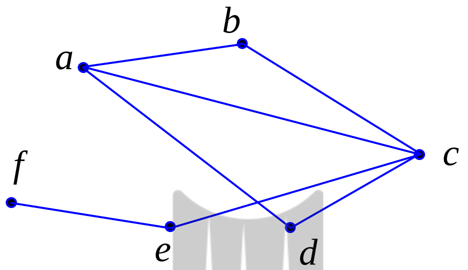
درس اوّل : معرفی گراف

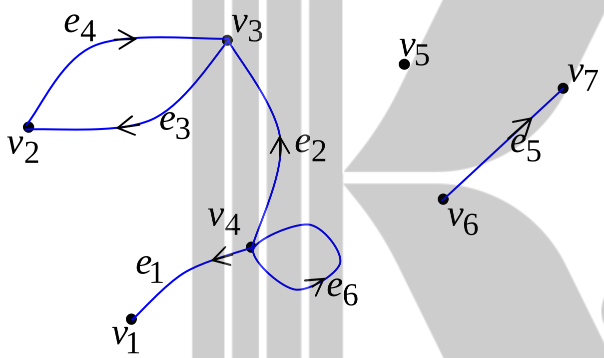
مقدمه :

قبل از ورود به نظریه‌ی گراف و ارائه‌ی تعاریف و مفاهیم مربوط به آن، دو مثال زیر را به عنوان مقدمه ارائه می کنیم.

مثال ۱) سازمانی برای انجام تبادل اطلاعات داخلی بین کارشناسی های زیر مجموعه‌ی آن، مطابق شکل مقابل یک شبکه‌ی کامپیوتری تشکیل داده است.



مثال۲) شکل مقابل نمودار مربوط به مسابقات داخلی و بین تیمی صورت گرفته بین چند تیم ورزشی را نشان می دهد.



نمودار های فوق دو نمونه از گراف ها را نشان می دهند. در مورد اوّل گراف غیر جهت دار ولی در مورد دوّم گراف جهت دار است. در هر گراف هر نقطه را رأس (گره) و هر پاره خط یا منحنی که دو رأس را به هم متصل می کند را یال می نامند. همانطور که از نمودار های فوق پیدا است، ممکن است دو یال یکدیگر را در یک نقطه که رأس نباشد، قطع کنند. توجه داشته باشید که مجموعه‌ی رأس ها و مجموعه‌ی یال ها گراف را تشکیل می دهند و هر گراف را می توان با یک نمودار موسوم به نمودار گراف نمایش داد.

تذکر :

۱ : هر یال می تواند به صورت خط راست یا منحنی باشد که از یک رأس به رأس دیگر و در گراف جهت دار از یک رأس به خود آن رأس وصل شود. یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل می کند، حلقه یا طوقه نامیده می شود.

۲ : دو رأس که بوسیله‌ی یک یال به هم متصل شده باشند را دو رأس مجاور می گویند.

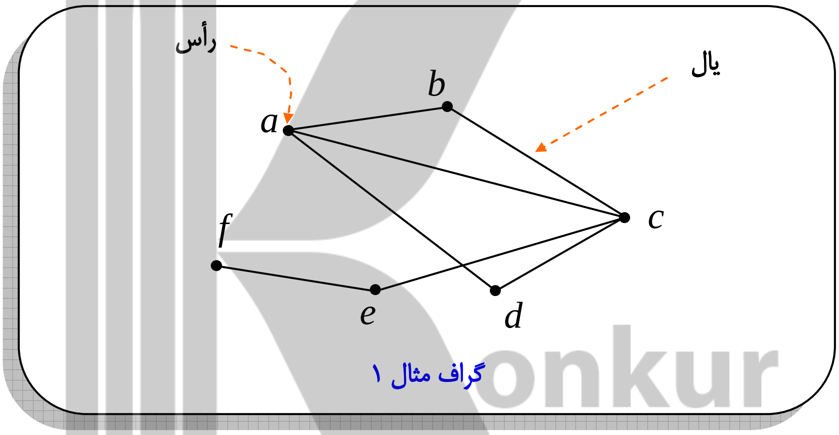
۳ : هر رأس را با یک حرف کوچک لاتین مانند (... و c و b و a) یا (... و v_3 و v_2 و v_1) و هر یال را با دو رأس آن یعنی (... و ac و bc و ab) یا (... و e_3 و e_2 و e_1) نامگذاری می کنند.

۴ : در گراف جهت دار دو یال که ابتدا و انتهای یکسان داشته باشند، را یال های موازی گویند.

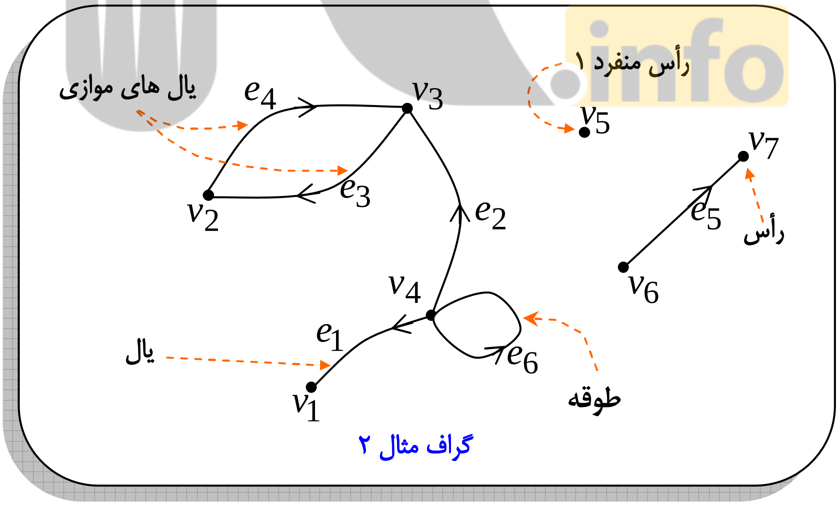
۵ : بدیهی است که گراف غیر جهت دار نمی تواند طوقه یا یال های موازی داشته باشد.

۶ : در هر گراف رأسی که شامل هیچ یالی نباشد را رأس منفرد می نامند.

۷ : ممکن است گراف هیچ یال نداشته باشد. چنین گرافی را گراف تهی می نامند.گرافی که حداقل یک یـال داشته باشد را گراف غیر تهی گویند.



گراف مثال ۱

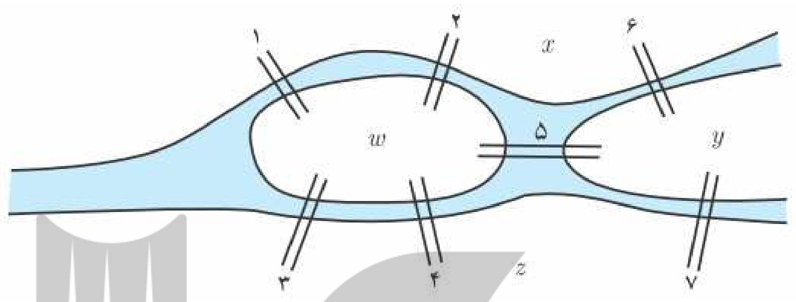


گراف مثال ۲

در ادامه یک مسئله‌ی تاریخی که منجر به ابداع گراف شد را بیان می کنیم.

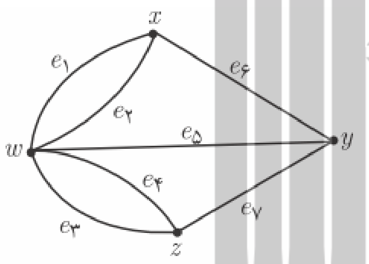
یک مسئله‌ی تاریخی

در اوایل قرن هیجدهم میلادی ، معمایی برخی از اهالی کونیکسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را بـه خـود مشغول کرده بود. رودخانه‌ی این شهر که از میان شهر عبور می کند، مانند آنچه که در شکل زیر مـی بینیـد، شهر را به چند قسمت تقسیم می کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یک بار عبور از هرکدام از پل ها، به نقطه‌ی شروع حرکت برگشت؟



لئونارد اویلر (۱۷۸۳– ۱۷۰۷) ، ریاضی دان برجسته سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه آن را « گراف» می گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان پذیر نیست.

او چهار ناحیه‌ی x و y و z و w را با چهار نقطه نمـایش داد و بـه ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد، نقاط متناظر با آن ناحیه ها را به وصـل کرد. شکل مقابل نمایش گراف حاصل از مدل سازی این مسئله است.



تعریف گراف

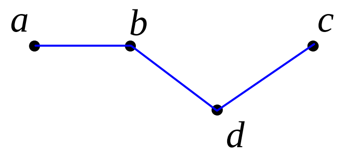
تاکنون گراف را ساختاری شامل مجموعه ای از رأس ها و مجموعه ای از یالها معرفی کرده ایم و متوجه شده ایم که برخی از گراف ها جهت دار و برخی غیر جهت دار می باشند. در اینجا به منظور دقت در تعریف، گراف های جهت دار و گرا ف های غیر جهت دار را جداگانه معرفی می کنیم.

گراف غیر جهت دار

یک مجموعه‌ی متناهی و ناتهی از رأس ها و یک مجموعه از یال ها بطوری که یالها رأس های مجزا را بـه هم متصل کنند، ساختاری را به وجود می آورند که به آن یک گراف غیر جهت دار می گویند. به عبارت دیگر $G=(V,E)$ ساختاری مرکب از یک مجموعه‌ی متنـاهی و نـاتهیماننـد V و مجموعـه ای شـامل زیـر

مجموعه های دو عضوی از عناصر V مانند E می باشد. عناصر V را رئوس و اعضای E را یال های گراف می نامند.

مثال : اگر $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{\{a,b\},\{c,d\},\{b,d\}\}$ آنگاه $G=(V,E)$ گرافی است که چهار رأس و سه یال دارد. این گراف دارای نمودار به شکل زیر است.



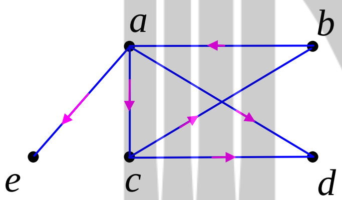
اگر b و a دو رأس از یک گراف غیر جهت دار باشند.یالی که این دو رأس را به هم متصل می کند را به صورت $\{a,b\}$ یا به اختصار ab و گاهی e_i نامگذاری می کنند.

گراف جهت دار

گراف جهت دار $G=(V,E)$ ساختاری است مرکب از یک مجموعه‌ی متناهی و ناتهی V و مجموعه ای شامل زوج های مرتبی از اعضای V مانند E می باشد.

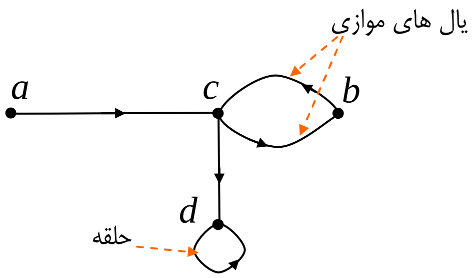
در گراف جهت دار یالها به صورت پاره خط جهت دار یا پیکان می باشند.

مثال : اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{(a,d),(a,c),(a,e),(b,a),(c,d),(c,b)\}$ آنگاه $G=(V,E)$ گرافی است که پنج رأس و شش یال دارد. این گراف دارای نمودار به شکل زیر است.



در یک گراف جهت دار دو یال مجزا با مجموعه‌ی یکسان از نقاط پایانی را موازی می نامند.

در یک گراف جهت دار، یالی که یک رأس را به خود آن رأس وصل کند (ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند) را حلقه یا طوقه می نامند.



معرفی چند مفهوم

۱ : دو رأس که بوسیله‌ی یک یال به هم متصل شده باشند را دو رأس مجاور (همسایه) می گویند.

۲ : رأسی که شامل هیچ یالی نباشد را رأس منفرد[1] (رأس تنها) می گویند.

۳ : ممکن است گراف شامل هیچ یالی نباشد.چنین گرافی را گراف تهی می نامند و گرافی که حداقل یک یال داشته باشد را گراف غیر تهی می گویند.

۴ : در گراف جهت دار دو یال که ابتدا و انتهای یکسان داشته باشند را یالهای موازی گویند.

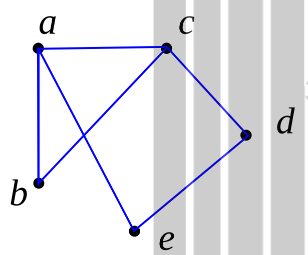
۵ : بنابر تعریف گراف غیر جهت دار، چنین گراف هایی نمی توانند، حلقه یا یالهای موازی داشته باشند.

۶ : مجموعه‌ی رأس های گراف G را با $V(G)$ یا به اختصار V و همچنین مجموعه‌ی یال های گراف G را با $E(G)$ یا به اختصار E نمایش می دهیم.

مثال : اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bc,cd,de\}$ در این صورت:

الف: نمودار گراف را رسم کنید.

ب: رأس های مجاور رأس a را مشخص کنید.



حل:

رأس های مجاور a عبارتند از: e و c و b

توجه : نحوه‌ی چینش رئوس در گراف مهم نیست و لذا برای یک گراف می توان شکل های مختلفی برای نمودار آن رسم کرد. مهم این است که در نمایش این نمودار ها مجموعه‌ی رأس ها و مجموعه‌ی یال ها و نحوه‌ی اتصال رأس ها درست باشد.

تمرین ۱ : در موارد زیر، دو مجموعه از رأس ها و یال ها داده شده است. در هر مورد نموداری برای گراف رسم کنید.

الف) $V=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_6\}$ و $E=\{v_1v_4,v_2v_5,v_6v_1,v_5v_1\}$

ب) $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{(a,b),(b,c),(c,b),(c,d),(d,a)\}$

***

[1]. رأس منفرد را رأس منزوی یا ایزوله نیز می نامند.

تمرین برای حل :

۲ : برای هر یک از حالت های زیر و در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید. طوری که :

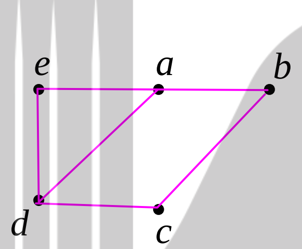
الف : رأس منفرد نداشته باشد. ب : یک رأس منفرد داشته باشد.

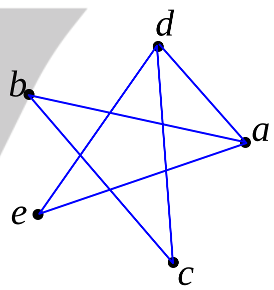
پ : دو رأس مفرد داشته باشد. ت : سه رأس منفرد داشته باشد.

❋❋❋

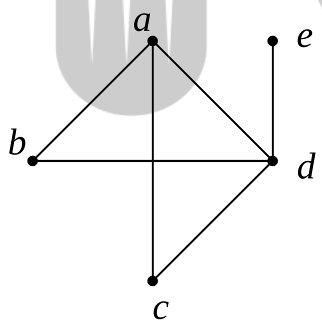
گراف های مساوی

دو گراف $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ را مساوی گویند، هرگاه $V_1 = V_2$ و $E_1 = E_2$ مانند دو گراف زیر

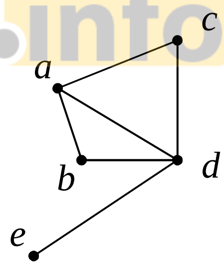




تمرین۳ : مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال های هر یک از گراف ها زیر را بنویسید. چه نتیجـه ای مـی گیرد؟



(G_1)

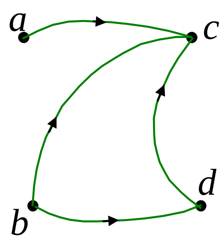


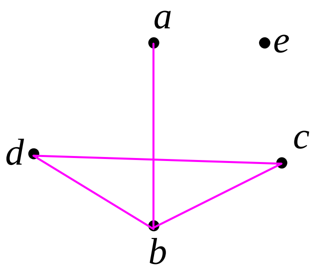
(G_2)

❋❋❋

گراف ساده

گراف ساده گرافی (جهت دار یا غیر جهت دار) است که هیچ حلقه یا یالهای موازی نداشته باشد.

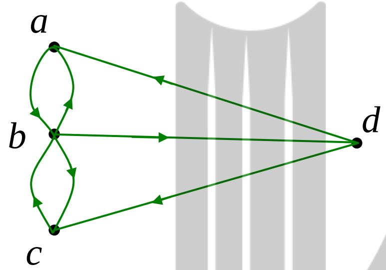




نتیجه : تمام گراف های غیر جهت دار ساده هستند.

***

گراف چندگانه



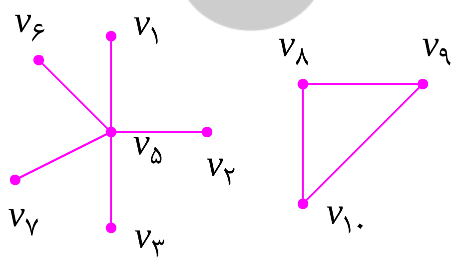
اگر گراف جهت دار شامل یالهای موازی یا شامل حلقه باشد، بـه آن گراف چندگانه می گویند.

نتیجه : هر گراف که ساده نباشد، چندگانه است.

قرار داد : از اینجا به بعد هر جا کلمه‌ی گراف آورده شود. منظور گراف ساده اسـت، مگـر اینکـه خـلاف آن گفته شود.

***

گراف چندبخشی



اگـر دو زیـر مجموعـه‌ی مجـزا V_1 و V_2 از مجموعـه‌ی رئوس V از گراف G طوری باشند که هر رأس V_1 مجاور هیچ از V_2 نباشد.آنگاه گراف را دو بخشی می نامنـد. هـر گراف که شامل حداقل دو بخش مجزا باشد را گراف چنـد بخشی می گویند. در گراف های چند بخشی هیچ یالی بخش های مجزا را به هم متصل نمی کند.

