

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتمی

konkur.info

تابع نمایی:

هر تابع به معادله $f(x) = a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی گویند.
(به عبارتی $a > 0$ و $a \neq 1$)

مثال ۱:

کدام مورد یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 3^x$

ب) $y = (2)^x$

ج) $y = (0.2 - 3)^x$

د) $y = x(x^2 - x^3)$

ه) $y = \left(\frac{2-3}{2+3} \right)^x$

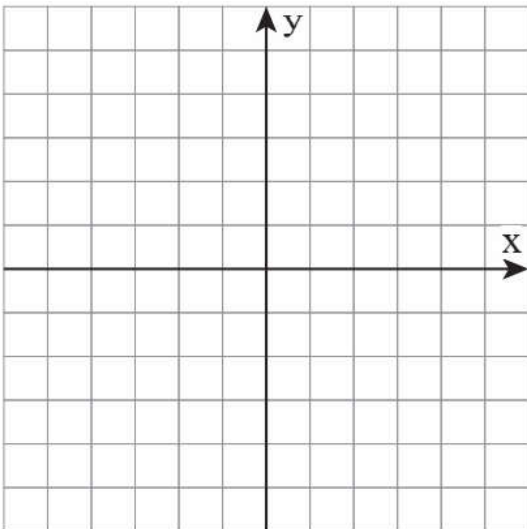
و) $y = (5 - 2\sqrt{6})^x$

مثال ۲:

اگر $f(x) = \left(\frac{4-k}{k+2} \right)^x$ یک تابع نمایی باشد. حدود k را بیابید.

مثال ۳:

نمودار تابع $f(x) = 2^x$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را بنویسید.

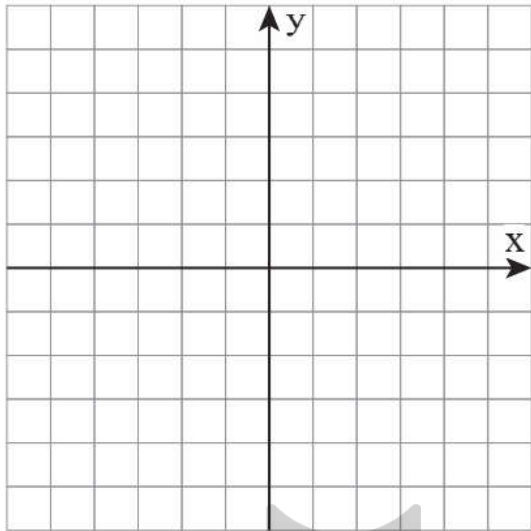


x	...	-2	-1	0	1	2	...
y							

مثال ۴:

نمودار تابع $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^x$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را بنویسید.

x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...
y							



نتیجه:

نمودار تابع نمایی $y = a^x$ به یکی از دو شکل زیر است:

الف) اگر $0 < a < 1$ باشد. نمودار به صورت روبرو است.

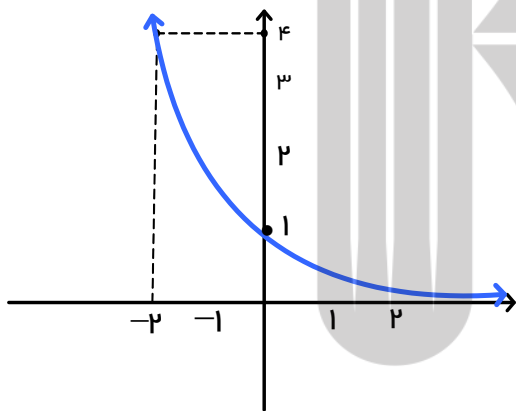
دامنه آن برابر با R و برد آن $(0, +\infty)$ است.

تابع یک به یک است.

نمودار کاهشی (نزولی) است.

خط $y = 0$ مجانب افقی آن است.

محور x ها را قطع نمی کند ولی محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند.



ب) اگر $a > 1$ باشد. نمودار به صورت روبرو است.

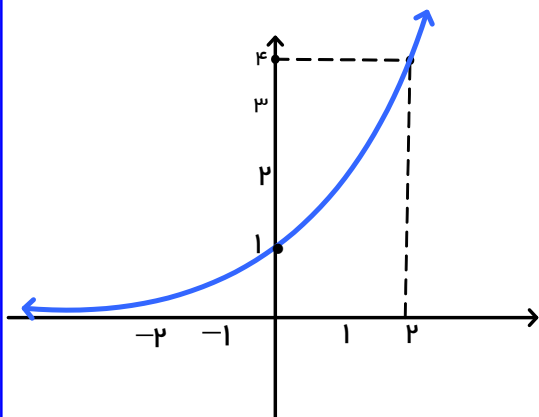
دامنه آن برابر با R و برد آن $(0, +\infty)$ است.

تابع یک به یک است.

نمودار افزایشی (صعودی) است.

خط $y = 0$ مجانب افقی آن است.

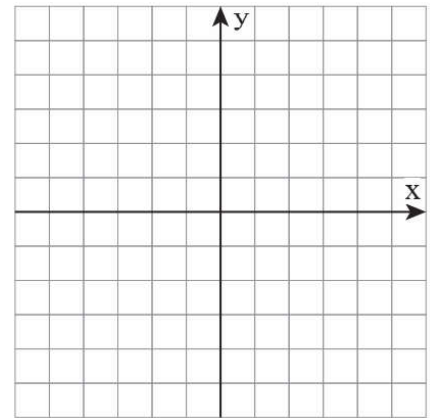
محور x ها را قطع نمی کند ولی محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند.



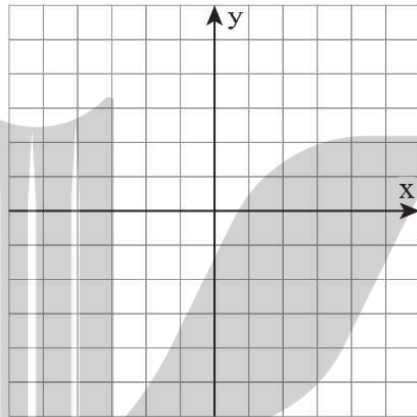
مثال ۵:

نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هریک را بنویسید.

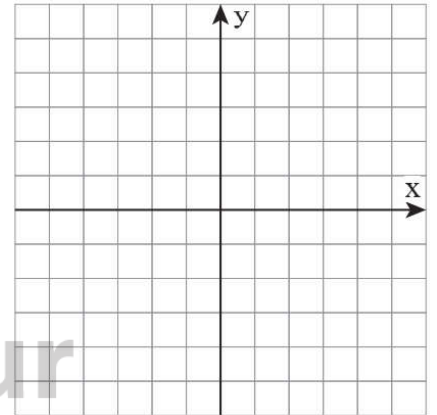
الف) $y = 2^{x-1}$



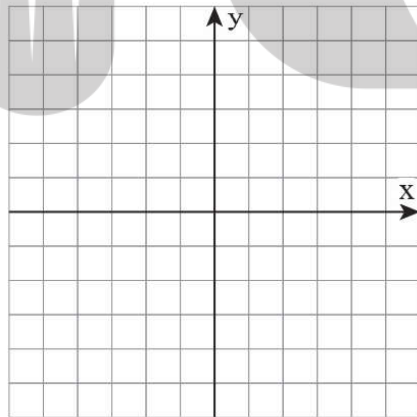
ب) $y = 2^x - 1$



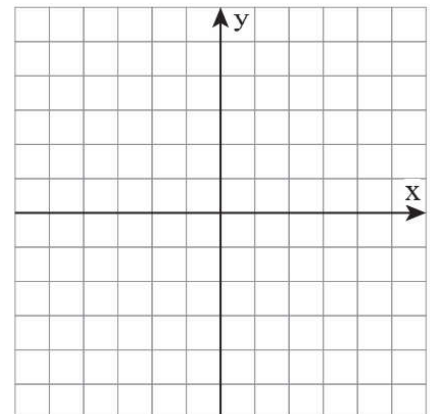
ج) $y = 2^{-x}$



د) $y = 2^x - 1$



ه) $y = 2^{-|x|}$



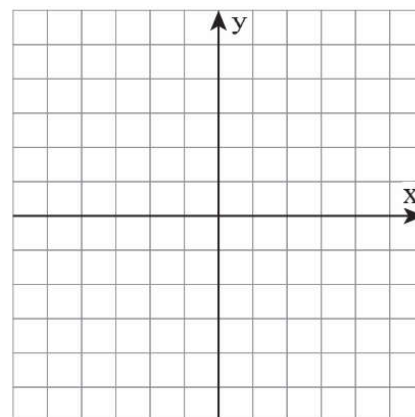
عدد نپر :

