 0 \rightarrow x_3 = y_3 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \rightarrow y_1 + 2 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 = 14$$

$$\rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 8$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{8 + (5 - 1)}{5 - 1} = \binom{12}{4}$

تمرین ۲۱: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط زیر دارد؟

$$(x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5)$$

حل: با توجه به این شرط، معلوم می شود که تعداد جوابهای طبیعی معادله مد نظر است. پس:

تعداد جواب های طبیعی $\binom{11 - 1}{5 - 1} = \binom{10}{4}$

تمرین ۲۲: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط زیر دارد؟

$$(x_5 > 2, x_3 = 4)$$

حل:

$$x_1 \geq 1 \rightarrow \underbrace{x_1 - 1}_{y_1} \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 1$$

$$x_2 \geq 1 \rightarrow \underbrace{x_2 - 1}_{y_2} \geq 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 \geq 1 \rightarrow \underbrace{x_4 - 1}_{y_4} \geq 0 \rightarrow x_4 = y_4 + 1$$

$$x_5 > 2 \rightarrow x_5 \geq 3 \rightarrow \underbrace{x_5 - 3}_{y_5} > 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 3$$

$$x_6 \geq 1 \rightarrow \underbrace{x_6 - 1}_{y_6} \geq 0 \rightarrow x_6 = y_6 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$$

$$\rightarrow y_1 + 1 + y_2 + 1 + 4 + y_4 + 1 + y_5 + 3 + y_6 + 1 = 12$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_6 = 1$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} \binom{5+1-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$$

تمرین ۲۳: به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد. اگر بخواهیم:

الف: به دلخواه انتخاب کنیم.

ب: از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم.

پ: از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم.

ت: از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

حل:

الف:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \binom{11+(5-1)}{5-1} = \binom{15}{4}$$

ب:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح طبیعی} \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

پ: یعنی در معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ دو شرط $x_2 \geq 2$ و $x_5 > 3$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است.

$$x_2 \geq 2 \rightarrow \underbrace{x_2 - 2}_{y_2} \geq 0 \rightarrow x_2 = y_2 + 2$$

$$x_5 > 3 \rightarrow x_5 \geq 4 \rightarrow \underbrace{x_5 - 4}_{y_5} \geq 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \rightarrow x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$$

$$\rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 5 + (5-1) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ت: یعنی در معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ دو شرط $x_3 = 0$ و $x_4 \geq 5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیرهای آن برقرار است.

$$x_4 \geq 5 \rightarrow \underbrace{x_4 - 5}_{y_4} \geq 0 \rightarrow x_4 = y_4 + 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \xrightarrow{x_3=0} x_1 + x_2 + 0 + y_4 + 5 + x_5 = 11$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + y_4 + x_5 = 6$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 6 + (4-1) \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

تمرین ۲۴: در یک خوابگاه دانشجویی، دانشجویان سال های اول تا چهارم اسکان داده شده اند.

الف: به چند طریق می توان یک دسته‌ی ۱۰ نفری از دانشجویان این خوابگاه را برای نمایندگی خوابگاه انتخاب کرد.

ب: به چند طریق می توان، یک دسته‌ی ۱۰ نفری از دانشجویان این خوابگاه را برای نمایندگی انتخاب کرد، به شرط اینکه حداقل شامل یک دانشجوی سال اول، یک دانشجوی سال دوم و دو دانشجوی سال سوم و دو دانشجوی سال چهارم باشد.

حل:

الف: تعریف می کنیم که:

$$x_i = \text{تعداد دانشجویان سال } i \text{ ام در بین } 10 \text{ نفر انتخابی } (1 \leq i \leq 4)$$

لذا کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را تعیین کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$

ب: $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ و $x_3 > 1$ و $x_4 > 1$

$$x_1 = y_1 + 1$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 = y_3 + 2$$

$$x_4 = y_4 + 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 2) + (y_4 + 2) = 10$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

تمرین ۲۵: معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط اینکه $x_1 > 4$ و

$$x_2 > 0$$

حل:

$$x_1 = y_1 + 5$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 = y_3$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 15 \rightarrow (y_1 + 5) + (y_2 + 1) + y_3 = 15 \rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

حال کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را تعیین کنیم.

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

تمرین ۲۶: هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه ی متمایز قرار گیرند، به طوری که هیچ لانه ای

خالی نماند؟

حل :

روش اول: چون قرار است که هیچ لانه ای خالی نماند. لذا کافی است که تعداد جواب های طبیعی معادله -

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \text{ را تعیین کرد.}$$

$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

روش دوم: هفت کبوتر در 3 لانه قرار می گیرند به طوری که در هر لانه لااقل یک کبوتر قرار گیرد. برای

این منظور در هر خانه الزاماً یک کبوتر قرار می گیرد. پس :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \xrightarrow{x_i \geq 1} (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) = 7$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی فوق برابر است با

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

تمرین 27: تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله ی $8 \leq x_1 + x_2 + x_3 < 12$ را به دست آورید.

حل: کافی است که تعداد جواب های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر را تعیین کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow \binom{8+3-1}{3-1} = 45$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \rightarrow \binom{9+3-1}{3-1} = 55$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \binom{10+3-1}{3-1} = 66$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \rightarrow \binom{11+3-1}{3-1} = 78$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = 45 + 55 + 66 + 78 = 244$$

تمرین 28: تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله ی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ را به دست آورید.

حل: t را عددی فرض می کنیم که

$$x_1 + x_2 + x_3 + t = 10$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$

تمرین ۲۹: تعداد جواب های طبیعی نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ را به دست آورید.

حل:

روش اول: کافی است تعداد جواب های طبیعی هر یک از معادلات زیر را جداگانه به دست آورده و سپس

با هم جمع کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{1-1}{3-1} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{2-1}{3-1} = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \rightarrow \binom{3-1}{3-1} = 1$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{3-1}{3-1} = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow \binom{4-1}{3-1} = 3$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{4-1}{3-1} = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow \binom{5-1}{3-1} = 6$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{5-1}{3-1} = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{6-1}{3-1} = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{7-1}{3-1} = 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow \binom{8-1}{3-1} = 21$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{8-1}{3-1} = 21$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \rightarrow \binom{9-1}{3-1} = 28$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{9-1}{3-1} = 28$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \binom{10-1}{3-1} = 36$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \rightarrow \binom{10-1}{3-1} = 36$$

لذا تعداد جواب های طبیعی می شود.

$$0 + 0 + 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 = 120$$

روش دوم: $t \geq 0$ را عددی فرض می کنیم که

$$x_1 + x_2 + x_3 + t = 10$$

$$\xrightarrow{t=y-1} x_1 + x_2 + x_3 + y - 1 = 10 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y = 11$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{n-1}{r-1} = \binom{11-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

تمرین ۳۰: تعداد جواب های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر، با شرط های داده شده را تعیین

کنید.