تمرین۴ : گرافی شامل۶ رأس و ۵ یال می باشد.

الف : نمودار این گراف را طوری رسم کنید که چند بخشی نباشد.

ب : نمودار این گراف را طوری رسم کنید که چند بخشی باشد.

نحوه‌ی تعیین تعداد گراف های ساده

در ابتدا چند تذکر جهت ورود به بحث مطرح می گردد.

تذکر ۱ : بدیهی است که با n نقطه‌ی متمایز غیر واقع بر یک خط راست حداکثر $\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$ پاره خط می توان رسم کرد.

مثال : با ۵ نقطه‌ی متمایز غیر واقع بر یک راستا چند پاره خط می توان ایجاد کرد.

حل:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵(۵-۱)}{۲}=۱۰$$

تذکر ۲ : بدیهی است که هر مجموعه ی n عضوی دارای حداکثر $\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$ زیر مجموعه‌ی دو عضوی است.

مثال : تعداد کل زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه‌ی $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ را بدست آورید.

حل:

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶(۶-۱)}{۲}=۱۵$$

مثال : یک گراف غیر جهت دار با ۷ رأس حداکثر چند یال می تواند داشته باشد.

حل:

$$\binom{۷}{۲}=\frac{۷(۷-۱)}{۲}=۲۱$$

نکته : تعداد گراف های ساده که با n رأس می توان تشکیل داد برابر $۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ می باشد.

اثبات : اگر مجموعه‌ی V دارای n عضو باشد، پس دارای n رأس می باشد.حال چون مجموعه‌ی یالها متشکل از زیر مجموعه های دو عضوی از اعضای متمایز V است. در نتیجه حداکثر تعداد یالها با تعداد زیر مجموعه های دو عضوی V یعنی $\frac{n(n-۱)}{۲}=\binom{n}{۲}$ برابر است. از طرفی در گراف های مختلف با n

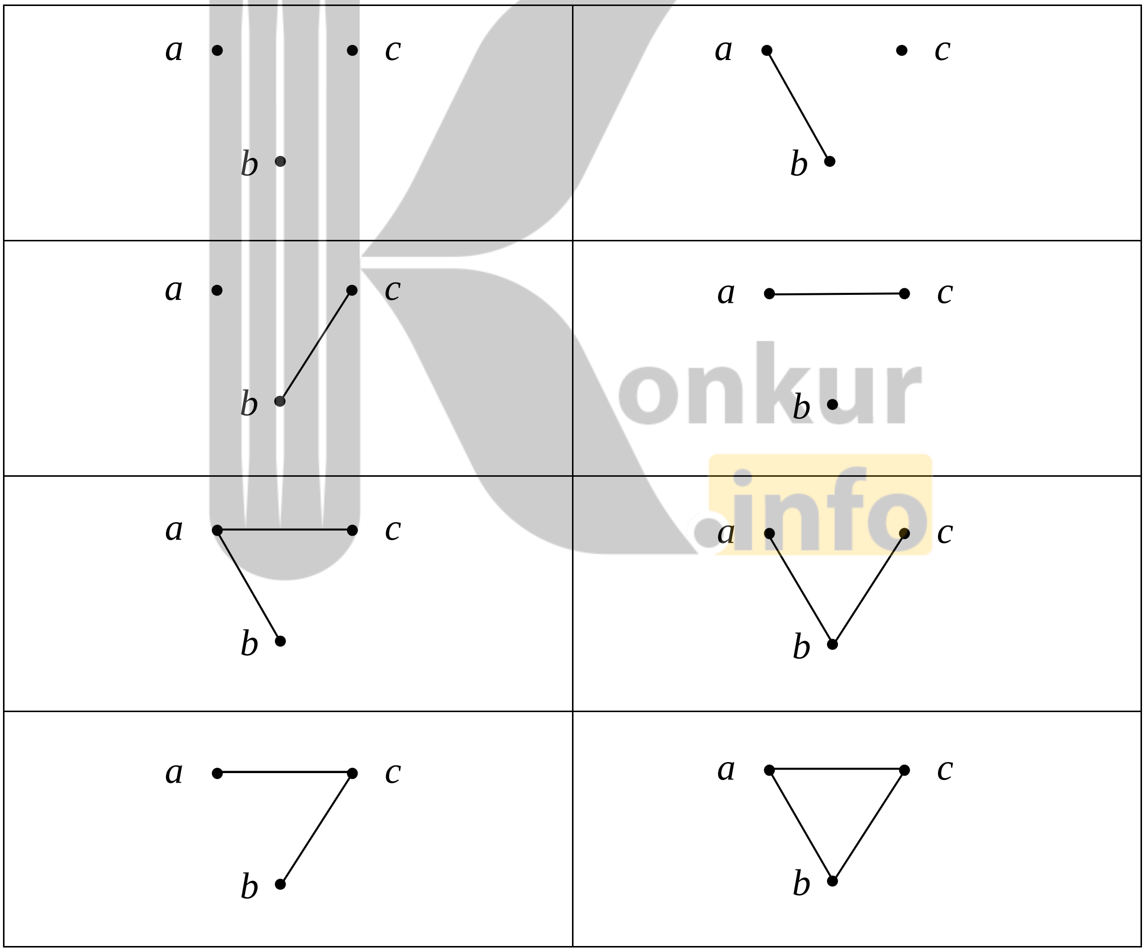
رأس ممکن است صفر یا یک یا دو یا سه و ... و یا $\binom{n}{2}$ یال داشته باشیم. بنابراین تعداد گراف های مختلف

با n رأس با تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $\binom{n}{2}$ عضوی یعنی با $2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$ برابر است.

مثال : اگر $V=\{a,b,c\}$. تعداد کل گراف های ساده که با رأس های مجموعه‌ی V تشکیل می شـوند، را بدست آورید و سپس آنها را رسم کنید.

حل:

$$\text{تعداد گراف های ساده} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{3(3-1)}{2}} = 2^3 = 8$$



مثال : اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$. تعداد گراف های ساده را بدست آورید که اعضای مجموعـه‌ی V رأس های آنها باشند.

حل:

تعداد گراف های ساده $= ۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}} = ۲^{\frac{۵(۵-۱)}{۲}} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

مثال : با توجه به تمرین فوق، بیشترین تعداد یال های ممکن گراف ساده را بیابید.

حل:

بیشترین تعداد یال های گراف ساده با ۵ رأس $= \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۵(۵-۱)}{۲} = ۱۰$

مثال : اگر $V = \{a,b,c,d,e\}$. حساب کنید که چند گراف ساده‌ی مختلف با سه رأس می تـوان رسـم کرد که رئوس آن از مجموعه‌ی V انتخاب شده باشند.

۱) ۸ ۲) ۳۲ ۳) ۸۰ ۴) ۶۴

حل:

تعداد زیر مجموعه های سه عضوی $\binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۳!\times ۲!} = ۱۰$

تعداد گراف های ساده با ۳ رأس $= ۲^{\frac{n(n-۱)}{۲}} = ۲^{\frac{۳(۳-۱)}{۲}} = ۲^{۳} = ۸$

لذا طبق اصل ضرب تعداد کل گراف های مطلوب برابر $۸۰ = ۸\times ۱۰$ می شود.

نتیجه : اگر مجموعه‌ی V دارای n عضو باشد.در این صورت تعداد گراف هـای سـاده کـه بـا r رأس از n رأس مجموعه‌ی V، تشکیل می شوند. برابراست با

تعداد گراف های ساده که با r رأس از n ایجاد می شوند. $= \binom{n}{r}\times ۲^{\frac{r(r-۱)}{۲}}$

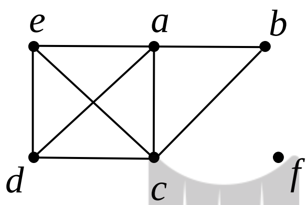
***

مرتبه و اندازه‌ی گراف

اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد، تعداد رئوس G (تعداد اعضای V) را مرتبه‌ی G می نامند و آنرا با $p(G)$ یا به اختصار p نمایش می دهند. واضح است که در هر گراف باید $p\in N$ باشد.

اگر $G=(V,E)$ یک گراف باشد، تعداد یالهای G (تعداد اعضای E) را اندازه‌ی G می نامند و آنرا با $q(G)$ یا به اختصار q نمایش می دهند. واضح است که در هر گراف باید $q\in W$ باشد.

برای مثال مرتبه‌ی گراف زیر ۶ و اندازه‌ی آن ۸ می باشد.



نکته : در هر گراف ساده مانند G اگر p مرتبه و q اندازه‌ی آن باشند[2]، همواره داریم:

$$0\le q\le \binom{p}{2}$$

مثال : اگر اندازه‌ی یک گراف ساده برابر ۴۳ باشد، حساب کنید این گراف حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

حل:

$$0\le q\le \binom{p}{2}\to 0\le 43\le \frac{p(p-1)}{2}\to 86\le p(p-1)\to p=10$$

توجه کنید که این جواب با توجه به گزینه ها بدست آمد ولی می توان با حل نامعادله‌ی درجه‌ی دوّم به کمک تعیین علامت نیز آنرا حل کرد.

مثال : اگر G گرافی ساده و غیر تهی باشد که تعداد یالهای آن دو برابر تعداد رأس هایش می باشد. حساب کنید که G حداقل چند رأس دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

---

2 – در گراف چندگانه داریم : $0\le q\le 2\binom{p}{2}+p$

حل:

$$0 \le q \le \binom{p}{2} \to 0 \le 2p \le \binom{p}{2}$$

$$\to 2p \le \frac{p(p-1)}{2} \to 4p \le p(p-1) \xrightarrow{p>0} 4 \le p-1 \to p \ge 5$$

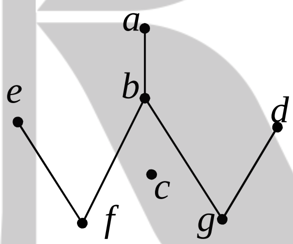
***

درجه‌ی رأس

تعداد یالهایی که از هر رأس می گذرند، را درجه‌ی آن رأس می نامند. درجه‌ی رأس v در گراف G را به صورت $\deg(v)$ یا به اختصار $d(v)$ نمایش می دهند. واضح است که برای هر رأس v داریم: $\deg(v) \in W$

نتیجه : طبق تعریف بدیهی است که درجه‌ی هر رأس منفرد برابر صفر است.

مثال : در گراف زیر درجات رئوس را تعیین و سپس به صورت یک دنباله‌ی غیر صعودی بنویسید.



حل :

$\deg(a)=1$ و $\deg(b)=3$ و $\deg(c)=0$ و $\deg(d)=1$ و $\deg(e)=1$ و

$\deg(f)=2$ و $\deg(g)=2$

۰ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ دنباله‌ی درجات رئوس

تذکر:

۱ : در یک گراف جهت دار اگر یک یال به صورت حلقه باشد، درجه‌ی رأس متناظر آن دو بار شمارش می شود.

۲ : در یک گراف ساده از مرتبه‌ی p درجه‌ی هر رأس، حداکثر $p-1$ است.

مثال : آیا گرافی وجود دارد که دنباله‌ی درجات رئوس آن ۰ و۱ و۲ و ۴ و ۵ باشد؟ چرا؟

حل : خیر، زیرا در این صورت درجه‌ی یک رأس برابر مرتبه‌ی گراف می شود، در حالی که درجه‌ی هر رأس باید حداکثر $p-۱$ باشد.

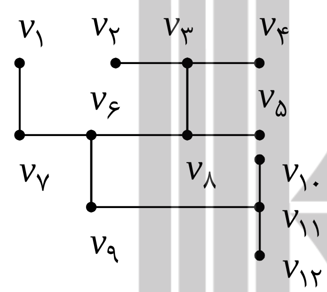
***

درجه‌ی گراف

درجه‌ی یک گراف را با مجموع درجه‌ی همه‌ی رأس های آن تعریف می کنند و آن را با $D(G)$ یا به اختصار D نمایش می دهند.

$$D=\deg(v_1)+\deg(v_2)+\deg(v_3)+\ldots+\deg(v_p)=\sum_{i=۱}^{p}\deg(v_i)$$

مثال : درجه‌ی کل گراف زیر را تعیین کنید.



حل : کافی است مجموع درجات رئوس را تعیین و با هم جمع کنیم. در این صورت با توجه به ترتیب نام رئوس داریم:

$$D=۱+۱+۳+۱+۱+۳+۲+۳+۲+۱+۳+۱=۲۲$$

***

رأس فرد – رأس زوج

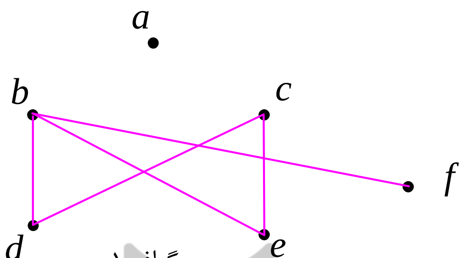
در یک گراف یک رأس را فرد می نامند، هرگاه درجه‌ی آن فرد باشد. همچنین یک رأس را زوج می نامند، هرگاه درجه‌ی آن زوج باشد.

مثال : گراف های زیر را در نظر گرفته و سپس

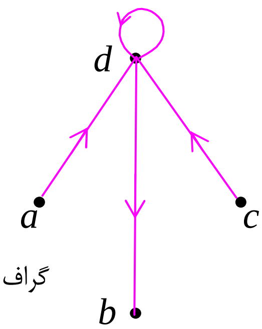
الف) درجه‌ی هر رأس و درجه‌ی کل گراف را بدست آورید.   ب) رأس های زوج و فرد را مشخص کنید.

ج) درجه‌ی رأس ها را به صورت دنباله‌ی غیر صعودی بنویسید.

د) درجه‌ی کل گراف را با تعداد یالهای آن مقایسه کنید.



گراف ۱



گراف ۲

حل:

گراف ۱ : درجات رأس ها

$\deg(a)=۰$ و $\deg(b)=۳$ و $\deg(c)=۲$ و $\deg(d)=۲$ و $\deg(e)=۲$ و $\deg(f)=۱$

مرتبه‌ی گراف $p=۶$ اندازه‌ی گراف $q=۵$

درجه‌ی کل گراف $D=۰+۳+۲+۲+۲+۱=۱۰$

رئوس فرد : b و f رئوس زوج : a و c و d و e

دنباله‌ی غیر صعودی درجات : ۳و۲و۲و۲و۱و۰

گراف ۲ : درجات رأس ها

$\deg(a)=۱$ و $\deg(b)=۱$ و $\deg(c)=۱$ و $\deg(d)=۵$

مرتبه‌ی گراف $p=۴$ اندازه‌ی گراف $q=۴$

درجه‌ی کل گراف $D=۱+۱+۱+۵=۸$

رئوس فرد : a و b و c و d

گراف رأس زوج ندارد.

دنباله‌ی غیر صعودی درجات : ۵و۱و۱و۱

در هر دو گراف می توان گفت که درجه‌ی کل گراف دو برابر تعداد یالهای آن است.

نکته : در هر گراف درجه‌ی کل گراف (مجموع درجات رئوس) دو برابر اندازه‌ی گراف(تعداد یالها) است.یعنی:

$$D = ۲q$$

اثبات: فرض کنیم $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_p\}$ مجموعه‌ی رئوس گراف G با اندازه‌ی q باشد. چون هر یال دقیقاً از دو رأس آن می گذرد، لذا در محاسبه‌ی مجموع درجات رئوس، هر یال دو بار شـمرده مـی شـود. در نتیجه:

$$D = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) + ... + \deg(v_p) = \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = ۲q$$

نتیجه ۱: درجه‌ی کل گراف یعنی D همیشه زوج است.

نتیجه۲ : تعداد رأس های فرد هر گراف، زوج است.

اثبات: اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجمـوع درجـات رئـوس زوج را بـا B نشان دهیم، خواهیم داشت.

$$D = \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = A + B$$

بنابر نتیجه‌ی۱ مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است.از طرفی عدد B نیز زوج اسـت(چـون از مجمـوع تعدادی عدد زوج بدست می آید.) در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چـون A مجمـوع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.

مثال : آیا گرافی وجود دارد که دنباله‌ی درجات رئوس آن ۰ و۱ و۱ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵ باشد؟ چرا؟

حل : خیر، زیرا این گراف ۵ رأس درجه‌ی فرد دارد، در حالی که تعداد رئوس درجه‌ی فرد باید زوج باشد.

مثال : در یک گراف با ۳۵ رأس که درجه‌ی هر رأس آن حداکثر ۵ باشد، بیشترین تعداد یال کدام است؟

۱) ۷۰ ۲)۷۸ ۳)۸۷ ۴)۸۸

حل: اگر $V = \{v_۱, v_۲, v_۳, ..., v_{۳۵}\}$ مجموعه‌ی رئوس این گراف باشد. در این صورت :

$$\left.\begin{array}{l}\deg(v_۱)\le ۵\\ \deg(v_۲)\le ۵\\ \deg(v_۳)\le ۵\\ \quad ....\\ \deg(v_{۳۵})\le ۵\end{array}\right\}\rightarrow \deg(v_۱)+\deg(v_۲)+\deg(v_۳)+...+\deg(v_{۳۵})\le \sum_{i=۱}^{۳۵}۵$$

$$\rightarrow D\le ۵\times ۳۵\rightarrow ۲q\le ۵\times ۳۵\rightarrow q\le \frac{۵\times ۳۵}{۲}\rightarrow q\le ۸۷/۵\xrightarrow{q\in W} q=۸۷$$

مثال : اگر G گرافی از مرتبه‌ی ۸ و اندازه‌ی ۱۱ طوری در نظر گرفته شود که درجه‌ی هر رأس آن فقط ۲ یا ۳ می باشد. تعیین کنید این گراف چند رأس از درجه‌ی ۲ و چند رأس از درجه‌ی ۳ دارد؟

حل: گیریم که این گراف x رأس از درجه‌ی ۲ و y از درجه‌ی ۳ دارد، پس:

$x+y=p$ تعداد کل رئوس

$D=۲x+۳y=۲q$ مجموع درجات رئوس

$$\begin{cases}۲x+۳y=۲q\\ x+y=p\end{cases}\rightarrow\begin{cases}۲x+۳y=۲۲\\ x+y=۸\end{cases}\rightarrow x=۲\quad,\quad y=۶$$

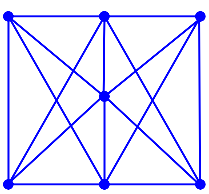
مثال : یک جمع ۷ نفره از دانش آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید و فرض کنید که دوستی بین آنها یک رابطه‌ی دو طرفه است. یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست هستند و یا هیچ یک با دیگری دوست نیست. در این صورت :

الف : این مسئله را با یک گراف مدل سازی کنید.

