بروزترین و برترین

سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

درس دوّم : بخش پذیری در اعداد صحیح

در این درس به بررسی مفهوم تقسیم پذیری در اعداد صحیح می پردازیم و به دنبال آن ویژگی های تقسیم پذیری و بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح را بررسی می کنیم. در نهایت نیز قضیه‌ی تقسیم و کاربرد آن و افزار مجموعه‌ی اعداد صحیح را بیان می کنیم.

تقسیم پذیری

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ گوییم a بر b بخشپذیر است، هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که $a = bq$ (یعنی باقی مانده‌ی تقسیم a بر b برابر صفر باشد.)

اگر a بر b بخشپذیر باشد، می نویسند $b|a$ و می خوانند b عدد a را عاد می کند.[1] (b عدد a می شمارد.)

همچنین اگر a بر b بخشپذیر نباشد، می نویسند $b \nmid a$

مثال :

۱: عدد صحیح ۲۴ بر ۶ بخش پذیر است، پس: $۶|۲۴$

۲: عدد صحیح ۵۰- بر ۵ بخش پذیر است، پس: $۵|-۵۰$

۳: عدد صحیح ۱۲ بر ۳- بخش پذیر است، پس: $-۳|۱۲$

۴: عدد صحیح ۳۰- بر ۱۰- بخش پذیر است، پس: $-۱۰|-۳۰$

۵: عدد صحیح ۲۵ بر ۶ بخش پذیر نیست، پس: $۶\nmid۲۵$

تمرین ۱ : با توجه به تعریف عادکردن، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳ = ... \times .....$

ب) $۹۱ = ۷ \times .... \Leftrightarrow .....|۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴ = ... \times (-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵ = ۵ \times .....$

ج) $a|۱ \Leftrightarrow a = ...$ یا $a = ...$

ث) $۰ = ۱۸ \times .... \Leftrightarrow ۱۸|.....$

چ) $۲۶ = ۲ \times ۱۳ \Rightarrow ۲|.....$ و $.....|۲۶$

[1] . اینکه صفر عدد صفر را می شمارد به عنوان قرار داد پذیرفته می شود.

تمرین۲ : نشان دهید که $۶^{۵۰۲}$ بر ۹ بخش پذیر است.

حل:

$$۶^{۵۰۲} = ۶ \times ۶ \times ۶^{۵۰۰} = ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۶^{۵۰۰} = (۳ \times ۳) \times (\underbrace{۲ \times ۲ \times ۶^{۵۰۰}}_{q}) = ۹q \rightarrow ۹|۶^{۵۰۲}$$

تمرین۳ : اگر n و m دو عدد طبیعی دلخواه و $m \leq n$ باشند. نشان دهید که $a^m \mid a^n$

حل : چون $m \leq n$ پس واضح است که $a^n = a^m \times a^{n-m}$ و این یعنی وجود دارد عدد صحیح q که

$a^n = a^m \times q$. لذا $a^m \mid a^n$

مثال :

$$۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \rightarrow ۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \xrightarrow{۳^۴ = q} ۳^۹ = ۳^۵ \times q \rightarrow ۳^۵ \mid ۳^۹$$

تمرین۴ : برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید که $۳|۲^{۳n} - ۵^n$

حل:

$$۲^{۳n} - ۵^n = ۸^n - ۵^n = (۸ - ۵)q = ۳q \rightarrow ۳|۲^{۳n} - ۵^n$$

تمرین۵ : ثابت کنید که $۳^{۵۲} - ۲^{۳۹}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

حل:

$$۳^{۵۲} - ۲^{۳۹} = (۳^۴)^{۱۳} - (۲^۳)^{۱۳} = (۸۱)^{۱۳} - (۸)^{۱۳} = (۸۱ - ۸)q = ۷۳q \rightarrow ۷۳ \mid ۳^{۵۲} - ۲^{۳۹}$$

نتیجه : طبق تعریف عاد کردن در اعداد صحیح، به ازاء هر عدد صحیح a همواره داریم:

الف) $a \mid a$ ب) $-a \mid a$ ج) $\pm ۱ \mid a$ د) $a \mid ۰$

***

ویژگی های رابطه‌ی عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر a عدد b را بشمارد،آنگاه هر مضرب صحیح bرا نیز می شمارد. یعنی اگر $a|b$ آنگاه $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

اثبات:

$$a|b \xrightarrow{\exists k\in Z} b=ak \to mb=mak \to mb=a(mk)$$
$$\xrightarrow{mk=q} mb=aq \to a|mb$$

برای مثال، چون $۳|۶$ آنگاه $۳|۵\times۶$

نتیجه: اگر a عدد b را بشمارد، آنگاه ثابت می شود که

الف : عدد a عدد $b^۲$ را می شمارد

ب : در حالت کلی عدد a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات: چون $a|b$ طبق ویژگی فوق $a|mb$ که در آن m عدد صحیح می باشد.