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ ، $x_i > 0$ ، $2 \leq i \leq 5$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ ، $x_1 > 2$ ، $x_5 \geq 4$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$ ، $x_i \geq 0$ ، $1 < i < 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$ ، $x_i \geq 0$ ، $1 < i < 4$

حل:

الف:

$$x_i > 0 \xrightarrow{2 \leq i \leq 5} x_i \geq 1 \rightarrow \underbrace{x_i - 1}_{y_i} \geq 0 \rightarrow x_i = y_i + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$\rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 6 + 5 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ب :

$$x_1 > 2 \rightarrow x_1 \geq 3 \rightarrow \underbrace{x_1 - 3}_{y_1} \geq 0 \rightarrow x_1 = y_1 + 3$$

$$x_5 \geq 4 \rightarrow \underbrace{x_5 - 4}_{y_5} \geq 0 \rightarrow x_5 = y_5 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$$

$$\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 6 + 5 - 1 \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ت : با توجه به ضریب x_2 ، مسئله را برای ۳ حالت زیر حل می کنیم و حاصل جمع تعداد جواب ها را به دست می آوریم.

$$\text{حالت اول } x_2 = 0 \rightarrow x_1 + 3(0) + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 7 + 3 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 36$$

$$\text{حالت دوم } x_2 = 1 \rightarrow x_1 + 3(1) + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 4 + 3 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$$

$$\text{حالت سوم } x_2 = 2 \rightarrow x_1 + 3(2) + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} \begin{pmatrix} 1 + 3 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{تعداد کل جواب های صحیح نامنفی} = 36 + 15 + 3 = 54$$

توجه کنید که مقدار x_2 نمی تواند ۳ یا بیشتر باشد.

ث: با توجه به شرایط معادله، چهار حالت برای x_2 وجود دارد.

حالت اول $x_2 = 0 \rightarrow x_1 + \sqrt{0} + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

حالت دوم $x_2 = 1 \rightarrow x_1 + \sqrt{1} + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$

حالت سوم $x_2 = 4 \rightarrow x_1 + \sqrt{4} + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$

حالت چهارم $x_2 = 9 \rightarrow x_1 + \sqrt{9} + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$

تعداد کل جواب های صحیح نامنفی $= 10 + 6 + 3 + 1 = 20$

توجه کنید که مقدار x_2 باید مربع کامل بوده و نمی تواند ۱۶ یا بیشتر باشد.

تمرین ۳۱: به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟

حل:

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$; $x_i \geq 0$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

به ۲۱ طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد.

تمرین ۳۲: به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل

یک توپ داشته باشد؟

حل:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$; $x_i \geq 1$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

به ۳۵ طریق می توان ۸ توپ یکسان را چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.



درس سوّم: روش هایی برای شمارش

در این درس به دو اصل کارآمد در شمارش، اشاره و کاربردهایی برای آنها بیان می کنیم.

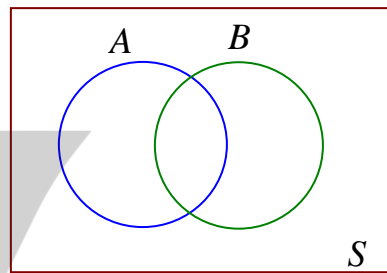
الف: اصل شمول و عدم شمول

اگر A و B دو زیر مجموعه از مجموعه مرجع S را در نظر بگیرید. در صورتی که A و B مجموعه S های متناهی باشند. واضح است که روابط زیر را برای تعداد اعضای این مجموعه ها می توان نوشت^۱.

الف) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ب) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

ج) $|\bar{A}| = |S| - |A|$



نتیجه:

$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$

مثال: در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید که چند نفر،

نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، هرگاه بدانیم که ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.

حل: اگر مجموعه دانش آموزانی که فوتبال بازی می کند را A و مجموعه دانش آموزانی که والیبال

بازی می کند را B بنامیم. در این صورت تعداد دانش آموزانی که یا فوتبال یا والیبال بازی می کنند برابر:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 15 + 14 - 9 = 20$$

و تعداد دانش آموزانی که نه فوتبال و نه والیبال بازی می کنند برابر:

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 25 - 20 = 5$$

مثال: با توجه به مثال فوق، تعیین کنید که چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند.

حل:

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 15 - 9 = 6$$

^۱ در این کتاب، تعداد عضوهای مجموعه متناهی S را با نماد $|S|$ نمایش می دهیم. یعنی $n(S) = |S|$

همچنین متمم مجموعه A را با \bar{A} نمایش می دهند. یعنی $A' = \bar{A}$

توجه: اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی بخشپذیر بر k باشد و a اولین (کوچکترین) و b آخرین (بزرگترین) عضو مجموعه‌ی A باشند. در این صورت:

$$|A| = \frac{b-a}{k} + 1$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را تعیین کنید.

حل:

$$A = \{14, 21, 28, \dots, 98\} \rightarrow |A| = \frac{98-14}{7} + 1 = 13$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی دو رقمی را پیدا کنید که:

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| (الف) مضرب ۳ باشند. | (ب) مضرب ۵ باشند. |
| (پ) مضرب ۳ و مضرب ۵ باشند. | (ت) یا مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشند. |
| (ث) نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ باشند. | (ج) مضرب ۳ باشند ولی مضرب ۵ نباشند. |

حل:

$$S = \{10, 11, 12, \dots, 99\} \rightarrow |S| = 99 - 10 + 1 = 90$$

$$A = \{12, 15, 18, \dots, 99\} \rightarrow |A| = \frac{99-12}{3} + 1 = 30$$

$$B = \{10, 15, 20, \dots, 95\} \rightarrow |B| = \frac{95-10}{5} + 1 = 18$$

$$A \cap B = \{15, 30, 45, \dots, 90\}$$

(مجموعه‌ی مضرب‌های ۱۵ چون ۳ و ۵ متباین هستند.)

$$\rightarrow |A \cap B| = \frac{90-15}{15} + 1 = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 30 + 18 - 6 = 42$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 90 - 42 = 48$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 30 - 6 = 24$$

توجه: برای تعیین تعداد اعداد طبیعی ابتدا از یک تا عدد m ($1 \leq n \leq m$) و بخش پذیر بر k می‌توان از

فرمول زیر نیز استفاده کرد.

$$n = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی کمتر از صد و مضرب ۷ را تعیین کنید.

حل:

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, 7 \mid n\} = \{7, 14, 21, 28, \dots, 98\} \rightarrow |A| = \left[\frac{100}{7} \right] = [14/28] = 14$$

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۵۰۰ که نسبت به ۵۰۰ اولند را محاسبه کنید.

حل:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 500\} \rightarrow |S| = 500 - 1 + 1 = 500$$

$$500 = 5^3 \times 2^2$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه‌ی S را بدست می‌آوریم که بر ۲ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۲ بخش پذیر باشند.

$$|A| = \{2, 4, 6, \dots, 500\} \rightarrow |A| = \frac{500 - 2}{2} + 1 = 250$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|B| = \{5, 10, 15, \dots, 500\} \rightarrow |B| = \frac{500 - 5}{5} + 1 = 100$$

اعضای S که بر ۱۰ بخش پذیر باشند. (۵ و ۲ نسبت به هم اولند).

$$A \cap B = \{10, 20, 30, \dots, 500\} \rightarrow |A \cap B| = \frac{500 - 10}{10} + 1 = 50$$

تعداد اعضای S که یا بر ۲ و یا بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 250 + 100 - 50 = 300$$

تعداد اعضای S که نه بر ۲ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 500 - 300 = 200$$

مثال: اگر یک قفل دارای رمز باشد و رمز آن شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ است و بدانیم که رمز بسته شده روی

قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد.

حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود. (توجه: در رمز، رقم صفر می‌تواند در سمت چپ باشد).

حل :

$$S \rightarrow |S| = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

$$A \rightarrow |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$$

$$B \rightarrow |B| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$$

$$A \cap B \rightarrow |A \cap B| = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4096$$

$$A \cup B \rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 6561 + 6561 - 4096 = 9026$$

$$S - |A \cup B| = 10000 - 9026 = 974$$

$$974 \times 5 = 4870$$

$$4870$$

مثال : چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از ارقام ۳ و ۶، حداقل یک بار ظاهر شوند؟

حل :

$$S \rightarrow |S| = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

$$A \rightarrow |A| = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$B \rightarrow |B| = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$A \cap B \rightarrow |A \cap B| = 7 \times 8 \times 8 = 448$$

$$A \cup B \rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 648 + 648 - 448 = 848$$

یا هر دو

$$S - |A \cup B| = 900 - 848 = 52$$

تمرین برای حل :

۱ : در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1 \leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

۲ : در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷

بخش پذیر نباشند؟

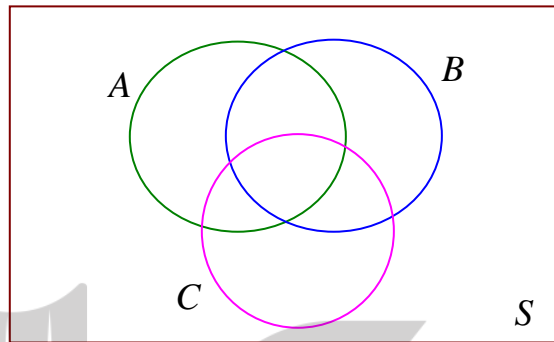
۳ : تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۱۱۲۵ که نسبت به ۱۱۲۵ اولند را محاسبه کنید.

تعمیم اصل شمول و عدم شمول

برای سه مجموعه‌ی متناهی A و B و C اصل شمول و عدم شمول را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$



مثال: چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 400$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند.

حل:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 400\} \rightarrow |S| = 400 - 1 + 1 = 400$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه‌ی S را بدست می‌آوریم که بر ۳ یا ۴ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$|A| = \{1, 2, 3, \dots, 400\} \rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{400}{3} \right\rfloor = 133$$

اعضای S که بر ۴ بخش پذیر باشند.

$$|B| = \{1, 2, 3, \dots, 400\} \rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{400}{4} \right\rfloor = 100$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|C| = \{1, 2, 3, \dots, 400\} \rightarrow |C| = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

اعضای S که بر ۳ و ۴ (یعنی ۱۲) بخش پذیر باشند. (۳ و ۴ نسبت به هم اولند).

$$A \cap B = \{1, 2, 3, \dots, 40\} \rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{40}{12} \right] = 33$$

اعضای S که بر ۳ و ۵ (یعنی ۱۵) بخش پذیر باشند. (۳ و ۵ نسبت به هم اولند).

$$A \cap C = \{1, 2, 3, \dots, 40\} \rightarrow |A \cap C| = \left[\frac{40}{15} \right] = 26$$

اعضای S که بر ۴ و ۵ (یعنی ۲۰) بخش پذیر باشند. (۴ و ۵ نسبت به هم اولند).

$$B \cap C = \{1, 2, 3, \dots, 40\} \rightarrow |B \cap C| = \left[\frac{40}{20} \right] = 20$$

اعضای S که بر ۳ و ۴ و ۵ (یعنی ۶۰) بخش پذیر باشند. (۳ و ۴ و ۵ نسبت به هم اولند).

$$A \cap B \cap C = \{1, 2, 3, \dots, 40\} \rightarrow |A \cap B \cap C| = \left[\frac{40}{60} \right] = 6$$

تعداد اعضای S که بر ۳ یا ۴ یا ۵ بخش پذیر باشند.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6 = 240$$

تعداد اعضای S که نه بر ۳ و نه بر ۴ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A \cup B \cap C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 400 - 240 = 160$$

مثال: تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۰ که نسبت به ۳۰ اولند را محاسبه کنید.

حل:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 30\} \rightarrow |S| = 30 - 1 + 1 = 30$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه S را بدست می آوریم که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۲ بخش پذیر باشند.

$$|A| = \{2, 4, 6, \dots, 30\} \rightarrow |A| = \frac{30 - 2}{2} + 1 = 15$$

اعضای S که بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$|B| = \{3, 6, \dots, 30\} \rightarrow |B| = \frac{30-3}{3} + 1 = 10$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|C| = \{5, 10, 15, \dots, 30\} \rightarrow |B| = \frac{30-5}{5} + 1 = 6$$

اعضای S که بر ۶ بخش پذیر باشند. (۳ و ۲ نسبت به هم اولند).

$$A \cap B = \{6, 12, \dots, 30\} \rightarrow |A \cap B| = \frac{30-6}{6} + 1 = 5$$

اعضای S که بر ۱۰ بخش پذیر باشند. (۵ و ۲ نسبت به هم اولند).

$$A \cap C = \{10, 20, 30\} \rightarrow |A \cap C| = 3$$

اعضای S که بر ۱۵ بخش پذیر باشند. (۵ و ۳ نسبت به هم اولند).

$$B \cap C = \{15, 30\} \rightarrow |B \cap C| = 2$$

اعضای S که بر ۳۰ بخش پذیر باشند. (۵ و ۳ و ۲ نسبت به هم اولند).

$$A \cap B \cap C = \{30\} \rightarrow |A \cap B \cap C| = 1$$

تعداد اعضای S که یا بر ۲ و یا بر ۳ و یا بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22 \end{aligned}$$

تعداد اعضای S که نه بر ۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 30 - 22 = 8$$

مثال: تعداد شماره های ۵ رقمی که در آنها هر یک از ارقام ۱ و ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر شده باشد. (فقط

با ارقام ۱ و ۳ و ۷)

حل: مجموعه‌ی S را کلیه‌ی شماره های ۵ رقمی قرار می دهیم.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \rightarrow |S| = 3^5 = 243$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد رقم ۱ می‌باشند. $A =$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \rightarrow |A| = 2^5 = 32$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد رقم ۳ می‌باشند. $B =$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \rightarrow |B| = 2^5 = 32$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد رقم ۷ می‌باشند. $C =$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \rightarrow |C| = 2^5 = 32$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد ارقام ۱ و ۳ می‌باشند. $A \cap B =$

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \rightarrow |A \cap B| = 1^5 = 1$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد ارقام ۱ و ۷ می‌باشند. $A \cap C =$

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \rightarrow |A \cap C| = 1^5 = 1$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد ارقام ۳ و ۷ می‌باشند. $B \cap C =$

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \rightarrow |B \cap C| = 1^5 = 1$$

مجموعه‌ی شماره‌هایی که فاقد ارقام ۱ و ۳ و ۷ می‌باشند. $A \cap B \cap C =$

$$0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \rightarrow |A \cap B \cap C| = 0$$

لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می‌توان تعداد شماره‌های فاقد ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0 = 93 \end{aligned}$$

پس تعداد لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می‌توان تعداد شماره‌های شامل ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 243 - 93 = 150$$

مثال: تعداد شماره های ۵ رقمی که در آنها هر یک از ارقام ۱ و ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر شده باشد. (ارقام غیر از ۱ و ۳ و ۷ می توانند باشند).