عدد $۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵\dots$ را عدد نپر گویند و با حرف e نمایش می دهند .
اگر پایه تابع نمایی $y = a^x$ عدد نپر e باشد آن را تابع نمایی طبیعی گویند .

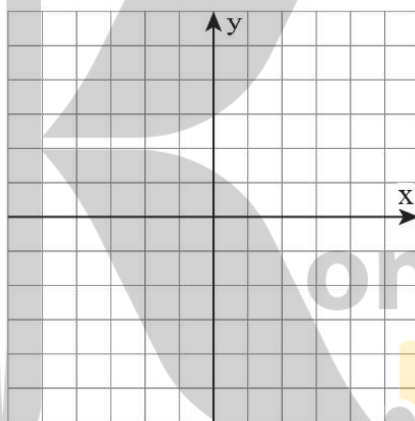
مثال ۶ :

نمودار توابع زیر را رسم کنید .

الف) $y = e^x$



ب) $y = e^{-x}$



مثال ۷ :

در تابع نمایی $f(x) = ka^x$ ؛ $f(۰) = \frac{۳}{۲}$ و $f(-۲) = \frac{۳}{۳۲}$ باشد . مقدار a و k و حاصل $f(\frac{۳}{۲})$ را بنویسید .

مثال ۸ :

نمودار تابع $f(x) = \frac{a}{2^{bx+1}}$ نمودار تابع $g(x) = \frac{17x+14}{4x}$ را در نقاطی به طولهای ۱- و ۲ قطع می کند حاصل $f^{-1}(3)$ را حساب کنید

کنید

خواص توان ها :

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و x و y دو عدد حقیقی باشند . داریم :

الف) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

ب) $a^x \times b^x = (a \times b)^x$

ج) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

د) $a^x \div b^x = (a \div b)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

هـ) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

و) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

ز) $a^0 = 1$

مثال ۹ :

عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $(3 + 2)^{(2+1)} (3 - 2)^{(2+1)} =$

ب) $\sqrt[5]{8} \times \left(\frac{2}{\sqrt[3]{16}}\right) =$

ج) $\frac{(e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}})^{\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)} \times e^{2\sqrt{5}+4}}{(e^{\sqrt{12}})^{\sqrt{3}}} =$

معادلات نمایی :

برای حل معادلات شامل عبارت های نمایی به روش جبری ؛ می توان از تساوی زیر استفاده کرد :

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

یا می توان با تغییر متغیر نیز آن ها را حل کرد .

توجه : می توان معادلات نمایی را به روش هندسی نیز حل کرد .

مثال ۱۰ :

معادلات زیر را حل کنید .

الف) $5^{2x-6} = 125^{x+1}$

ب) $2^{x^2-3} = (5/25)^x$

ج) $5^{2x+1} = 24 \times 5^x + 5$

د) $4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$

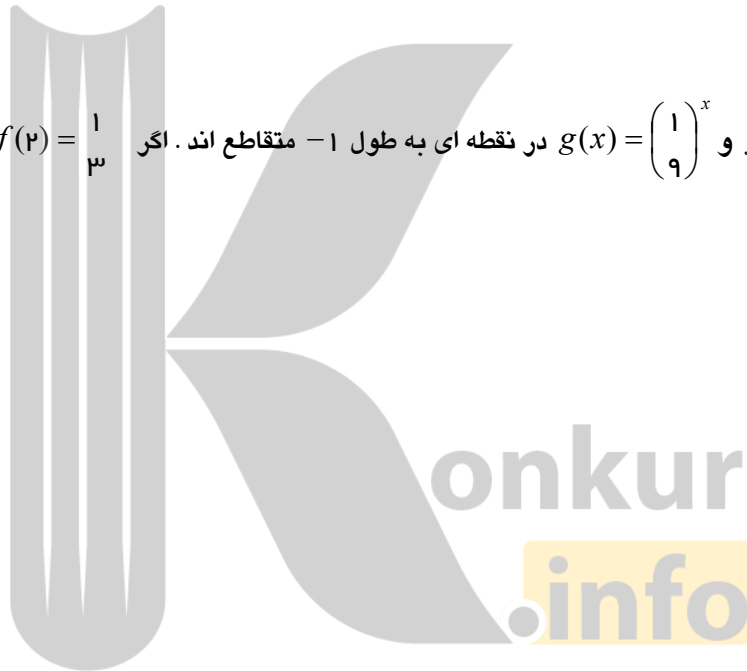
ه) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{16}{81}\right)^{1-x}$

و) $2^x = \sqrt{x} + 1$

ز) $2^x = x^2$

مثال ۱۱:

نمودارهای دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع اند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد. مقدار $f^{-1}(27)$ را بیابید.



مثال ۱۲:

نمودارهای دو تابع $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ و $y = 3^x + \frac{1}{3}$ در نقطه‌ی A متقاطع اند. فاصله‌ی نقطه A از نقطه $B(-1, 1)$ به دست آورید

خاصیت نامساوی های نمایی :

فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد .

۱- اگر $a > 1$ و $a^x \geq a^y$ باشد، آن گاه $x \geq y$ و برعکس

۲- اگر $0 < a < 1$ و $a^x \geq a^y$ باشد، آن گاه $x \leq y$ و برعکس

نامعادلات نمایی :

برای حل نامعادله های نمایی از خواص بالا استفاده می شود .

مثال ۱۳ :

نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $2^{2x-6} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$

ب) $\left(\frac{5}{2}\right)^{x^p-x} > 5^{2x^p+3x}$

ج) $(3-2)^x + (3+2)^x > 2$

د) $\left(\frac{5}{51}\right)^{x^p+2x} \leq 1$

دامنه تابع $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ و $a \neq 1$):
دامنه y با دامنه $f(x)$ برابر است یعنی $D_y = D_f$.

