

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

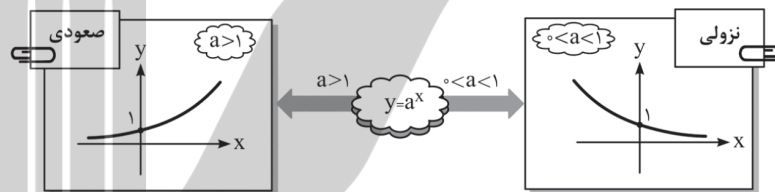
توابع نمایی و لگاریتمی

درسنامه‌ی ۱

تعریف تابع نمایی و رسم نمودار آن

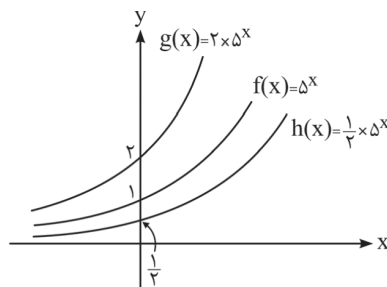
تابع به صورت $y = a^x$ که در آن a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک ($a > 0, a \neq 1$) و x یک متغیر باشد را تابع نمایی می‌گوییم.
تذکر: دقت کنیم در توابع نمایی، پایه (یعنی a) هرگز عدد منفی، صفر و یک نمی‌تواند باشد. زیرا اگر پایه‌ی عبارت نمایی منفی باشد، آن‌گاه توان x هر عدد حقیقی نمی‌تواند به خود بگیرد. به عنوان مثال در عبارت $(-3)^x$ ، توان x نمی‌تواند به خود مقدار $\frac{1}{4}$ را اختصاص دهد. چون حاصل $(-3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-3}$ بی‌معنی و تعریف نشده است. اگر پایه‌ی عبارت نمایی صفر و یا یک باشد، تابع نمایی تبدیل به تابع ثابت خواهد شد.

رسم نمودار تابع نمایی $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

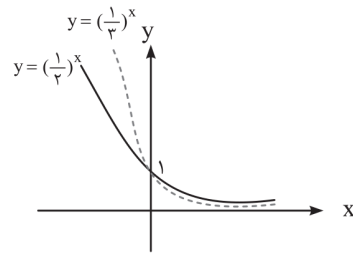
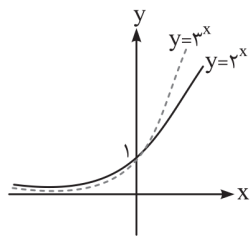


نکات زیر را به‌خاطر بسپاریم ...

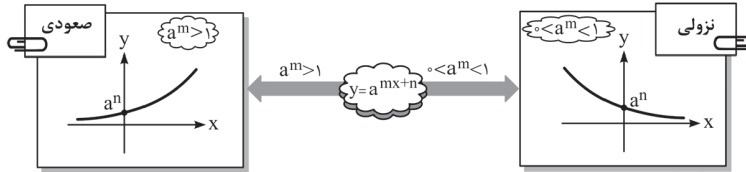
- با توجه به نمودار تابع $y = a^x$ ، داریم:
 - ۱ دامنه‌ی تعریف تابع نمایی $y = a^x$ ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است ($D_f = \mathbb{R}$).
 - ۲ برد تابع نمایی $y = a^x$ ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است ($R_f = \mathbb{R}^+$). پس اگر عدد مثبتی را به هر توانی برسانیم، حاصل همواره مثبت است.
 - ۳ در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، تابع صعودی بوده و اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع نزولی است.
 - ۴ تابع نمایی $y = a^x$ ، یک تابع یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.
 - ۵ تابع نمایی $y = a^x$ همواره محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. به عبارتی عرض از مبدأ تابع نمایی، همواره برابر ۱ است.
 - ۶ تابع نمایی $y = a^x$ ، هرگز محور x را قطع نمی‌کند و همواره بالای محور x ها قرار دارد.
 - ۷ تابع نمایی $y = a^x$ همواره از ناحیه‌های اول و دوم دستگاه مختصات می‌گذرد.
 - ۸ در تابع نمایی $y = a^x$ ، تقعر منحنی همواره روبه بالا است.
 - ۹ اگر پایه‌ی عبارت نمایی برابر e باشد، تابع $y = e^x$ را تابع نمایی طبیعی می‌نامیم که نمودارش قطعاً صعودی است.
 - ۱۰ در حالت کلی‌تر، تابع به شکل $y = ka^x$ نیز تابع نمایی است. در این تابع عرض نقاط تابع $y = a^x$ برابر شده است. در نتیجه عرض از مبدأ تابع نمایی $y = ka^x$ برابر k می‌باشد.
- اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع $y = ka^x$ بالای نمودار تابع $y = a^x$ قرار گرفته و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار تابع $y = ka^x$ ، پایین نمودار تابع $y = a^x$ قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، داریم:



۱۱) مقایسه نمودار توابع نمایی به صورت زیر است. داریم:



رسم نمودار تابع نمایی $y = a^{mx+n}$ ($a^m > 0, a \neq 1$)



نکات زیر را به خاطر بسپاریم ...

با توجه به نمودار تابع $y = a^{mx+n}$ داریم:

- ۱) دامنه‌ی تعریف تابع $y = a^{mx+n}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($D_f = \mathbb{R}$) و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت ($R_f = \mathbb{R}^+$) است.
- ۲) در تابع نمایی $y = a^{mx+n}$ اگر $a^m > 1$ باشد، تابع صعودی و اگر $0 < a^m < 1$ باشد، تابع نزولی است.
- ۳) تابع نمایی $y = a^{mx+n}$ همواره محور y ها را در نقطه‌ای به عرض a^n قطع می‌کند. به عبارتی عرض از مبدأ این تابع برابر a^n است.
- ۴) تابع نمایی $y = a^{mx+n}$ هرگز محور x ها را قطع نمی‌کند و همواره بالای محور x ها است. نمودار این تابع همواره در ناحیه‌های اول و دوم قرار دارد.

تست آموزشی ۱

تابع نمایی $y = (m^2 - 1)^x$ به ازای چه مقادیری از m ، صعودی است؟

$|m| > 0$ (۱) $|m| > \sqrt{2}$ (۲) $|m| > \sqrt{3}$ (۳) $|m| > 2$ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی (۲). تابع نمایی $y = a^x$ زمانی صعودی است که $a > 1$ باشد. داریم:

$$y = \underbrace{(m^2 - 1)}_a^x \xrightarrow{\text{صعودی}} a > 1 \Rightarrow m^2 - 1 > 1 \Rightarrow m^2 > 2 \Rightarrow |m| > \sqrt{2}$$

تست آموزشی ۲

کدام تابع، یک تابع نزولی است؟

$y = e^{2x}$ (۱) $y = (\sqrt{2})^x$ (۲) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ (۳) $y = e^{\frac{x}{2}}$ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی (۳). می‌دانیم در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ باشد، تابع نمایی صعودی بوده و اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع نمایی نزولی می‌باشد و در تابع نمایی $y = a^{mx+n}$ ، اگر $a^m > 1$ باشد، تابع نمایی صعودی و اگر $0 < a^m < 1$ باشد، تابع نمایی نزولی خواهد بود. پس داریم:

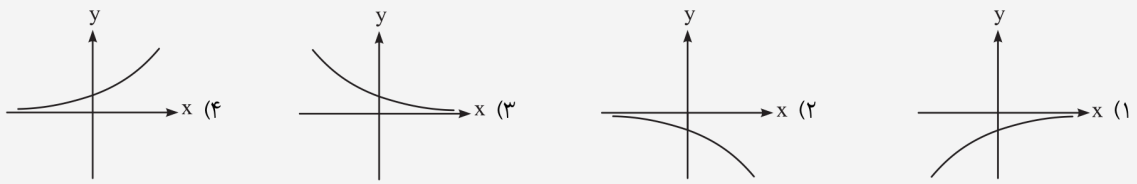
تابع نمایی صعودی است $\Rightarrow a^m = e^2 > 1 \Rightarrow y = e^{2x}$: گزینه‌ی (۱)

تابع نمایی صعودی است $\Rightarrow a = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow y = (\sqrt{2})^x$: گزینه‌ی (۲)

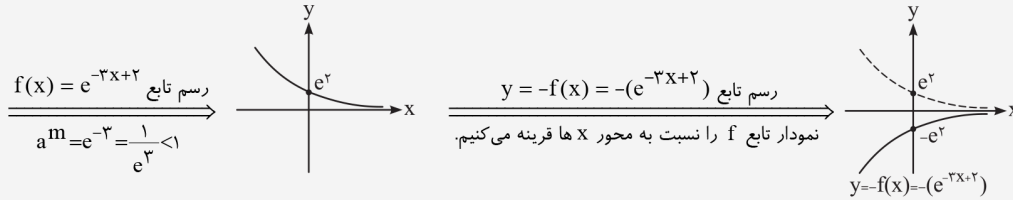
تابع نمایی نزولی است $\Rightarrow a = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$: گزینه‌ی (۳)

تابع نمایی صعودی است $\Rightarrow a^m = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} > 1 \Rightarrow y = e^{\frac{x}{2}}$: گزینه‌ی (۴)

نمودار تابع $y = -(e^{-3x+2})$ کدام است؟



پاسخ: گزینه ی (۱)



۱- تابع $y = a^x$ برای $a > 1$ و برای $0 < a < 1$ است.