حل: مجموعه S را کلیه شماره های ۵ رقمی قرار می دهیم. (سمت چپ صفر مجاز نمی باشد).

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \rightarrow |S| = 9 \times 10^4$$

مجموعه A شماره هایی که فاقد رقم ۱ می باشند.

$$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \rightarrow |A| = 8 \times 9^4$$

مجموعه B شماره هایی که فاقد رقم ۳ می باشند.

$$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \rightarrow |B| = 8 \times 9^4$$

مجموعه C شماره هایی که فاقد رقم ۷ می باشند.

$$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \rightarrow |C| = 8 \times 9^4$$

مجموعه $A \cap B$ شماره هایی که فاقد ارقام ۱ و ۳ می باشند.

$$7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \rightarrow |A \cap B| = 7 \times 8^4$$

مجموعه $A \cap C$ شماره هایی که فاقد ارقام ۱ و ۷ می باشند.

$$7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \rightarrow |A \cap C| = 7 \times 8^4$$

مجموعه $B \cap C$ شماره هایی که فاقد ارقام ۳ و ۷ می باشند.

$$7 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \rightarrow |B \cap C| = 7 \times 8^4$$

مجموعه $A \cap B \cap C$ شماره هایی که فاقد ارقام ۱ و ۳ و ۷ می باشند.

$$6 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \rightarrow |A \cap B \cap C| = 6 \times 7^4$$

لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می توان تعداد شماره های فاقد ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 3(8 \times 9^4) - 3(7 \times 8^4) + 6 \times 7^4 \end{aligned}$$

پس تعداد لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می توان تعداد شماره های شامل ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = 9 \times 10^4 - 3(8 \times 9^4) + 3(7 \times 8^4) - 6 \times 7^4$$

تعیین تعداد توابع

تعداد توابع ممکن از یک مجموعه A به مجموعه B با فرض اینکه $|A|=m$ و $|B|=n$ برابر است با:

$$n^m$$

مثال: تعداد تابع های ممکن از یک مجموعه A ۳ عضوی به یک مجموعه B ۵ عضوی را به دست آورید.

حل:

$$5^3 = 125$$

مثال: ۸ نفر را که برای برنامه ی تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴

مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرئه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند

طریق امکان پذیر است؟ (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود).

حل: این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع های ممکن از یک مجموعه A ۴ عضوی به یک مجموعه B ۸

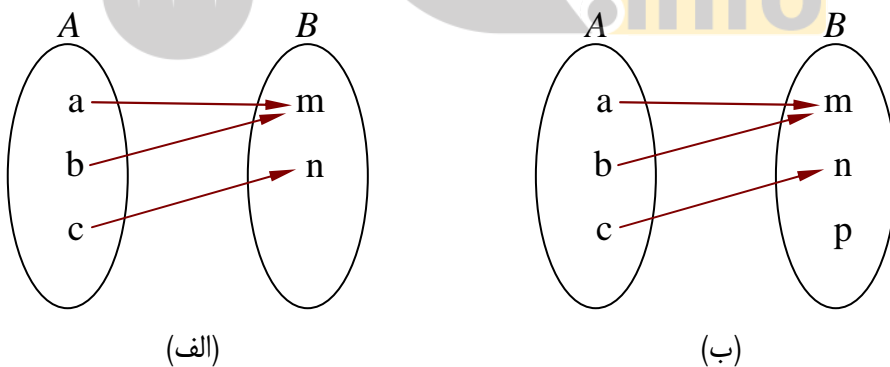
عضوی می باشد و جواب می شود.

$$8^4 = 4096$$

تعیین تعداد توابع پوشا

تعریف تابع پوشا: اگر f تابعی باشد که از مجموعه A به مجموعه B تعریف شود، گویند این تابع

پوشا است، هرگاه روی تمام اعضای B ، پیکانی رسم شده است. به عبارت دیگر $R_f = B$



برای مثال در دو نمودار فوق، تابع الف، پوشا است ولی تابع ب پوشا نمی باشد.

مثال: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه A ۴ عضوی به یک مجموعه B ۳ عضوی را پیدا کنید.

حل: گیریم که $f: A \rightarrow B$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \quad (m = 4)$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} \quad (n = 3)$$

اگر مجموعه‌ی S مجموعه‌ی توابعی باشد که از A به B تعریف شده اند. لذا داریم:

$$|S| = n^m = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

حال فرض کنید که B_i مجموعه‌ی توابعی باشند که هیچ عضوی از A را به b_i نسبت نمی دهند. (غیر پوشا)

$$B_i = \{f \in S \mid b_i \notin f(A)\} \quad i = 1, 2, 3$$

$$B_1 = \{f \in S \mid b_1 \notin f(A)\} \rightarrow |B_1| = (n-1)^m = 2^4$$

$$B_2 = \{f \in S \mid b_2 \notin f(A)\} \rightarrow |B_2| = (n-1)^m = 2^4$$

$$B_3 = \{f \in S \mid b_3 \notin f(A)\} \rightarrow |B_3| = (n-1)^m = 2^4$$

همچنین

$$|B_1 \cap B_2| = |B_1 \cap B_3| = |B_2 \cap B_3| = (n-2)^m = 1^4 = 1$$

و

$$|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = (n-3)^m = 0^4 = 0$$

تعداد توابع غیر پوشا

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3|$$

$$= |B_1| + |B_2| + |B_3| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

$$= 2^4 + 2^4 + 2^4 - 1^4 - 1^4 - 1^4 + 0^4 = 45$$

تعداد توابع پوشا از A به B

$$|\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3}| = |M| - |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = 81 - 45 = 36$$

مثال: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی A به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی B را پیدا کنید.

حل: اگر مجموعه‌ی S مجموعه‌ی توابعی باشد که از A به B تعریف شده اند. لذا داریم:

$$|S| = n^m = 3^5 = 243$$

تعداد توابع غیر پوشا از A به B

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = (n-1)^m = 2^5 = 32$$

همچنین

$$|B_1 \cap B_2| = |B_1 \cap B_3| = |B_2 \cap B_3| = (n-2)^m = 1^5 = 1$$

و

$$|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = (n-3)^m = 0^5 = 0$$

تعداد توابع غیر پوشا

$$\begin{aligned} & |B_1 \cup B_2 \cup B_3| \\ &= |B_1| + |B_2| + |B_3| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \\ &= 2^5 + 2^5 + 2^5 - 1^5 - 1^5 - 1^5 + 0^5 = 93 \end{aligned}$$

تعداد توابع پوشا از A به B

$$|\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3}| = |M| - |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = 243 - 93 = 150$$

تذکر: تعداد تابع هایی چون $f: A \rightarrow B$ با فرض $|A| = m \geq 3$ و $|B| = 3$ به طوری که $R_f = B$

(توابع پوشا) از رابطه‌ی $3^m - 3(2^m - 1)$ بدست می آید. چرا؟

مثال: به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط اینکه به هر نفر یک

خودکار داده باشیم؟

حل: تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک

مجموعه‌ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه‌ی سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابع همه

اعضای B باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از A نسبت داده شود).