ب : نشان دهید که امکان ندارد درجه‌ی تمام رئوس گراف حاصل برابر ۳ باشد.

ج : نشان دهید که امکان ندارد تمام افراد دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

حل : اگر هر دانش آموز را رأس گراف و رابطه‌ی دوستی بین دو نفر را یک یال در نظر بگیریم. در این صورت مسئله‌ی فوق دارای گرافی به شکل زیر است.



البته فرض کردیم که برخی از دانش آموزان رابطه‌ی دوستی ندارند.

اگر درجه‌ی تمام رئوس چراف حاصل ۳ باشد، مجموع درجات برابر $۳\times ۷=۲۱$ خواهد شد که عددی زوج نیست. لذا این حالت امکان ندارد.

همچنین اگر درجه‌ی هر رأس عددی فرد باشد، نتیجه می شود که تعداد رئوس فرد گراف، فرد است که این نیز امکان ندارد.

تمرین برای حل :

۵ : هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند. نشان دهید که نفر هفتم نمی تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

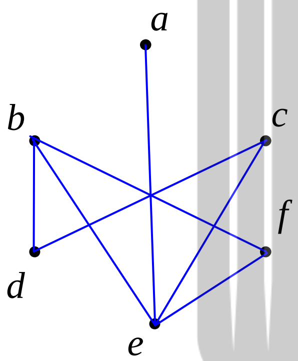
***

ماکسیمم و می نیمم درجه‌ی رأس ها

بزرگترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را ماکسیمم درجه‌ی G می نامند و آن را با $\Delta(G)$ یا به اختصار Δ نمایش می دهند.

کوچکترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را می نیمم درجه‌ی G می نامند و آن را با $\delta(G)$ یا به اختصار δ نمایش می دهند.

مثال : در گراف مقابل ماکسیمم و می نیمم درجه‌ی رأس ها را مشخص کنید.



حل:

$$\Delta = \deg(e) = 4 \quad , \quad \delta = \deg(a) = 1$$

نکته : ثابت کنید در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q رابطه‌ی $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$ برقرار است.

حل: گیریم که $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ پس:

$$\left.\begin{array}{l} \delta \le \deg(v_1) \le \Delta \\ \delta \le \deg(v_2) \le \Delta \\ \delta \le \deg(v_3) \le \Delta \\ \quad .... \\ \delta \le \deg(v_p) \le \Delta \end{array}\right\} \rightarrow \sum_{i=1}^{p} \delta \le \sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) \le \sum_{i=1}^{p} \Delta$$

$$\rightarrow p\delta \le D \le p\Delta \rightarrow p\delta \le 2q \le p\Delta \xrightarrow{\div p \ne 0} \delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$$

مثال : اگر در یک گـراف داشـته باشـیم: $\Delta=۳$ و $\delta=۱$ و $q=۵$ و $p=۳n$ تعیـین کنیـد کـه n چـه مقداری را می تواند داشته باشد؟ $(n\in N)$

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۷

حل:

$$\delta\le\frac{۲q}{p}\le\Delta\rightarrow ۱\le\frac{۲\times ۵}{۳n}\le ۳\rightarrow\frac{۱}{۳}\le\frac{۳n}{۱۰}\le ۱\rightarrow\frac{۱۰}{۳}\le ۳n\le ۱۰\rightarrow\frac{۱۰}{۹}\le n\le\frac{۱۰}{۳}$$

$$\rightarrow ۱/۱\le n\le ۳/۳\xrightarrow{n\in N} n=۲\ ,\ \ n=۳$$

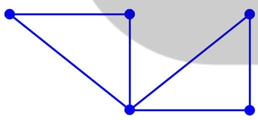
مقدار $n=۳$ غیر قابل قبول است. زیرا با قبول این مقدار رأس با درجه‌ی صفر خواهیم داشت. در حـالی کـه مینیمم درجات یک می باشد.

مثال : در گراف ساده‌ی G با اندازه‌ی ۶ داریم $\Delta=۴$ و $\delta=۲$ در مورد مرتبه‌ی این گـراف بحـث کنیـد. سپس با بررسی حالت های مختلف p ، نمودار گراف مورد نظر را رسم کنید.

حل:

$$\delta\le\frac{۲q}{p}\le\Delta\rightarrow ۲\le\frac{۲\times ۶}{p}\le ۴\rightarrow ۱\le\frac{۶}{p}\le ۲\rightarrow\frac{۱}{۲}\le\frac{p}{۶}\le ۱\rightarrow ۳\le p\le ۶$$

با بررسـی حالـت هـای مختلـف بـرای $p=۶$ و $p=۵$ و $p=۴$ و $p=۳$ مـشاهده مـی کـنیم کـه فقـط حالت $p=۵$ قابل قبول است.



***

مجموعه‌ی همسایگی های یک رأس در گراف

اگر v یک رأس از گراف G باشد، در این صورت :

الف : مجموعه‌ی شامل همه رأس هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، **همسایگی بـاز** رأس v می گوییم و آن را با $N_G(v)$ نمایش می دهند. یعنی:

$$N_G(v)=\{u\in V(G)\,;\,uv\in E(G)\}$$

ب : مجموعه‌ی شامل رأس v و همه رأس هایی از گراف G که بـه رأس v متـصل هـستند، **همـسایگی بسته** رأس v می گوییم و آن را با $N_G[v]$ نمایش می دهند. یعنی :

$$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$$

مثال : با توجه به گراف شکل زیر می توان نوشت:

$N_G(a)=\{b\}$

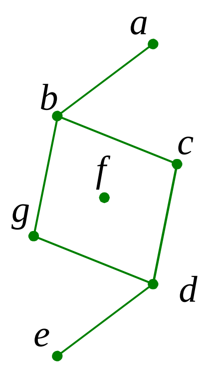
$N_G(b)=\{a,c,g\}$

$N_G(f)=\{\}$

$N_G[a]=\{a,b\}$

$N_G[c]=\{c,d,b\}$

$N_G[f]=\{f\}$



***

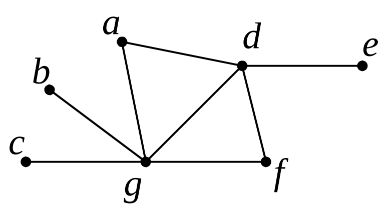
یال های مجاور

دو یا چند یال را **مجاور** گوییم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که آنها به آن متصل باشند. به طـور مثـال در شکل مثال قبل یال های bc و dc مجاور هستند ولی دو یال cd و ab مجاور نمی باشند.

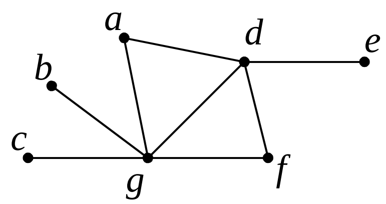
***

زیر گراف

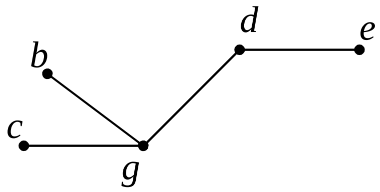
یک زیر گراف از گراف G گرافی است که مجموعه‌ی رئـوس آن ، زیـر مجموعـه‌ای از مجموعـه‌ی رئـوس گراف G و مجموعه‌ی یالهای آن زیر مجموعه‌ای از مجموعـه‌ی یـال هـای گـراف G باشـد. بـه طـور مثـال گـراف هـای گراف G_1 و G_2 و G_3 که در شکل مقابل آمـده انـد. زیـر گـراف هایی از گراف G می باشند. ولی گراف G_4 زیر گراف G نمـی باشد.



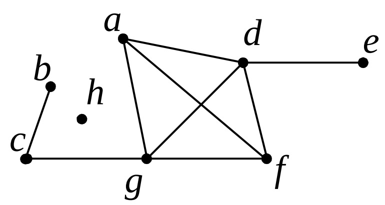
$((G))$



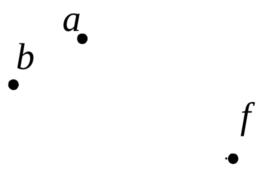
$((G_{۳}))$



$((G_{۱}))$



$((G_{۴}))$



$((G_{۲}))$

نتیجه :

۱ : هر گراف زیر گراف خودش است.

۲ : گراف تهی با مجموعه رأس های V، زیر گراف هر گراف با همین مجموعه‌ی رأس ها است.

***

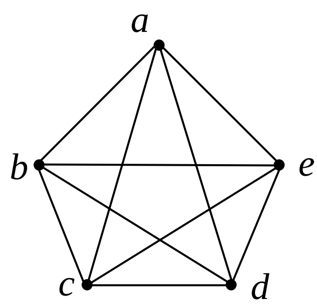
گراف منتظم

یک گراف را منتظم گویند، هرگاه

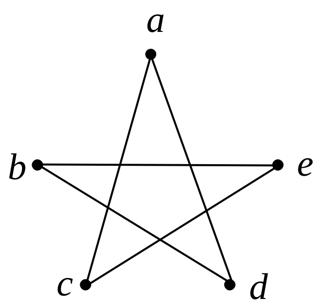
الف) درجه‌ی هر رأس آن برابر یک عدد صحیح و نامنفی باشد.

ب) تمام رأس های آن درجه‌ی مساوی داشته باشند.

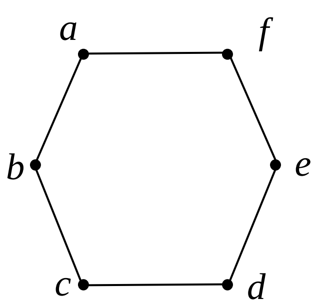
اگر در یک گراف منتظم درجه‌ی هر رأس r باشد، آن گراف را $r-$ منتظم گویند.



گراف ۴- منتظم



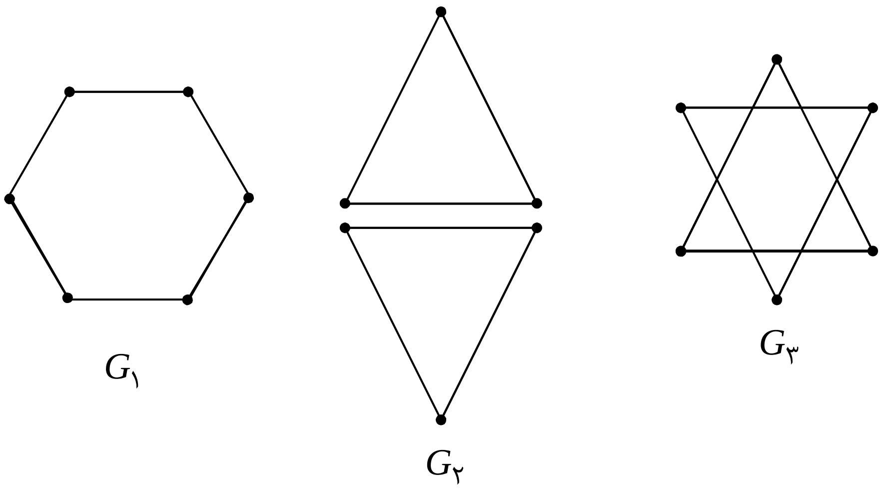
گراف ۲- منتظم



گراف ۲- منتظم

مثال : گراف هایی رسم کنید که ۲− منتظم بوده و از مرتبه‌ی ۶ باشند.

حل :

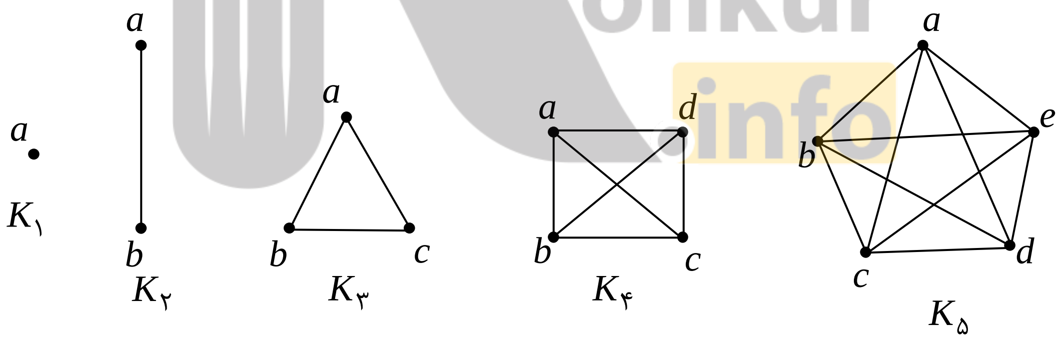


***

گراف کامل

یک گراف از مرتبه‌ی p را یک گراف **کامل** می گوییم، هرگاه درجه‌ی هر رأس آن $p-1$ باشد.

گراف کامل از مرتبه‌ی p را با K_p نمایش می دهند. در نمودار های زیر گراف های کامل از مرتبه‌ی ۱ تا ۵ رسم شده است.

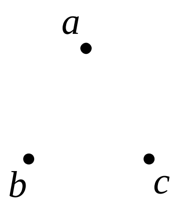


نتیجه : در هر گراف کامل مجموعه‌ی همسایگی بسته‌ی یک رأس مانند v، برابر تمام رأس های گراف است. یعنی :

$$N_G[v]=V$$

***

گراف تهی



$\overline{K}_{۳}$

یک گراف از مرتبه‌ی p را **تهی** می گوییم، هرگاه هیچ یالی نداشته باشد. گراف تهی از مرتبه‌ی p را با $\overline{K}_p$ نمایش می دهند. مانند گراف مقابل:

چند نکته :

۱ : تعداد یال های هر گراف $r-$ منتظم از مرتبه‌ی p برابر $\frac{۱}{۲}pr$ است. زیرا:

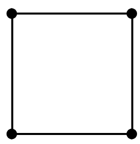
$$\begin{cases} D=۲q \\ D=pr \end{cases} \rightarrow ۲q=pr$$

یعنی در گراف منتظم pr زوج است. (پس در گراف منتظم p و r هر دو با هم فرد نیستند.)

۲ : هر گراف کامل از مرتبه‌ی p یک گراف $(p-۱)-$ منتظم است و در نتیجـه در هـر گـراف کامـل از مرتبه‌ی p داریم:

$$r=p-۱ \quad و \quad q=\frac{۱}{۲}p(p-۱)$$

۳ : ممکن است گرافی منتظم باشد ولی کامل نباشد. مانند گراف زیر که ۲- منتظم است ولی کامل نیست.



۴ : هر گراف تهی از مرتبه‌ی p یک گراف ۰- منتظم است.

۵ : در هر گراف $r-$ منتظم همواره $\delta=\Delta=r$ است.

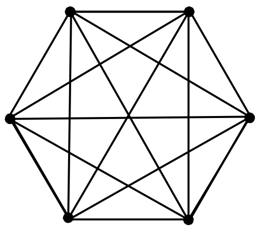
۶ : اگر در یک گراف $\delta=\Delta$ باشد،آن گراف منتظم است.

۷ : در هر گراف کامل تمام رئوس با هم مجاورند، یعنی بین هر دو رأس آن یک یال وجود دارد.

۸ : در هر گراف $r-$ منتظم همواره $r\leq p-۱$ است.

مثال : گراف کامل $K_{۶}$ را رسم کنید.

حل:



مثال : تعداد یال های گراف کامل از مرتبه‌ی p از تعداد یالهای گراف کامل از مرتبه‌ی $p-۲$ به تعداد ۱۳ واحد بیشتر است. مقدار p را پیدا کنید.

حل:

۱۳ + تعداد یالهای گراف کامل از مرتبه‌ی $p-۲$ = تعداد یالهای گراف کامل از مرتبه‌ی p

$$\Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{(p-۲)(p-۳)}{۲}+۱۳$$

$$\rightarrow p^{۲}-p=p^{۲}-۵p+۶+۲۶\rightarrow ۴p=۳۲\rightarrow p=۸$$

مثال : گرافی ۳- منتظم از مرتبه‌ی p با اندازه‌ی q داده شده است.اگر $۲q=۵p-۸$ باشد. مقادیر p و q را بیابید.

حل:

$$\begin{cases}۲q=۵p-۸\\ ۲q=۳p\end{cases}\rightarrow ۵p-۸=۳p\rightarrow p=۴\quad,\quad q=۶$$

مثال : آیا گراف تمرین قبل کامل است؟ چرا؟

حل: چون این گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۴ است پس کامل می باشد.

مثال : اگر در یک گراف ۶- منتظم، داشته باشیم: $q-۲p=۱۶$ مقادیر p و q را بیابید.

حل:

$$\begin{cases}q-۲p=۱۶\\ ۲q=۶p\end{cases}\rightarrow\begin{cases}q-۲p=۱۶\\ q=۳p\end{cases}\rightarrow ۳p-۲p=۱۶\rightarrow p=۱۶\quad,\quad q=۴۸$$

مثال : ثابت کنید که گرافی ۵- منتظم از مرتبه‌ی ۱۷ وجود ندارد.