- (۱) نزولی - صعودی (۲) نزولی - نزولی (۳) صعودی - نزولی (۴) صعودی - صعودی

۲- اگر $f(x) = (\frac{2-a}{2+a})^{x+1}$ تابعی نمایی باشد، مجموعه ی مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) $(-2, 2)$ (۲) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (۳) $(-2, 2) - \{0\}$ (۴) $(2, +\infty)$

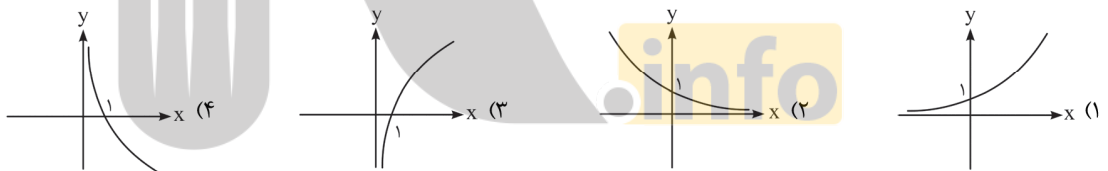
۳- تابع $y = (-m^2 + 6m - 4)^x$ به ازای چه مقادیری از m ، صعودی است؟

- (۱) $1 < m < 5$ (۲) $m > 5$ یا $m < 1$
 (۳) $-5 < m < -1$ (۴) $m > -1$ یا $m < -5$

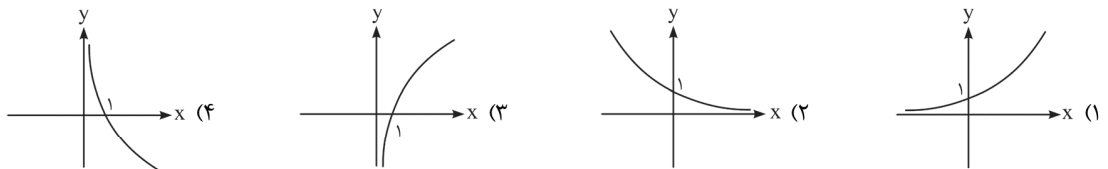
۴- در مورد تابع $y = e^{-x}$ ، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

- (۱) همواره صعودی است. (۲) همواره نزولی است.
 (۳) برای $x > 0$ نزولی و برای $x < 0$ صعودی است. (۴) هر دو محور را قطع می کند.

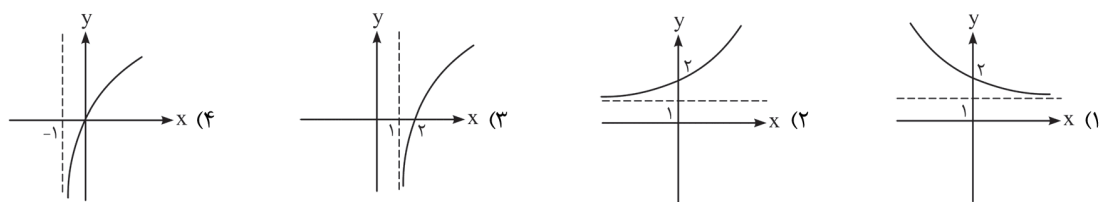
۵- نمودار تابع $y = 3^x$ کدام است؟



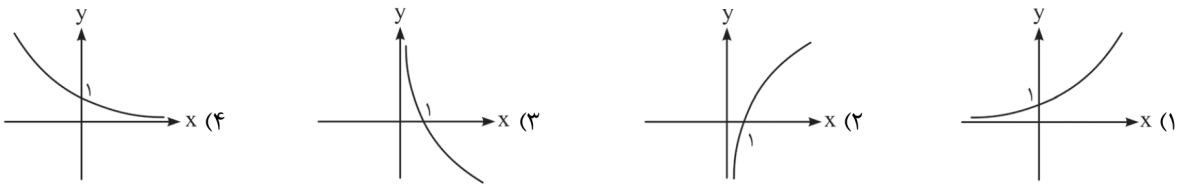
۶- نمودار تابع $y = e^{-3x}$ به کدام صورت است؟



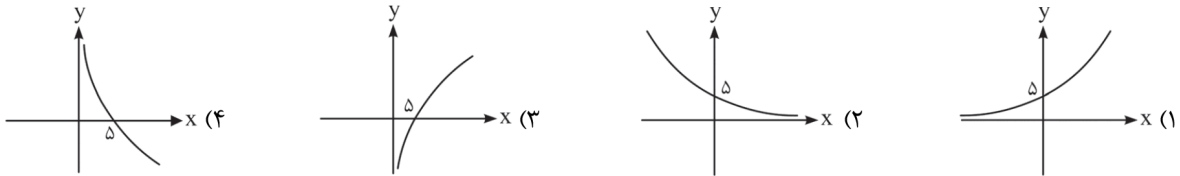
۷- نمودار تابع $y = 5^x + 1$ چگونه است؟



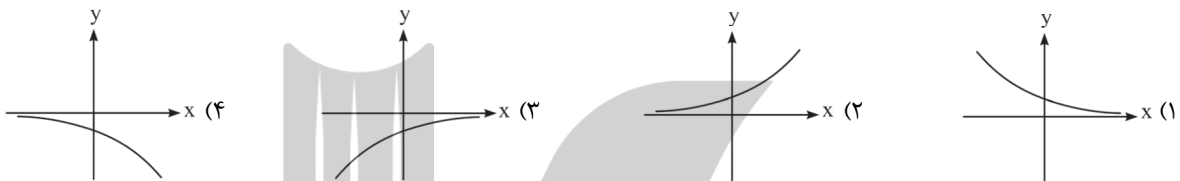
۸- نمودار تابع $y = \frac{(\frac{1}{4})^x}{3-x}$ کدام است؟



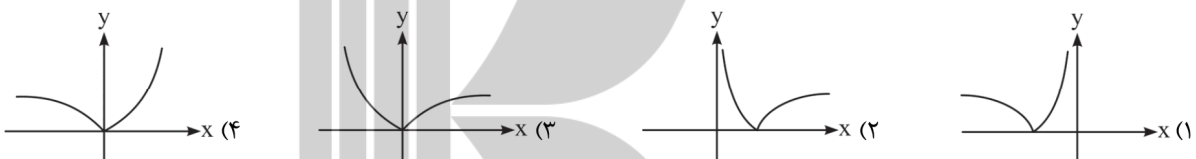
۹- نمودار تابع $y = 5^{2x+1}$ کدام است؟



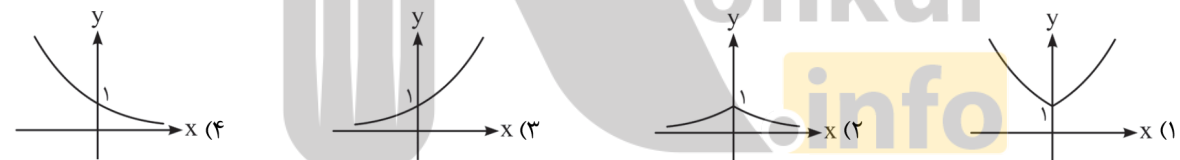
۱۰- نمودار تابع $y = -(3^{-2x+2})$ به کدام صورت است؟



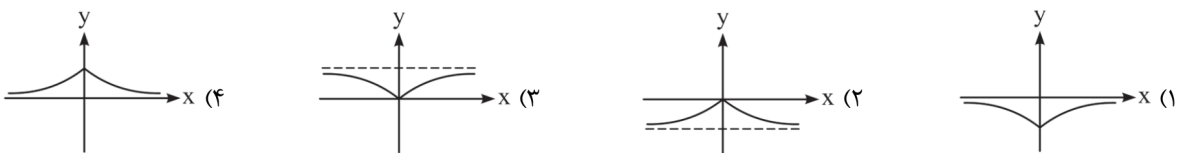
۱۱- نمودار تابع $y = |e^{-2x} - 1|$ به کدام صورت است؟



۱۲- نمودار تابع $y = 3^{-|x|}$ به کدام صورت است؟



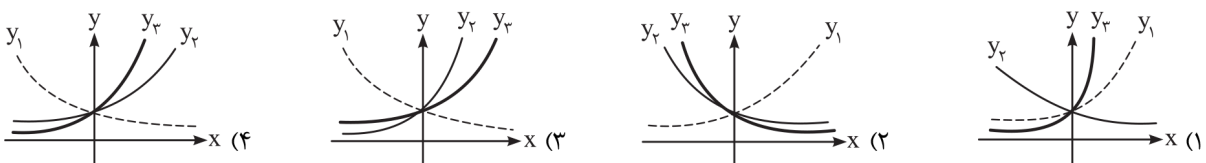
۱۳- منحنی نمایش $y = 1 - e^{-|x|}$ کدام است؟



۱۴- تابع $f(x) = a^x$ ، به ازای چند مقدار نامنفی a ، وارون پذیر نیست؟

- (۱) به ازای تمام مقادیر a وارون پذیر است.
 (۲) بی شمار
 (۳) ۲
 (۴) ۱

۱۵- اگر $0 < a < 1 < b < c$ باشد، در کدام گزینه نمودارهای $y_1 = a^x$ ، $y_2 = b^x$ و $y_3 = c^x$ درست رسم شده‌اند؟



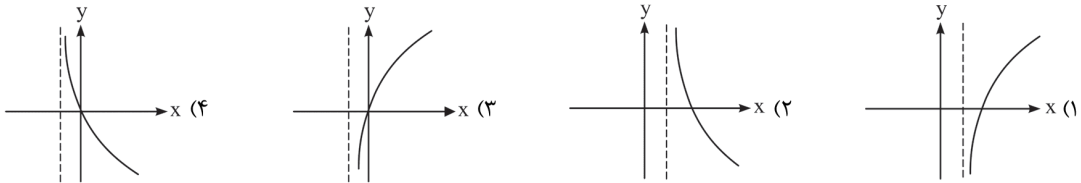
۱۶- کدام یک از جدول‌های زیر، بیان‌گر تغییرات یک تابع نمایی با ضابطه‌ی $y = k \cdot a^x$ است؟

$\frac{x}{y} \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ (۴)	$\frac{x}{y} \begin{matrix} & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 16 \end{matrix}$ (۳)	$\frac{x}{y} \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 \\ \hline & -192 & -24 & -3 \end{matrix}$ (۲)	$\frac{x}{y} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \hline & -2 & 8 & -32 \end{matrix}$ (۱)
---	--	---	--