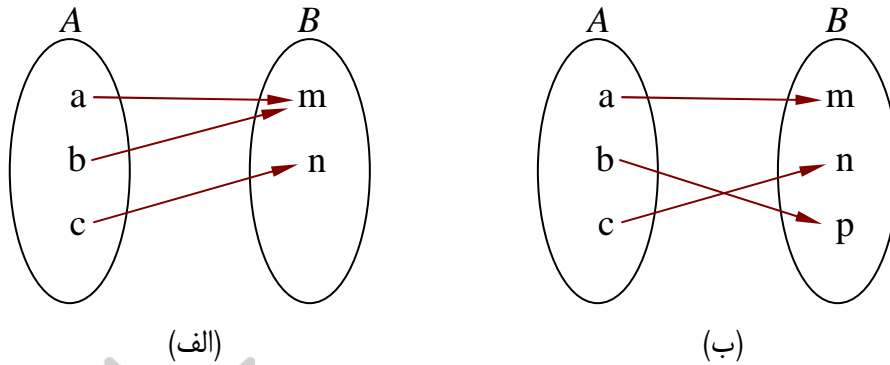
پس جواب این مسئله می شود:

$$|A| = 4 \text{ و } |B| = 3$$

$$3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$$

تعیین تعداد توابع یک به یک

تعریف تابع یک به یک: اگر f تابعی باشد که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شود، گویند این تابع یک به یک است، هرگاه از هر عضو A فقط یک عضو از B نظیر شود.



برای مثال در دو نمودار فوق، تابع الف، یک به یک نیست ولی تابع ب یک به یک است.

مثال: تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم که $f: A \rightarrow B$ و $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$

برای تعریف f روی عضو اول A مثلاً $f(a_1)$ ، به تعداد ۶ طریق وجود دارد. اما برای تعریف f روی هر عضو دوم A مثلاً $f(a_2)$ ، با توجه به یک به یک بودن تابع، به تعداد ۵ طریق وجود دارد. برای تعریف f روی هر عضو سوم A مثلاً $f(a_3)$ ، با توجه به یک به یک بودن تابع، به تعداد ۴ طریق وجود دارد. به همین ترتیب می‌توان گفت که برای تعریف f روی هر عضو چهارم A مثلاً $f(a_4)$ ، با توجه به یک به یک بودن تابع، به تعداد ۳ طریق وجود دارد.

اکنون با توجه به اصل ضرب می‌توان گفت که به تعداد $6 \times 5 \times 4 \times 3$ یا $P(6, 4)$ تابع یک به یک وجود دارد.

نتیجه: تعداد یک به یک از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی k عضوی، با شرط $k \geq m$ را

$$P(k, m) = (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!} \text{ برابر}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد. (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)

حل: تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ای ۴ عضوی به مجموعه ای ۸ عضوی است. یعنی

$$({}_8)_4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680.$$

مثال: به چند طریق می توان ۵ کتاب را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم.

حل: تعداد جواب های این مسئله برابر است با تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ای ۵ عضو به یک مجموعه ای ۸ عضوی می باشد.

$$({}_8)_5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6720.$$

روش دوم:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720 = \text{تعداد حالات انتخاب ۵ کتاب توسط ۸ نفر}$$

تعیین جواب های صحیح و نامنفی یک معادله ی سیاله با ضرایب واحد

مثال: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را با شرط $0 \leq x_i \leq 2$ برای $1 \leq i \leq 3$ تعیین کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

حل:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow |S| = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21 \text{ ها جواب کل}$$

$$A_i = \{ \text{جواب هایی از معادله که در آنها } x_i \geq 3 \text{ است.} \}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_1 \geq 3 \rightarrow x_1 = y_1 + 3 \geq 2} y_1 + 3 + x_2 + x_3 = 5$$

$$\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_1 \geq 3, x_2 \geq 3} y_1 + 3 + y_2 + 3 + x_3 = -1$$

چنین جوابی وجود ندارد. $\rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = -1$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 6 + 6 + 6 - 0 - 0 - 0 + 0 = 18$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |M| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 21 - 18 = 3$$

تمرین برای حل :

۴: اصل شمول و عدم شمول را برای چهار مجموعه‌ی متناهی بنویسید.

۵: چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند.

$$(\text{توجه : } [5,6] = 30 \text{ و } [4,6] = 12 \text{ و } [4,5] = 20 \text{ و } [5,4,6] = 60)$$

۶: در شهری سه روستا به نام های C و B و A وجود دارد. تعیین کنید که به چند طریق می توان راه هایی بین این سه روستا طراحی کرد که هیچ روستایی تنها نماند. (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد). راهنمایی: روستا ها را رأس گراف و جاده ها را یال فرض کنید. تعداد کل گراف های ساده با سه رأس برابر تعداد اعضای مجموعه S است.

۷: چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A| = 5$ و $|B| = 4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

۸: به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داور کند؟ (راهنمایی: تعیین تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۶ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی)

۹: در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازمی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند.

اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳

نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند، مشخص کنید:

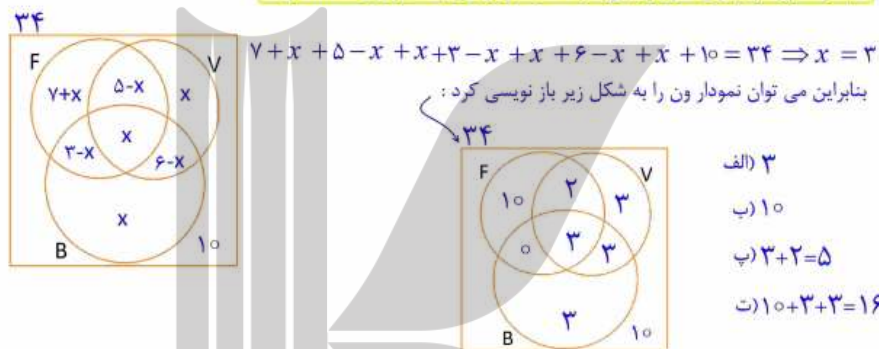
الف: چند نفر هر سه رشته‌ی ورزشی را بازی می کنند؟ (جواب: ۳)

ب: چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟ (جواب: ۱۰)

پ: چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟ (جواب: ۵)

ت: چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟ (جواب: ۱۶)

روش ساده تر: پیشنهاد می شود برای حل این نوع سوالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود:



۱۰: اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر، که سه رقم آن ۷ و ۳ و ۲ هستند را باز کنیم و

تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند، در اختیار داریم و بستن و