حال اگر قرار دهیم $m=b$ بدست می آید $a|b^۲$

همچنین اگر قرار دهیم $m=b^{n-۱}$ بدست می آید $a|b^n$

تمرین۶ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$

اثبات :

$$a|b \to a|mb \xrightarrow{m=-۱} a|-b$$

ویژگی ۲ : هرگاه یک عدد صحیح ، دو عدد صحیح دیگر را بشمارد، مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب آنها را می شمارد. به عبارت دیگر ، اگر $a|b$ و $a|c$ در این صورت ثابت کنید که:

الف: $a|b+c$ ب: $a|b-c$ ج: $a|bc$

اثبات: مجموعه‌ی اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است. یعنی مجموع ، تفاضل و حاصل ضرب هر دو عدد صحیح ، عددی صحیح می باشد. پس می توان نوشت:

الف :

$$\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ a \mid c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = aq_2 \end{cases}$$

$$\to b + c = aq_1 + aq_2 \to b + c = a(q_1 + q_2) \xrightarrow{q = q_1 + q_2} b + c = aq \to a \mid b + c$$

ب:

$$\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ a \mid c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = aq_2 \end{cases}$$

$$\to b - c = aq_1 - aq_2 \to b - c = a(q_1 - q_2) \xrightarrow{q = q_1 - q_2} b - c = aq \to a \mid b - c$$

ج:

$$\begin{cases} a \mid b \xrightarrow{\exists q_1 \in Z} b = aq_1 \\ a \mid c \xrightarrow{\exists q_2 \in Z} c = aq_2 \end{cases}$$

$$\to bc = (aq_1)(aq_2) \to bc = a(aq_1q_2) \xrightarrow{q = aq_1q_2} bc = aq \to a \mid bc$$

توجه کنید که :

الف : اگر $a \mid b + c$ نمی توان نتیجه گرفت که $a \mid c$ یا $a \mid b$

برای مثال $2 \mid 5 + 3$ ولی $2 \nmid 3$ و $2 \nmid 5$

ب : اگر $a \mid bc$ نمی توان نتیجه گرفت که $a \mid c$ یا $a \mid b$

برای مثال $6 \mid 3 \times 4$ ولی $6 \nmid 3$ و $6 \nmid 4$

تمرین۷ : ثابت کنید که اگر $a \mid b$ و k یک عدد صحیح غیر صفر باشد، آنگاه $ka \mid kb$ و برعکس

اثبات :

حالت اوّل

$$a \mid b \xrightarrow{k \in Z \ ,\ k \neq 0} ka \mid kb \quad ?$$

$$a \mid b \xrightarrow{q \in Z} b = aq \xrightarrow{\times k} kb = kaq \to ka \mid kb$$

حالت دوّم

$$ka|kb \xrightarrow{k\in Z\ ,\ k\neq ۰} a|b \quad ?$$

$$ka|kb \xrightarrow{\exists q\in Z} kb = kaq \to k(b-aq) = ۰$$

$$\xrightarrow{k\neq ۰} b-aq = ۰ \to b = aq \to a|b$$

تمرین۸ : ثابت کنید، اگر $a|b$ آنگاه $-a|-b$

اثبات :

$$a|b \xrightarrow{\exists k\in Z} ka|kb \xrightarrow{k=-۱} -a|-b$$

تمرین۹ : اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb+nc$ که در آن n و m عدد صحیح می باشند.

اثبات:

$$\begin{cases} a|b \to a|mb \\ a|c \to a|nc \end{cases} \to a|mb+nc$$

توجه کنید که

الف : این خاصیت برای تفریق نیز برقرار است. یعنی اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|mb-nc$

ب : این خاصیت را می توان به شکل زیر تعمیم داد.

$$\begin{cases} a|b_۱ \to a|m_۱b_۱ \\ a|b_۲ \to a|m_۲b_۲ \\ a|b_۳ \to a|m_۳b_۳ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a|b_n \to a|m_nb_n \end{cases} \to a|m_۱b_۱ + m_۲b_۲ + m_۳b_۳ + \dots + m_nb_n$$

ویژگی۳ : اگر a عدد b را بشمارد و b عدد c را بشمارد، آنگاه a عدد c را می شمارد. یعنی اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$ (خاصیت تعدی عادکردن)

حل:

$$\begin{cases} a\mid b \xrightarrow{\exists q_1\in Z} b=aq_1 \\ b\mid c \xrightarrow{\exists q_2\in Z} c=bq_2 \end{cases}$$

$$\to c=(aq_1)q_2 \to c=a(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} c=aq \to a\mid c$$