مثال ۱۴:

دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 3^{x^p + px}$

ب) $y = e^{\sqrt{4-x}}$

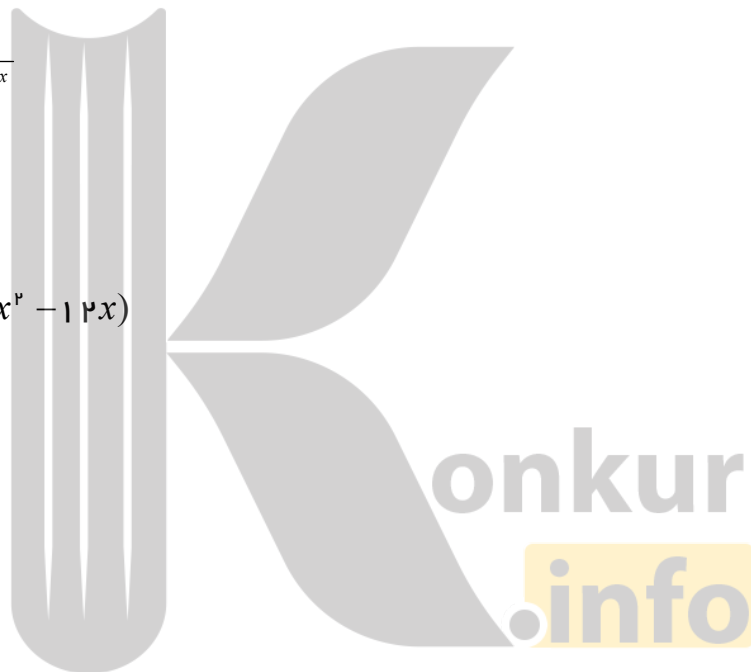
ج) $y = \sqrt{4^x - \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}}$

د) $y = (\lambda - 2^x)(x^p - 12x)$

ه) $y = 2^x - 5^x$

و) $y = (1-x) \cdot 3^{x+p}$

ز) $y = \sqrt{x \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)}$



برد تابع $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ و $a \neq 1$):

برد y برابر با a^{R_f} می باشد. یعنی $R_y = a^{R_f}$.

توجه:

همیشه: $a^{f(x)} > 0$.

مثال ۱۵:

برد توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 2^x$

ب) $y = 5^{1-x^2}$

ج) $y = 2^{x^2+1}$

د) $y = 2^{-x}$

ه) $y = 5^{[x]+[-x]}$



کاربردهایی از تابع نمایی :

محاسبه جرم ثانویه یک ماده هسته ای:

اگر جرم اولیه یک ماده هسته ای m_0 با نیم عمر n باشد .

پس از گذشت مدت زمان t ، جرم ثانویه از رابطه ی زیر به دست می آید

$$m_t = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{n}}$$
$$m_t = m_0 \left(2^{\frac{-t}{n}} \right) \quad \text{یا}$$

مثال ۱۶ :

نیم عمر یک ماده هسته ۲۵ سال می باشد . اگر جرم اولیه آن ۲۴ میلی گرم باشد.

الف) پس از ۵ سال چه مقدار از این ماده باقی می ماند ؟

ب) پس از چند سال جرم باقی مانده آن ۳ میلی گرم است؟



محاسبه رشد جمعیت (سرمایه) :

اگر P_0 یک جمعیت (سرمایه) اولیه با آهنگ (میزان) رشد r (برحسب درصد) و t مدت زمان باشد .

جمعیت (سرمایه) ثانویه P_t یا $P(t)$ از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$P_t = P(t) = P_0(1+r)^t$$

یه این معادله ، **تابع رشد** نیز می گویند .

و به معادله $P_t = P(t) = P_0(1-r)^t$ **تابع زوال** گویند .

مثال ۱۷ :

یک شهر ۲ میلیون نفر جمعیت دارد . اگر میزان رشد سالانه ۲ درصد در سال باشد . پس از گذشت ۵ سال جمعیت این شهر را حساب کنید .

مثال ۱۸:

جمعیت یک شهر ۱۲۰۰۰ نفر می باشد. اگر این جمعیت با آهنگ یک درصد در سال کاهش یابد. پس از گذشت ۴ جمعیت این شهر را حساب کنید.

تمرین:

۱- به ازای چه مقدار a تابع $y = a^x \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}$ یک تابع نمایی کاهشی (نزولی) است؟

۲- نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را بنویسید.

الف) $y = -3^x + 2$

ب) $y = 3^x - 3 - 1$

ج) $y = 1 - e^{-x}$

د) $y = 2^x + 2^{x+1}$

ه) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 2$

و) $y = (5 - 3)^{-3x+3}$

ح) $y = 4^x - 2^{x+1} + 1$

ط) $y = \frac{3^{x+2} - 3^x}{2^{x+2} - 2^{x+3}}$

۳- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $9^x - 4^{x+1} = -3 \times 6^x$

ب) $2^{x+2} + 2^{2-x} = 10$

ج) $4^x + 2^{x+2} = 5$

د) $(2 - 3)^x + (2 + 3)^x = 2$

ه) $2^x = x + 1$

و) $\left(\frac{4^{3p}}{2^{\lambda}}\right)^p = 2^a$

۴- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $3^{2x-1} > \frac{1}{243}$

ب) $3(5^{2x-1}) > 9^x$

ج) $(0.027)^{\frac{-x}{3}+1} \leq 0.09$

د) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6-x}$

ه) $4^x \geq 3 \times 2^x - 2$

و) $(3 + 2\sqrt{2})^{2x+1} \leq (3 - 2\sqrt{2})^{x+2}$

ز) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2[x]} \leq 81^{2-[x]}$

ح) $(x^2 - 4)(2^x + 1) \leq 0$

۵- دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $y = \frac{x+1}{2^x - 8}$

ب) $y = 3^{2x-x^2}$

ج) $y = e^{x^2+x}$

د) $y = x(2^x - 1)$

هـ) $y = 2^x - 2^{x^4}$

۶- برد توابع زیر را بنویسید .

الف) $y = 3^{x-[x]}$

ب) $y = \frac{2^{x+1}}{5^{x-1}}$

ج) $y = 3^x + 1$

۷- اگر نمودارهای تابع $f(x) = a(2)^{bx}$ و خط $y = 5x$ در دو نقطه به طول های ۲ و ۴ متقاطع باشند . مقدار $f^{-1}(10)$ را حساب کنید .

۸- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادله های $y = 2^x$ و $y = (2)^{x+1}$ از نقطه ی $A(0,4)$ را بیابید .

۹- اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1,1)$ بگذرد . حاصل $f(-1)$ را حساب کنید .

۱۰- نمودار تابع $y = \frac{1}{5} - 2 \cdot (5)^{\frac{x+2}{3}} - 2 \cdot (5)^{\frac{x+2}{3}}$ محور طول ها را با کدام طول قطع می کند ؟

۱۱- خط $y = 9$ نمودار تابع $y = (0/01)^x - 1$ را در چه نقطه ای قطع می کند ؟

۱۲- نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع هستند . فاصله نقطه A تا نقطه $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

به دست آورید .

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$

ب) $y = x^2$

پ) $y = (0/1)^x$

ت) $y = (\frac{3}{4})^x$

ث) $y - 3x = 2$

ج) $y = \sqrt{x-1}$

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$

ب) $(3, 1)$

پ) $(0, 1)$

ت) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$

ث) $(1, 3)$

ج) $(-1, \frac{1}{3})$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 1)$ است.

پ) دامنه توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است.

۴ الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{4})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{4})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

۵ فرض کنیم $f(x) = 3^x$ ، $g(x) = (\frac{1}{16})^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(3)$

ب) $g(-1)$

پ) $h(-2)$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32}$

ب) $9^{3y-2} = 27^{y+1}$

پ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x}$

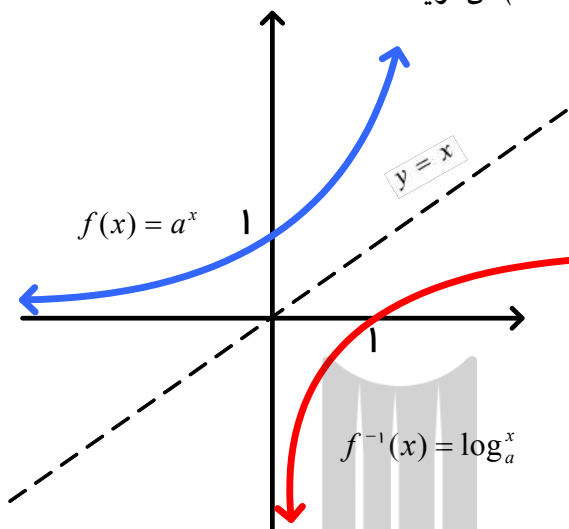
ث) $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{25}{9}$

درس دوم تابع لگاریتم:

تابع نمایی $y = f(x) = a^x$ ($a > 0$ و $a \neq 1$) یک به یک است، بنابراین معکوس پذیر است.
معکوس آن را به شکل $x = \log_a^y$ (بخوانید x مساوی با لگاریتم y در مبنای a است) می نویسند.