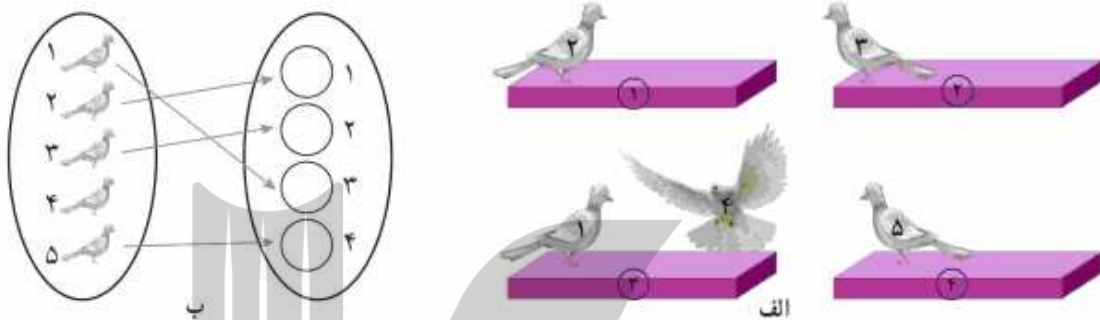
امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، حساب کنید که برای باز کردن این قفل

حداکثر چقدر زمان نیاز داریم. (جواب: ۲۰۳۴۰ ثانیه)

ب: اصل لانه کبوتری (اصل حجره ها)

یکی دیگر از اصول مهم در ریاضیات که در حل بسیاری از مسائل کار برد دارد اصل لانه کبوتری یا اصل دیریکله است. این اصل به صورت زیر است.

اگر m کبوتر و n لانه وجود دارد. در صورتی که تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه ها باشد ($m > n$) و همه‌ی کبوترها درون لانه قرار بگیرند. در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار دارد.



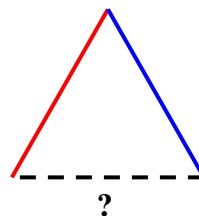
نتیجه: اگر m کبوتر و n لانه وجود دارد. در صورتی که تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه ها باشد ($m > n$) و همه‌ی کبوترها درون لانه قرار بگیرند. در این صورت حداقل یک لانه وجود خواهد داشت که حاوی بیش از یک کبوتر است.

مثال: نشان دهید که اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم‌رنگ خواهند شد.

حل: اگر ضلع‌های مثلث را کبوتر و دو رنگ آبی و قرمز را لانه فرض کنیم. چون $3 > 2$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر، در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت. (دو کبوتر در یک لانه، معادل است با دو ضلع با یک رنگ)

$$\begin{array}{r} 3 \\ - 2 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$1+1=2$



مثال : ۸ نفر در یک میهمانی شرکت کرده اند، ثابت کنید که حداقل ۲ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 7 \overline{) 8} \\ \underline{7} \\ 1 \end{array}$$

$1+1=2$

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر میهمانان را به منزله‌ی کبوتر و روز های هفته را به منزله‌ی لانه در نظر بگیریم و چون $8 > 7$ پس با توجه به تقسیم مقابل و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

مثال : ثابت کنید در بین ۵ عدد طبیعی دلخواه، حداقل دو عدد یافت می شود که در تقسیم بر ۴ هم باقی مانده باشند.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \overline{) 5} \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$$

$1+1=2$

حل: اگر این ۵ عدد طبیعی را به منزله‌ی ۵ کبوتر و اعضای مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم بر ۴ را لانه فرض می کنیم. چون $5 > 4$ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم مقابل واضح است که حداقل دو عدد از این پنج عدد دلخواه دارای باقی مانده‌ی برابر خواهند بود.

توجه: مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر عدد ۴ می شود.

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

مثال : ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه‌ی ۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی مانده‌ی یکسان خواهند بود.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \overline{) 7} \\ \underline{6} \\ 1 \end{array}$$

$1+1=2$

حل: اعضای مجموعه‌ی S را به منزله‌ی کبوتر و اعضای مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم بر ۶ را لانه فرض می کنیم. چون $7 > 6$ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم مقابل واضح است که حداقل دو عضو از مجموعه‌ی S دارای باقی مانده‌ی برابر خواهند بود.

توجه: مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر عدد ۶ می شود.

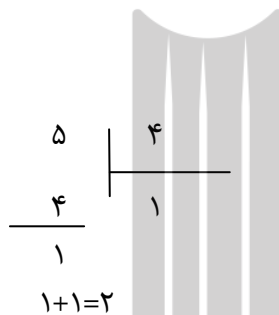
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

نتیجه: از بین $n + 1$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، حداقل دو عدد طبیعی یافت می شوند که تفاضل آنها بر ۲ بخش پذیر است. (یعنی به پیمانه‌ی n هم نهشت هستند). چرا؟

اثبات: اگر این $n + 1$ عدد طبیعی را به منزله‌ی $n + 1$ کبوتر و اعضای مجموعه‌ی باقی مانده‌های تقسیم بر n را لانه فرض می کنیم. چون $n + 1 > n$ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم مقابل واضح است که حداقل دو عدد از میان n عدد دلخواه دارای باقی مانده‌ی برابر خواهند بود.

مثال: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع یک سانتی متر مفروض هستند، ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از

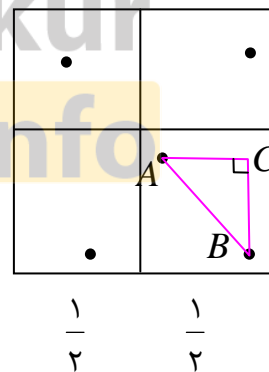
این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



حل: اگر مربع را به چهار مربع به ضلع $\frac{1}{2}$ تقسیم کنیم و این چهار مربع را لانه و ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم، چون $5 > 4$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه در یک مربع کوچک قرار می گیرند. حال طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 + BC^2 \\ AC < \frac{1}{2} \rightarrow AC^2 < \frac{1}{4} \\ BC < \frac{1}{2} \rightarrow BC^2 < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow AC^2 + BC^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow AB^2 < \frac{1}{2} \rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

مثال: پنج نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر بگیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این پنج نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه‌ی وسط این دو نقطه نیز عدد صحیح می باشد.

حل : می دانیم که وقتی مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره خط، صحیح خواهد شد که مجموع طول‌ها و همچنین مجموع عرض‌های نقاط دو سر پاره خط زوج باشد. لذا مختصات دو سر پاره خط باید به یکی از شکل‌های زیر باشند.

حالت اول: (زوج و زوج) و (زوج و زوج) حالت دوم: (فرد و فرد) و (فرد و فرد)

حالت سوم: (فرد و زوج) و (فرد و زوج) حالت چهارم: (زوج و فرد) و (زوج و فرد)

حال اگر هر یک از پنج نقطه را کبوتر و هر یک از این چهار حالت را به عنوان لانه در نظر بگیریم. طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه از این پنج نقطه، طوری است که مختصات نقطه‌ی وسط این دو نقطه، عدد صحیح می‌باشد.

مثال : مجموعه‌ی اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ که به صورت یک دنباله‌ی عددی مرتب شده‌اند، را در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم. نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر ۹۰ باشد.