۱۷- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها، کدام است؟

(سراسری تهرمی ۸۲)	$2\sqrt{2}$ (۴)	۲ (۳)	$\sqrt{2}$ (۲)	۱ (۱)
-------------------	-----------------	-------	----------------	-------

۱۸- نمودار معکوس تابع $y = 1 + e^x$ کدام است؟



۱۹- کدام گزینه، معکوس پذیر نیست؟

$y = 2^{ x }$ (۴)	$y = -(\frac{1}{2})^x$ (۳)	$y = 2^x $ (۲)	$y = 2^{4x}$ (۱)
-------------------	----------------------------	-----------------	------------------

۲۰- اگر تابع $y = a^x$ معکوسش را قطع کند و نقطه‌ی تقاطع را $x = x_0$ بنامیم، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

$1 < x_0 < 2, a > 1$ (۴)	$0 < x_0 < 1, a > 1$ (۳)	$0 < x_0 < 1, 0 < a < 1$ (۲)	$1 < x_0 < 2, 0 < a < 1$ (۱)
--------------------------	--------------------------	------------------------------	------------------------------

۲۱- اگر $f(x) = 4^x$ ، آن‌گاه $f(x+1) - f(x)$ برابر کدام است؟

$3f(x)$ (۴)	$2f(x)$ (۳)	$f(x)$ (۲)	۴ (۱)
-------------	-------------	------------	-------

۲۲- اگر $f(x) = (\sqrt{3})^x$ داشته باشیم $f(x+5) - f(x+3) = Af(x+1)$ ، آن‌گاه A کدام است؟

۷۲ (۴)	۹ (۳)	۶ (۲)	۳ (۱)
--------	-------	-------	-------

۲۳- ساده شده‌ی ضابطه‌ی تابع $f(x) = \frac{3^{x+3} - 3^{x+2} - 3^{x+1}}{9^x + 9^x + 9^x}$ کدام است؟

$f(x) = \frac{5}{3^x}$ (۴)	$f(x) = \frac{5}{9^x}$ (۳)	$f(x) = 5 \times 9^x$ (۲)	$f(x) = 5 \times 3^x$ (۱)
----------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------

حل معادلات نمایی

برای حل معادلات نمایی، کافی است در دو طرف تساوی، تنها دو عبارت نمایی هم‌پایه ایجاد کنیم (بدون ضریب). حال ادعا می‌کنیم توان‌ها نیز باید با هم برابر باشند. با تساوی توان‌ها، ریشه‌ی معادله به دست می‌آید:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

تست آموزشی ۴

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(\frac{1}{3^{x+1}})^{x+2} = 81^{x+1}$ کدام است؟

-۷ (۴)	-۵ (۳)	۵ (۲)	۷ (۱)
--------	--------	-------	-------

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\left(\frac{1}{3^{x+1}}\right)^{x+2} = 81^{x+1} \Rightarrow (3^{-(x+1)})^{(x+2)} = (3^4)^{x+1} \Rightarrow 3^{-(x+1)(x+2)} = 3^{4(x+1)}$$

$$\Rightarrow -x^2 - 3x - 2 = 4x + 4 \Rightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -7 \text{ یا } -\frac{b}{a} = -\frac{7}{1} = -7$$

تذکر: کمی بعد می‌آموزیم اگر در معادله‌ی نمایی یک طرف تساوی a و سمت دیگر عدد ثابت مثبتی باشد را نیز می‌توانیم حل کنیم.

داریم: $\dots \xrightarrow{\log a} \text{عدد مثبت} = \frac{\log a}{a}$

۲۴- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $8^{x^2+1} = 25^{x+1}$ چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{3}$

۲۵- مقدار x از معادله‌ی $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 32^{x+1}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{14}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $-\frac{5}{14}$

۲۶- جواب x از معادله‌ی $\frac{1}{5^{2x+2}} = 25^{3x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) ۴ (۴) -۴

۲۷- اگر $2^A = \left(\frac{4\sqrt{32}}{3\sqrt{8}}\right)^2$ ، عدد A کدام است؟

(سراسری تهرمی ۸۴ فارغ از کشور)

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) $8\sqrt{2}$ (۴) $12\sqrt{2}$

۲۸- ریشه‌ی معادله‌ی $3^{x-2} - 9 \times 3^{2x+2} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) -۳

۲۹- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\left(\frac{1}{3^{x+3}}\right) = (9^2)^{x(x+1)}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $-\frac{8}{5}$ (۳) $-\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{8}{5}$

۳۰- مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $5^{x+|x-2|} = 25$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 2]$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $[-2, 2]$ (۴) $(-\infty, -2]$

۳۱- حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\frac{2^x \times (\sqrt{2})^{x-1}}{8} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{4}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $-\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۳۲- جواب معادله‌ی $4^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 72$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

۳۳- معادله‌ی $\left(\frac{1}{9}\right)^{|x-1|} = 3^{1-|x+1|}$

(۱) فقط یک جواب مثبت دارد. (۲) فقط یک جواب منفی دارد.

(۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. (۴) دو جواب مثبت دارد.

۳۴- معادله‌ی $e^{15-x} = e^{4-x} \times e^{2x-19}$ دارای چند ریشه‌ی صحیح است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۵- معادله‌ی $9^x + 3^x - 2 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۳۶- معادله‌ی $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) بی‌شمار (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۳۷- معادله‌ی $9^x + 6^x = 2 \times 4^x$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۸- فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ از نقطه‌ی $A(0, 4)$ کدام است؟

(سراسری تهرمی ۹۳ فارغ از کشور)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

تعریف تابع لگاریتمی و رسم نمودار آن

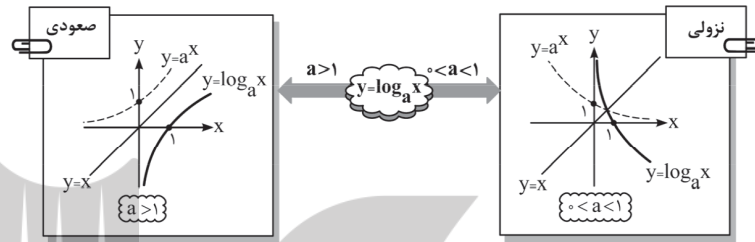
تابع نمایی $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم تابع نمایی، یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است. معکوس تابع نمایی $y = a^x$ که با تعویض جای x و y به‌دست می‌آید را **تابع لگاریتمی (در مبنای a)** می‌نامیم و آن را به‌صورت $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) نمایش می‌دهیم. داریم:

$$y = a^x \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$

تذکره: دقت کنیم در توابع لگاریتمی، پایه یا مبنای لگاریتم (a) هرگز عدد منفی، صفر و یک نمی‌تواند باشد.

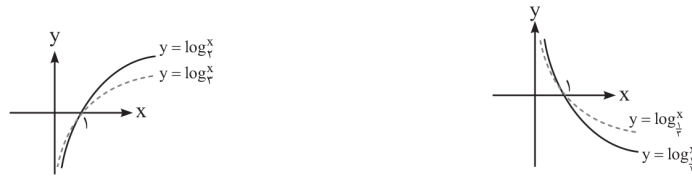
رسم نمودار تابع $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

می‌دانیم نمودار دو تابع معکوس هم، نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه‌اند. از آن‌جا که تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است، نمودار تابع لگاریتمی از قرینه کردن نمودار تابع نمایی $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ به‌دست می‌آید. داریم:



نکات زیر را به خاطر بسپاریم ...

- با توجه به نمودار تابع $y = \log_a x$ ، داریم:
- ۱) تابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیگرند.
- ۲) در تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ اگر $a > 1$ باشد، تابع صعودی بوده و اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع نزولی است.
- ۳) دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است ($D_f = \mathbb{R}^+$). چون برد تابع نمایی، دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی به‌حساب می‌آید، بنابراین لگاریتم اعداد منفی و صفر وجود ندارد.
- ۴) برد تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است ($R_f = \mathbb{R}$). چون دامنه‌ی تابع نمایی، برد تابع لگاریتمی می‌باشد، بنابراین جواب لگاریتم می‌تواند عددی مثبت، صفر و یا منفی باشد.
- ۵) تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ همواره محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. به عبارتی طول از مبدأ تابع لگاریتمی، همواره برابر ۱ است ($\log_a 1 = 0$).
- ۶) تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ هرگز محور y ها را قطع نمی‌کند و همواره در سمت راست محور y ها قرار دارد.
- ۷) تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ همواره از ناحیه‌های اول و چهارم دستگاه مختصات می‌گذرد.
- ۸) اگر مبنای لگاریتم برابر e باشد، تابع $y = \log_e x$ یا همان $y = \ln x$ را تابع لگاریتمی طبیعی می‌نامیم که نمودارش قطعاً صعودی است.
- ۹) لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری گفته و در این حالت معمولاً مبنا را نمی‌نویسیم.
- ۱۰) مقایسه نمودار توابع لگاریتمی به صورت زیر است: داریم:



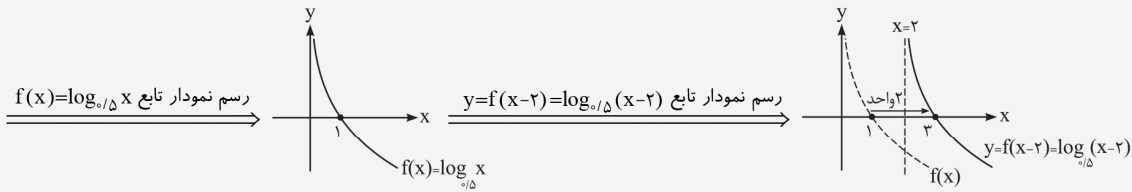
تست آموزشی ۵

نمودار تابع $y = \log_{0.15}(x - 2)$ کدام است؟



توابع نمایی و لگاریتمی

پاسخ: گزینه‌ی (۲)، ضابطه‌ی تابع $y = \log_{0.5}(x-2)$ بسیار شبیه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = \log_{0.5} x$ است. با این تفاوت که باید به جای x ، $x-2$ را در تابع f جایگزین نماییم. به عبارتی $y = f(x-2) = \log_{0.5}(x-2)$ است. پس برای رسم این تابع باید نمودار f را رسم کرده و ۲ واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم. داریم:



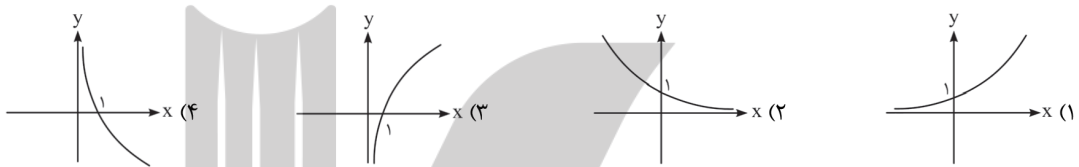
۳۹- تابع $y = \log_a x$ به ازای $0 < a < 1$ و $a > 1$ به ترتیب چگونه است؟

- (۴) صعودی - صعودی (۳) نزولی - نزولی (۲) نزولی - صعودی (۱) صعودی - نزولی

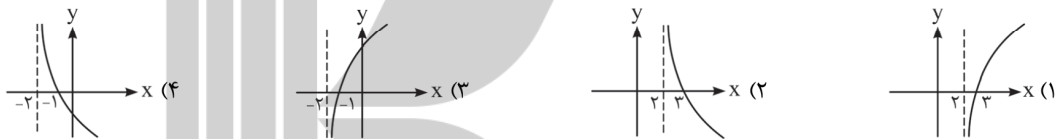
۴۰- تابع $y = \log_{(1-m^2)} x$ به ازای چه مقادیری از m ، نزولی است؟

- (۴) $-1 < m < 0$ (۳) $0 < m < 1$ (۲) $0 < |m| < 1$ (۱) $|m| < 1$

۴۱- نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ کدام است؟



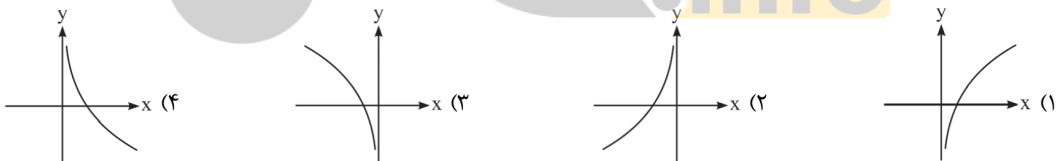
۴۲- نمودار تابع $y = \ln(x-2)$ کدام است؟



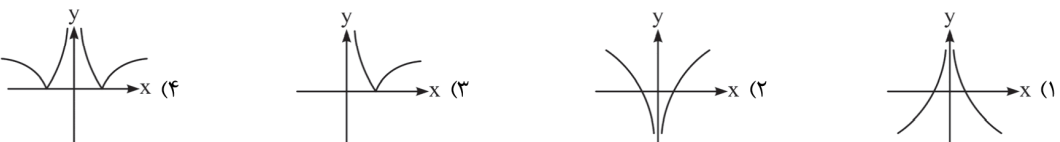
۴۳- نمودار تابع $y = \ln x - 1$ کدام است؟



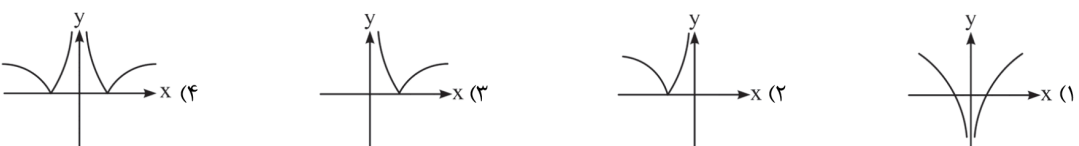
۴۴- نمودار تابع $y = -\ln(-x)$ کدام است؟



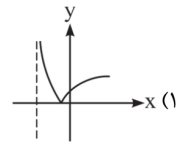
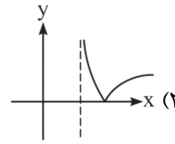
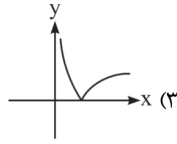
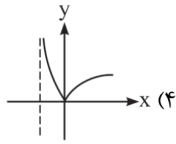
۴۵- نمودار تابع $y = \log_{0.5} |x|$ کدام است؟



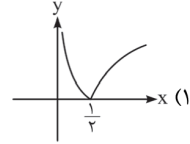
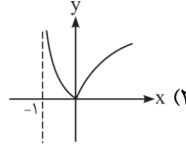
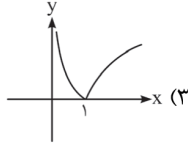
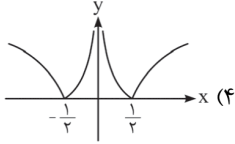
۴۶- نمودار تابع $y = |\ln(-x)|$ کدام است؟



۴۷- نمودار تابع $y = \left| \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \right|$ به کدام صورت است؟



۴۸- نمودار تابع $y = \left| 1 - \log_2 \frac{1}{x} \right|$ به کدام صورت است؟



۴۹- معادله $\log_{\sqrt{5}} x = (\sqrt{5})^x$ چند ریشه دارد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۵۰- معادله $e^x + \ln|x| = 0$ چند ریشه دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

درسنامه ۴

دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی

برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی، ابتدا عبارت جلوی لگاریتم و مبنای آن را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم. سپس چون مبنای آن مخالف یک باشد، مقادیری که مبنای آن‌ها برابر یک می‌شود را از مجموعه‌ی جواب به‌دست آمده، حذف می‌کنیم. به عبارتی دامنه‌ی تعریف تابع لگاریتمی $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ به صورت زیر است:

$$D_f = \{x \mid \underbrace{g(x) > 0}_{(1)}, \underbrace{h(x) > 0}_{(2)}, \underbrace{h(x) \neq 1}_{(3)}\}$$

از اشتراک مجموعه‌ی جواب‌های (۱)، (۲) و (۳)، دامنه‌ی تابع f مشخص خواهد شد.

تست آموزشی ۶

دامنه‌ی تابع با ضابطه $f(x) = \log_{x+1}(9-x^2)$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

(۳) $(-3, 3) - \{0\}$

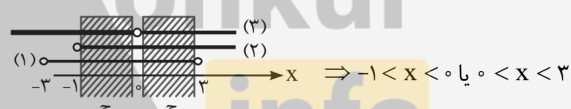
(۲) $(-1, 3) - \{0\}$

(۱) $(-3, 1) - \{0\}$

پاسخ: گزینه‌ی (۲). برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_{x+1}(9-x^2)$ ، داریم:

$$\begin{cases} (1) & 9 - x^2 > 0 \Rightarrow -3 < x < 3 \\ (2) & x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ (3) & x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \text{ یا } x \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

اشتراک می‌گیریم



بنابراین $D_f = (-1, 3) - \{0\}$ است.

۵۱- دامنه‌ی تعریف تابع $y = \ln \frac{x-3}{2-x}$ کدام است؟

(۴) $x \leq 2$ یا $x \geq 3$

(۳) $x < 2$ یا $x \geq 3$

(۲) $2 < x < 3$

(۱) $2 < x < 3$

۵۲- تمام دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_x(x^2 + 9)$ کدام فاصله است؟

(۴) $\{x \mid x > 0, x \neq 1\}$

(۳) $[-3, 3]$

(۲) $(0, +\infty)$

(۱) $(-\infty, +\infty)$

۵۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\log(x-1)}{\log(4-x^2)}$ کدام است؟

(۴) $\{x \mid x > 1\}$

(۳) $\{x \mid 1 < x < 2\}$

(۲) $\{x \mid 1 < x < 2, x \neq \sqrt{3}\}$

(۱) $\{x \mid -2 < x < 2\}$

۵۴- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$ کدام است؟

(۴) $[e, +\infty)$

(۳) $(1, 2]$

(۲) $[2, +\infty)$

(۱) $[1, +\infty)$

مفهوم حاصل لگاریتم، تبدیل تساوی های نمایی و لگاریتمی به یکدیگر

هرگاه تساوی $x = a^y$ ($a \neq 1, a > 0, x > 0$) برقرار باشد، y را حاصل لگاریتم x در پایه ی (a مبنای) a می نامیم و داریم:

$$x = a^y \Leftrightarrow \log_a x = y$$

به عنوان مثال، حاصل $\log_{10} 10^0, \log_{10} 10^1, \log_{10} 10^2, \log_{10} 10^3$ به ترتیب برابر ۰، ۱، ۲، ۳ می باشد. چون:

$$10 = 10^1 \Rightarrow \log_{10} 10 = 1, \quad 100 = 10^2 \Rightarrow \log_{10} 100 = 2, \quad 1000 = 10^3 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

پس این جمله را به خاطر بسپاریم که اگر مبنای لگاریتم را به توان جواب لگاریتم برسانیم، حاصل برابر با مقدار عبارت جلوی لگاریتم است.