حل: (اثبات به روش برهان خلف) گیریم که چنین گرافی وجود دارد و مرتبه‌ی آن p می باشد. پس:

$$۲q=pr\rightarrow ۲q=۱۷\times۵$$

و این ممکن نیست زیرا $۲q$ زوج است ولی $۱۷\times۵=۸۵$ فرد می باشد و نمی توانند برابر باشند.

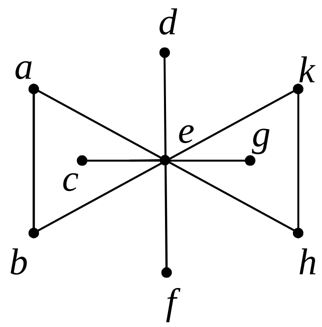
مثال : پنج نفر به سفر می روند و قبل از سفر قرار می گذارند، هرکس به سه نفر دیگر نامه بفرستد.آیا امکان دارد، هرکس به آن سه نفری نامه بفرستد که از آنها نامه دریافت می کند، چرا؟

حل: اگر هر نفر را رأس و هر نامه را یال در نظر بگیریم. در این صورت

$$۲q = pr \rightarrow ۲q = ۵ \times ۳$$

و چنین چیزی ممکن نیست.

مثال : به گراف مقابل چند یال اضافه شود ، تا به گراف کامل تبدیل شود.



حل با توجه به گراف داریم: $q = ۱۰$ و $p = ۹$ حال اگر قرار است این گراف به یک گراف کامل تبدیل شود. باید $\frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۳۶$ یال داشته باشیم. لذا باید به تعداد $۳۶ - ۱۰ = ۲۶$ یال به این گراف اضافه شود تا کامل شود.

مثال : یک گراف کامل دارای ۵۵ یال است. درجه‌ی هر رأس آن را بیابید.

حل:

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow ۵۵ = \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow p(p-۱) = ۱۱۰ \rightarrow p = ۱۱$$
$$r = p - ۱ \rightarrow r = ۱۱ - ۱ = ۱۰$$

مثال : مرتبه‌ی یک گراف برابر ۸ و اندازه‌ی آن ۲۷ می باشد. حساب کنید که درجه‌ی چند رأس آن ماکسیمم است.

حل: برای اینکه این گراف دارای تعداد یالهای بیشتری باشد، باید کامل از مرتبه‌ی ۸ باشد. لذا حداکثر تعداد یالهای آن برابر $\frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۸ \times ۷}{۲} = ۲۸$ خواهد شد. چون اندازه‌ی گراف ۲۷ است، لذا این گراف کامل $K_۸$ بوده و یک یال از آن حذف شده است. پس به جای اینکه ۸ رأس از درجه ۷ داشته باشد، دارای شش رأس از درجه‌ی ۷ و دو رأس از درجه‌ی ۶ می باشد. پس شش رأس آن درجه‌ی ماکزیمم دارند.

مثال : یک گراف $r-$ منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد. عدد r کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۱۰

حل:

$۲q = pr \to ۲q = ۹r$

لذا r باید زوج باشد. از طرفی $r \le p-۱$ پس $r \le ۹-۱ = ۸$ در نتیجه گزینه دو درست است.

مثال : اگر در یک گراف داشته باشیم: $\delta = \Delta = ۶$ و $\sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = ۴۲$. مرتبه این گراف را بیابید.

حل چون $\delta = \Delta$ می باشد، این گراف $r-$ منتظم است و $r = ۶$

$$D = \sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = ۲q \xrightarrow{۲q=pr} ۲q = ۶p \xrightarrow{D=۲q=۴۲} ۶p = ۴۲ \to p = ۷$$

مثال : یک گراف کامل ۱۲۰ یال دارد. تعداد رأس های این گراف را به دست آورید.

حل:

$$q = \binom{p}{۲} \to ۱۲۰ = \frac{p(p-۱)}{۲} \to p(p-۱) = ۲۴۰ \to p(p-۱) = ۱۶ \times ۱۵ \to p = ۱۶$$

مثال : در کدام گراف کامل، تعداد رأس ها، نصف تعداد یال ها است؟

۱) $K_۴$ ۲) $K_۵$ ۳) $K_۶$ ۴) $K_{۱۰}$

حل:

$$q = \binom{p}{۲} \xrightarrow{p=\frac{q}{۲} \to ۲p=q} ۲p = \frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{p\neq ۰} p-۱ = ۴ \to p = ۵$$

مثال : یک گراف ساده ۳۵ یال دارد. این گراف حداکثر چند رأس درجه‌ی ۸ دارد؟

۱) ۲   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۵

حل: تعداد یال های گراف کامل $K_۹$ برابر $q = \binom{۹}{۲} = ۳۶$ می باشد. حال اگر از این گـراف یـک یـال کـم کنیم. دو رأس درجه ی ۷ و هفت رأس درجه ۸ خواهیم داشت.

مثال : در یک گراف $p = ۱۰$ و $q = ۴۰$ می باشد. مینیمم درجه‌ی رئوس چند است؟

حل : تعداد یال های گراف کامل $K_{۱۰}$ برابر $q=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$ می باشد. حال اگـر فقـط از یـک رأس ایـن گراف ۵ یال حذف کنیم. درجه‌ی آن رأس از ۹ به $۹-۵=۴$ تبدیل می شود. لذا $\delta=۴$.

***

تمرین برای حل :

۶ : یک گراف کامل دارای۳۶ یال است .

الف : تعداد رئوس گراف را تعیین کنید.
ب : مقدار $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

۷ : در هر مورد و در صورت امکان یک گراف منتظم رسم کنید.

الف : گراف ۴ – منتظم که دارای ۶ رأس باشد.
ب : گراف ۳ – منتظم که دارای ۵ رأس باشد.

۸ : یک گراف ۴ رأسی غیر تهی و $k-$ منتظم رسم کنید که

الف : k بیشترین مقدار را داشته باشد.

ب : k کمترین مقدار را داشته باشد.

۹ : یک گراف ۵ رأسی غیر تهی و $k-$ منتظم رسم کنید که

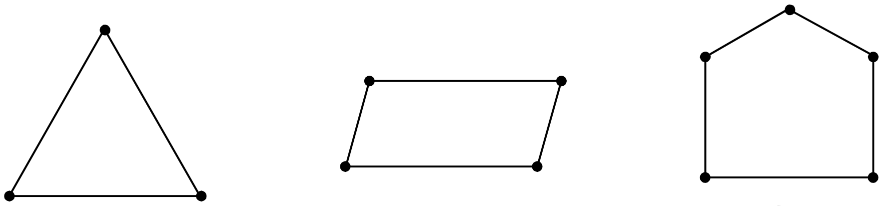
الف : k بیشترین مقدار را داشته باشد.

ب : k کمترین مقدار را داشته باشد.

***

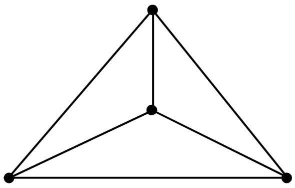
گراف دور و گراف چرخ

هر گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی p را گراف **دور** می گویند و آن را با C_p نمایش می دهند.

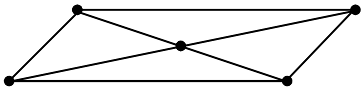


$C_۳$ $C_۴$ $C_۵$

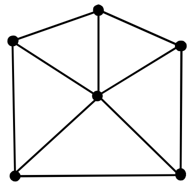
اگر یک رأس به گراف دور اضافه شود و این رأس جدید به سایر رأس های گـراف دور متـصل شـود. گـراف جدید را گراف **چرخ** می گویند و آن را با W_p نمایش می دهند.



$W_۴$



$W_۵$



$W_۶$

تذکر: هر گراف از مرتبه‌ی p که درجه‌ی یک رأس آن $p-۱$ و درجه‌ی بقیه‌ی رئوس برابر ۳ باشد. گـراف چرخ می باشد.

***

مکمل گراف

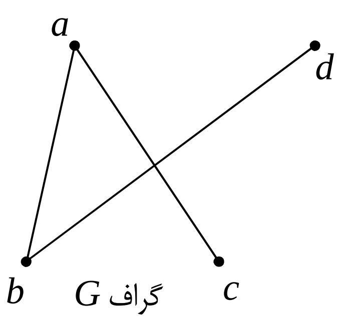
دو گراف $G_۱(V_۱,E_۱)$ و $G_۲(V_۲,E_۲)$ را مکمل گویند، هرگاه:

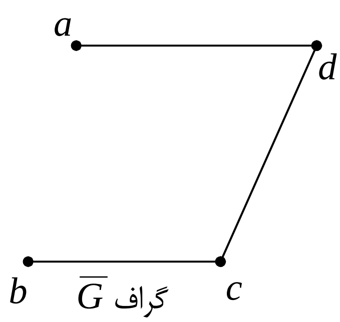
الف: $V_۱=V_۲=V$　　ب: $E_۱\bigcup E_۲=E$

ج: $E_۱\bigcap E_۲=\Phi$　　د: $G=(V,E)$ کامل باشد.

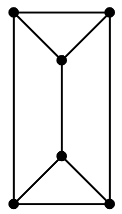
به عبارت دیگر دو گراف با رأس های یکسان و یال های متفاوت را مکمـل همـدیگر مـی نامنـد، هرگـاه از اجتماع آنها یک گراف کامل حاصل شود.

اگر G یک گراف باشد، مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نمایش می دهند. به دو گراف زیر توجه کنید.

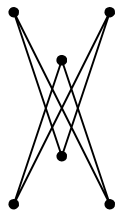




مثال : مکمل گراف زیر را رسم کنید.



حل:

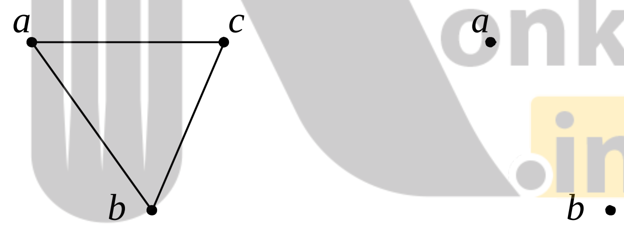


نتیجه :

۱ : اگر بین دو رأس از یک گراف، یالی وجود داشته باشد، در گراف مکمل آن، بین این دو رأس یـال وجـود ندارد و برعکس

۲ : اجتماع دو گراف مکمل همواره یک گراف کامل است.

۳ : مکمل هر گراف تهی، یک گراف کامل و مکمل هر گراف کامل یک گراف تهی است.



۴ : مکمل یک گراف ساده با p رأس و q یال، دارای p رأس ولی $\binom{p}{۲}-q$ یال است.

مثال : یک گراف ساده مانند G از مرتبه‌ی ۸ دارای ۲۰ یال می باشد. حساب کنید مکمل آن یعنی $\overline{G}$ چنـد یال دارد.

حل :

$$\binom{p}{۲}-q=\binom{۸}{۲}-۲۰=\frac{۸(۸-۱)}{۲}-۲۰=۲۸-۲۰=۸$$

تمرین برای حل :

۱۰: گراف مقابل را در نظر بگیرید و سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

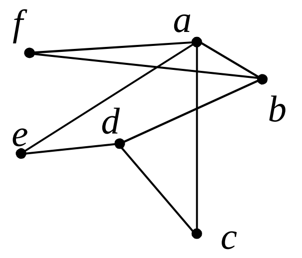
الف : مقادیر Δ و δ را بنویسید.

ب : درجه‌ی کل گراف چند است؟

پ : مجموعه های $N_G(a)$ و $N_G[a]$ را بنویسید.

ت : نام دو یال را بنویسید که مجاور نباشند.

ث : مکمل گراف G را رسم کنید.



(G)

۱۱: اگر v یک رأس از گراف G از مرتبه‌ی p از آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\overline{G}}(v)$ به ترتیب درجه‌ی رأس v در گراف های G و $\overline{G}$ باشند. مقدار $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)$ را به دست آورید.

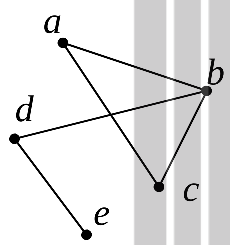
۱۲: اگر G یک گراف با p رأس باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ به دست آورید.

۱۳: اگر G یک گراف با p رأس باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال های گراف های G و $\overline{G}$ و K_p وجود دارد؟

۱۴: گراف G در شکل مقابل داده شده است.

الف : درجات رئوس a و b در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید.

ب : مجموع درجات رأس های گراف $\overline{G}$ را به دست آورید.



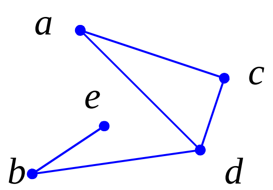
***

مسیر گراف

در یک گراف هر دنباله از یال که برای ارتباط بین دو رأس متفاوت (یا غیر متفاوت) بکار می رود، را مسیر می نامند.

توجه : اگر u و v دو رأس متفاوت از یک گراف مانند G باشند، یک مسیر از u به v در گراف G دنباله ای است شامل $m+۱$ رأس دو به دو متفاوت که از u آغاز و به v ختم می شود. بطوری کـه هـر دو رأس متوالی این دنباله در گراف G مجاور باشند. (مگر اینکه احتمالاً ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.)

توجه داشته باشید که در نامگذاری مسیر ها از رأس ها استفاده می کنیم. مانند: مسیر $acdb$ در گراف زیر



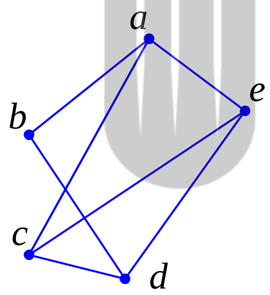
تعداد یالهای هر مسیر (عدد m) را طول مسیر می نامند. اگر دنباله ای فقط شامل یک رأس مانند v باشد، طول آن مسیر را صفر از v به v می گویند.

مثال : با توجه به گراف فوق یک مسیر به طول صفر، یک مسیر به طول یک، یک مسیر به طول دو، یک مسیر به طول سه، یک مسیر به طول چهار و همچنین یک مسیر به طول پنج بنویسید.

حل:

مسیر به طول صفر	dd
مسیر به طول ۱	be
مسیر به طول۲	cdb
مسیر به طول۳	$adbe$
مسیر به طول۴	$acdbe$
مسیر به طول۵	وجود ندارد.

مثال : در گراف مقابل تمام مسیر های از a به b را بنویسید.

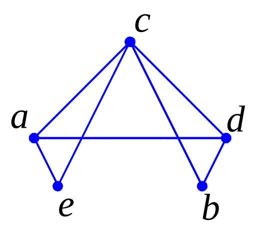


حل:

	مسیر	طول مسیر
مسیر اول	ab	۱
مسیر دوم	$acdb$	۳
مسیر سوم	$acedb$	۴
مسیر چهارم	$aedb$	۳
مسیر پنجم	$aecdb$	۴

مثال : در گراف مقابل چند مسیر به طول ۳ از a به b وجود دارد؟

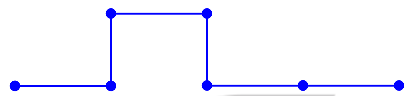
۱) ۵ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) ۴ ‏ ‏ ‏ ‏ ۳) ۳ ‏ ‏ ‏ ‏ ۴) ۲



حل: از a به b فقط سه مسیر به طول ۳ وجود دارد. این مسیر ها عبارتند از

$adcb$ و $aecb$ و $acdb$

توجه : گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را خطی می نامند و آن را با P_n نمایش می دهیم. مانند گراف شکل زیر



$((P_7))$

نتیجه : در گراف خطی P_n همواره دو رأس از درجه‌ی ۱ و $n-2$ رأس درجه‌ی۲ وجود دارد.

مثال : فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq 4$. نشان دهید که G شامل یک مسیر به طول بزرگتر یا مساوی ۴ است.

حل : چون در این گراف $\delta(G) \geq 4$ پس هر رأس و از جمله v_1 حتماً به رأس دیگری متصل است. (زیرا اگر چنین نباشد درجه‌ی آن صفر می باشد که با فرض مسئله تناقض دارد.) .

فرض کنیم که v_1 به v_2 متصل می باشد. در این صورت v_2 حتماً به رأسی دیگر غیر از v_1 متصل است. (زیرا اگر چنین نباشد، درجه‌ی آن ۱ خواهد بود که با فرض مسئله تناقض دارد.).

فرض کنیم که v_2 به v_3 متصل است. در این صورت حتماً v_3 به رئوسی دیگر غیر از v_1 و v_2 متصل است. (زیرا اگر چنین نباشد، درجه‌ی آن ۲ خواهد بود که با فرض مسئله تناقض دارد.)

فرض کنیم که v_3 به v_4 متصل است. در این صورت حتماً v_4 به رئوسی دیگر غیر از v_1 و v_2 و v_3 متصل است. (زیرا اگر چنین نباشد، درجه‌ی آن ۳ خواهد بود که با فرض مسئله تناقض دارد.)

فرض کنیم که v_4 به v_5 متصل است. لذا مسیر $v_1v_2v_3v_4v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

تمرین برای حل :

۱۵ : فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq k$. تعیین کنید که کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است. آنکه درست است ثابت کنید و برای آنکه نادرست است، مثال نقض بنویسید.

الف : G لزوماً شامل دوری به طول k است.

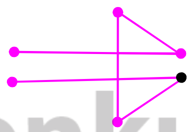
ب : G لزوماً شامل دوری به طول $k+1$ است.

***

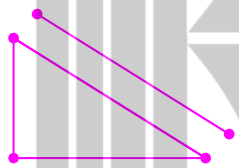
گراف همبند و گراف ناهمبند

یک گراف را همبند می نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر یک گـراف همبند نباشد،آن را ناهمبند می نامند.

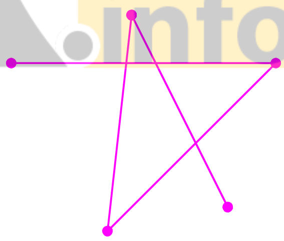
در مثال های زیر گراف های۱و۳ همبند و گراف های۲و۴ ناهمبند می باشند.