بنابراین می توان نوشت: $f^{-1}(x) = \log_a^x$

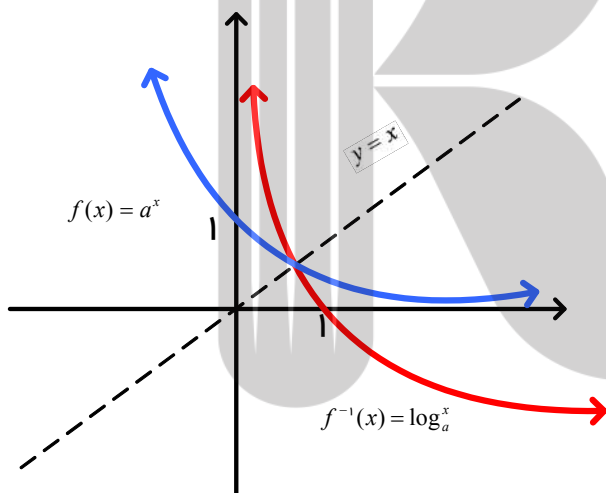
در تابع نمایی $y = f(x) = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، نمودار به شکل روبرو است
بنابر آنچه گفته شد:



$$D_f = R \Leftrightarrow R_{f^{-1}}$$

$$R_f = (0, +\infty) \Leftrightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$$

و اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار به شکل زیر است:



بنابراین نمودار تابع $y = \log_a^x$ به یکی از دو شکل زیر می باشد:

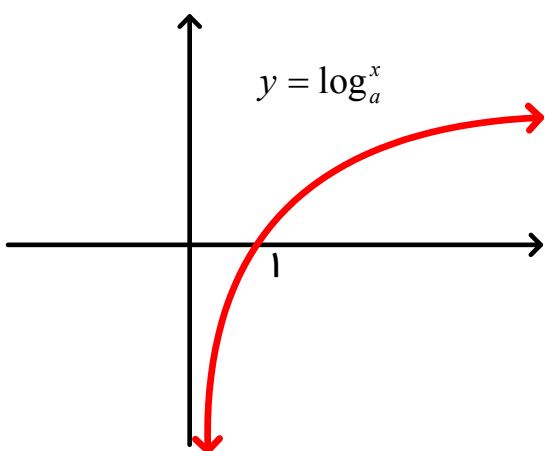
۱- اگر $a > 1$ باشد.

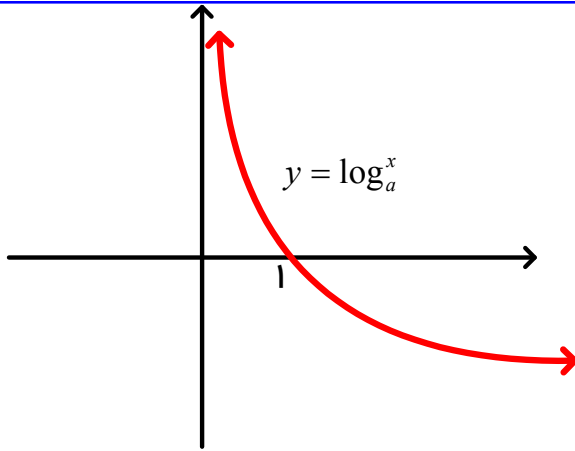
دامنه آن $(0, +\infty)$ است.

برد آن R است.

تابع افزایشی (صعودی) است.

محور y ها (یا خط $x = 0$) مجانب قائم آن است.



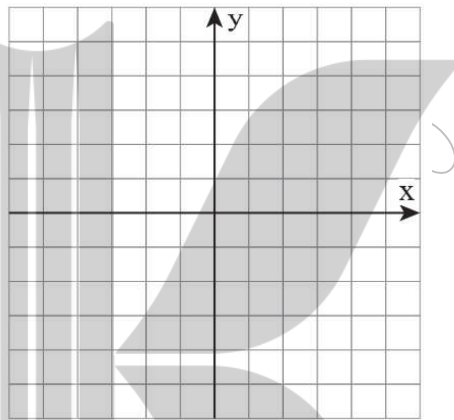


- ۲- اگر $0 < a < 1$ باشد .
- دامنه آن $(0, +\infty)$ است .
- برد آن R است .
- تابع کاهشی (نزولی) است .
- محور y ها (یا خط $x = 0$) مجانب قائم آن است .

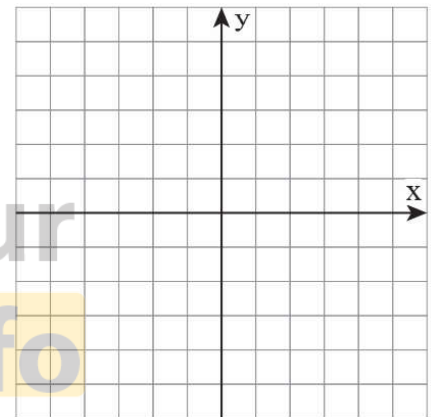
مثال ۱۹ :

نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را بنویسید .

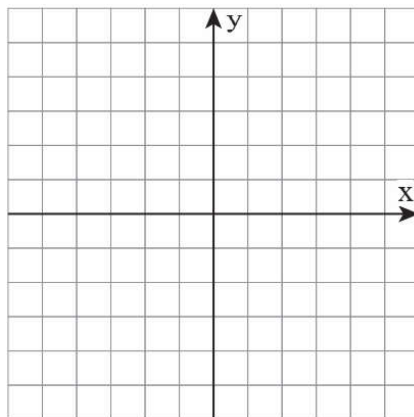
الف) $y = \log_r^{(x-1)}$



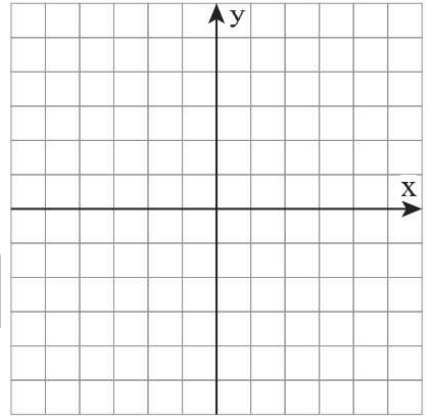
ب) $y = \log_r^x + 1$



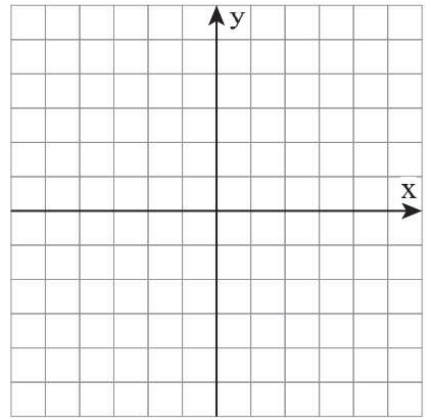
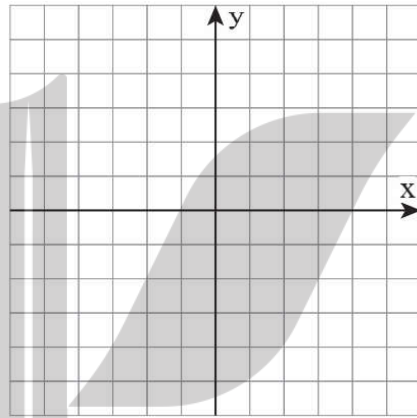
ج) $y = |\log_r^x|$