تست آموزشی ۱

اگر $\log_{16} N = \frac{3}{2}$ باشد، N کدام است؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۸ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ی (۴)

$$\log_{16} N = \frac{3}{2} \Rightarrow N = 16^{\frac{3}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^{4 \times \frac{3}{2}} = 2^6 = 64 \Rightarrow N = 64$$

قواعد و قضایای لگاریتم (قسمت اول)

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد، داریم:

$$\log_a 1 = 0$$

قاعده ی ۱: لگاریتم یک در هر مبنای دلخواهی، برابر با صفر است. یعنی:

$$\log_a a = 1$$

قاعده ی ۲: لگاریتم هر عدد مثبت مخالف یک در مبنای خودش، برابر با یک است. یعنی:

$$\log_a A + \log_a B = \log_a (A \cdot B)$$

یا

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a |A| + \log_a |B|$$

قاعده ی ۳:

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$$

یا

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a |A| - \log_a |B|$$

قاعده ی ۴:

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad ; \quad (x > 0)$$

قاعده ی ۵:

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x \quad ; \quad (x > 0)$$

قاعده ی ۶:

به عبارت دیگر طبق قاعده های (۵) و (۶)، توان عبارت جلوی لگاریتم و عکس توان مبنای آن را می توانیم به عنوان ضریب لگاریتم در نظر بگیریم، یعنی:

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x \quad ; \quad (x > 0)$$

قاعده ی ۷:

دقت کنیم: اگر پشت لگاریتم ضربی وجود داشته باشد، می توانیم مستقیماً آن را به عنوان توان عبارت جلوی لگاریتم در نظر بگیریم و یا عکس

آن را توان مبنای فرض کنیم:

$$n \cdot \log_a x = \log_a x^n = \log_{a^n} x$$

به عنوان مثال، داریم:

$$\log_{\frac{1}{27}} 8 = \log_{2^{-3}} 2^3 = \frac{3}{-3} \log_2 2 = \frac{3}{-3} (1) = -1, \quad \log_9 \frac{1}{\sqrt{27}} = \log_{3^2} 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \log_3 3 = -\frac{3}{2} (1) = -\frac{3}{2}$$

$$\log_{\frac{1}{9}} b^2 = \frac{2}{-2} \log_3 b = \log_3 b^{\frac{2}{-2}} = \log_{\frac{1}{3}} b = \log_{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{-2}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{9}} b^2 = \frac{2}{-2} \log_3 b = \log_3 \sqrt{b^2} = \log_3 \sqrt{b} = \log_{\sqrt{3}} b = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{b}$$

حاصل $\log_{\sqrt{16}}\left(\frac{1}{64}\right)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) $-\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه (۲). برای محاسبه حاصل $\log_{\sqrt{16}}\left(\frac{1}{64}\right)$ ، کافی است عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را تجزیه کرده و به صورت عوامل توانی با پایه‌های یکسان بنویسیم. داریم:

$$\log_{\sqrt{16}}\left(\frac{1}{64}\right) = \log_{\sqrt{4^2}}\left(\frac{1}{4^3}\right) = \log_{\frac{4}{2^2}}\left(\frac{1}{2^6}\right) = \log_{\frac{2^2}{2^2}}\left(\frac{1}{2^6}\right) = \log_{\frac{2^2}{2^2}} 2^{-6} = \frac{-6}{\frac{2^2}{2^2}} \times \log_2 2 = \frac{-12}{4} \times 1 = -\frac{3}{1} = -\frac{9}{2}$$

اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، آن‌گاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۸ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{2}{2}$

پاسخ: گزینه (۲)

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم $a^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 2^3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \log_8(a^3 + 7) = \log_8\left(\frac{8}{27} + 7\right) = \log_8\left(\frac{190}{27}\right) = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \log_2 2 = \frac{4}{3}$$

حاصل $\log_6 2\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{2}$ (۴) $-\frac{2}{2}$

پاسخ: گزینه (۳)

$$\log_6 2\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{2} = \log_6 A + \log_6 B = \log_6 (AB) = \log_6 (2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}) = \log_6 6\sqrt{6} = \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

اگر $\log_b a = \frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه $\log_{\sqrt{b}}(ab^2)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۱)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پاسخ: گزینه (۴)

$$\log_{\sqrt{b}}(ab^2) = \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}}(ab^2) = \frac{1}{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} \log_b(ab^2) = 2(\log_b a + \log_b b^2) = 2(\log_b a + 2\log_b b) = 2\left(\frac{3}{2} + 2\right) = 3 \times \frac{7}{2} = 7$$

۵۵- اگر $z = \log_y x$ باشد، آن‌گاه:

(۱) $x = z^y$ (۲) $z = x^y$ (۳) $y = x^z$ (۴) $y = x^z$

۵۶- در کدام مبنا، لگاریتم عدد ۲۷ برابر ۳- است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) ۹

۵۷- اگر $\log_{\frac{1}{5}} A = \frac{1}{4}$ و $\log_{\frac{1}{4}} B = \frac{1}{5}$ باشد، $\frac{A+B}{A-B}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

۵۸- اگر $\log_7 12 = \alpha$ باشد، عدد $4^{\alpha-2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۸

(سراسری تجربی ۸۶ خارج از کشور)

۵۹- به عدد ۳۰۱ چند واحد اضافه کنیم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۸، برابر ۳ گردد؟

- ۱) ۱۰۳ (۲) ۱۱۲ (۳) ۲۱۱ (۴) ۳۰۱

۶۰- اگر $f(x) = \log_7(x+4)$ باشد، حاصل $f(4) + f(-3)$ کدام است؟

- ۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۴

(آزاد تهری ۸۸ فارغ از کشور)

۶۱- اگر $\log_y x = 3$ باشد، حاصل $\log_y \sqrt{x}$ چه قدر است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) $\sqrt{3}$

(سراسری ریاضی ۸۲)

۶۲- حاصل $\log_5(\sqrt{125})^3$ کدام است؟

- ۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

۶۳- حاصل $\log_4 8\sqrt[3]{2}$ برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{10}{3}$ (۲) $-\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۶۴- حاصل عبارت $\log_8 \frac{\sqrt{2}}{2} + \log_4 8$ کدام است؟

- ۱) $\frac{19}{6}$ (۲) $\frac{17}{6}$ (۳) ۳ (۴) $-\frac{1}{6}$

۶۵- حاصل $\log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

- ۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

۶۶- حاصل $\log_{x\sqrt{x}} x^2\sqrt{x}$ برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{9}{8}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۶۷- حاصل $\log_{x\sqrt{x}} \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{8}{9}$

۶۸- اگر $x = y^3 = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\log_a x + \log_a y^2$ چه قدر است؟

- ۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۶۹- اگر $A = 8^3$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{3}} 4A^2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۷۰- اگر $9\sqrt{3} = 3^a$ باشد، لگاریتم a^2 در مبنای ۲/۵ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

(سراسری تهری ۸۸)

۷۱- اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a+1)$ در پایه ۴ کدام است؟

- ۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{3}{2}$

۷۲- اگر $x = y^3 = \sqrt{a}$ باشد، حاصل $\log_a x + \log_a y$ چه قدر است؟

- ۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۷۳- $\log_1 a$ برابر کدام است؟

- ۱) $\log_b \frac{1}{a}$ (۲) $-\log_b \frac{1}{a}$ (۳) $\log_a b$ (۴) $(\log_b a)^{-1}$

(سراسری تهری ۹۱ فارغ از کشور)

۷۴- نمودارهای دو تابع $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ و $g(x) = \log_3 x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

- ۱) $f(x)$ بالاتر (۲) $g(x)$ بالاتر (۳) منطبق‌اند (۴) فقط در یک نقطه متقاطع

۷۵- حاصل $\log_{(1+\sqrt{2})} (3 + 2\sqrt{2})^3$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) $\frac{2}{3}$

(سراسری ریاضی ۸۷ فارغ از کشور)

۷۶- اگر $x = 8 \log_4 2\sqrt{2}$ باشد، لگاریتم عدد $4(x+3)$ در پایه x کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۷۷- اگر $\log_5 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{25} \frac{\sqrt{3}}{3}$ چه قدر است؟

- (۱) $-\frac{a}{4}$ (۲) $-a$ (۳) $-\frac{a}{2}$ (۴) $\frac{a}{4}$

۷۸- اگر $\log_3 5 = a$ باشد، حاصل $\log_3 15$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{a}{3}$ (۲) $a-1$ (۳) $a+1$ (۴) $3a$

۷۹- اگر $4 = \log_y x \cdot \log_y^3 \sqrt{y} \cdot y^2$ باشد، $\log_y \sqrt{x}$ چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۲۸ (۳) $\frac{7}{16}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۸۰- اگر $f(x) = \log_2(x-2)$ باشد، آن گاه $f(12) + f(7)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۸۱- حاصل $\log 5 + \log 200 + \log 500 + \log 2000$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۸۲- حاصل $\log_2 \frac{1}{9} + \log_2 \frac{9}{10} + \log_2 \frac{10}{11} + \dots + \log_2 \frac{31}{32}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -2 (۳) ۳ (۴) -3

(سراسری تجربی ۹۰)

۸۳- اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(1+\sqrt{5}) + 2 \log(6-2\sqrt{5})$ کدام است؟

- (۱) $2k$ (۲) $4k$ (۳) $1+k$ (۴) $2+4k$

۸۴- اگر $\log 2 = 0.301$ و $\log 3 = 0.477$ باشد، $\log 6000$ برابر کدام است؟

- (۱) $3/222$ (۲) $2/778$ (۳) $4/778$ (۴) $3/778$

۸۵- اگر $\log 3 = 0.477$ ، آن گاه حاصل $\log 300 + \log 30 + \log 3000$ کدام است؟

- (۱) $1/477$ (۲) $1/431$ (۳) $2/431$ (۴) $2/477$

۸۶- اگر $\log_{10} 2 = a$ و $\log_{10} 3 = b$ باشد، حاصل $\log_{10} \frac{9}{4} - \log_{10} \frac{36}{10}$ کدام است؟

- (۱) $b - 4a - 2$ (۲) $b - 4a + 2$ (۳) $2 - 4a$ (۴) $4a - 2$

(آزاد تجربی ۸۰)

۸۷- اگر $\log 2 + \log 3 = a$ ، $\log 2 + \log 3 = b$ و $\log 2 + \log 3 = c$ باشد، $\log 42$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{abc}{2}$ (۲) $\frac{a+b+c}{2}$ (۳) $\sqrt{a+b+c}$ (۴) \sqrt{abc}

۸۸- اگر $\log 2 = a$ باشد، مقدار $\log 25$ کدام است؟

- (۱) $1-a$ (۲) $a-1$ (۳) $2a-2$ (۴) $2a-2$

۸۹- با فرض $\log 2 = a$ ، مقدار $\log 1/25$ کدام است؟

- (۱) $1-3a$ (۲) $2-3a$ (۳) $3a-1$ (۴) $3a-2$

۹۰- اگر $\log 6 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log 25$ کدام است؟