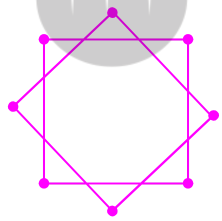
گراف۱



گراف۲



گراف۳



گراف۴

نتیجه :

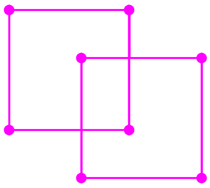
۱ : در گراف ساده از مرتبه‌ی p ، اگر درجه‌ی یکی از رأس ها $p-1$ باشد. این گراف همبند است.

۲ : هر گراف کامل همبند است.

۳ : در یک گراف همبند با بیش از یک رأس درجه‌ی هر رأس حداقل یک می باشد.

۴ : هر گراف تهی با بیش از یک رأس ناهمبند است.

مثال : آیا هر گراف $r-$ منتظم همبند است؟ چرا؟



حل: خیر، گراف زیر ۲- منتظم است ولی همبند نیست.

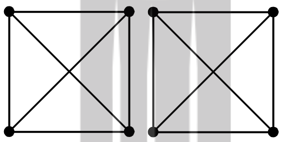
مثال : در یک گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی p داریم: $q+۴=۲p$

الف) مقدار p و q را بدست آورید.　　　ب) یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند با این شرایط رسم کنید.

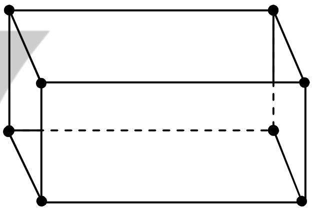
حل:

$$q+۴=۲p \rightarrow q=۲p-۴ \xrightarrow{۲q=rp} ۲(۲p-۴)=۳p \rightarrow p=۸$$

$$q=۲p-۴=۱۲$$



گراف ناهمبند



گراف همبند

مثال : یک گراف همبند از مرتبه‌ی ۲۰ داده شده است،حداقل و حداکثر اندازه‌ی این گراف را بیابید.

حل : واضح است که در هر گراف همبند داریم.

$$p-۱\leq q\leq \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow ۲۰-۱\leq q\leq \frac{۲۰(۲۰-۱)}{۲} \rightarrow ۱۹\leq q\leq ۱۹۰$$

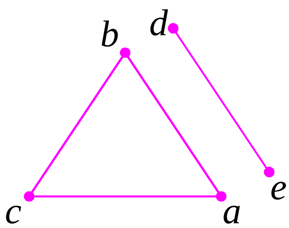
مثال : گراف $G=(V,E)$ که در آن $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,bc,de\}$ داده شده است.

الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

ب) درجه‌ی همه‌ی رأس ها را به صورت دنباله‌ی غیر صعودی بنویسید.

ج) آیا این گراف همبند است؟چرا؟

حل:



۱و۱و۲و۲و۲ دنباله‌ی درجات

گراف همبند نیست ، زیرا مثلاً از a به d مسیر وجود ندارد.

نکته :

۱ : اگر گراف G ناهمبند باشد، آنگاه تعداد یال های آن حداکثر $\binom{p-۱}{۲}$ می باشد.

۲ : اگر گراف G از مرتبه‌ی p حداقل $\binom{p-۱}{۲}+۱$ یال داشته باشد، آنگاه این گراف حتماً همبند است.

مثال : گراف ناهمبند G از مرتبه‌ی ۵ داده شده است. حداکثر تعداد یال های آن را به دست آورید.

حل :

$$\binom{p-۱}{۲}=\binom{۵-۱}{۲}=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

مثال : حداقل تعداد یال های گراف همبند از مرتبه‌ی ۵ را تعیین کنید.

حل :

$$\binom{p-۱}{۲}+۱=\binom{۵-۱}{۲}+۱=\binom{۴}{۲}+۱=\frac{۴\times ۳}{۲}+۱=۶+۱=۷$$

توجه : اگر در یک گراف $\delta \geq \frac{p-۱}{۲}$ باشد. آنگاه آن گراف همبند است.

مثال : در یک گراف از مرتبه‌ی ۸ حداقل مقدار δ را طوری بیابید که این گراف همبند شود.

حل:

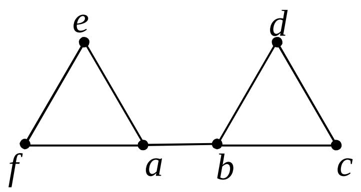
$$\delta \geq \frac{p-۱}{۲} \rightarrow \delta \geq \frac{۸-۱}{۲} \rightarrow \delta \geq ۳/۵ \rightarrow \delta = ۴$$

توجه :

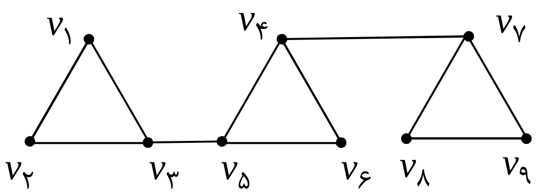
۱ : اگر G گرافی ناهمبند باشد.آنگاه مکمل آن یعنی $\overline{G}$ همبند است.

۲ : اگر $\overline{G}$ گرافی ناهمبند باشد.آنگاه مکمل آن یعنی G همبند است.

توجه : در یک گراف همبند، یک یال را **پل** می نامند، هرگاه با حذف آن یال (بدون حذف رئوس انتهای آن) گراف مفروض ناهمبند شود. مانند یال ab در گراف مقابل



مثال : گراف مقابل چند پل دارد.

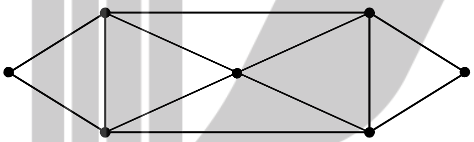


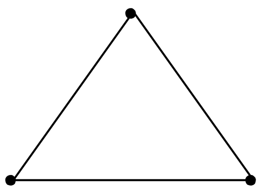
حل : این گراف دو پل دارد. $v_{۳}v_{۵}$ و $v_{۴}v_{۷}$. زیرا با حذف یکی از آنها گراف حاصل ناهمبند می شود.

❋❋❋

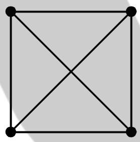
گراف اویلری

یک گراف غیر تهی را اویلری می گویند، هرگاه درجه‌ی تمام رأس هـای آن عـدد طبیعـی زوج باشـد. ماننـد گراف های زیر





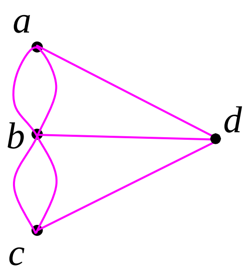
ولی گراف زیر اویلری نیست.



نتیجه :

۱ : در هر گراف اویلری می توان روی تمام یالها حرکت کرد بطوری که از کلیه‌ی یالهای گراف فقط یک بار گذشت.

۲ : اگر گراف G اویلری باشد،آنگاه تمام رأس های آن درجه‌ی زوج دارند.



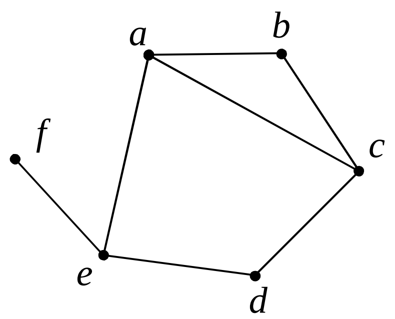
۳ : طبق تعریف گراف اویلری، گراف مربوط به پل کونیگسبرگ اویلری نیست.

۴ : هر گراف کامل K_p که در آن p عددی فرد باشد، اویلری است.

❋❋❋

دور گراف

در یک گراف هر مسیر را که رأس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشند را یک دور می نامند. طول مسیر هر دور گراف را طول آن دور می گویند.



مثلاً: در گراف مقابل مسیر های $acdea$ و $abcdea$ و $abca$ دور هستند که به ترتیب دارای طولی برابر ۵ و۴ و۳ می باشند. توجه داشته باشیم که در هر دور رأس تکراری بجز ابتدا و انتها نداریم.

نتیجه :

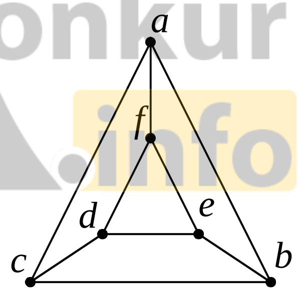
۱ : طول هر دور نمی تواند کمتر از ۳ باشد.

۲ : هر دور از یک گراف متشکل از m ($m \geq ۴$) رأس دارای طولی برابر $m-۱$ است.

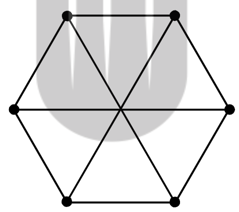
مثال : گرافی ۳- منتظم رسم کنید که:

الف) شامل دوری به طول ۳ باشد. ب) دوری به طول ۳ نداشته باشد.

حل:



دور های به طول ۳: $abca$ و $fdef$



دور به طول ۳ ندارد.

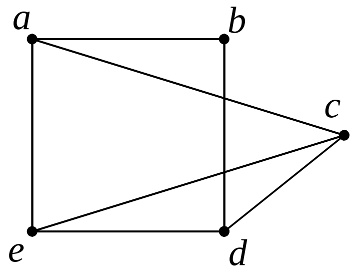
مثال : در یک گراف داریم: $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bd,ce,cd,de\}$

الف) این گراف را رسم کنید.

ب) یک دور به طول ۴ و یک دور به طول ۵ در این گراف را بنویسید.

ج) نام یالهایی را بنویسید که اگر به این گراف اضافه شوند، گراف حاصل کامل می شود.

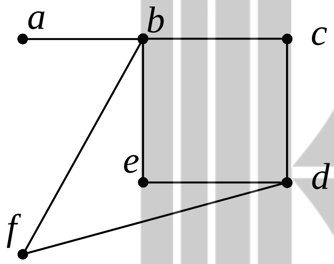
حل:



دور به طول ۴ : $abdea$
دور به طول ۵ : $abdcea$

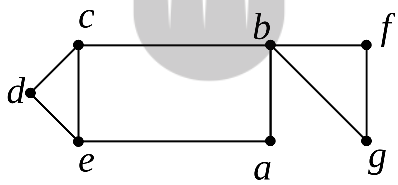
اگر قرار است این گراف کامل شود، پس باید $۱۰ = \frac{۵ \times ۴}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$ یال داشته باشد. ولی اکنون گراف دارای فقط ۷ یال است لذا به تعداد $۳ = ۷ - ۱۰$ یال باید اضافه شود.این یالها عبارتند از: ad و be و bc

مثال : در یک گراف همبند، درجه‌ی رأس ها به ترتیب ۱و۲و۲و۳و۳و۴ می باشند. اگر در این گـراف دو رأس با درجه های بزرگتر مجاور نباشند، تعداد دور های به طول ۳ در این گراف را بیابید.



حل: چون رئوس به درجه های ۳و۴ مجاور نیستند، پس نمودار این گراف به شکل زیر می باشد. بدیهی است که این گراف دوری بـه طول ۳ ندارد.

مثال : بزرگترین دور در گراف زیر از چند رأس متفاوت تشکیل شده است؟



حل: در این گراف دور $abcdea$ بزرگترین دور است، پس دارای ۵ رأس می باشد.

نکته :

۱ : گراف تهی مسیر به طول یک یا بیشتر ندارد.

۲ : هر گراف تهی ($\overline{K}_p$) دور ندارد.

۳ : هر گراف که تعداد رأس های آن کمتر از ۳ باشد، نمی تواند دور داشته باشد.

تمرین برای حل :

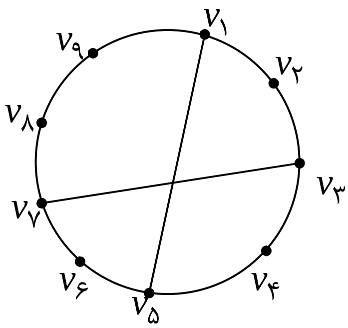
۱۵ : یک گراف ۹ رأسی را در نظر بگیرید. سپس در هر مورد گراف را طوری رسم کنید که :

الف : دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

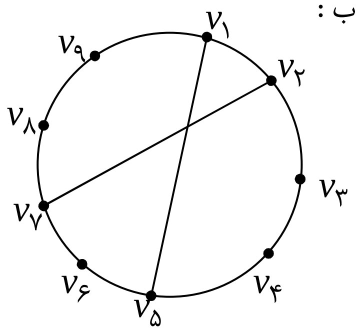
ب : دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

حل:

الف :



ب :



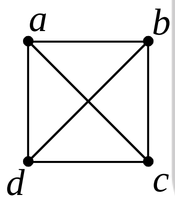
***

گراف هامیلتونی

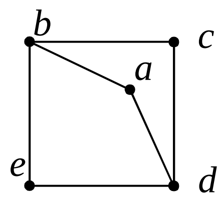
اگر در یک گراف از مرتبه‌ی p $(p \geq 3)$ دوری به طول p وجود داشته باشد.آن گراف را **هامیلتونی** می نامند. در هر گراف هامیلتونی دور به طول p را دور هامیلتونی می نامند.

توجه: دور هامیلتونی دوری است که از تمام رئوس گراف می گذرد.

مثال: گراف مقابل یک گراف هامیلتونی از مرتبه‌ی۴ است و دور $abcda$ یک دور هامیلتونی به طول ۴ است.



مثال: گراف زیر هامیلتونی نیست، زیرا در آن دوری وجود ندارد که از همه ی رأس ها بگذرد.

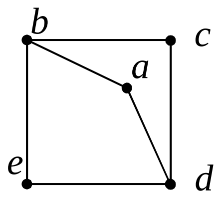


مثال : نشان دهید که هر گراف هامیلتونی، همبند است.

حل: اگر گراف G هامیلتونی باشد، در این صورت شامل دوری است که از تمام رئوس می گذرد، بنابراین درجه هر رأس آن حداقل دو است و تمام رئوس به هم متصلند، یعنی بین هر دو رأس آن مسیر وجود دارد، پس همبند است.

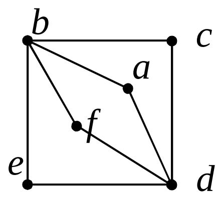
مثال : آیا هر گراف همبند، هامیلتونی است؟چرا؟

حل: خیر، گراف مقابل همبند است ولی هامیلتونی نیست.



مثال : گرافی رسم کنید که اویلری باشد و هامیلتونی نباشد.

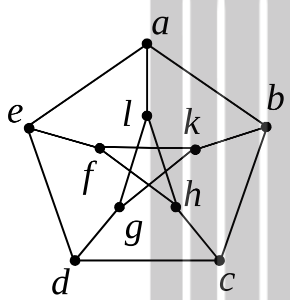
حل :



مثال : ثابت کنید که در گراف هامیلتنی درجه‌ی هر رأس حداقل ۲ است.

حل : چون گراف هامیلتنی همبند است، پس هر رأس باید حداقل با دو رأس دیگر مجاور باشد. لذا درجه‌ی آن رأس حداقل ۲ می باشد.

مثال : گراف مقابل را گراف پِترسِن می نامند. دور های ایـن گـراف را بنویسید و نشان دهید که این گراف هامیلتونی نیست.



حل:

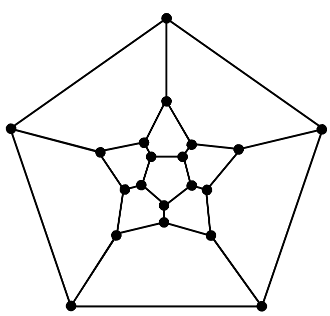
دور به طول۵ : $abcdea$ دور به طول۶ : $abcdgla$

دور به طول۸ : $bcdglhfkb$ دور به طول۹ : $fhlgkbcdef$

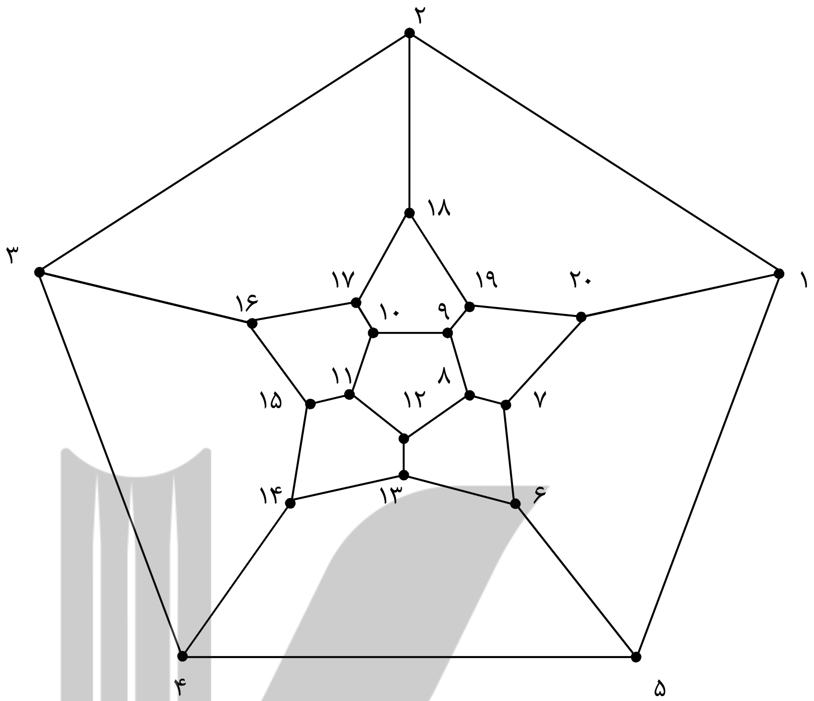
مرتبه این گراف ۱۰ است و چون این گراف دوری به طول ۱۰ ندارد، پس هامیلتونی نیست.