تمرین ۱۰ : ثابت کنید، اگر $a\mid b$ آنگاه $-a\mid b$

اثبات :

$$\left.\begin{matrix} -a\mid a \\ a\mid b \end{matrix}\right\} \to -a\mid b$$

تمرین ۱۱ : اگر a عدد b را بشمارد، با استفاده از خاصیت تعدی عاد کردن، ثابت کنید که a عدد b^n را نیز می شمارد. (n عدد طبیعی)

اثبات : چون $a\mid b$ و $b\mid b^n$ پس $a\mid b^n$

توجه : اگر $a\mid b^n$ ($n\in N$) آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $a\mid b$

برای مثال واضح است که ۱۰۰|۴ یعنی $۴\mid ۱۰^۲$ ولی $۴\nmid ۱۰$

ویژگی۴ : اگر a عدد b را بشمارد و c عدد d را نیز بشمارد. آنگاه اگر ac نیز عدد bd را نیز می شمارد.

یعنی اگر $a\mid b$ و $c\mid d$ در این صورت ثابت کنید که: $ac\mid bd$

اثبات :

$$\begin{cases} a\mid b \xrightarrow{\exists q_1\in Z} b=aq_1 \\ c\mid d \xrightarrow{\exists q_2\in Z} d=cq_2 \end{cases}$$

$$\to bd=(aq_1)(cq_2) \to bd=ac(q_1q_2) \xrightarrow{q=q_1q_2} bd=acq \to ac\mid bd$$

تمرین ۱۲ : برای دو عدد صحیح b و a و عدد طبیعی n ، ثابت کنید که اگر $a\mid b$ آنگاه $a^n\mid b^n$

اثبات:

$$a\mid b \xrightarrow{\exists k\in Z} b=ak \to (b)^n=(ak)^n \to b^n=a^nk^n$$

$$\xrightarrow{k^n=q\in Z} b^n=a^nq \to a^n\mid b^n$$

توجه : عکس تمرین فوق نیز برقرار است، یعنی اگر b و a دو عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، از اینکه $a^n | b^n$ نتیجه می شود که $a | b$

اثبات این موضوع خارج از اهداف کتاب است.

تمرین۱۳ : اگر برای عدد صحیح k داشته باشیم $۵ | ۴k + ۱$. ثابت کنید $۲۵ | ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$

حل :

$$۵ | ۴k + ۱ \to (۵)^۲ | (۴k + ۱)^۲ \to ۲۵ | ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \qquad (۱)$$

$$۵ | ۴k + ۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵ | ۲۰k + ۵ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲۵ + ۵ | (۱۶k^۲ + ۸k + ۱) + (۲۰k + ۵) \to ۲۵ | ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$$

تمرین۱۴ : آیا از اینکه $a | b$ و $c | d$ می توان نتیجه گرفت که $a + c | b + d$

حل : خیر نمی توان نتیجه گرفت. برای مثال $۳ | ۳$ و $۲ | ۴$ ولی $۳ + ۲ \nmid ۴ + ۳$

تمرین۱۵: فرض کنید n و m دو عدد طبیعی و $m \le n$ و $a,b \in Z$ ثابت کنید که اگر $a | b$ آنگاه $a^m | b^n$

$$a | b \to a^m | b^m \to a^m | b^{n-m} \times b^m \to a^m | b^n$$

ویژگی ۵ : اگر $a | b$ و $b \neq ۰$، آنگاه $|a| \le |b|$

اثبات : چون $a | b$ پس $b = aq$ ولی چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ لذا باید $|q| \ge ۱$

اکنون دو طرف این نامساوی را در $|a|$ ضرب می کنیم. در این صورت خواهیم داشت.

$$۱ \le |q| \to |a| \le |a| \times |q| \to |a| \le |aq| \to |a| \le |b|$$

نتیجه : اگر $a | b$ و $b | a$ آنگاه $|a| = |b|$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} a | b \to |a| \le |b| \\ b | a \to |b| \le |a| \end{array}\right\} \to |a| = |b|$$

تمرین۱۶ : اگر $a|۱$ ، آنگاه $a=\pm ۱$

اثبات :

$$\left.\begin{array}{l} ۱|a \\ a|۱ \end{array}\right\} \to |a|=۱ \to a=\pm ۱$$

تمرین۱۷ : اگر $a\neq ۰$ عدد صحیح و دو عدد $۷m+۶$ و $۶m+۵$ بر a بخش پذیر باشد. ثابت کنید:

$a=\pm ۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۷m+۶ \xrightarrow{\times ۶} a|۴۲m+۳۶ \\ a|۶m+۵ \xrightarrow{\times ۷} a|۴۲m+۳۵ \end{array}\right\} \to a|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$$\to a|۱ \to a=\pm ۱$$

تمرین۱۸: اگر $a|۳n-۲$ و $a|-۴n+۳$ نشان دهید که $a=\pm ۱$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۳n-۲ \to a|۴(۳n-۲) \\ a|-۴n+۳ \to a|۳(-۴n+۳) \end{array}\right\}$$

$$\to a|۴(۳n-۲)+۳(-۴n+۳) \to a|۱۲n-۸-۱۲n+۹ \to a|۱ \to a=\pm ۱$$

تمرین۱۹ : اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$ ، ثابت کنید که a عددی اوّل است.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۹k+۴ \xrightarrow{\times ۵} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۵k+۳ \xrightarrow{\times ۹} a|۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \to a|(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰) \to a|۷$$

و چون $a>۱$ پس a برابر ۷ (عددی اوّل) است.