- (۱) $2(1+a-b)$ (۲) $2(1+a+b)$ (۳) $2(1-a+b)$ (۴) $2(1-a-b)$

۹۱- اگر $\log 2 = 0.301$ باشد، حاصل $\log \sqrt[3]{\frac{16}{5}}$ کدام است؟

- (۱) 0.168 (۲) 0.186 (۳) 0.243 (۴) 0.324

۹۲- اگر $\log_5 = 3k$ باشد، حاصل $\log \sqrt[3]{16}$ کدام است؟

- (۱) $1-4k$ (۲) $2-5k$ (۳) $1-2k$ (۴) $1-k$

۹۳- اگر $\log_{15} 3 = a$ باشد، آنگاه حاصل $\log_{15} 625$ کدام است؟

- (۱) $4(1-a)$ (۲) $(\frac{1}{a})^4$ (۳) $(a-1)^4$ (۴) $4(a-1)$

۹۴- اگر $\log_7 4 = k$ باشد، حاصل $\log_7 5$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1+k}{k}$ (۲) $\frac{k}{1-k}$ (۳) $\frac{k-1}{k}$ (۴) $\frac{1-k}{k}$

(سراسری ریاضی ۸۵)

درسنامه ی ؟

قواعد و قضایای لگاریتم (قسمت دوم)

قاعده ی ۸ :

$$\log_B A \times \log_A B = 1 \Rightarrow \log_B A = \frac{1}{\log_A B}$$

در حل بعضی از تست ها مجبور هستیم، جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را با هم عوض کنیم. برای این منظور کافی است به این نکته دقت کنیم که با این جابه جایی، حاصل لگاریتم جدید، عکس لگاریتم قبلی است. به عنوان مثال اگر $\log_a x = 2$ باشد، حاصل $\log_x a$ برابر با $\frac{1}{2}$ است.

به خاطر بسپاریم ...

$$\log_A B = k \Rightarrow \log_B A = \frac{1}{k}$$

$$\log_B A \times \log_C B = \log_C A$$

$$\log_B A = \frac{\log_C A}{\log_C B}$$

قاعده ی ۹ :

مهم ترین کاربرد قاعده ی فوق، تغییر مبنا است. از رابطه ی فوق نتیجه می گیریم که:

به عنوان مثال داریم:

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5}, \quad \log_5 3 \times \log_3 5 = 1, \quad \underbrace{\log_5 3 \times \log_3 5}_{\log_3 3} \times \log_3 7 = \log_3 3 \times \log_3 7 = \log_3 3 = \frac{1}{\log_3 7}$$

تست آموزش ۱۲

اگر $\log_3 2 = a$ باشد، حاصل $\log_3 \sqrt[3]{3}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{a}$ (۲) $\frac{a}{2}$ (۳) $4a$ (۴) $\frac{1}{4a}$

پاسخ: گزینه ی (۴)

$$\log_3 2 = a \Rightarrow \log_2 3 = \frac{1}{a}$$

$$\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{3a}$$

تست آموزش ۱۳

اگر $\log_a 2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{\log_4 a}$ باشد، آنگاه a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{64}$ (۴) ۶۴

پاسخ: گزینه ی (۴)، می دانیم $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ ، بنابراین داریم:

$$\log_a 2 = \frac{1}{\log_4 a} - \frac{1}{6} \Rightarrow \log_a 2 = \log_a 4 - \frac{1}{6} \Rightarrow \log_a 4 - \log_a 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_a \frac{4}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \log_a 2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_2 a = 6 \xrightarrow{\text{با توجه به تعریف لگاریتم}} a = 2^6 = 64$$

حاصل $\log_3 3 \times \log_3 16$ برابر کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۲ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\log_3 3 \times \log_3 16 = \log_3 16 \times \log_3 3 \stackrel{\log_B A \times \log_C B = \log_C A}{=} \log_3 16 \times \log_3 3 = \log_3 4^2 \times \log_3 3 = 2 \log_3 4 = 2(1) = 2$$

اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، آن‌گاه $\log 5$ کدام است؟

- $\frac{1-a}{a+b}$ (۱) $\frac{ab}{a+b}$ (۲) $\frac{1+a}{a+b}$ (۳) $\frac{a-b}{a+b}$ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی (۱). می‌دانیم $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ است. چون مبنای لگاریتم‌ها عدد ۱۰ است، پس برای تعیین حاصل $\log 5$ ابتدا مبنا را به عدد ۱۰ تغییر می‌دهیم. داریم:

$$\log_{10} 5 = \frac{\log 5}{\log 10} = \frac{\log 5}{\log(2 \times 3)} = \frac{1 - \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{1 - a}{a + b}$$

۹۵- حاصل عبارت $\log_3 3 \times \log_9 3 \times \log_4 4 \times \log_3 4$ برابر کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)

۹۶- حاصل عبارت $\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \dots \times \log_{12} 11$ برابر کدام است؟

- $\frac{1}{7}$ (۱) ۷ (۲) $-\frac{1}{7}$ (۳) $-\frac{1}{7}$ (۴)

۹۷- حاصل $\log_3 \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{9} \times \log_{\frac{1}{25}} 8$ چه قدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۸- اگر $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\log_3 \frac{2}{a}$ کدام است؟

- ۴ (۱) -۳ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴)

۹۹- اگر $\log_5 3 = a$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{9}} 625$ چه قدر است؟

- $\frac{1}{6a}$ (۱) $\frac{6}{a}$ (۲) $6a$ (۳) $\frac{a}{6}$ (۴)

۱۰۰- اگر $\log_3 \sqrt[5]{e^2} = A$ ، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ کدام است؟

- $\frac{A}{4}$ (۱) $\frac{A}{2}$ (۲) $\frac{2}{A}$ (۳) $\frac{4}{A}$ (۴)

۱۰۱- اگر $\log_{12} 3 = a$ باشد، $\log_3 2$ کدام است؟

- $\frac{a-1}{2a}$ (۱) $\frac{1-a}{2a}$ (۲) $\frac{1-a}{a}$ (۳) $\frac{a-1}{a}$ (۴)

۱۰۲- اگر $a = \frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_4 12}$ باشد، حاصل $\log_{(a^2+7)} \sqrt{a+1}$ کدام است؟

- $\frac{2}{3}$ (۱) ۶ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

۱۰۳- اگر $\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = 2$ ، حاصل $\log_{\sqrt{abc}} 6$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴)

۱۰۴- حاصل $\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log 36}{\log 4} - \frac{\log \sqrt{15}}{\log \sqrt{2}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) صفر (۴)

(سراسری ریاضی ۸۱)

۱۰۵- اگر $\log x = a$ و $\log y = b$ باشد، $\log_y x^2$ برابر کدام است؟

(۱) $a.b$ (۲) $\frac{a}{b}$ (۳) $\frac{4a}{b}$ (۴) $\frac{2b}{a}$

۱۰۶- اگر $\log 5 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log_3 12$ بر حسب a و b کدام است؟

(۱) $\frac{2a+b}{a+1}$ (۲) $\frac{b+2-2a}{b+1}$ (۳) $\frac{2b+a}{a+1}$ (۴) $\frac{b+1-2a}{b+1}$

۱۰۷- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log_{18} \sqrt{12}$ چه قدر است؟

(۱) $\frac{a+b}{a+2b}$ (۲) $\frac{a+2b}{2a+2b}$ (۳) $\frac{2a+b}{2a+4b}$ (۴) $\frac{2a+b}{a+2b}$

۱۰۸- عبارت $\frac{\log_3 16}{\log_5 8 + \log_5 4}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{4}{5} \log_3 5$ (۲) $\frac{4}{5} \log_5 3$ (۳) $\frac{2}{5} \log_5 3$ (۴) $\frac{2}{5} \log_3 5$

۱۰۹- اگر $\log_5 8 = a$ باشد، حاصل $\log_{10} 2$ چه قدر است؟

(۱) $a+3$ (۲) $\frac{a}{a+3}$ (۳) $3a$ (۴) $\frac{1}{3a}$

درسنامه ی ۲

قواعد و قضایای لگاریتم (قسمت سوم)

$A \log_a B = B \log_a A$

در حالت کلی

$A^m \log_a B = B^m \log_a A$

قاعده ی ۱۰:

اگر در یک عبارت نمایی، توان، یک لگاریتم باشد، می توانیم جای پایه ی عبارت نمایی و عبارت جلوی لگاریتم را با هم جابه جا کنیم. به عنوان مثال، داریم:

$9^{\log_{25} 9} = 9^{\log_{5^2} 9} = 9^{\log_5 3} = 9^{\frac{1}{2} \log_5 9} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

تذکر مهم: قاعده ی ۱۰ حالت خاصی هم دارد. اگر در این قاعده، پایه ی عبارت نمایی و مبنای لگاریتم توان با هم برابر باشند، با جابه جایی پایه و عبارت جلوی لگاریتم توان، حاصل بسیار ساده می شود. به قاعده ی زیر دقت کنیم.