حل : واضح است که مجموعه‌ی A دارای ۲۲ عضو است و در این مجموعه، به تعداد به ۱۰ زیر مجموعه‌ی دو عضوی وجود دارد که مجموع آن دو عضو ۹۰ می‌باشد.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{5, 85\} & A_4 &= \{17, 73\} & A_6 &= \{25, 65\} & A_8 &= \{33, 57\} \\ A_2 &= \{9, 81\} & A_5 &= \{21, 69\} & A_7 &= \{29, 61\} & A_9 &= \{37, 53\} \\ A_3 &= \{13, 77\} & & & & & A_{10} &= \{41, 49\} \end{aligned}$$

اکنون اگر ۱۳ عضو از این مجموعه را به دلخواه انتخاب کنیم. مثلاً:

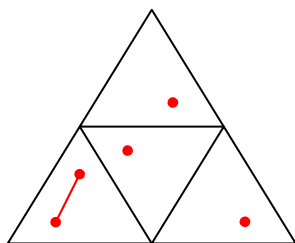
$$B = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49\}$$

می‌بینیم که حداقل دو عضو در مجموعه‌ی B وجود دارد که مجموع آنها ۹۰ است. این موضوع را بدین شکل ثابت می‌کنیم.

هر یک زیر مجموعه‌های دو عضوی را به عنوان ۱۰ لانه و ۱۳ عضو انتخابی (مثلاً) را کبوتر فرض می‌کنیم. لذا طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل، حداقل در یکی از لانه‌ها ۲ کبوتر قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیر مجموعه ۱۳ عضوی هستند که مجموع آنها برابر ۹۰ است.

مثال: پنج نقطه را از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است.

حل: کافی است ابتدا مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم



$$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 1 \\ 1+1=2 \end{array}$$

بندی کنیم. حال اگر نقاط را کبوتر و مثلث های

کوچک را لانه فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری

و با توجه به تقسیم مقابل معلوم می شود که دست

کم دو نقطه از این ۵ نقطه در یک مثلث کوچک

قرار می گیرند و فاصله‌ی این دو نقطه کمتر از ۱ خواهد شد.

مثال: نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه‌ی $p \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

$$\begin{array}{r} p \\ p-1 \\ \hline 1 \\ 1+1=2 \end{array}$$

حل: اگر مجموعه‌ی رأس‌ها را کبوتر و مجموعه‌ی یالها را لانه فرض کنیم. چون

گراف ساده است، (در صورتی که گراف رأس منفرد نداشته باشد) پس از هر رأس

حداکثر $p-1$ یال می‌گذرد. از طرفی چون $p > p-1$ ، پس طبق اصل لانه

کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل واضح است که حداقل از دو رأس یالهای برابر

می‌گذرد، یعنی درجه‌ی یکسان دارند.

توجه: اگر گراف دارای یک رأس منفرد باشد. تعداد کبوترها $p-1$ و تعداد یالها $p-2$ خواهد شد و

مسئله به همان شکل اثبات می‌گردد. به همین ترتیب برای ۲ رأس منفرد یا بیشتر می‌توان استدلال کرد.

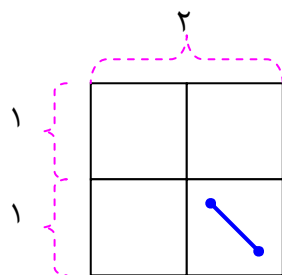
تمرین برای حل:

۱۱: ثابت کنید که اگر ۱۰ نقطه‌ی دلخواه از داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را اختیار

کنیم. حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها کمتر از یک باشد.

۱۲: نشان دهید، در یک خانواده‌ی حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۱۳: ثابت کنید که در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. (راهنمایی: از باقی مانده‌ی تقسیم بر ۲ استفاده کنید.)



۱۴: با توجه به شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

۱۵: نشان دهید در هر کلاس با n دانش آموز ($n \geq 2$) حداقل ۲ دانش آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است. (راهنمایی: هر یک از دانش آموزان را یک رأس گراف و رابطه‌ی دوستی بین هر دو دانش آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان فرض کنید.)

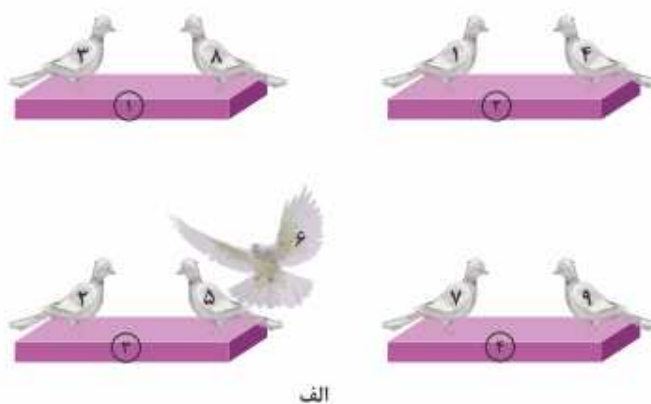
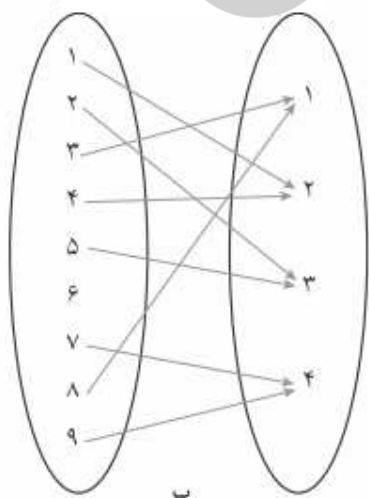
۱۶: حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است؟

تعمیم اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

$$\begin{array}{l|l} m & n \\ \hline nk & k \\ \hline 1 & \end{array}$$

هرگاه $m = kn + 1$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند. در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k + 1$ کبوتر در آن قرار گرفته است.



مثال: از ۱۸ نفر دانش آموز یک کلاس ثابت کنید که حداقل ۳ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده‌اند.

$$\begin{array}{r} 18 \quad | \quad 7 \\ \hline 14 \quad | \quad 2 \\ \hline 4 \\ 2+1=3 \end{array}$$

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر دانش آموزان را به منزله‌ی کبوتر و روز های هفته را به منزله‌ی لانه در نظر بگیریم و چون $18 > 7$ پس با توجه به تقسیم مقابل و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

مثال: از ۴۰۰ دانش آموز یک مدرسه، حداقل چند نفر در یک ماه سال متولد شده اند؟ چرا؟

$$\begin{array}{r} 400 \quad | \quad 12 \\ \hline 396 \quad | \quad 33 \\ \hline 4 \end{array}$$

حل: می دانیم که هر سال ۱۲ ماه است، اگر دانش آموزان را به منزله‌ی کبوتر و ماه های سال را به منزله‌ی لانه در نظر بگیریم و چون $400 > 12$ پس با توجه به تقسیم مقابل و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳۴ نفر در یک ماه سال متولد شده اند.

$$33+1=34$$

مثال: نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که دارای ۶ عضو باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.

$$\begin{array}{r} 6 \quad | \quad 4 \\ \hline 4 \quad | \quad 1 \\ \hline 2 \\ 1+1=2 \end{array}$$

حل: هر یک از مجموعه های $\{1, 9\}$ و $\{2, 8\}$ و $\{3, 7\}$ و $\{4, 6\}$ (مجموع هر دو عضو آنها برابر ۱۰ است) را به منزله‌ی لانه و هر یک از اعضاء زیر مجموعه های ۶ عضوی را کبوتر فرض می کنیم. چون $6 > 4$ پس طبق اصل لانه کبوتری و مطابق تقسیم مقابل حداقل ۲ عضو از مجموعه‌ی ۶ عضوی مجموع هر دوی آنها برابر ۱۰ است.