توجه : اگر p یک عدد اوّل[2] باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این صورت $a=۱$ یا $a=p$

تمرین۲۰ : اگر عدد طبیعی a دو عدد $۹k+۷$ و $۷k+۶$ را عاد کند. ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} a|۷k+۶ \xrightarrow{\times ۹} a|۶۳k+۵۴ \\ a|۹k+۷ \xrightarrow{\times ۷} a|۶۳k+۴۹ \end{array}\right\} \to a|(۶۳k+۵۴)-(۶۳k+۴۹)$$

$$\to a|۵ \to a=۵ \text{ یا } a=۱$$

2. هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را اوّل گویند، هرگاه فقط بر یک و خودش بخش پذیر باشد. مانند: .... و ۱۱ و ۷ و ۵ و۳ و۲

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (ب. م. م)

عدد صحیح c را مقسوم علیه (شمارنده‌ی) مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند. یعنی $c\,|\,b$ و $c\,|\,a$

مثلاً عدد ۴ مقسوم علیه مشترک ۱۶ و ۱۲ است، زیرا ۴|۱۶ و ۴|۱۲

تعریف : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است، گوییم، هرگاه:

الف: d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد.

ب: هر مقسوم علیه مشترک دیگر a و b از d کوچکتر باشد.

به عبارت دیگر ب.م.م دو عدد a و b ، بزرگترین عدد طبیعی است که هم a و هم b بر آن بخش پذیر باشند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a,b) یا d یا $a\prod b$ نمایش می دهند.

تمرین ۲۱ : مجموعه‌ی مقسوم علیه های دو عدد ۱۸و۱۲را نوشته و سپس (ب.م.م) این دو عدد را مشخص کنید.

حل:

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۸ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶,\pm ۹,\pm ۱۸\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های ۱۲ $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۴,\pm ۶,\pm ۱۲\}$

مجموعه‌ی مقسوم علیه های مشترک $=\{\pm ۱,\pm ۲,\pm ۳,\pm ۶\}$

ب.م.م $d=(۱۲,۱۸)=۶$

نتیجه : عدد طبیعی d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b گویند، اگر وتنها اگر

۱: $d\,|\,a$ و $d\,|\,b$

۲: هرگاه $c\,|\,a$ و $c\,|\,b$ آنگاه $c\le d$

برای مثال بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۱۲ و ۱۸ عدد ۶ است و ۳ مقسوم علیه مشترک این دو عدد نیز هست. واضح است که ۶|۳ و ۶ ≥ ۳

تعریف : دو عدد صحیح b و a را نسبت به هم اوّل (متباین) گویند، هرگاه بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها یک باشد.

$$(a,b)=۱$$

برای مثال دو عدد ۷ و ۱۲ نسبت به هم اوّلند.

تمرین۲۲ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم، (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم کـه m یـک عدد صحیح و $(m,m+۱)=d$ لذا

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,m \\ d\,|\,m+۱ \end{matrix}\right\}\rightarrow d\,|\,m+۱-m\rightarrow d\,|\,۱$$

و چون d عددی مثبت است لذا $d=۱$

تمرین۲۳ : ثابت کنید که هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اوّلند.

حل : کافی است که ثابت کنیم (ب م م) هر دو عدد صحیح متوالی برابر ۱ است. فرض کنیم که k یک عدد صحیح و $(۲k+۱,۲k+۳)=d$ لذا

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,۲k+۱ \\ d\,|\,۲k+۳ \end{matrix}\right\}\rightarrow d\,|\,(۲k+۳)-(۲k+۱)\rightarrow d\,|\,۲$$

و چون d عددی مثبت و زوج نیست لذا $d=۱$

تمرین۲۴: اگر p و q دو عدد اوّل و $p\neq q$ باشد. ثابت کنید $(p,q)=۱$

اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $(p,q)=d$ و $d\neq ۱$ باشد. بنابراین :

$$\left.\begin{matrix} d\,|\,p \\ d\,|\,q \end{matrix}\right\}\xrightarrow{d\neq ۱} d=p\ ,\ d=q\rightarrow p=q$$

و با فرض مسئله تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و $d=۱$

***

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک. م. م)

عدد صحیح c را مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b گوییم، هرگاه هم بر a و هم بر b بخش پذیر باشند. یعنی $a|c$ و $b|c$

مثلاً عدد ۱۸ مضرب مشترک دو ۲ و ۳ است، زیرا ۲|۱۸ و ۳|۱۸

عدد طبیعی c را کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد صحیح غیرصفر a و b می نامیم ، هرگاه

۱: c مضرب مشترک a و b باشد. یعنی $a|c$ و $b|c$

۲: اگر m یک مضرب طبیعی مشترک دیگر a و b باشد،آنگاه $c \le m$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد صحیح a و b را با $[a,b]$ یا c یا $a \coprod b$ نشان می دهیم.