$a^{\log_a B} = B$

در حالت کلی

$a^m \log_a B = B^m$

به عنوان مثال، داریم:

$3^{\log_3 4} = 4^{\log_3 3} = 4^1 = 4$ ، $e^{\ln \sin x} = \sin x$ ، $e^{3 \ln 2} = 2^3 = 8$

تست آموزشی ۱۶

حاصل $4^{\log_4 6} - \log_2 3$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) -3 (۴) -2

پاسخ: گزینه ی (۱)

$4^{\log_4 6} - \log_2 3 = \frac{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}{4^{\log_4 6}} = \frac{6^{\log_4 4}}{4^{\log_2 2}} = \frac{6^1}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

تست آموزشی ۱۷

حاصل عبارت $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2} \log 16}}$ کدام است؟

(۱) 10 (۲) 20 (۳) 100 (۴) 400

پاسخ: گزینه ی (۲)

$\sqrt{10^{2+\frac{1}{2} \log 16}} = \sqrt{10^2 \times 10^{\frac{1}{2} \log 16}} = \sqrt{100 \times 16^{\frac{1}{2} \log 10}} = \sqrt{100 \times \sqrt{16}} = \sqrt{100 \times 4} = \sqrt{400} = 20$

۱۱۰- حاصل $a^{\log_x b} - b^{\log_x a}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $a^a - b^b$ (۳) $a^b - b^a$ (۴) $a - b$

۱۱۱- حاصل $2^{\log_8 x}$ کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) x^3 (۳) $\sqrt[3]{x}$ (۴) \sqrt{x}

۱۱۲- حاصل $4^{\log_4 2} + 3^{\log_3 2}$ چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۱

۱۱۳- حاصل عبارت $a^{x \log_a b} \times b^{x \log_b a}$ کدام است؟

- (۱) ab (۲) $(\frac{a}{b})^x$ (۳) $(ab)^x$ (۴) ۱

۱۱۴- حاصل $25^{1-\log_5 2}$ چه قدر است؟

- (۱) $\frac{25}{2}$ (۲) $\frac{25}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) ۴

۱۱۵- حاصل $(\frac{1}{25})^{-1+\log \sqrt{3}}^{10}$ برابر کدام است؟

- (۱) $0/04$ (۲) $0/004$ (۳) $0/0004$ (۴) $0/0016$

۱۱۶- ساده شده عبارت $(2 \log_5 2 + 3 \log_5 3)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۵ (۴) ۱۰۸

۱۱۷- حاصل $e^{-\ln 5} + \ln \sqrt[5]{e^4}$ کدام است؟

- (۱) e (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}e$ (۴) ۱

۱۱۸- حاصل $(4 \log \sqrt[3]{16} - \log 4)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{4}$ (۲) $\sqrt[3]{8}$ (۳) $\sqrt[3]{16}$ (۴) $\sqrt[3]{32}$

۱۱۹- حاصل عبارت $\sqrt{\frac{1}{\log_5 25} + \frac{1}{\log_8 7}}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۱۲۰- حاصل عبارت $\ln \frac{1}{e^2} + \frac{\log \sqrt{e} \times \sqrt{x}}{\ln x} - e^{2 \ln 2}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

حل معادلات لگاریتمی

برای حل معادلات شامل لگاریتم، باید لگاریتم را برداریم. برای این منظور دو روش کلی زیر وجود دارد:

روش اول: شکل معادله را به صورت $\log_a f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) تبدیل کنیم. حال بنا به تعریف و مفهوم حاصل لگاریتم، نتیجه می‌گیریم که

$f(x) = a^k$ می‌باشد. از حل این معادله، جواب‌های معادله‌ی لگاریتمی را مشخص می‌کنیم:

$$\log_a f(x) = k \Rightarrow f(x) = a^k \quad (k \in \mathbb{R})$$

شرط استفاده از این روش آن است که یک طرف تساوی، یک لگاریتم (بدون ضریب) و طرف دیگر تساوی، عددی حقیقی داشته باشیم.

روش دوم: شکل معادله را به صورت $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ تبدیل کنیم. حال ادعا می‌کنیم عبارت‌های جلوی لگاریتم ها، با هم برابرند،

یعنی $f(x) = g(x)$ است. از حل این معادله، جواب‌های معادله‌ی لگاریتمی را مشخص می‌نماییم.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

شرط استفاده از این روش آن است که در دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم‌مبنا (بدون ضریب) داشته باشیم.

تذکر بسیار مهم: در حل معادلات لگاریتمی، **حتماً** و **حتماً** (تاکید می‌کنم) ریشه‌های به‌دست آمده از روش‌های بالا را در معادله چک کنیم. برای این منظور، بعد از حل معادله، جواب‌های به‌دست آمده را در صورت اصلی و اولیه قرار می‌دهیم و کنترل می‌کنیم به ازای این جواب‌ها، لگاریتم‌ها تعریف شده خواهند بود یا خیر. به زبان ساده، اگر به ازای این جواب‌ها، جلوی لگاریتم‌ها، مثبت و میناها مثبت و مخالف یک باشند، آن‌ها را می‌پذیریم. اگر یکی از این موارد نقض شود، جواب به‌دست آمده غیرقابل قبول است. به عنوان مثال، داریم:

$$1) \log_4(x^2 - 1) - \log_4(3x - 3) = 0 \Rightarrow \log_4(x^2 - 1) = \log_4(3x - 3) \xrightarrow{f=g} x^2 - 1 = 3x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها صفر می‌شود (غ‌ق‌ق) \Rightarrow معادله ۱ ریشه دارد \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (ق‌ق)}$$

$$2) \log_3(x^2 - 1) = 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ x = -\sqrt{10} \end{cases}$$

هر دو جواب به‌دست آمده، عبارت جلوی لگاریتم را مثبت می‌کنند \Rightarrow معادله ۲ ریشه دارد

تست آموزشی ۱۸

(سراسری ریاضی ۸۴)

از معادله‌ی $\log(2x - 1) + \log(x + 2) = \log 30 - \log 2$ ، مقدار $\log_8 x$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$\log(2x - 1) + \log(x + 2) = \log 30 - \log 2 \Rightarrow \log(2x - 1)(x + 2) = \log \frac{30}{2} \Rightarrow \log(2x^2 + 5x - 2) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 2 = 15 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-17)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{4} = \begin{cases} x = 2 \text{ (ق‌ق)} \\ x = -\frac{11}{4} \text{ (غ‌ق‌ق)} \end{cases}$$

حال با معلوم بودن مقدار $x = 2$ ، مقدار $\log_8 x$ برابر است با:

$$\log_8 x \stackrel{x=2}{=} \log_8 2 = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3}$$

تست آموزشی ۱۹

(سراسری تمبری ۸۰)

اگر $\log_7(\Delta x + 1) + \log_7 x = 2$ باشد، عدد $\frac{4}{x}$ کدام است؟

$$-4 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه‌ی (۴). در سمت راست معادله‌ی $\log_7(\Delta x + 1) + \log_7 x = 2$ ، عدد ۲ دیده می‌شود. پس کافی است سمت چپ تساوی را تبدیل به یک لگاریتم کرده و در سمت راست عدد ۲ را بنویسیم. حال با توجه به تعریف لگاریتم، داریم:

$$\log_7(\Delta x + 1) + \log_7 x = 2 \Rightarrow \log_7(\Delta x + 1)x = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + x = 7^2 \Rightarrow \Delta x^2 + x - 49 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \text{ (غ‌ق‌ق)} \\ x = \frac{4}{5} \text{ (ق‌ق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 5$$

تست آموزشی ۲۰

(سراسری تمبری ۸۴)

از معادلات $2^x \times 2^y = 4$ و $\log_{10} x = \log_{10} 2 + \log_{10} y$ ، مقدار x کدام است؟

$$\frac{2}{5} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (3) \quad \frac{4}{5} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه‌ی (۲). ابتدا سعی می‌کنیم دو معادله‌ی داده شده را از شکل نمایی و لگاریتمی خارج کنیم. برای این منظور، داریم:

$$\begin{cases} 2^x \times 2^y = 4 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^2 \Rightarrow x + y = 2 \\ \log_{10} x = \log_{10} 2 + \log_{10} y \Rightarrow \log_{10} x = \log_{10} 2y \Rightarrow x = 2y \end{cases} \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3} \text{ (ق‌ق)}$$

۱۲۱- در مورد معادله‌ی $x(x-1)\log_1 x = 0$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) دو ریشه دارد. (۲) یک ریشه دارد. (۳) سه ریشه دارد. (۴) ریشه ندارد.

۱۲۲- معادله‌ی $\log_x(x^2+4) = \log_x(4x+1)$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ریشه ندارد. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۳- ریشه‌ی معادله‌ی $\log(x-1) + \log(x+1) = \log 3$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۲ و -۲ (۴) ۱ و ۳

۱۲۴- جواب معادله‌ی $\log_{\sqrt{4}} x = \log_2 64$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۴۸

(سراسری ریاضی ۸۵)

۱۲۵- اگر $2\log(x-2) = \log(x+10)$ ، آن‌گاه $\log_4(x+2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۲۶- با فرض آن‌که $\log(1+\frac{1}{x}) + 2\log x = \log 2$ ، مقدار $\frac{2}{x}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

(سراسری تجربی ۹۵)

۱۲۷- از معادله‌ی لگاریتمی $\log_4(2x^2+1) - \log_4(x+2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x-1)$ در پایه‌ی ۸، کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

(سراسری تجربی ۹۳ خارج از کشور)

۱۲۸- از تساوی $\log_x(3x+8) = 2 - \log_x(x-6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

(سراسری تجربی ۹۳)

۱۲۹- از تساوی $\log_x(x^2+4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۲ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۳۰- معادله‌ی $\log(x-2) + \log(x-3) = 1 + \log 3$ دارای:

- (۱) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه است. (۲) دو ریشه‌ی مثبت است. (۳) یک ریشه‌ی مثبت است. (۴) ریشه نیست.