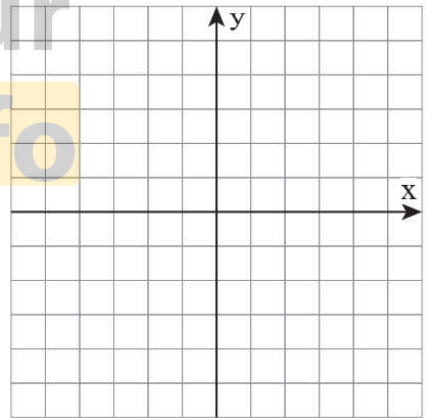
د) $y = \log_r^{|x|}$



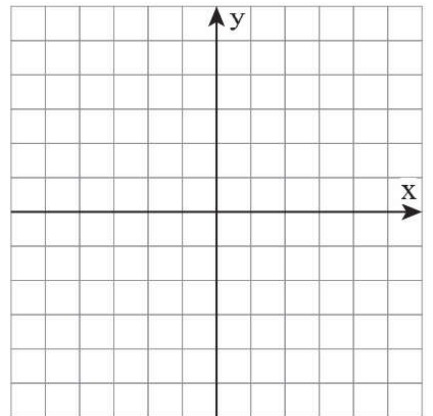
هـ) $y = \left| \log_r^{|x|} \right|$



و) $y = -\log_r^x$



ز) $y = -\log_r^{(-x)}$



مثال ۲۰ :

باتوجه به تعریف لگاریتم؛ هر یک از عبارات های توان دار را به شکل یک عبارت لگاریتمی بنویسید.

الف) $۲^۵ = ۳۲ \Rightarrow$ ب) $۴^{\binom{۱}{۲}} = ۲ \Rightarrow$

ج) $۵^{\circ} = ۱ \Rightarrow$ د) $۳^{-۲} = \frac{1}{9} \Rightarrow$

مثال ۲۱ :

هریک از عبارات های لگاریتمی زیر را به شکل یک عبارت توان دار بنویسید.

الف) $\log_{10}^{1000} = -۳ \Rightarrow$ ب) $\log_3^{81} = ۴ \Rightarrow$

ج) $\log_a^c = b \Rightarrow$ د) $\log_p^r = \frac{1}{p} \Rightarrow$

قرارداد:

اگر در لگاریتم مبنا عدد ۱۰ باشد معمولاً آن را نمی نویسند.

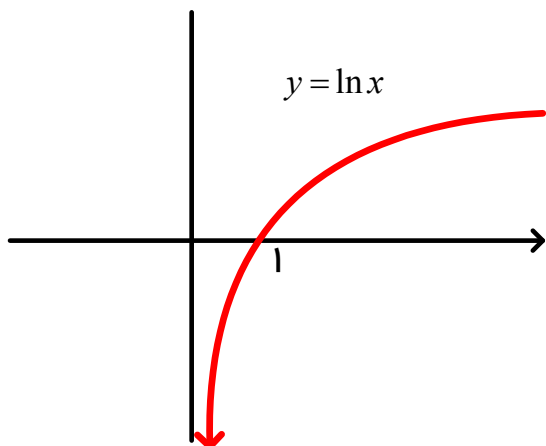
$$\log_{10}^x = \log^x = \log x$$

لگاریتم طبیعی:

اگر مبناى لگاریتم عدد نپیر e ($e = ۲/۷۲۸۱۸۲۸۱۸۴۵۹۰۴۵\dots$ یا مقدار تقریبی $e \cong ۲/۷$) باشد، آن را لگاریتم طبیعی گویند.

$$\log_e^x = \ln x \text{ (عبارت } \ln x \text{ را بخوانید ال ان } x \text{ یا لگاریتم طبیعی } x \text{)}$$

بنابراین نمودار تابع $y = \ln x$ به شکل زیر است:



به دست آوردن تابع معکوس توابع نمایی و توابع لگاریتمی :
با توجه به رابطه بین تابع نمایی و تابع لگاریتم می توان معکوس آن ها به دست آورد .

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y$$

مثال ۲۲ :

معکوس توابع زیر را به دست آورید .

الف) $f(x) = 3^x - 1$

ب) $f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$

ج) $y = e^{2x-1} + 2$

د) $y = \log_5^{(x-3)} - 1$

ه) $y = \log_p^{(x^p+1)}$

و) $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

ویژگی های لگاریتم :

دیدیم که

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y$$

اکنون با توجه به این تعریف ، ویژگی های لگاریتم را ذکر می کنیم :

۱- لگاریتم یک در هر مبنایی برابر با صفر می باشد یعنی اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک باشد :

$$\log_a^1 = 0 \text{ و نیز } \ln 1 = 0$$

$$\text{زیرا } a^0 = 1$$

مثال ۲۳ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

$$\log_{\frac{1}{6}}^1 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^1 = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^1 = 0$$

۲- لگاریتم هر عدد در مبنای خودش برابر یک می باشد یعنی اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک باشد :

$$\log_a^a = 1 \text{ و نیز } \ln e = 1$$

$$\text{زیرا } a^1 = a$$

مثال ۲۴ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

$$\log_{\frac{6}{5}}^{\frac{6}{5}} = 1$$

$$\log_{\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\log_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} = 1$$

۳- اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند داریم :

$$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$$

اثبات :

فرض کنید $\log_a^x = s$ پس بنا بر تعریف $x = a^s$

همچنین فرض کنید $\log_a^y = t$ پس $y = a^t$

$$xy = a^s \times a^t = a^{s+t}$$

بنا بر تعریف : $s + t = \log_a^{xy}$ که اگر بجای s و t مقادیر فرض شده قرار دهیم نتیجه حاصل می شود .

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

همچنین :

مثال ۲۵:

اگر $\log_{10}^2 = 0/301$ و $\log_{10}^3 = 0/477$ باشد. حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.

الف) $\log_{10}^7 =$

ب) $\log_{10}^8 =$

۴- اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و b عددی حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد داریم: $\log_a^{b^n} = n \log_a^b$

اثبات:

$$\log_a^{b^n} = \log_a^{\overbrace{bbb\dots b}^n} = \overbrace{\log_a^b + \log_a^b + \dots + \log_a^b}^n = n \log_a^b$$

و در حالت کلی داریم:

۵- اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و b عددی حقیقی مثبت و x و y دو عدد حقیقی باشند داریم:

$$\log_a^{b^x} = \frac{x}{y} \log_a^b$$

مثال ۲۶:

حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

الف) $\log_8^{3^2} =$

ب) $\log_{\binom{81}{27}}^{\binom{81}{1}} =$

ج) $\log_{\sqrt{27}\sqrt{27}}^{\sqrt{3}\sqrt{3}} =$

مثال ۲۷:

حاصل $2^{2^{2^{\dots}}}$ چند رقمی است؟ ($\log^2 = 0/301$) (اگر $10^n \leq a < 10^{n+1}$ باشد. عدد a دارای $n+1$ رقم است.)

مثال ۲۸ :

اگر $\log_{10}^3 = 0/477$ و $\log_{10}^2 = 0/301$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log_{10}^{32} =$

ب) $\log_{0/1}^{12} =$

ج) $\log^{48} =$

۶- اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند داریم :

$$\log_a^{(x)} = \log_a^x - \log_a^y$$

اثبات :

فرض کنید $\log_a^x = s$ پس بنابر تعریف $x = a^s$.