توجه : گراف پترسن گرافی همبند و ۳– منتظم است. این گراف از مرتبه‌ی ۱۰ و اندازه‌ی ۱۵ می باشد.

مثال : آیا گراف زیر هامیلتونی است، چرا؟



حل: این گراف هامیلتونی است. چون دوری دارد که از تمام رئوس می گذرد. این دور را با توجه با شماره ها می توان تعیین کرد.

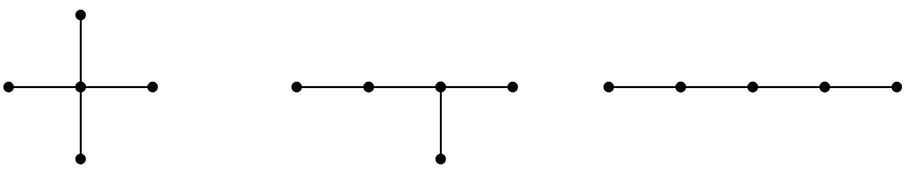


***

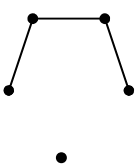
درخت

هر گراف همبند که شامل هیچ دوری نباشد را درخت می نامند. هر درخت از مرتبه‌ی p را با T_p نمایش می دهند.

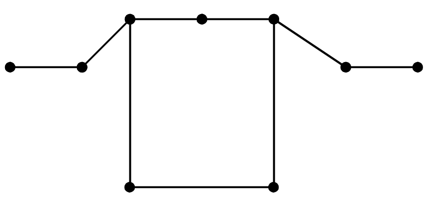
مثال: گراف های زیر درخت از مرتبه ۵ می باشند.



ولی گراف های زیر درخت نیستند.



همبند نیست.

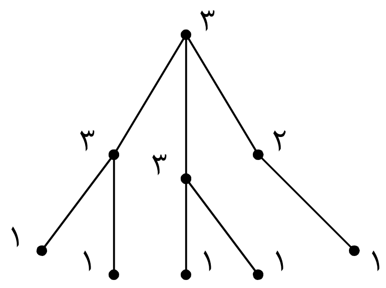


دور دارد.

مثال : دنباله‌ی درجات رئوس یک درخت به شکل زیر است. این درخت را رسم کنید.

۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳

حل :



توجه : ثابت کنید که بین هر دو رأس هر درخت دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

حل: چون هر درخت یک گراف همبند است، لذا بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود دارد. ایـن مـسیر یکتـا است، زیرا اگر چنین نباشد گراف دارای دور خواهد شد که با تعریف درخت متناقض است.

توجه : گرافی که بین هر دو رأس متفاوت آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد، یک درخت است. زیـرا در این صورت همبند بوده و دور نخواهد داشت.

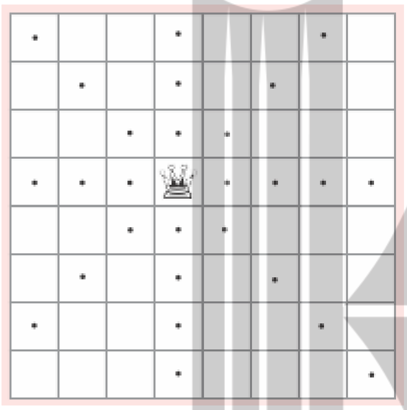
***

درس دوّم : مدل سازی با گراف

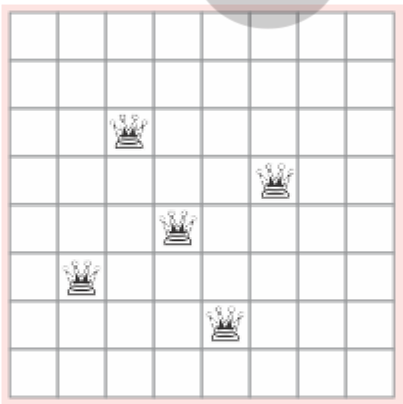
مقدمه :

به کمک مدل سازی، می توان برخی از مسائل روزمره‌ی زندگی را به یک مسئله‌ی ریاضی تبدیل نمود و با حل این مسئله‌ی ریاضی، به جواب مسئله‌ی اصلی دست پیدا کرد. در این درس، مدل سازی برخی از مسائل به کمک گراف بررسی می شود. قبل از ورود به این بحث به مسئله‌ی تاریخی زیر توجه کنید.

یک مسئله‌ی تاریخی



در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند« یافتن حداقل تعداد مهره‌ی وزیری که می توانند با چینش مناسب تمام صفحه‌ی شطرنج را بپوشاند»، ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود. هدف از حل این مسئله، پاسخ به این سئوال است که حداقل چند مهره لازم است که تمام خانه های شطرنج تهدید کنند؟ توجه داشته باشید که هر مهره‌ی وزیر خانه های افقی و عمودی و مورب منتهی به خانه‌ی استقرار را تهدید می کند. لذا هر خانه‌ی صفحه‌ی شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است، توسط حداقل یک وزیر تهدید می شود.

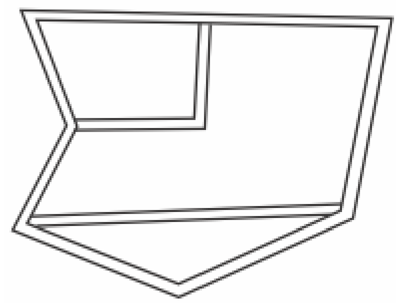


بعد از مدتی نتیجه گرفته شده که تمام خانه های صفحه‌ی شطرنج ۸×۸ حداقل توسط ۵ مهره‌ی وزیر با چینش مشابه چینش مقابل تهدید می شوند.

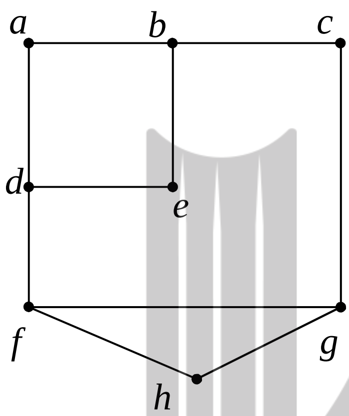
فکر درباره‌ی پرسش هایی از این دست باعث بوجود آمدن مفهومی در شاخه‌ی گراف در ریاضیات با نام **احاطه گری** شد.

***

یک مسئله‌ی مقدماتی



شکل مقابل نقشه‌ی منطقه ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع های این شهر دستگاه های خودپرداز به گونه ای نصب شوند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خود پرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.



فرض کنید در این مسئله هر تقاطع را با یک رأس و هر خیابان را با یک یال نشان دهیم، شکل مقابل می تواند مدل سازی این مسئله باشد. اکنون رأس هایی از این گراف که بتوان در آن دستگاه خودپرداز می توان نصب کرد را مشخص کنید، طوری که شرط عنوان شده رعایت شود.

پاسخ : $\{a,c,g,d\}$

آیا می توانید تمام رأس ها را انتخاب کنید؟

پاسخ : بله می توان تمام رأس ها را انتخاب کرد.

$$\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

در مثال فوق هر مجموعه از رأس ها را که در آن دستگاه خود پرداز می توان نصب کرد که شرایط مسئله را محقق سازد را یک **مجموعه‌ی احاطه گر** برای گراف می نامند. در پرسش های فوق دو مجموعه‌ی احاطه گر را مشاهده کردید. حال پرسشی دیگر را مطرح می کنیم.

اگر به هدف صرفه جویی در هزینه ها، قرار است کمترین تعداد خودپرداز ها نصب شود، به نظر شما در کدام رأس ها خودپرداز نصب شود؟

پاسخ : $\{f,b\}$

واضح است که این مجموعه نیز احاطه گر است و کمترین تعداد رأس برای تحقق شرایط (شرط دسترسی و شرط کمترین تعداد) مطرح شده را دارا می باشد.

در انتها با توجه به مسئله‌ی فوق، به پرسش های دیگر پاسخ دهید.

الف : یک مجموعه‌ی احاطه گر پنج عضوی بنویسید.

پاسخ : $\{a,e,c,d,h\}$

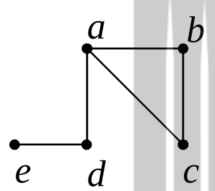
ب : یک مجموعه‌ی احاطه گر سه عضوی بنویسید.

پاسخ : $\{d,b,g\}$

***

رأس احاطه گر

در یک گراف، گویند رأس a **احاطه گر** رأس b است، هرگاه یا a همان b باشد یا مجاور آن باشد.



مثال: با توجه به گراف شکل مقابل رأس a احاطه گر رئوس a و b و c و d است. ولی احاطه گر e نمی باشد.

نتیجه :

۱ : در هر گراف، هر رأس احاطه گر خودش است.

۲ : در هر گراف، هر رأس احاطه گر رأس های مجاور خودش است.

۳ : در هر گراف، رأس a احاطه گر تمامی رأس های عضو **همسایگی بسته** آن یعنی $N_G[a]$ است.

۴ : در هر گراف، اگر رأس a احاطه گر رأس b باشد، آنگاه b نیز احاطه گر a است.

۵ : رأس تنها (منفرد) در یک گراف ، فقط احاطه گر خودش است.

تمرین۱ : در یک گراف، رأس a احاطه گر رأس b و رأس b احاطه گر رأس c است. آیا می تـوان نتیجـه گرفت که رأس a احاطه گر رأس c می باشد؟ برای پاسخ خود نمودار یک گراف رسم کنید.

تمرین۲ : نمودار گرافی را رسم کنید که در آن یک رأس، احاطه گر تمام رئوس گراف باشد.

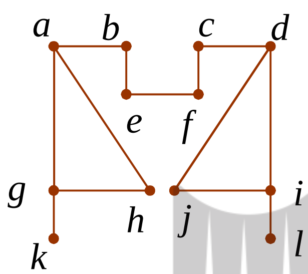
تمرین۳ : نمودار گرافی را رسم کنید که در آن هر رأس احاطه گر تمام رئوس باشد. این گراف را چـه مـی نامند؟

تمرین۴ : یک رأس حداکثر چند رأس را می تواند احاطه کند؟ به نظر شما این پاسخ ، با درجـه‌ی آن رأس چه ارتباطی می تواند داشته باشد. با رسم شکل یک مثال بیان کنید.

مجموعه‌ی احاطه گر

زیر مجموعه‌ی ناتهی D از مجموعه‌ی رئوس گراف G را یک مجموعه‌ی احاطه گر گـراف G مـی نامنـد، هرگاه هر رأس Gتوسط اعضای D احاطه شوند. به عبارتی دیگر هر زیر مجموعـه ماننـد Dاز مجموعـه‌ی رئوس یک گراف را یک **مجموعه‌ی احاطه گر** می نامند، هرگاه هر رأس از گراف یـا عـضو D باشـد یـا حداقل با یکی از رئوس عضو D مجاور باشد.

مثال : مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,g,i,k,l\}$،یک مجموعه‌ی احاطه گـر گراف مقابل است.



نتیجه :

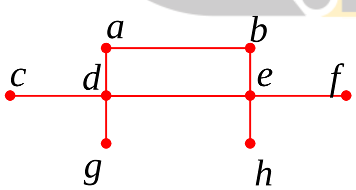
۱ : مجموعه‌ی شامل تمام رأس های گراف ، همواره یک مجموعه‌ی احاطه گر است.

۲ : برای هر گراف می توان مجموعه‌های احاطه گر متفاوت تعریف کرد.

۳ : هر مجموعه‌ی شامل یک مجموعه‌ی احاطه گر، احاطه گر است.

تمرین۵ : نمودار یک گراف ۵ رأسی را طوری رسم کنید که مجموعه‌ی احاطه گر آن یک عضوی باشد.

تمرین۶ : برای گراف زیر ، یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید که کمترین تعداد عضو را داشته باشد.



***

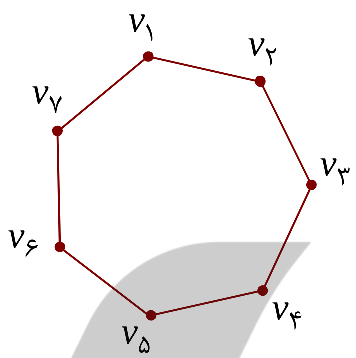
مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم و عدد احاطه گری

با توجه به تعریف مجموعه‌ی احاطه گر، مشاهده شد که یک گراف می تواند مجموعه های احاطه گر متفاوتی داشته باشد. از بین تمام مجموعه های احاطه گر یک گراف ، مجموعه ای را که کمترین تعداد عضو را داشته

باشد، را **مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم** آن گراف می نامند و تعداد عضوهای آن را **عدد احاطـه گـری** گراف می گویند و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهند.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم از گراف G، یک $\gamma-$ مجموعه می نامند.

مثال : برای گراف زیر مجموعه‌ی $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ ، یک مجموعه‌ی احاطه گر اسـت و مجموعـه هـای $\{v_1, v_4, v_7\}$ و $\{v_1, v_2, v_5\}$ دو مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم می باشند و داریم $\gamma(G) = 3$

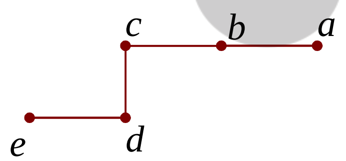


تمرین۷ : آیا گراف مثال فوق می تواند یک مجموعه‌ی احاطه گر دو عضوی داشته باشد؟ چرا؟

پاسخ : خیر ، این گراف دارای ۷ رأس بوده و درجه‌ی هر رأس آن ۲ می باشد و چون هـر رأس حـداکثر ۳ رأس را می تواند احاطه کند، پس اگر مجموعه‌ی احاطه گری آن دو عضوی باشد، فقط به تعداد $2 \times 3 = 6$ عضو احاطه می شوند و لذا یک رأس احاطه نخواهد شد.

تمرین۸ : یک گراف ۵ رأسی با عدد احاطه گری۲ رسم کنید.

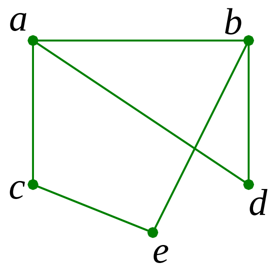
پاسخ :



مثال : جدول زیر فاصله‌ی بین شهر های e و d و c و b و a بر حسب کیلومتر را نشان می دهد.

a				
۲۸	b			
۲۵	۳۲	c		
۲۳	۱۵	۳۵	d	
۴۰	۲۲	۲۱	۴۸	e

می خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرها نصب کنیم. امّا هر ایستگاه فقط می تواند تا ۳۰ کیلومتر را پوشش دهد. برای تعیین حداقل تعداد ایستگاه های مورد نیاز لازم است، شهر ها را رأس و فاصله های مستقیم بین دو شهر اگر بیشتر۳۰ کیلومتر نباشد را با یک یال نشان می دهیم. بدیهی است که هدف این مسئله تعیین مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم است.



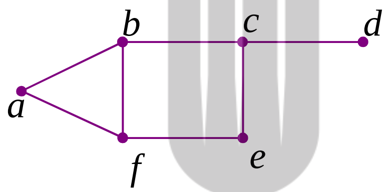
به نظر شما، مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم آن کدام است؟

پاسخ : $\{a,b\}$ یا $\{b,c\}$ یا $\{a,e\}$

آیا این گراف می تواند، مجموعه‌ی احاطه گر یک عضوی داشته باشد؟

پاسخ : خیر، بالاترین درجه در این گراف مربوط به رئوس a و b می باشد. حال اگر مجموعه‌ی احاطه گری این مجموعه فقط شامل یکی از این دو رأس باشد، هر یک حداکثر ۴ = ۱ + ۳ رأس را احاطه کند که در این صورت یک رأس باقی می ماند.

تمرین۹ : گراف مقابل را در نظر بگیرید. سپس:



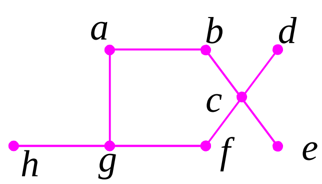
الف : یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید.

ب : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم بنویسید.

پاسخ : الف : $\{a,b,e,d\}$ ب : $\{c,f\}$

تمرین۱۰: یک گراف ۸ رأسی با عدد احاطه گری۲ رسم کنید که دارای فقط یک مجموعه‌ی احاطه گر باشد.

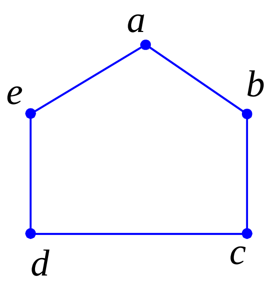
پاسخ : در گراف مقابل تنها مجموعه‌ی $\{c,g\}$ احاطه گر می نیمم می باشد.



توجه داشته باشید که در این گراف، رأس c که درجه‌ی آن ۴ می باشد، می تواند ۵ رأس را احاطه کند. همچنین رأس g که درجه‌ی آن ۳ است ، می تواند ۳ رأس را دیگر گراف را احاطه کند.

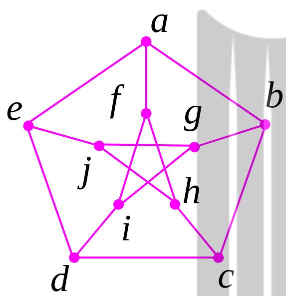
تمرین ۱۱ : یک گراف ۲ – منتظم ۵ رأسی رسم کنید که دارای بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم با اندازه‌ی۲ باشد. حداقل دو تا از مجموعه های احاطه گر می نیمم آن را بنویسید.