مثال: مجموعه‌ی اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر بگیرید و نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ باشد.

حل: اعداد مجموعه‌ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می کنیم. (زیر مجموعه های دو عضوی که مجموع اعضای هر یک ۸۵ باشد).

$$\{42, 43\} \text{ و } \dots \text{ و } \{3, 82\} \text{ و } \{2, 83\} \text{ و } \{1, 84\}$$

اکنون اگر یک زیر مجموعه‌ی ۴۳ عضوی از مجموعه‌ی A را انتخاب کنیم. می بینیم که حداقل دو عضو آن مجموع آنها ۸۵ می شود. برای اثبات این موضوع به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\begin{array}{r} 43 \\ 42 \overline{) 42} \\ \underline{42} \\ 2 \\ 1+1=2 \end{array}$$

هر یک از ۴۳ عضو انتخابی را کیبوتر و هر یک از این قفس ها را به عنوان لانه در نظر می گیریم. با توجه به اصل لانه کیبوتری و با در نظر گرفتن تقسیم مقابل می توان گفت که حداقل دو کیبوتر در یک لانه قرار می گیرند، یعنی حداقل دو عدد در زیر مجموعه‌ی انتخاب شده، مجموع آنها ۸۵ است.

مثال: در یک کلاس حداقل ۶ نفر در یک روز هفته متولد شده اند، کمترین تعداد دانش آموزان این کلاس را تعیین کنید.

$$\begin{array}{r} x \\ 35 \overline{) 7} \\ \underline{35} \\ 1 \\ 6-1=5 \\ x = (7 \times 5) + 1 = 36 \end{array}$$

حل: هر یک از دانش آموزان را کیبوتر و هر یک از روز های هفته را لانه فرض می کنیم. با توجه به اصل لانه کیبوتری و با توجه به تقسیم مقابل حداقل تعداد دانش آموزان این کلاس ۳۶ نفر است.

مثال: در یک دبیرستان، حداقل باید چند دانش آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته‌ی تولدشان یکی است؟

$$\begin{array}{r} x \\ 756 \overline{) 84} \\ \underline{756} \\ 1 \\ 10-1=9 \\ x = (84 \times 9) + 1 = 757 \end{array}$$

حل: هر یک از دانش آموزان را کیبوتر و هر یک از ماه و روز های هفته‌ی سال را لانه ($12 \times 7 = 84$) فرض می کنیم. با توجه به اصل لانه کیبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل تعداد دانش آموزان این دبیرستان باید ۷۵۷ نفر باشد.

مثال: ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$\begin{array}{r} 54 \\ 4 \overline{) x} \\ \underline{4} \\ 1 \\ 5-1=4 \end{array}$$

حل: هر یک از شاخه گل ها را کیبوتر و هر یک از گلدان ها را لانه فرض می کنیم. با توجه به اصل لانه کیبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداکثر تعداد گلدان ها ۱۳ می باشد.

$$5 - 1 = 4$$

$$54 = 4x + 1 \rightarrow 4x = 53 \rightarrow x = \left[\frac{53}{4} \right] = 13$$

مثال : به تعداد ۵۰ ورزشکار مرد در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار، هم رشته و هم شهری هستند.

حل: روش اول:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 3 \\ \hline 48 & 16 \\ \hline 2 & 16 + 1 = 17 \end{array}$$

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته های ورزشی را لانه فرض می کنیم. چون $(50 > 3)$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۱۷ نفر هم رشته هستند.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 4 \\ \hline 16 & 4 \\ \hline 1 & 4 + 1 = 5 \end{array}$$

حال هر یک از ۱۷ ورزشکار هم رشته را کبوتر و هر یک از شهر ها را لانه فرض می کنیم. چون $(17 > 4)$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل حداقل ۵ نفر از ورزشکاران هم رشته، هم شهری هستند.

روش دوم:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 12 \\ \hline 48 & 4 \\ \hline 2 & 4 + 1 = 5 \end{array}$$

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته - شهر های موجود $(12 = 3 \times 4)$ را لانه فرض می کنیم. چون $(50 > 12)$ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

مثال : حداقل چند نفر باید در یک سالن همایش حضور داشته باشند، تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو

حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟ (فامیلی هایی مثل احمدیان و احترامی نباشند).

$$\begin{array}{r|l} x & 992 \\ \hline 1984 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

حل : تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می باشد. پس برای حرف اول ۳۲ و برای حرف دوم ۳۱ حالت داریم. طبق اصل ضرب $n = 32 \times 31 = 992$ حالت وجود دارد.

$$3 - 1 = 2$$

$$x = (2 \times 992) + 1 = 1985$$

حال اگر هر یک از افراد را کبوتر و هر یک از حالت ها را لانه فرض کنیم. با وجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل حداقل تعداد افراد برای حضور در همایش برابر ۱۹۸۵ نفر خواهد بود.

مثال : در یک دبیرستان با ۲۵۵ دانش آموز، ثابت کنید حداقل ۴ نفر، هفته و ماه تولد یکسان دارند.

حل: هر یک از دانش آموزان را کیبوتر و هر یک از هفته - ماه ها

۲۵۵	۸۴
۲۵۲	۳
۳	۳+۱=۴

چون $(255 > 84)$ پس طبق اصل لانه کیبوتری و با توجه به تقسیم مقابل، حداقل ۴ نفر هفته - ماه تولد آنها یکسان است.

تذکر:

۱: اگر m تعداد کیبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m > n$ با توجه به اصل لانه کیبوتری می توان گفت که

دست کم یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1$ کیبوتر قرار می گیرد.

۲: اگر m تعداد کیبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m > n$ آنگاه حداقل در یک لانه بیش از $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ کیبوتر

قرار می گیرد.

تمرین برای حل :

۱۷: پنج نقطه داخل مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۲ قرار دارند. ثابت کنید دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از یک است.

۱۸: ده نقطه داخل یک مربع به ضلع ۳ قرار دارند، ثابت کنید که دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از $\sqrt{2}$ است.

۱۹: هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می کنیم. ثابت کنید که حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از $2\sqrt{2}$ متر را دارند.

۲۰: ثابت کنید که در بین ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.

۲۱: ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه ی ۹ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۴ تقسیم کنیم، دست کم سه عضو از این مجموعه دارای باقی مانده ی یکسان خواهند بود.

۲۲: در یک آزمون ریاضی ۱۰۲۵ نفر شرکت کرده اند. آیا حداقل دو شرکت کننده یافت می شود که حرف

اول نام و حرف اول نام خانوادگی آن ها به زبان فارسی یکسان باشد؟ چرا؟

۳ - نماد $[x]$ همان جزء صحیح x است.

۲۳: ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۴: حساب کنید که، حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی تماشای مسابقه‌ی کُستی باشند تا مطمئن باشیم، حداقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۲۵: ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید که حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.



بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
info

<https://konkur.info>