تذکر: ک.م.م دو عدد صحیح a و b کوچکترین عدد صحیح مثبتی است که هم بر a و هم بر b بخشپذیر باشد.

تمرین ۲۵ : کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۴ و۶ را بدست آورید.

حل:

مضرب های ۴ $=\{۰,\pm ۴,\pm ۸,\pm ۱۲,\pm ۱۶,\pm ۲۰,\pm ۲۴,\pm ۲۸,\pm ۳۲,\pm ۳۶,\pm ۴۰,...\}$

مضربهای ۶ $=\{۰,\pm ۶,\pm ۱۲,\pm ۱۸,\pm ۲۴,\pm ۳۰,\pm ۳۶,\pm ۴۲,...\}$

مضربهای مشترک $=\{۰\ ,\pm ۱۲,\pm ۲۴\ ,\pm ۳۶\ ,...\}$

ک.م.م $c=[۶,۴]=۱۲$

تمرین ۲۶ : اگر b و a دو عدد صحیح باشند. با توجه به تعریف (ب م م) و (ک م م) ثابت کنید.

الف: اگر $a|b$ آنگاه $(a,b)=|a|$ ب: اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$

اثبات : کافی است در هر مورد نشان دهیم که شرایط (ب م م) یا (ک م م) برقرار است.

الف) ابتدا نشان می دهیم که $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a باشد.

$$|a|\,|\,a \xrightarrow{a|b} |a|\,|\,b$$

یعنی $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مقسوم علیه مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است. گیریم که عد مثبت m یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} m|a \\ m|b \end{matrix}\right\} \rightarrow |m| \leq |a| \xrightarrow{m>۰} m \leq |a|$$

یعنی هر مقسوم علیه مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|a|$ کوچکتر است.

ب) ابتدا نشان می دهیم که $|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

$$b||b| \xrightarrow{a|b} a||b|$$

$|b|$ یک مضرب مشترک b و a است.

اکنون نشان می دهیم که هر مضرب مشترک دیگر بین دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است. گیریم که عدد مثبت n یک مقسوم علیه مشترک دو عدد b و a است. لذا

$$\left.\begin{matrix} a|n \\ b|n \end{matrix}\right\} \rightarrow |b| \leq |n| \xrightarrow{n>۰} |b| \leq n$$

یعنی هر مضرب مشترک بین دیگر دو عدد b و a از $|b|$ بزرگتر است.

مثال :

الف) $۶|۱۸ \rightarrow \begin{cases} (۶,۱۸)=۶ \\ [۶,۱۸]=۱۸ \end{cases}$

ب) $-۵|۲۰ \rightarrow \begin{cases} (-۵,۲۰)=۵ \\ [-۵,۲۰]=۲۰ \end{cases}$

ج) $-۳|-۱۲ \rightarrow \begin{cases} (-۳,-۱۲)=۳ \\ [-۳,-۱۲]=۱۲ \end{cases}$

تمرین۲۷ : اگر p عددی اوّل باشد و $a \in Z$ و $p \nmid a$ ثابت کنید، $(p,a)=۱$

اثبات : فرض کنیم که $(p,a)=d$ و $d \neq ۱$ (فرض خلف) . پس طبق تعریف (ب م م) $d|p$ و $d|a$.

اکنون با توجه به اوّل بودن عدد p و فرض $d \neq ۱$ از $d|p$ نتیجه می شود که $d = p$

از طرفی داریم $d|a$ پس $p|a$ که با فرض مسئله تناقض دارد. لذا باید $d=۱$ باشد.

توجه : در تمرین فوق اگر p عدد اوّل نباشد. مسئله دیگر برقرار نیست. مثلاّ: $۶ \nmid ۴$ ولی $(۴,۶)=۲$ که برابر یک نیست.

***

قضیه‌ی تقسیم

اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq ۰$ آنگاه اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند، بطوری که:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cdots & \\ \hline r & \end{array} \qquad a = bq + r \qquad ۰ \leq r < b$$

عدد a را مقسوم و عدد b را مقسوم علیه، q خارج قسمت و r را باقی مانده گویند.[3]

مثال : عدد ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$\begin{array}{r|l} ۲۵ & ۷ \\ \cline{2-2} & ۳ \\ \cdots & \\ \hline ۴ & \end{array} \qquad \begin{cases} ۲۵ = ۷(۳) + ۴ \\ ۰ \leq ۴ < ۷ \end{cases}$$

مثال : عدد ۲۵- را بر ۷ تقسیم کنید و رابطه‌ی فوق را بررسی نمایید.