همچنین فرض کنید $\log_a^y = t$ پس $y = a^t$.

$$\log_a^{(x)} = s - t \quad \text{بنابر تعریف} \quad \frac{x}{y} = \frac{a^s}{a^t} = a^{s-t} \quad \text{پس}$$
$$= \log_a^x - \log_a^y$$

نتیجه :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

مثال ۲۹ :

اگر $\log_{10}^3 = 0/477$ و $\log_{10}^2 = 0/301$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log^5 =$

ب) $\log^{1/5} =$

ج) $\log\left(\frac{12 \times \sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\right) =$

مثال ۳۰:

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $\log_p^5 - \log_p^{15} + \log_p^{24} + \log_p^{20} =$

ب) $\log_p^{15} + 2\log_p^6 - \log_p^{15} - 2\log_p^2 =$

مثال ۳۱:

اگر $\log_{30}^3 = a$ و $\log_{30}^5 = b$ باشد حاصل \log_{30}^{32} برحسب a و b به دست آورید .

مثال ۳۲:

اگر $a = (\log_{\frac{1}{6}}^3)^2 - (\log_{\frac{1}{6}}^2)^2$ باشد . حاصل $\log_{\frac{1}{6}}^2$ را بنویسید .

۷- (خاصیت تغییر مبنا) اگر a و b و c سه عدد حقیقی مثبت و b و c مخالف یک باشند . آن گاه داریم :

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

اثبات :

فرض کنید $\log_c^a = x$ بنابراین $a = c^x$

و $\log_c^b = y$ پس $b = c^y$.

حال اگر در عبارت \log_b^a بجای a و b مقادیر مساوی قرار دهیم بنابر خاصیت (۵) داریم :

$$\log_b^a = \log_{c^y}^{c^x} \stackrel{(5)}{=} \frac{x}{y} \log_c^c = \frac{x}{y} = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

توجه :

این خاصیت به ما اجازه می دهد از یک مبنا به مبنای دیگر برویم
همچنین این خاصیت زمانی به کار می آید که در یک مبنا راحت نیستیم و یا مقدارش در مبنای داده شده مشخص نیست .

مثال ۳۳ :

اگر $\log_{10}^2 = 0/301$ و $\log_{10}^3 = 0/477$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log_3^2 =$

ب) $\log_{16}^{243} =$

ج) $\log_{60}^{36} =$

مثال ۳۴ :

اگر $\log^2 = a$ باشد . حاصل \log_4^{125} را حساب کنید .

به عنوان نتایج خاصیت قبل ، در ادامه دو خاصیت ۸ و ۹ را داریم :

۸ - اگر a, b, c, d اعداد حقیقی مثبت و b, c, d مخالف یک باشند آنگاه

$$\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \log_d^a$$

اثبات :

$$\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c = \frac{\log_d^a}{\log_d^b} \times \frac{\log_d^b}{\log_d^c} \times \frac{\log_d^c}{\log_d^d} = \log_d^a$$

مثال ۳۵ :

حاصل عبارت $A = \log_{\sqrt{27}}^{32} \times \log_{49}^{81} \times \log_{125}^{\sqrt{7}} \times \log_8^{5\sqrt{5}}$ را به دست آورید .

۹- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند آن گاه :

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b} \quad \text{یا} \quad \log_b^a \times \log_a^b = 1$$

مثال ۳۶ :

حاصل $A = \frac{1}{1 + \log_2^3} + \frac{1}{1 + \log_3^2}$ را حساب کنید .

۱۰- اگر a و b و c سه عدد حقیقی مثبت و c مخالف یک باشد آن گاه :

$$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

اثبات :

فرض کنید $\log_c^a = x$ بنابراین $a = c^x$

همچنین $\log_c^b = y$ پس $b = c^y$

دو طرف تساوی $a = c^x$ را به توان \log_c^b می رسانیم :

$$a^{\log_c^b} = (c^x)^{\log_c^b} \stackrel{y = \log_c^b}{=} (c^x)^y = c^{xy}$$

دو طرف تساوی $b = c^y$ را به توان \log_c^a می رسانیم :

$$b^{\log_c^a} = (c^y)^{\log_c^a} \stackrel{x = \log_c^a}{=} (c^y)^x = c^{xy}$$

بنابراین تساوی برقرار است .

مثال ۳۷ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $2^{\log_8^3} =$

ب) $25^{\log_5^{\sqrt{r}}} =$

اگر در خاصیت قبل بجای c مقدار b قرار دهیم خاصیت زیر به دست می آید :

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{۱۱- اگر } a \text{ و } b \text{ دو عدد حقیقی مثبت و } a \text{ مخالف یک باشد آن گاه :}$$

نتیجه :

$$e^{\ln a} = a$$

مثال ۳۸ :

حاصل عبارت زیر را بنویسید .

$$3^{\log_9 25 + \log_3 5} =$$

مثال ۳۹ :

نمودار تابع $y = 9^{\log_3 x}$ را رسم کنید .

از خاصیت زیر در حل معادلات لگاریتمی می توان استفاده کرد:

۱۲- فرض کنید a و b و c سه عدد حقیقی مثبت و c مخالف یک باشد

$$\log_c^a = \log_c^b \Leftrightarrow a = b$$

که به دلیل یک به یک بودن تابع لگاریتم برقرار است .

معادلات لگاریتمی :

برای حل یک معادله لگاریتمی ابتدا هرطرف تساوی معادله را به کمک خواص لگاریتم ساده می کنیم.

سپس از یکی خواص زیر استفاده کرده و معادله را حل می کنیم :

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a^y \quad -۱$$

$$\log_c^a = \log_c^b \Leftrightarrow a = b \quad -۲$$

جواب هایی قابل قبول هستند که به ازای آنها عبارت جبری جلوی همه لگاریتم های موجود ، مثبت شود .

و چنانچه مقدار مجهول در مبنای لگاریتم باشد ، علاوه بر مثبت بودن ، نباید مقدار آن **عدد یک** شود.

توجه :

در بعضی از معادله ها ، می توان از تغییر متغیر استفاده کرد .

معادله های لگاریتمی داده شده را حل کنید.

الف) $\log_p^{r^x} - \log_p^{(x-3)} = 1$

ب) $\log^{(x+3)} + \log^{(x-3)} - \log^x = 3 \log^r$

ج) $\log_p^{(rx^r+1)} - \log_p^{(x+r)} = 1$

د) $\log_r^x + \log_x^{1^r} = 5$

ه) $\log(\mu x - \nu) = (\log \delta)^r - (\log \nu)^r$

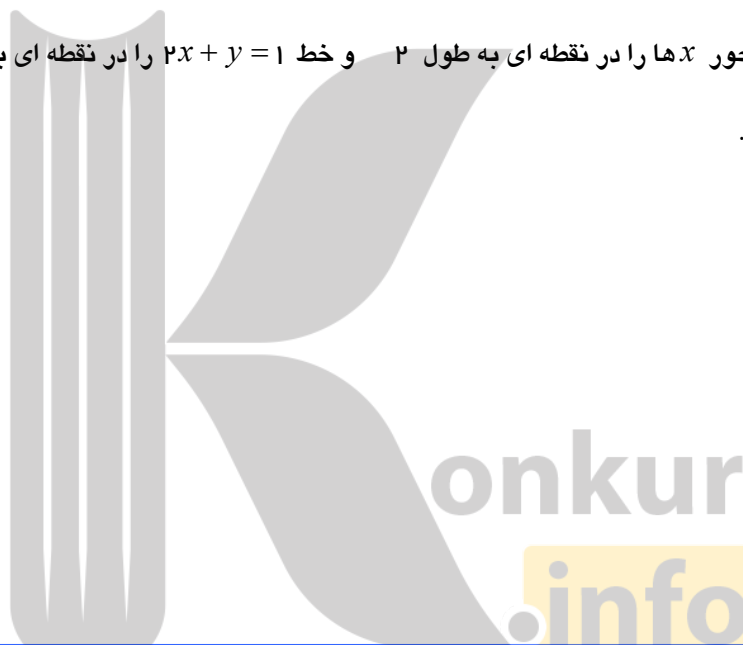
و) $\log_r^{r(x-1)^r} = 5 - \log_{\left(\frac{1}{r}\right)}^{(x-1)}$



$$z) \ln(x-1) + \ln(x-8) = \ln 24 - \ln 3$$

مثال ۴۱:

نمودار تابع $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(ax+b)$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۲ و خط $2x + y = 1$ را در نقطه ای به عرض ۱ - قطع می کند. حاصل $f(-2)$ را حساب کنید.