پاسخ : این گراف دارای بیش از دو مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم است. از جمله:



$\{a,c\}$ و $\{a,d\}$

تمرین ۱۲ : مشخص کنید، کدامیک از مجموعه ها زیر برای گراف مقابل احاطه گر است و کدام یک احاطه گر نیست؟



الف : $A=\{a,b,c,d,e\}$ ب : $B=\{f,g,h,i,j\}$

پ : $C=\{a,b,j,h,g\}$ ت : $D=\{a,i,h\}$

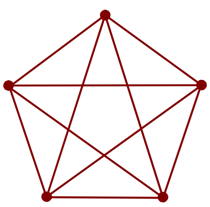
ث : $E=\{f,g,h,e,d\}$ ج : $F=\{f,g,h,e\}$

پاسخ : همه‌ی مجموعه ها بجز C احاطه گر هستند.

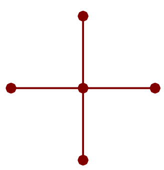
تمرین۱۳: با توجه به تمرین قبل تعیین کنید که در کدام مجموعه‌ی احاطه گر، رأس یا رأس هایی وجود دارد که با حذف آن مجموعه‌ی باقی مانده هنوز احاطه گر است.

پاسخ : اگر از مجموعه‌ی احاطه گر $E=\{f,g,h,e,d\}$ رأس d را حذف کنیم. مجموعه‌ی جدید باز احاطه گر خواهد بود.

نتیجه : مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم گراف، ممکن است منحصر بفرد نباشد.



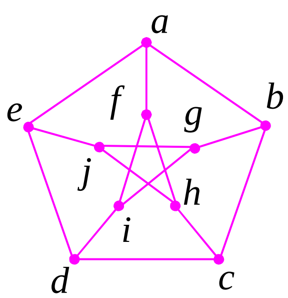
توجه : در هر گراف کامل هر رأس می تواند یک مجموعه‌ی احاطه گر گراف باشد. بنابراین در هر گراف کامل مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم، فقط یک عضو دارد، یعنی عدد احاطه گری برابر یک است. اما عکس این مطلب درست نمی باشد. زیرا ممکن است عدد احاطه گری یک گراف یک عضوی باشد ولی آن گراف کامل نباشد. به گراف های مقابل توجه کنید.



***

مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال

یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رئوس آن، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نیمال می نامند.

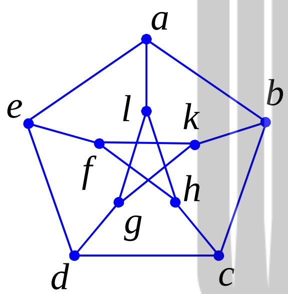


مثال : در گراف مقابل مجموعه‌ی $\{c, j, f\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال است. زیرا با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نمی باشد.

توجه :

۱ : برای بررسی می نیمال بودن یا نبودن یک مجموعه‌ی احاطه گـر، ابتـدا یک رأس را حذف کنید و احاطه گر بودن یا نبودن مجموعه‌ی حاصل را بررسی کنید. سپس با برگرداندن این رأس ، رأس دیگری را حذف کنید و بررسی احاطه گر بودن را تکرار نمایید. این عمل را برای تمامی رأس ها انجام دهید.

۲ : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال، ممکن است احاطه گر مینیمم نباشد ولی هر مجموعه‌ی احاطه گـر مینیمم، همواره می نیمال است.



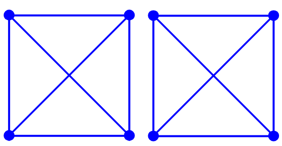
تمرین۱۴ : با توجه به گراف مقابل یک مجموعه‌ی احاطه گر مـی نیمـال بنویسید که مینیمم نباشد.

پاسخ : مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ احاطه گر می نیمال است ولی می نیمم نیست. مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم این گراف $\{c,l, f\}$ می باشد.

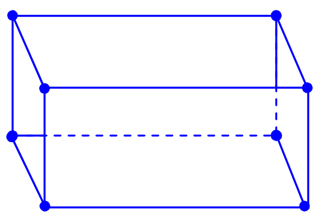
تمرین۱۵ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف : مجموعه‌ی احاطه گر هر گراف، مساوی مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم آن است.

ب : مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم هر دو گراف زیر یک مجموعه‌ی دو عضوی است.



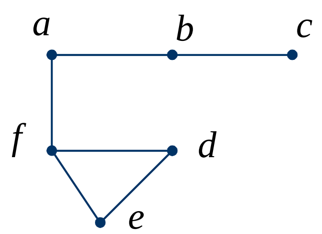
(الف)



(ب)

پاسخ : الف : نادرست   ب : درست

تمرین ۱۶ : در گراف روبرو



الف : مجموعه ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه گر باشد.

ب : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال بنویسید.

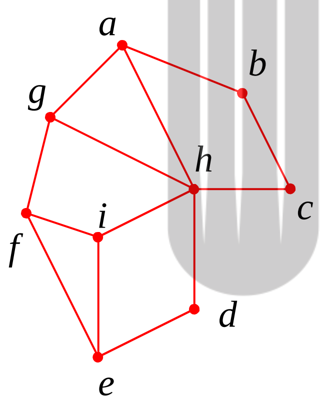
پ : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم بنویسید.

ت : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال بنویسید که می نیمم نباشد.

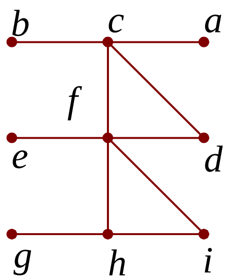
پاسخ :

	مجموعه	توصیف
الف	$\{a,c,e,d\}$	مجموعه‌ی احاطه گر
ب	$\{a,e,c\}$	مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال
پ	$\{f,b\}$	مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم
ت	$\{a,e,c\}$	مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال که می نیمم

توجه: اگر یک مجموعه‌ی احاطه گر دلخواه یک گراف غیر می نیمال باشد، با حذف برخی از رأس های آن به یک مجموعه‌ی می نیمال تبدیل می شود.



مثال : با توجه به گراف مقابل، واضح است که مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ یک مجموعه‌ی غیر مینیمال است. از آنجا که با حذف برخی از رأس های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه گر خواهد بود، لذا احاطه گر می نیمال نیست. حال با حذف سه رأس e و c و a از آن ، مجموعه‌ی $\{b,d,f\}$ حاصل می شود که باز هم احاطه گر است. امّا چون مجموعه‌ی $\{b,d,f\}$ با حذف هر یک از رأس هایش دیگر احاطه گر نخواهد بود، لذا احاطه گر می نیمال است.



تمرین ۱۷ : با توجه به گراف شکل مقابل، به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : مجموعه ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر باشد.

ب : مجموعه ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر می نیمال باشد.

پ : یک مجموعه‌ی احاطه گر سه عضوی مشخص کنید.

ت : آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b و e و g را احاطه کند؟

ث : حداقل تعداد رأس هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می کنند، چند است؟

پاسخ :

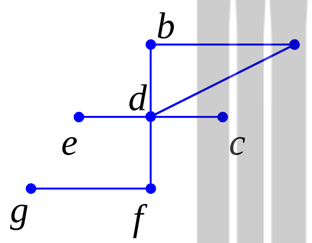
الف : $\{c, f, i, g\}$ ب : $\{c, f, g\}$ پ : $\{c, e, h\}$ ت : خیر ث : $\gamma(G) = ۳$

***

ویژگی مکمل یک مجموعه‌ی احاطه گر

سئوال این است که آیا مکمل یک مجموعه‌ی احاطه گر یک گراف، احاطه گر است؟ برای پاسخ به این سوال مسئله‌ی زیر را دنبال کنید.

مسئله : گراف مقابل را در نظر بگیرید.



الف : مجموعه‌ی رئوس گراف را بنویسید.

ب : برای این گراف یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید و آن را D بنامید.

ج : مجموعه‌ی مکمل، مجموعه‌ی D را بنویسید. آیا این مجموعه نیز احاطه گر است؟ چرا؟

پاسخ :

الف:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

ب :

$$D = \{a, d, g\}$$

ج :

$$D' = V - D = \{a, b, c, d, e, f, g\} - \{a, d, g\} = \{b, c, e, f\}$$

این مجموعه نیز احاطه گر است. زیر اعضای این مجموعه، تمام رأس های گراف را احاطه می کنند.

توجه داشته باشید که این ویژگی برای هر گرافی درست نمی باشد. به گزاره‌ی زیر دقت کنید.

اگر G یک گراف همبند از مرتبه‌ی حداقل۲ باشد و D یک مجموعه‌ی احاطه گر آن باشد.آنگاه ثابت می شود که مجموعه‌ی $D' = V - D$ نیز یک مجموعه‌ی احاطه گر گراف است.

***

سقف و کف یک عدد حقیقی

اگر x یک عدد حقیقی باشد. در این صورت :

الف : کف x که با نماد $\lfloor x \rfloor$ نمایش داده می شود به شکل زیر تعریف می شود.

اگر x عدد صحیح باشد، آنگاه $\lfloor x \rfloor = x$

اگر x عدد صحیح نباشد، آنگاه $\lfloor x \rfloor$ برابر بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x است.

مثال :

$$\lfloor ۳/۵ \rfloor = ۳ \quad \text{و} \quad \lfloor ۵ \rfloor = ۵ \quad \text{و} \quad \lfloor -۴/۷ \rfloor = -۵$$

توجه : کف x همان جزء صحیح x است. یعنی $[x] = \lfloor x \rfloor$

ب : سقف x که با نماد $\lceil x \rceil$ نمایش داده می شود به شکل زیر تعریف می شود.

گر x عدد صحیح باشد، آنگاه $\lceil x \rceil = x$

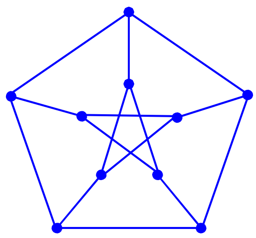
اگر x عدد صحیح نباشد، آنگاه $\lceil x \rceil$ برابر کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از x است.

مثال :

$$\lceil ۳/۵ \rceil = ۴ \quad \text{و} \quad \lceil ۵ \rceil = ۵ \quad \text{و} \quad \lceil -۴/۷ \rceil = -۴$$

تمرین ۱۸: اگر ظرفیت یک تاکسی، چهار نفر با احتساب راننده باشد. برای جابجایی ۱۸ نفر به چند تاکسی نیاز داریم.

پاسخ : $\left\lceil \frac{۱۸}{۴} \right\rceil = ۵$



تمرین ۱۹ : با توجه به نمودار مقابل، تعیین کنید که حداقل برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس چند رأس لازم است؟ چرا؟

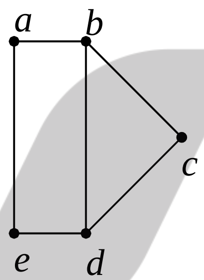
پاسخ : چون در هر گراف ، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می کند. لذا هر رأس می تواند حداکثر به تعداد یک واحد بیشتر از درجه اش را احاطه کند. در این گراف درجه ی هر رأس برابر ۳ می باشد. لذا هر رأس به تعداد ۴ رأس را احاطه می کند. حال چون ۱۰ رأس داریم لذا حداقل $۳ = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطه‌ی همه‌ی رئوس لازم است.

نتیجه : با استدلالی مشابه استدلال تمرین فوق ، نتیجه می شود که اگر در یک گراف n رأسـی ، مـاکزیمم درجات یک گراف Δ باشد، به تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ رأس نمی توانند تمام رئوس را احاطه کنند[1].

یعنی اگر D یک مجموعه‌ی احاطه گر یک گراف باشد، آنگاه $n(D) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ و از آنجا کـه $\gamma(G)$ نیز اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه گر است. همواره داریم : $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$

به عبارتی دیگر $\gamma(G)$ نمی تواند از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ کمتر شود، بلکه مساوی یا بیشتر از آن است.

تمرین ۲۰ : عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص کنید و ادعای خود را ثابت کنید.

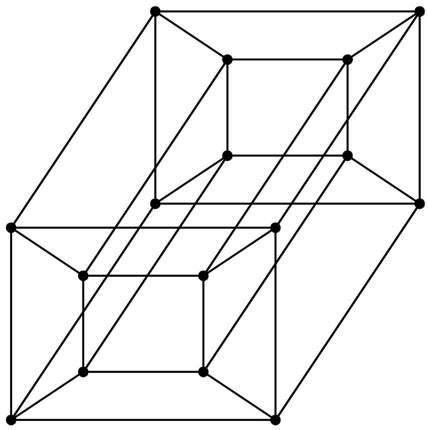


پاسخ : به سادگی معلوم است که مجموعه‌ی دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر اسـت. بنـابراین عدد احاطه گری این گراف کوچکتر یا مساوی۲ است. یعنی $\gamma(G) \leq ۲$ امّا اگر $\gamma(G) = ۱$، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس وصل است). یعنی رأسی با درجه‌ی ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می بینیم که چنین رأسی وجـود نـدارد و لـذا $\gamma(G) > ۱$. بنابراین $۱ < \gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G) = ۲$

روش دیگر : می دانیم که $\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ یک کران پایین برای $\gamma(G)$ است. بنابراین $\gamma(G) \geq ۲$ و با توجه به اینکه مجموعه‌ی احاطه گر دو عضوی ارائه شده است، لذا $\gamma(G) = ۲$

[1] . یعنی عدد حاصل یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری مجموعه است. توجه داشته باشید که برای مثال در مجموعه‌ی $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ عدد ۹ و هر عدد صحیح بزرگتر از۹ یک کران بالا برای مجموعه است. ۹ کوچکترین کران بالا است. همچنین عدد ۵ و هر عدد صحیح کمتر از ۵ یک کران پایین این مجموعه می باشد و ۵ بزرگترین کران پایین آن است.

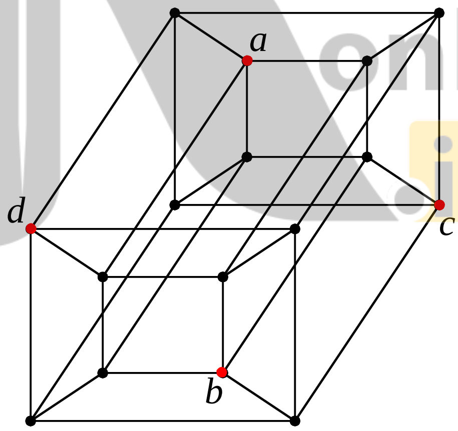
تمرین ۲۱ : عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص کنید و ادعای خود را ثابت کنید.



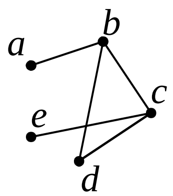
پاسخ : این گراف یک گراف منتظم ۱۶ رأسی است و درجه‌ی هر رأس آن ۴ می باشد. و لذا

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۶}{۴+۱} \right\rceil = ۴$$

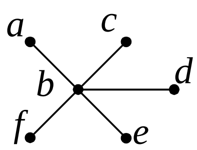
بنابراین یک مجموعه‌ی احاطه گر با تعداد رأس کمتر از ۴ رأس نمی تواند داشته باشد. زیرا اگر داشته باشد به تعداد کمتر۱۶ رأس احاطه می شوند. از طرفی چون $\{a,b,c,d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است، پس $\gamma(G) = ۴$



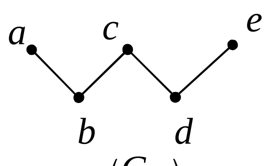
تمرین ۲۲ : عدد احاطه گری را برای هر یک از گراف های زیر تعیین کنید.



$(G_۱)$



$(G_۲)$



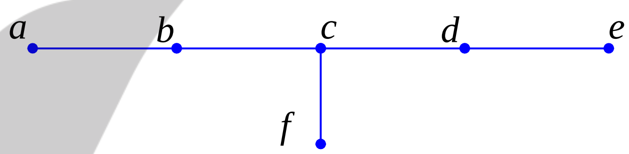
$(G_۳)$

پاسخ :

گراف	$G_۱$	$G_۲$	$G_۳$
کران پایین	$\gamma(G_۱)\geq\left\lceil\frac{۵}{۳+۱}\right\rceil=۲$	$\gamma(G_۲)\geq\left\lceil\frac{۶}{۵+۱}\right\rceil=۱$	$\gamma(G_۳)\geq\left\lceil\frac{۵}{۲+۱}\right\rceil=۲$
مجموعه‌ی احاطه گر	$\{a,c\}$	$\{b\}$	$\{b,d\}$
عدد احاطه گری	$\gamma(G_۱)=۲$	$\gamma(G_۲)=۱$	$\gamma(G_۳)=۲$

تمرین ۲۳ : گرافی با ۶ رأس رسم کنید که عدد احاطه گر آن برابر با $\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil$ نباشد.

پاسخ :



$$\gamma(G)\geq\left\lceil\frac{۶}{۳+۱}\right\rceil=\left\lceil\frac{۶}{۴}\right\rceil=۲$$

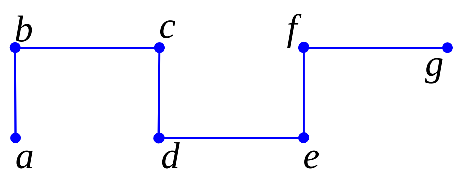
پس کران پایین عدد احاطه گری این گراف ۲ است. امّا چون مجموعه‌ی احاطه گر گراف $\{a,d,c\}$ می باشد.

لذا

$$\gamma(G)=۳$$

تمرین ۲۴ : گرافی رسم کنید که عدد احاطه گر آن برابر با $\left\lceil\frac{n}{\Delta+۱}\right\rceil$ باشد.

پاسخ : درگراف $P_۷$ عدد احاطه گری برابر $۳=\left\lceil\frac{۷}{۲+۱}\right\rceil$



تمرین ۲۵ : در هر قسمت تعیین کنید، آیا گراف ۲ – منتظم ۷ رأسی وجود دارد که دارای شرایط ذکر شده باشد؟ در صورت وجود، گراف را نیز رسم کنید.

الف : عدد احاطه گر آن ۲ باشد.

ب : عدد احاطه گر آن ۳ باشد.