حل :

$$\begin{array}{r|l} -۲۵ & ۷ \\ \cline{2-2} & -۴ \\ \cdots & \\ \hline ۳ & \end{array} \qquad \begin{cases} -۲۵ = ۷(-۴) + ۳ \\ ۰ \leq ۳ < ۷ \end{cases}$$

تمرین۲۸: باقی مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ برابر۶ است. باقی مانده‌ی تقسیم $۵a$ بر ۷ را بـه دسـت آورید.

حل :

$$a = ۷q + ۶ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۷(۵q) + ۳۰ \rightarrow ۵a = ۷(۵q) + ۲۸ + ۲$$

$$\rightarrow ۵a = ۷(۵q + ۴) + ۲ \rightarrow ۵a = ۷k + ۲$$

$$\rightarrow r = ۲$$

تمرین۲۹ : اگر باقی مانده‌ی اعداد n و m بر ۱۷ به ترتیب ۵ و۳ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $۲m - ۵n$ بر ۱۷ را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲m = ۱۷(۲q_۱) + ۱۰ \\ -۵n = ۱۷(-۵q_۲) - ۱۵ \end{cases}$$

---

[3] . این قضیه را بدون اثبات می پذیریم.

$$\rightarrow ۲m-۵n=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۵$$

$$\rightarrow ۲m-۵n=۱۷(۲q_۱-۵q_۲)-۱۷+۱۲$$

$$\rightarrow ۲m-۵n=۱۷(\underbrace{۲q_۱-۵q_۲-۱}_{q})+۱۲$$

$$\rightarrow ۲m-۵n=۱۷q+۱۲$$

$$\rightarrow r=۱۲$$

تمرین ۳۰ : اگر باقی ماندهی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و۷ باشد. باقی مانده تقسیم عدد a را بر۵۶ بیابید.

حل :

$$a=۷k_۱+۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a=۵۶k_۱+۴۰ \qquad (۱)$$

$$a=۸k_۲+۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۵۶k_۲+۴۹ \qquad (۲)$$

اکنون با تفاضل روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت.

$$a=۵۶k_۱-۵۶k_۲-۹ \rightarrow a=۵۶k_۱-۵۶k_۲-۵۶+۴۷$$

$$a=۵۶(\underbrace{k_۱-k_۲-۱}_{k})+۴۷=۵۶k+۴۷$$

یعنی باقی ماندهی عدد a بر۵۶ برابر ۴۷ است.

تمرین ۳۱ : اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b\,|\,a+۲$ در این صورت باقی ماندهی تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ را بیابید.

حل: چون a عددی صحیح و فرد است، لذا وجود دارد یک عدد صحیح مانند n که $a=۲n+۱$. از طرفی چون $b\,|\,a+۲$ پس $b\,|\,(۲n+۱)+۲$ یا $b\,|\,۲n+۳$. از اینجا معلوم می شود که b عددی فرد است. پس وجود دارد یک عدد صحیح مانند m که $b=۲m+۱$. در نهایت خواهیم داشت.

$$a^۲+b^۲+۳=(۲n+۱)^۲+(۲m+۱)^۲+۳=۴n^۲+۴n+۱+۴m^۲+۴m+۱+۳$$

$$=۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k_۱}+۴\underbrace{m(m+۱)}_{۲k_۲}+۵=۸k_۱+۸k_۲+۵=۵(k_۱+k_۲)+۵=۸k+۵$$

یعنی باقی ماندهی عدد $a^۲+b^۲+۳$ بر ۸ برابر۸ است.

***

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح به کمک قضیه‌ی تقسیم

می دانیم که در تقسیم هر عدد صحیح a بر عدد طبیعی b باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از b می باشد.

برای مثال در تقسیم هر عدد صحیح a بر ۵ باقی مانده یک عدد حسابی کمتر از ۵ می باشد. لذا یکی از حالت های زیر را خواهیم داشت :

اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر۵ برابر صفر است.(بخش پذیر بر ۵) **مثلاً:** ... و۱۰ و ۵ و ۰ و ۵- و ۱۰- و ...	$a=5k$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۱ است. **مثلاً:** ... و۱۱ و ۶ و ۱ و ۴- و ۹- و ...	$a=5k+1$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۲ است. **مثلاً:** ... و۱۲ و ۷ و ۲ و ۳- و ۸- و ...	$a=5k+2$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۳ است. **مثلاً:** ... و۱۳ و ۸ و ۳ و ۲- و ۷- و ...	$a=5k+3$
اعداد صحیحی که باقی مانده‌ی تقسیم آنها بر ۵ برابر ۴ است. **مثلاً:** ... و۱۴ و ۹ و ۴ و ۱- و ۶- و ...	$a=5k+4$

بر این اساس می توان نتیجه گرفت که مجموعه‌ی اعداد صحیح در تقسیم بر ۵ به پنج مجموعه افراز شده است. بطور مشابه این موضوع را برای هر عدد طبیعی می توان مطرح نمود و افراز لازم را تشکیل داد.