دستگاه معادلات لگاریتمی:

گاهی اوقات به جای یک معادله لگاریتمی، یک دستگاه معادله لگاریتمی به ما داده می شود. برای حل این گونه دستگاه ها معمولاً باید از یک معادله یک مجهول را برحسب مجهول دیگر نوشته و آن را در معادله دیگر جای گذاری نموده تا به یک معادله لگاریتمی یک مجهولی برسیم.

مثال ۴۲:

دستگاه های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} \log(y+2) = 1 \\ \log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \end{cases}$$

$$ب) \begin{cases} \ln(y+x-1) + \ln(2y+3) = 0 \\ \ln(x-4y) = 2 \ln 2 \end{cases}$$

نامعادله های لگاریتمی :

برای حل نامعادله های لگاریتمی از دو خاصیت زیر استفاده می کنیم .
 ۱- اگر $\log_a^{f(x)} \geq \log_a^{g(x)}$ ($a > 1$) آن گاه $f(x) \geq g(x)$ و برعکس .
 ۲- اگر $\log_a^{f(x)} \geq \log_a^{g(x)}$ ($0 < a < 1$) آن گاه $f(x) \leq g(x)$ و برعکس .

توجه :

در حل نامعادله های لگاریتمی ، نامساوی های $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$ نیز باید در نظر گرفته شود .

مثال ۴۳ :

نامعادله های زیر را حل کنید .

الف) $\log_3^{(5-x)} \leq 0$

ب) $\log_3^{(2x+1)} < \log_3^{3x}$

ج) $\log_{\frac{5}{2}}^{(x+1)} + \log_{\frac{5}{2}}^{(x-1)} < \log_{\frac{5}{2}}^{(4x-4)}$

$$د) \log_{\frac{6-x}{1}} \geq \log_{\frac{x-2}{1}}$$

دامنه توابع لگاریتمی :

دامنه تابع لگاریتمی $y = \log_{(g(x))}^{(f(x))}$ از اشتراک جواب سه نامعادله زیر به دست می آید .
 (۱) $f(x) > 0$ (۲) $g(x) > 0$ (۳) $g(x) \neq 1$

توجه :

اگر مبنای لگاریتم عددی حقیقی مثبت و مخالف یک باشد نیاز به بررسی شرط ۲ و ۳ نیست .

مثال ۴۴ : دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y = \log_p^{(8x-x^2)}$

ب) $y = \log_{\frac{x+2}{1}}^{(2x-3)}$

ج) $y = \log_{(x)}^{(x^2-6x+9)}$

د) $y = \log_{(4-x)}^{\sqrt{x}}$

هـ) $y = \sqrt{\log_p^{(x-2)}}$



$$و) y = \frac{\log_x^p}{\log_{p^{(\lambda-x)}} - 1}$$

$$ز) y = p - \log_{\delta}^{(x+p)}$$

کاربرد لگاریتم در محاسبه رشد جمعیت (سرمایه):

در قسمت های، کاربرد تابع نمایی در محاسبه رشد جمعیت (سرمایه) گفته شد. به مثالی بحث را کامل می کنیم.
مثال ۴۵:

پس از چند سال جمعیت کشوری با آهنگ رشد سالانه ۲ درصد در سال، ۴ برابر می شود؟ ($\log^p = 0/301$)

کاربرد لگاریتم در زلزله:

اگر زلزله ای با قدرت M در واحد ریشتر رخ دهد، میزان انرژی آزاد شده (E) برحسب واحد ارگ (Erg) توسط این زلزله از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$\log^E = 11/8 + 1/5M$$

$$(1Erg = 10^{-7} J)$$

مثال ۴۶:

میزان انرژی آزاد شده از زلزله ای با قدرت $7/2$ در واحد ریشتر چند ارگ است؟

مثال ۴۷:

میزان تخریب زلزله ای با قدرت ۷ ریشتر چند برابر زلزله ای با قدرت ۵ ریشتر است؟

کاربرد لگاریتم در تخمین قدمت اشیاء:

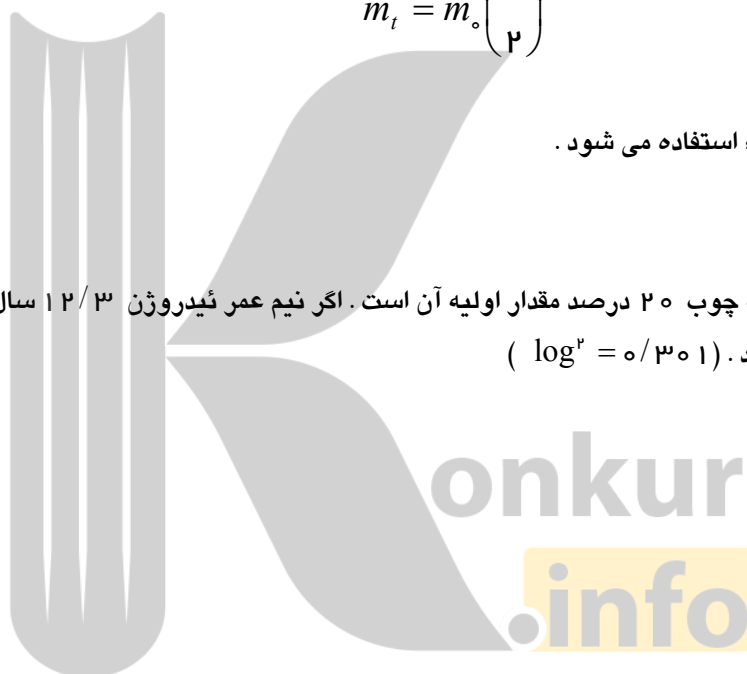
در قسمت تابع نمایی گفته شد که جرم ثانویه مواد هسته را می توان از رابطه ی زیر حساب کرد.

$$m_t = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

از این رابطه برای تخمین قدمت اشیاء استفاده می شود.

مثال ۴۸:

میزان نیدروژن موجود در یک قطعه چوب ۲۰ درصد مقدار اولیه آن است. اگر نیم عمر نیدروژن $12/3$ سال باشد. عمر این قطعه چوب را تخمین بزنید. ($\log^2 = 0/301$)



تمرین:

۱- نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را بنویسید.