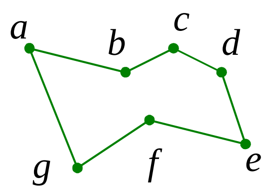
پاسخ :

الف : چنین گرافی وجود ندارد، زیرا عدد احاطه گری این گراف برابر

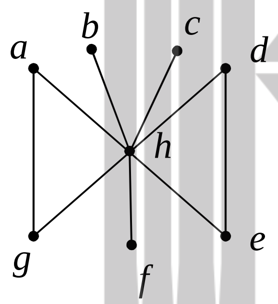
$$\gamma(G)=\left\lceil \frac{۷}{۲+۱} \right\rceil = ۳$$

که بیشتر از ۲ می باشد.

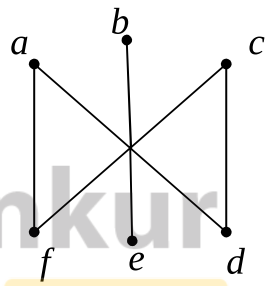
ب : چنین گرافی وجود دارد. مجموعه‌ی $\{a,d,e\}$ احاطه گر است و لذا $\gamma(G)=۳$



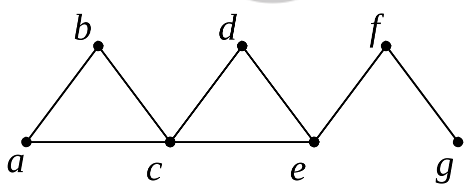
تمرین۲۶ : در هر یک از گراف های زیر، ابتدا کران پایین برای عدد احاطه گری گراف بیابید و سپس عدد احاطه گر آن را مشخص کنید.



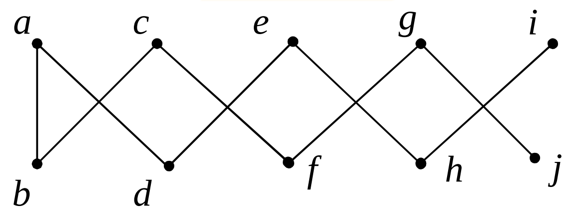
$(G_۱)$



$(G_۲)$



$(G_۳)$

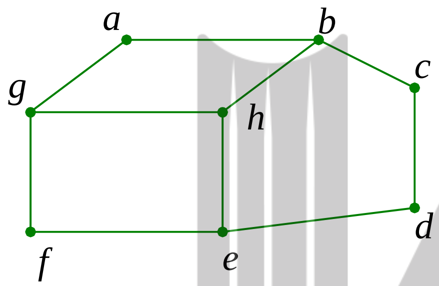


$(G_۴)$

پاسخ :

عدد احاطه گری	مجموعه‌ی احاطه گر	کران پایین	گراف
$\gamma(G_۱)=۱$	$\{h\}$	$\gamma(G_۱)\geq\left\lceil \frac{۸}{۷+۱}\right\rceil=۱$	$G_۱$
$\gamma(G_۲)=۳$	$\{a,b,c\}$	$\gamma(G_۲)\geq\left\lceil \frac{۶}{۲+۱}\right\rceil=۲$	$G_۲$
$\gamma(G_۳)=۲$	$\{g,c\}$	$\gamma(G_۳)\geq\left\lceil \frac{۷}{۴+۱}\right\rceil=۲$	$G_۳$
$\gamma(G_۴)=۴$	$\{g,c,d,h\}$	$\gamma(G_۴)\geq\left\lceil \frac{۱۰}{۲+۱}\right\rceil=۴$	$G_۴$

تمرین ۲۷ : با توجه به گراف مقابل، به سئوالات زیر



پیرامون هر یک از مجموعه های زیر پاسخ دهید.

$A=\{b,d,g,h\}$ و $B=\{a,d,e\}$

$C=\{d,g,h\}$ و $D=\{d,g\}$

الف : کدام یک از مجموعه های زیر یک مجموعه‌ی احاطه گر است؟

ب : از مجموعه های احاطه گر فوق کدام ها احاطه گر می نیمال است؟

پ : از مجموعه های احاطه گر فوق کدام ها احاطه گر می نیمم است؟

ت : عدد احاطه گری را تعیین کنید.

پاسخ :

الف : مجموعه های A و B و C احاطه گر هستند ولی مجموعه‌ی D احاطه گر نیست.

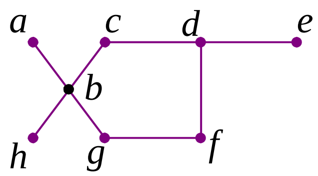
ب : مجموعه های B و C احاطه گر می نیمال هستند ولی مجموعه‌ی A احاطه گر می نیمال نیست.

پ : مجموعه های B و C احاطه گر می نیمم هستند ولی مجموعه‌ی A احاطه گر می نیمم نیست.

ت : $\gamma(G)\geq\left\lceil \frac{۸}{۳+۱}\right\rceil=۲$ ولی $\{h,d,g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر است، پس $\gamma(G)=۳$

تمرین۲۸ : در گراف شکل مقابل،

الف : مجموعه‌ی احاطه گری بنویسید که می نیمال باشد ولی می نیمم نباشد.



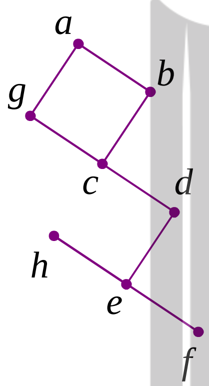
ب : عدد احاطه گری این گراف را تعیین کنید.

پاسخ :

الف : $\{a,h,c,e,f\}$

ب : $\left\lceil \frac{۸}{۴+۱} \right\rceil = ۲$ و $\gamma(G) \geq$ و چون $\{b,d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر پس $\gamma(G) = ۲$

تمرین۲۹ : عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را تعیین کنید.



پاسخ : یک کران پایین برای $\gamma(G)$ برابر $\left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ است. امّا در استدلال های زیر نشان خواهیم داد که ۲ رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف کافی نیست.

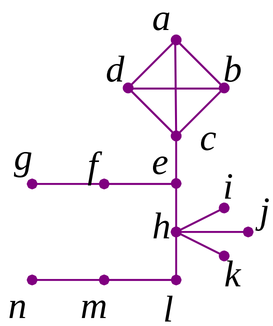
اولاً : برای احاطه کردن رئوس a و b و c و d و g حداقل دو رأس لازم است.

زیرا $\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil = ۲$

ثانیاً : برای احاطه کردن رئوس e و f و h حداقل یک رأس لازم است. زیرا $\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$

بنابراین حداقل ۳ رأس برای احاطه کردن تمام رئوس گراف لازم است. این سه رأس عبارتند از a و c و e می باشند. لذا $\gamma(G) = ۳$

تمرین۳۰ : عدد احاطه گری گراف شکل زیر را تعیین کنید.



پاسخ : یک کران پایین برای $\gamma(G)$ برابر $\left\lceil \frac{14}{5+1} \right\rceil = 3$ است. امّا در استدلال های زیر نشان خواهیم داد که ۳ رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف کافی نیست.

اولاً : برای احاطه کردن رئوس a و b و c و d حداقل یک رأس لازم است. زیرا $1 = \left\lceil \frac{4}{3+1} \right\rceil$

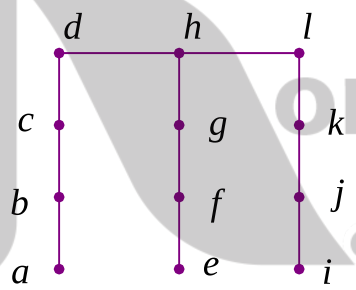
ثانیاً : برای احاطه کردن رئوس e و f و g حداقل یک رأس لازم است. زیرا $1 = \left\lceil \frac{3}{2+1} \right\rceil$

ثالثاً : برای احاطه کردن رئوس h و i و j و k حداقل یک رأس لازم است. زیرا $1 = \left\lceil \frac{4}{5+1} \right\rceil$

رابعاً : برای احاطه کردن رئوس l و m و n حداقل یک رأس لازم است. زیرا $1 = \left\lceil \frac{3}{2+1} \right\rceil$

بنابراین حداقل ۴ رأس برای احاطه کردن تمام رئوس گراف لازم است. این چهار رأس عبارتند از c و f و h و m می باشند. لذا $\gamma(G) = 4$

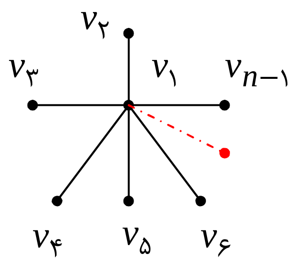
تمرین ۳۱ : عدد احاطه گری گراف شکل زیر را تعیین کنید.



پاسخ : برای احاطه کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b انتخاب شود که به دلیل بالاتر بودن درجه، بهتر است b انتخاب شود. به همین صورت رئوس j و f را نیز می توان در مجموعه‌ی احاطه گر در نظر گرفت. مشاهده می شود که مجموعه‌ی $\{b, f, j\}$ تمام رئوس را احاطه نمی کند و سه رأس d و h و l توسط این مجموعه احاطه نمی شوند لذا مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ را تشکیل می دهیم که احاطه گر تمام رئوس می باشد. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی توان تمام رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا اگر برای مثال با ۳ رأس، تمام رئوس این گراف احاطه می شوند، چون حداکثر درجه‌ی رئوس ۳ می باشد، پس هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی کند. لذا باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲

رأس گراف احاطه شوند. این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجه ۳ داشته باشیم و چنین رأس هایی در این گراف وجود ندارد. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه کردن این گراف همان ۴ است.

تمرین ۳۲ : اگر در یک گراف مانند G داشته باشیم $\gamma(G)=۱$. در این صورت توصیف هایی برای این گراف بنویسید.



پاسخ : عدد احاطه گری این گراف برابر ۱ است. بنابر این یک رأس وجود دارد که سایر رئوس را احاطه می کند.

اگر این گراف n رأسی فرض شود، لذا گراف باید $n-۱$ یال داشته باشد.

در حالتی که گراف کامل باشد. حداکثر تعداد یال های آن برابر $\dfrac{n(n-۱)}{۲}$ می باشد. در این صورت $\Delta(G)=n-۱$ است.

تمرین ۳۳ : مقدار $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر عدد طبیعی n مشخص کنید.

پاسخ : در گراف های P_n و C_n بزرگترین درجه رأس ها برابر ۲ می باشد. بنابراین:

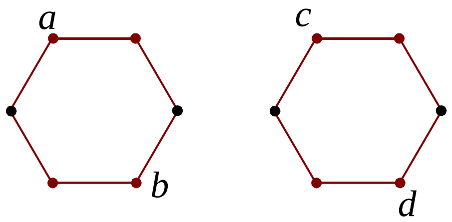
$$\gamma(P_n)=\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{۲+۱} \right\rceil=\left\lceil \frac{n}{۳} \right\rceil$$

تمرین ۳۴ : اگر G یک گراف $k-$ منتظم n رأسی باشد. نشان دهید که $\gamma(G)\geq\left\lceil \dfrac{n}{k+۱} \right\rceil$

پاسخ : در هر گراف $k-$ منتظم n رأسی $\Delta=\sigma=k$ می باشد. بنابراین

$$\gamma(G)\geq\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil=\left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil$$

تمرین ۳۵ : یک گراف ۲− منتظم ۱۲ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار را داشته باشد.

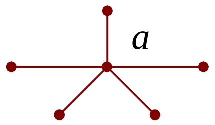


پاسخ : مجموعه‌ی احاطه گری گراف مقابل $\{a,b,c,d\}$ می باشد که ۴ عضوی بوده و کمترین تعداد عضو را دارد.

$$\gamma(G)\geq\left\lceil \frac{۱۲}{۲+۱} \right\rceil=۴$$

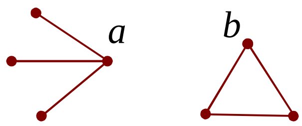
تمرین ۳۶ : یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$ مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد، رسم کنید.

پاسخ : مجموعه‌ی احاطه گری گراف مقابل $\{a\}$ است.



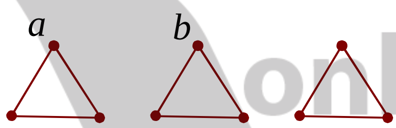
تمرین ۳۷ : یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$ مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی دو باشد، رسم کنید.

پاسخ : مجموعه‌ی احاطه گری گراف مقابل $\{a,b\}$ است.



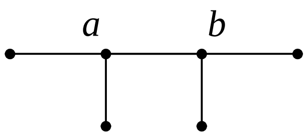
تمرین ۳۸ : فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \le n$ در این صورت روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه گری آن k باشد، ارائه کنید.

پاسخ : کافی است که یک گراف k بخشی رسم کنیم که در هر بخش یک رأس دیگر رئوس آن بخش را احاطه کند. برای مثال مجموعه‌ی احاطه گری گراف مقابل $\{a,b,c\}$ است.



تمرین ۳۹ : یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه-ی ۲ داشته باشد.

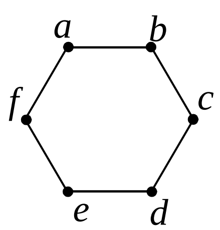
پاسخ : تنها مجموعه‌ی احاطه گر گراف مقابل مجموعه‌ی $\{a,b\}$ است.



تمرین ۴۰ : یک گراف۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

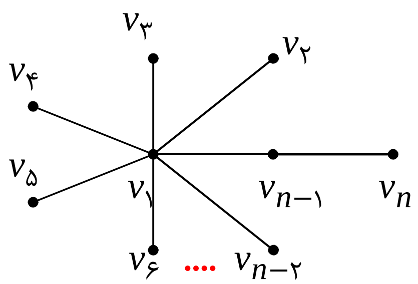
پاسخ : گراف ۲– منتظم ۶ رأسی این شرایط را دارد.

مجموعه های احاطه گر این گراف $\{a,d\}$ و $\{f,c\}$ و $\{e,b\}$



تمرین ۴۱ : توضیح دهید که چگونه می توان یک گراف n رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کرد طوری که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

پاسخ : مطابق شکل روبرو باید گراف را رسم کرد. یک قسمت خطی با سه رأس و قسمت ستاره ای که روی یکی از رئوس انتهایی قسمت اوّل ساخته می شود. قسمت ستاره ای باید دارای $n-۲$ باشد.



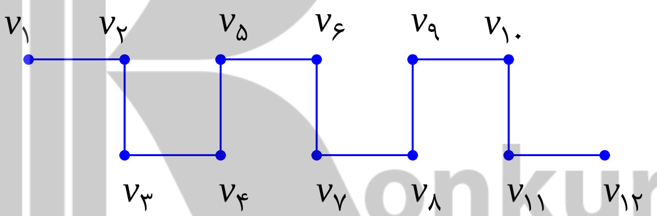
این گراف دارای دو مجموعه‌ی احاطه گر دو عضوی به شکل $\{v_{۱},v_{n-۱}\}$ و $\{v_{۱},v_n\}$ است.

تمرین ۴۲ : گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید. سپس

الف : یک مجموعه‌ی $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب : یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

پاسخ :



الف : مجموعه‌ی $\{v_{۲},v_{۵},v_{۸},v_{۱۱}\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم چهار رأسی است و لذا $۴-$ مجموعه است.

ب : مجموعه‌ی $\{v_{۱},v_{۳},v_{۵},v_{۷},v_{۹},v_{۱۱}\}$ ، یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال ۶ رأسی است.

تمرین برای حل :

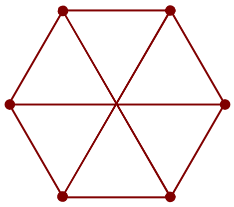
۴۳ : در هر مورد جای خالی را طوری کامل کنید که گزاره‌ی حاصل درست باشد.

الف : تعداد عضو های یک مجموعه‌ی احاطه گر با کمترین تعداد عضو را .... می نامند.

ب : بیشترین تعداد اعضای یک مجموعه‌ی احاطه گر برابر تعداد .... گراف است.

پ : یک مجموعه‌ی احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر.......... می نامند.

۴۴ : برای گراف مقابل یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم بنویسید.

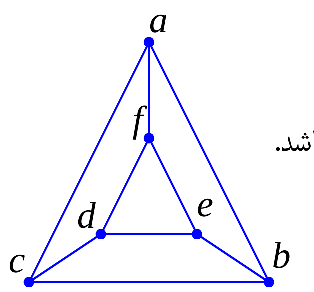


۴۵ : برای گراف مقابل

الف : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمم بنویسید.

ب : یک مجموعه‌ی احاطه گر بنویسید که مینیمم نباشد.

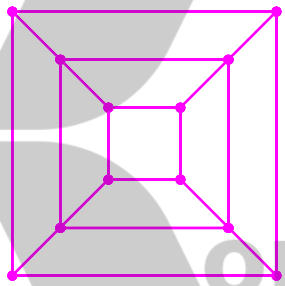
ج : یک مجموعه‌ی احاطه گر می نیمال بنویسید.



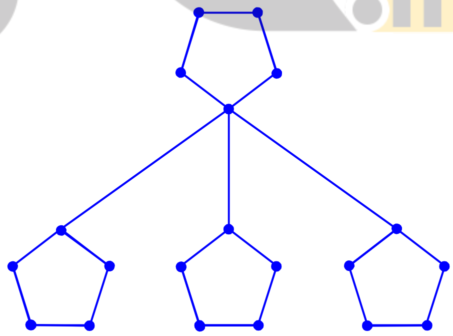
۴۶ : گراف های P_9 و P_{10} را رسم کنید و عدد احاطه گری هر یک را مشخص کنید.

۴۷ : گراف های C_9 و C_{10} را رسم کنید و عدد احاطه گری هر یک را مشخص کنید.

۴۸ : عدد احاطه گری گراف زیر را تعیین کنید.



۴۹ : عدد احاطه گری گراف زیر را تعیین کنید.



***