تمرین ۳۲ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $2k$ یا $2k+1$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a\in Z \rightarrow a=2q+r \quad , \quad 0\le r<2$$

و چون $r\in Z$ پس یا $r=0$ یا $r=1$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=1 \\ a=2q+r \end{cases} \rightarrow a=2q+1 \qquad \text{و} \qquad \begin{cases} r=0 \\ a=2q+r \end{cases} \rightarrow a=2q$$

توجه : اگر $k \in Z$ در این صورت همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $x = ۲k$ را زوج و همه‌ی اعداد صحیح، به شکل $y = ۲k + ۱$ را فرد می نامند.

تمرین۳۳ : نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $۳k$ یا $۳k + ۱$ یا $۳k + ۲$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = ۳q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r = ۰$ یا $r = ۱$ یا $r = ۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r = ۰ \\ a = ۳q + r \end{cases} \to a = ۳q$$

$$\begin{cases} r = ۱ \\ a = ۳q + r \end{cases} \to a = ۳q + ۱$$

$$\begin{cases} r = ۲ \\ a = ۳q + r \end{cases} \to a = ۳q + ۲$$

تمرین۳۴ : ثابت کنید که اگر P عددی اوّل و $P > ۳$ باشد،آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $P = ۶k + ۵$ نوشته می شود.

حل : بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = ۶q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۶$$

پس عدد طبیعی p را می توان به یکی از صورت های زیر نوشت.

الف) $p = ۶k$ ج) $p = ۶k + ۲$ هـ) $p = ۶k + ۴$

ب) $p = ۶k + ۱$ د) $p = ۶k + ۳$ و) $p = ۶k + ۵$

واضح است که در حالت های« الف» و « ج» و« د» و« هـ» عدد مورد نظر به دلیل بخش پذیری بر۲ یا ۳، اوّل نیست. پس تنها حالت های دیگر یعنی « ب» و« و» می مانند که مورد نظر هستند.

تمرین۳۵ : نشان دهید که هر عدد صحیح و فرد را می توان به شکل $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشت.

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \to a = ۴q + r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ یا $r=۳$ در هر صورت داریم:

$$۱)\begin{cases} r=۰ \\ a=۴q+r \end{cases} \rightarrow a=۴q$$

$$۲)\begin{cases} r=۱ \\ a=۴q+r \end{cases} \rightarrow a=۴q+۱$$

$$۳)\begin{cases} r=۲ \\ a=۴q+r \end{cases} \rightarrow a=۴q+۲$$

$$۴)\begin{cases} r=۳ \\ a=۴q+r \end{cases} \rightarrow a=۴q+۳$$

در حالت۱ و۳ عدد a زوج است که با فرض مسئله مطابقت ندارند. لذا فقط دو حالت۲ و۴ می مانند که مورد نظر هستند.

تمرین۳۶ : ثابت کنید که مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است. $(q \in Z)$

حل: چون a عدد فرد است پس $a=۲k+۱$ در نتیجه

$$a^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴k(k+۱)+۱$$

$k(k+۱)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است لذا $k(k+۱)=۲q$

و در نهایت داریم:

$$a^۲=۴(۲q)+۱=۸q+۱$$

تمرین۳۷ : اگر n عدد صحیح باشد. ثابت کنید $۳ \mid n^۳-n$

حل: بنابر قضیه‌ی الگوریتم تقسیم می توان نوشت:

$$a \in Z \rightarrow a=۳q+r \quad , \quad ۰ \le r < ۳$$

و چون $r \in Z$ پس یا $r=۰$ یا $r=۱$ یا $r=۲$ در هر صورت داریم:

$$\begin{cases} r=۰ \\ a=۳q+r \end{cases} \rightarrow a=۳q$$

$$n^۳-n=(۳q)^۳-(۳q)=۲۷q^۳-۳q=۳(\underbrace{۹q^۳-q}_{k})=۳k \rightarrow ۳ \mid n^۳-n$$

$$\begin{cases} r=۱ \\ a=۳q+r \end{cases} \to a=۳q+۱$$

$$n^۳-n=(۳q+۱)^۳-(۳q+۱)=۲۷q^۳+۲۷q^۲+۹q+۱-۳q-۱$$

$$=۳(\underbrace{۹q^۳+۹q^۲+۲q}_{k})=۳k \to ۳\,|\,n^۳-n$$

$$\begin{cases} r=۲ \\ a=۳q+r \end{cases} \to a=۳q+۲$$

$$n^۳-n=(۳q+۲)^۳-(۳q+۲)=۲۷q^۳+۵۴q^۲+۳۶q+۸-۳q-۲$$

$$=۳(\underbrace{۹q^۳+۱۸q^۲+۱۱q+۲}_{k})=۳k \to ۳\,|\,n^۳-n$$

تمرین۳۸ : اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی ماندهی تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