الف) $y = \log_p^x$

ب) $y = \begin{cases} \log_p^x & , x \geq 1 \\ x^p - 1 & , x < 1 \end{cases}$

ب) $y = |1 - \log_p^{|x|}|$

د) $y = |1 - \log_p^x|$

$$y = \begin{cases} p^x & , x < 0 \\ 1 - x & , 0 \leq x < 1 \\ \log_p^x & , x \geq 1 \end{cases}$$

۲- اگر $\log^2 = 0/301$ و $\log^3 = 0/477$ و $\log^5 = 0/845$ باشد. حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

الف) $\log\left(\frac{12\sqrt{7}}{25}\right)$ ب) $\log_{\frac{1}{4}}^{125} =$ ج) $\log_{\frac{1}{3}}^{27} =$

۳- حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

الف) $A = 4 \log\left(\frac{25\sqrt{5}}{1}\right) - 6 \log_{\sqrt{0/1}}^{10000} + \log_{\frac{1}{\sqrt{27}}}^{9\sqrt{27}} =$

ب) $B = 5^{-1+\log_{\sqrt{5}}^2} + 6 \log_{\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}^2}}^{(2+8 \log_{\frac{1}{4}}^2 \sqrt{2})} =$

ج) $C = \log_{\frac{1}{1}}^{\frac{1}{5}} \times \log_{\frac{1}{2}}^{2^5} \times \log_{\frac{1}{25}}^{5^9} \times \log_{\frac{1}{4}}^4 =$

د) $D = 2^{\log_{\frac{1}{4}}^2 + \log_{\frac{1}{4}}^2} + 10^{(\log^5)} =$

ه) $E = (\log 2)^2 + (\log 5)(\log 20)$

۴- اگر $\log^2 = a$ باشد. حاصل $\log^{1/6}$ و $\log(1+5) + 2 \log(6-25)$ را بر حسب a بنویسید.

۵- اگر $3^a = A$ باشد. حاصل $\log_{\frac{1}{3}}^{9A^2}$ را بر حسب a بنویسید.

۶- اگر $\log_{\frac{1}{8}}^{2(\sqrt{0/25})} = A$ باشد. حاصل $\log_{\frac{1}{4}}^{(A^{-1})}$ را حساب کنید.

۷- اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد. لگاریتم $7 + a^3$ در پایه 8 را حساب کنید.

۸- اگر $\log_{15}^5 = a$ باشد. حاصل \log_9^{25} را بر حسب a بنویسید.

۹- اگر $\log^2 = a$ باشد. حاصل $\log_{\frac{1}{2}}^{1/6}$ را بر حسب a بنویسید.

۱۰- حاصل $\frac{\log_{\frac{1}{5}}^9}{\log_{\frac{0}{2}}^2} + \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}^2}$ را بنویسید.

۱۱- ضابطه تابع معکوس، توابع زیر را بنویسید.

الف) $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$

ب) $g(x) = \sqrt{e^{6x+2}}$

ج) $h(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$

د) $f(x) = \log^{(\log^{(x-1)})}$

ه) $g(x) = 3 \log_{\frac{1}{3}}^{(x-2)} - 1$

۱۲- معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\log^{(x-1)} + \log^{(x-2)} = \log^{(x^2+1)}$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}^x - 2 \log_{\frac{1}{2}}^2 = 1$

ج) $(\log_{\frac{1}{2}}^x)^2 - 9 \log_{\frac{1}{2}}^x = 4$

د) $\log_{\frac{1}{3}}^{(x^2-7x+1)} = 1 + \log_{\frac{1}{3}}^{(2-x)}$

ه) $\log_{\frac{1}{2}}^{2x} \times \log_{\frac{1}{2}}^{(\frac{x}{2})} = 5$

و) $\log(3x-2) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$

ز) $25^{\log x} - 4 \times x^{\log 5} = 5$

ح) $\frac{1}{5 - 4 \log x} + \frac{4}{1 + \log x} = 3$

ط) $\log(x+1) - \frac{1}{2} \log(x-1) = \log 3$

ی) $\log_x(2x^p - 4x + 3) = 2$

۱۳- دستگاه های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} y^p = x - 4 \\ \log_x^y = 2 + \log_y^x \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \log(2y - 3x) + \log 2 = 0 \\ \log(2x + 1) + \log(y - 2) = \log 3 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} \log(y + 2) = 1 \\ \log(y - x) + \log(4x + y) = 2 \end{cases}$

د) $\begin{cases} 4^x + 2^x = 72 \\ \log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2 \end{cases}$

ه) $\begin{cases} 4^x = 4 \sqrt{2} \\ \log y = 1 + \log x + 1 \end{cases}$

۱۴- نامعادله های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{4}}^{(2x)} \leq \log_{\frac{1}{4}}^{(x^2 - 3)}$

ب) $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{(x-1)} \geq 2$

ج) $(\log x)^2 - 4 \geq 0$

د) $\log_{\frac{5}{10}}^{(x+1)} + \log_{\frac{5}{10}}^{(x-1)} < \log_{\frac{5}{10}}^{(4x-4)}$

ه) $\log_{\frac{5}{10}}^{(5x-x^2)} \geq -2$

و) $\log_{\frac{6}{3}}^{(6-x)} < \log_{\frac{6}{3}}^{(x-2)}$

۱۵- دامنه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = \log_{\left(\frac{4x+1}{3x-2}\right)}^{\left(\frac{4x-1}{3x-2}\right)}$

ب) $y = \log_x^{(2-|x|)}$

ج) $y = \sqrt{1 - \log(x-1)}$

د) $y = \log_p^{\left(\log_{\frac{1}{5}}^{(1-x)}\right)}$

ه) $y = \frac{\ln(5-x)}{1 + \log_p^{(x-1)}}$

و) $y = \log_{\frac{2}{3}}^{(2-x-x^2)}$

۱۶- اگر $\log 2$ و $\log(2^x - 2)$ و $\log(2^x + 2)$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند. مقدار x را بیابید.

۱۷- تابع $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}^{(ax+b)}$ فقط برای $x \in (-\frac{1}{p}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد. مقادیر a و b را بیابید.

۱۸- جمعیت شهری با نرخ زوال یک درصد در سال کم می شود. با این روند با گذشت چند سال، جمعیت این شهر نصف جمعیت فعلی آن می شود. ($\log 2 = 0.3$ و $\log 99 = 1.995$)

۱۹- نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ سال است. پس از گذشت چند سال ۴۰ درصد مقدار اولیه آن باقی می ماند؟

۲۰- میزان انرژی آزاد شده در زلزله ای برابر با 10^{17} erg بوده است. این زلزله چند ریشتر بوده است؟

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_5 x = 3$

۲ $\log_7(2x+1) = 3$

۳ $\log_7(x+1) + \log_7(x+4) = 2$

۴ $\log_3 243 = 2x+1$

۵ $\log_7(x-1) = 4$

۶ $\log(2x) - \log(x-3) = 1$

۷ $2\log_4(x-1) = 3$

۲ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\log_5 \sqrt[5]{49}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$

پ) $-\log_5 125$

ت) $3\log_1 \sqrt{1000}$

۳ اگر $f(x) = 3 - 2\log_4\left(\frac{x}{4} - 5\right)$ ، مقدار $f(42)$ را به دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(-2, -\frac{1}{4})$ عبور کند، مقدار a چند است؟

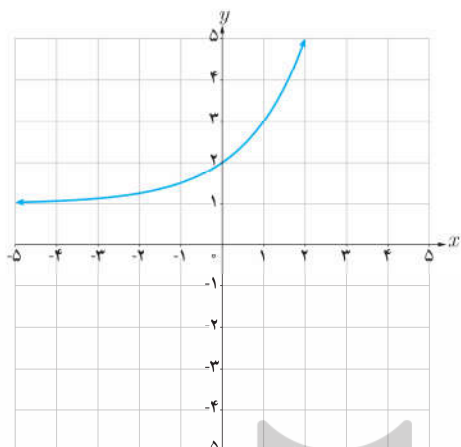
۵ نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$.

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.

۲ فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ ، مقدار x چقدر است؟

۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2^x + 1$

پ) $y = 2^{|x|}$

ب) $y = -\log_7(x-1)$

ت) $y = \frac{|x|}{x} \log x$

۵ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_3(p^2 - 2) = \log_3 p$

ب) $\log_8(x+1) + \log_8(x-1) = 1$

پ) $3\log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25$

ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>