حل : فرض کنیم که $a=bq+r$ پس :

$$n\,|\,a \qquad (۱)$$

$$n\,|\,b \to n\,|\,bq \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} n\,|\,a-bq \xrightarrow{a-bq=r} n\,|\,r$$

تمرین۳۹ : اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد. ثابت کنید، همواره اعداد صحیح a و $a+۲$ و $a+۴$ بر ۳ بخش پذیر است.

حل : برای عدد صحیح a یکی از حالت زیر وجود دارد.

حالت اوّل :

$$a=۳k \to ۳\,|\,a$$

حالت دوّم :

$$a=۳k+۱ \to a+۲=۳k+۳ \to a+۲=۳(k+۱) \to ۳\,|\,a+۲$$

حالت سوّم :

$$a=۳k+۲ \to a+۴=۳k+۶ \to a+۴=۳(k+۲) \to ۳\,|\,a+۴$$

تمرین ۴۰ : ثابت کنید، تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

حل : فرض کنیم که

$a = n$ و $b = n + ۱$

لذا

$$b^۳ - a^۳ = (n+۱)^۳ - (n)^۳ = (n^۳ + ۳n^۲ + ۳n + ۱) - n^۳$$

$$= ۳n^۲ + ۳n + ۱ = \underbrace{۳n(n+۱)}_{۲q} + ۱ = ۲q + ۱$$

تمرین ۴۱ : با فرض صحیح و غیر صفر بودن عدد m حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $[m^۲, m]$

ب) $(m^۲, m^۵)$

پ) $([m^۲, m], m^۵)$

ت) $(۲m, ۶m^۳)$

ث) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

ج) $(m^۷, (m^۲, m^۳))$

ح) $[m^۳, m^۲]$

خ) $[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰]$

حل :

الف)

$$m \mid m^۲ \rightarrow [m^۲, m] = m^۲$$

ب)

$$m^۲ \mid m^۵ \rightarrow (m^۲, m^۵) = m^۲$$

پ)

$$([m^۲, m], m^۵) = (m^۲, m^۵) = m^۲$$

ت)

$$(۲m, ۶m^۳) = ۲|m|$$

ث)

$$(۳m+۱, ۳m+۲) = ۱$$

دو عدد $۳m+۱$ و $۳m+۲$ دو عدد صحیح متوالی هستند.

ج)

$$(m^۷, \underbrace{(m^۲, m^۳)}_{m^۲}) = (m^۷, m^۲) = m^۲$$

چ)

$$[m^{۳},m^{۲}]=|m^{۳}|$$

ح)

$$[(۷۲,۴۸),۱۲۰]=[\underbrace{(۷۲,۴۸)}_{۲۴},۱۲۰]=[۲۴,۱۲۰]=۱۲۰$$

یادمان باشد که $۲۴|۱۲۰$

تمرین ۴۲ : ثابت کنید که حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

حل: فرض کنیم که

$a=n+۱$ و $b=n+۲$ و $c=n+۳$

لذا

$$abc=(n+۱)(n+۲)(n+۳)=\frac{۱\times۲\times۳\times...\times n\times(n+۱)\times(n+۲)\times(n+۳)}{۱\times۲\times۳\times...\times n}$$

$$=\frac{(n+۳)!}{n!}=\frac{(n+۳)!}{n!}\times\frac{۳!}{۳!}=\frac{(n+۳)!}{n!\times۳!}\times۳!$$

با تشکر فراوان از آقای ملاسعیدی
به جهت هر گونه مساعدت در تهیه ی این جزوه

$$=\frac{(n+۳)!}{۳!\times[(n+۳)-۳]!}\times۳!=\binom{n+۳}{۳}\times۳!=k\times۶=۶k$$

توجه : تمرین فوق برای هر سه عدد صحیح متوالی نیز قابل اثبات است. برای مثال اگر هر سه عدد a و b و c منفی باشند در این صورت:

$$abc=-۶k=۶k'$$

تمرین ۴۳ : ثابت کنید که اگر n عدد صحیح زوج باشد، آنگاه $۴۸|n^{۳}-۴n$

حل: چون n عدد صحیح زوج است پس $n=۲k$ از طرفی

$$n^{۳}-۴n=(۲k)^{۳}-۴(۲k)=۸k^{۳}-۸k=۸k(k^{۲}-۱)=۸k(k+۱)(k-۱)$$

و چون حاصل ضرب هر سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است پس:

$$n^{۳}-۴n=۸(۶q)=۴۸q$$

***