۱۳۱- اگر $\log(x^2-x+1) + \log(x+1) = 1$ ، مقدار لگاریتم x در پایه‌ی ۳ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۳۲- معادله‌ی $\log \frac{x+1}{x+2} + \log \frac{x+2}{x+3} + \log \frac{x+3}{x+4} = -1$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۴) ۱

۱۳۳- از معادله‌ی $\log_2(4x+2) = 2\log_2 \sqrt{x+4} + 1$ ، مقدار $\log_{\sqrt{9}} x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{5}{2}$

(سراسری ریاضی ۸۸ خارج از کشور)

۱۳۴- از تساوی $\log_1(x^2) = \log_1 3$ ، $\log_1(2x-1) + \frac{1}{2}\log_1 x^2 = \log_1 3$ ، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۳۵- از معادله‌ی لگاریتمی $\log(x^2-x-6) - \log(x-3) = \log(2x-5)$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در پایه‌ی ۴، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

(سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

(سراسری تجربی ۸۶)

۱۳۶- اگر $\log 3 + \log \sqrt[3]{3} = \log(81)^K$ ، آن‌گاه لگاریتم $\frac{5}{K}$ در پایه‌ی ۲ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۷- جواب معادله $\log_3 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_9 x$ کدام است؟

- ۳^۲ (۱) ۳^۳ (۲) ۳^۴ (۳) ۳^۵ (۴)

۱۳۸- به ازای کدام مقدار x ، تساوی $\log_{1000} x + \log_{1000} 1000000 = \log_{1000} 1000000$ برقرار می‌گردد؟

- ۱۰۰۰ (۱) ۱۰۰۰۰ (۲) ۱۰۰۰۰۰ (۳) ۱۰۰۰۰۰۰ (۴)

۱۳۹- جواب معادله $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۸۱ (۴)

۱۴۰- لگاریتم عددی در پایه ۹، از لگاریتم معکوس مجذور آن در پایه ۹، به اندازه $\frac{4}{5}$ واحد بیشتر است. آن عدد کدام است؟

- ۸۱ (۱) ۳۶ (۲) ۲۷ (۳) ۱۸ (۴)

۱۴۱- معادله $\log_3(x-1) + \log_3(x-2) = \log_3(x^2+2)$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۱۴۲- از معادله لگاریتمی $\log_5(x + \frac{12}{5}) = 1 + \log_5 x$ مقدار $\log_5(2x+1)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵ خارج از کشور)

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۴۳- در معادله $\log_3 \log_3(1+2x) = 1$ مقدار x کدام است؟

- $\frac{4}{5}$ (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

۱۴۴- از معادله $\log_3(\log_3 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}) = -2$ مقدار x برابر کدام است؟

- ۴ (۱) -۱۶ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴)

۱۴۵- اگر $\log_3 x$ ، $\log_3(x+3)$ و $\log_3 4x$ تشکیل دنباله حسابی دهند، حاصل $\log_8(x+1)$ چه قدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

۱۴۶- اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۵)

- $\frac{7}{5}$ (۱) $\frac{12}{5}$ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴)

۱۴۷- از دو معادله $\log_3(y+2) = 1$ و $\log_3(y-x) + \log_3(4x+y) = 2$ مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷ خارج از کشور)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴۸- اگر $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ آن‌گاه $x+y$ چه قدر است؟

- ۹ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)

۱۴۹- از دو معادله $\log_3 x + \log_3 y = 2$ و $x^2 + y^2 = 46$ لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴، کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

- $\frac{1}{5}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) ۳ (۴)

۱۵۰- معادله لگاریتمی $\log_5 x + \log_x 5 = 2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۱۵۱- از دو معادله $4^x + 2^x = 72$ و $\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2$ مقدار y کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۵۲- اگر $\log_3 x - \log_3 y = 2$ و $\log_3 x^2 - \log_3 y = 4$ باشد، حاصل $\log_3(x^3 y)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۷)

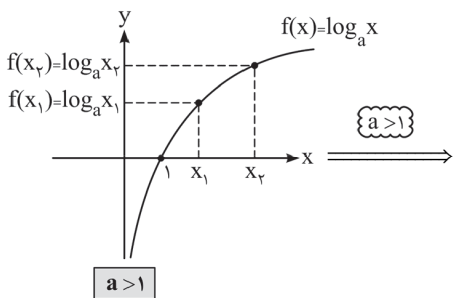
- ۴ (۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴)

۱۵۳- یکی از جواب‌های معادله $(\log_3 x)^2 - 9 \log_3 x = 4$ کدام است؟

- ۱۸ (۱) -۱۶ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲۷ (۴)

نامساوی‌ها و نامعادلات لگاریتمی

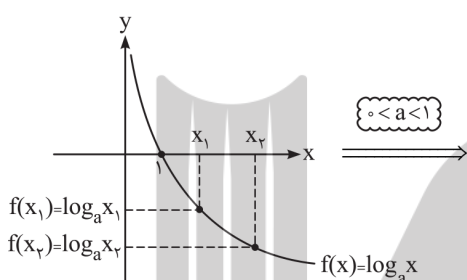
با توجه به نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ ، می‌توانیم روابط زیر را نتیجه‌گیری نماییم:



$x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$, $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

قاعده‌ی بالا به این مفهوم است که از دو طرف یک نامساوی می‌توانیم لگاریتم در مبنای بزرگ‌تر از واحد بگیریم و جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. از طرفی اگر در دو طرف یک نامساوی دو لگاریتم با مبنای بزرگ‌تر از واحد وجود داشته باشد، می‌توانیم لگاریتم‌ها را حذف کرده و نامساوی حاصل را بین عبارت‌های جلوی آن‌ها بنویسیم.



$x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$, $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

قاعده‌ی بالا به این مفهوم است که از دو طرف یک نامساوی می‌توانیم لگاریتم در مبنای مثبت و کوچک‌تر از واحد بگیریم به شرط آن‌که جهت نامساوی عکس گردد. از طرفی اگر در دو طرف نامساوی دو لگاریتم با مبنای مثبت و کوچک‌تر از واحد وجود داشت، می‌توانیم لگاریتم‌ها را حذف کرده و نامساوی را با جهت عکس‌اش برای عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها بنویسیم.

نکات زیر را به خاطر بسپاریم...

اگر مبنا و عدد جلوی لگاریتم، هر دو بزرگ‌تر از یک باشند و یا هر دو بین صفر و یک باشند، حاصل لگاریتم مثبت است.

اگر مبنا و عدد جلوی لگاریتم، یکی بین صفر و یک و دیگری بزرگ‌تر از یک باشد، حاصل لگاریتم منفی است.

به عنوان مثال داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0 \quad , \quad \log_{\frac{1}{4}} 0.2 > 0 \quad , \quad \ln 3 > 0 \quad , \quad \ln \frac{3}{4} < 0$$

برای حل نامعادلات لگاریتمی، داریم:

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \begin{cases} a > 1 & \rightarrow f(x) \leq g(x) \\ \text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود} \\ 0 < a < 1 & \rightarrow f(x) \geq g(x) \\ \text{جهت نامساوی عوض می‌شود} \end{cases}$$

$$\log_a f(x) \leq k \begin{cases} a > 1 & \rightarrow f(x) \leq a^k \\ \text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود} \\ 0 < a < 1 & \rightarrow f(x) \geq a^k \\ \text{جهت نامساوی عوض می‌شود} \end{cases}$$

تست آموزشی ۲۱

(سراسری تهرانی ۸۶ فارغ از کشور)

دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log_{10}(x-1)}$ به کدام صورت است؟

(۱,۱۱] (۴)

[۱,۱۱) (۳)

[۲,۱۰] (۲)

(۱,۲] (۱)

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \log_{10}(x-1) \geq 0 \Rightarrow \log_{10}(x-1) \leq 1 \xrightarrow{\text{مبنا بزرگ‌تر از یک است}} x-1 \leq 10^1 \Rightarrow x \leq 11 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (1, 11]$$

۱۵۴- کدام گزینه صحیح نیست؟

$\log_3 2 > 0$ (۱) $\log_{0.7} 0.3 > 0$ (۲) $\log_{0.7} 0.1 < 0$ (۳) $\log(\log 2) > 0$ (۴)

۱۵۵- کوچکترین مقدار در بین اعداد زیر، کدام است؟

$\log_2 3$ (۱) $\log_{0.3} \frac{2}{3}$ (۲) $\log_2 2$ (۳) $\log_{0.3} \frac{2}{3}$ (۴)

۱۵۶- کدام گزینه درست است؟

$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2$ (۴) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 5$ (۳) $\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2$ (۲) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ (۱)

۱۵۷- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\log_2(2x-1) > -2$ کدام است؟

$x > \frac{5}{8}$ (۱) $x > \frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{8}$ (۳) $0 < x < \frac{5}{8}$ (۴)

۱۵۸- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $2 + \log_{0.25}(x-3) \geq 0$ کدام است؟

$[3, 16]$ (۱) $[3, 19]$ (۲) $(3, 19]$ (۳) $(3, 16]$ (۴)

۱۵۹- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{\log_{0.5} \frac{x-1}{2}}$ کدام است؟

$(1, 3]$ (۱) $[3, +\infty)$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴)

۱۶۰- دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{-1 - \log_2 \frac{3x+4}{5}}$ کدام است؟

$-\frac{4}{3} < x \leq -\frac{1}{2}$ (۱) $x \leq -\frac{1}{2}$ (۲) $x > -\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3} < x < 1$ (۴)

درسنامه‌ی ۱۰

محاسبه‌ی مقدار تقریبی لگاریتم

برای محاسبه‌ی تقریبی $\log_a A$ کافی است ابتدا عبارت A را بین دو توان صحیح و متوالی a قرار دهیم. سپس از طرفین نامساوی نوشته شده در مبنای a لگاریتم بگیریم (دقت کنیم! اگر $a > 1$ باشد، جهت نامساوی عوض نمی‌شود. ولی اگر $0 < a < 1$ باشد، جهت نامساوی عوض خواهد شد). با انجام این کار، مقدار تقریبی (یا همان قسمت صحیح جواب) $\log_a A$ مشخص می‌شود. به عنوان مثال برای محاسبه‌ی مقدار تقریبی یا همان قسمت صحیح جواب $\log_{0.3} 321$ ، داریم:

$$10^2 < 321 < 10^3 \xrightarrow{\log_{0.3}} \log_{0.3} 10^2 < \log_{0.3} 321 < \log_{0.3} 10^3 \Rightarrow 2 < \log_{0.3} 321 < 3 \Rightarrow \log_{0.3} 321 = 2/\dots$$

جهت نامساوی عوض نمی‌شود

برای تمرین بیشتر، به مثال‌های زیر توجه کنیم:

$$\ln 5 \Rightarrow e^1 < 5 < e^2 \xrightarrow{\log_e \text{ یا } \ln} \ln e^1 < \ln 5 < \ln e^2 \Rightarrow 1 < \ln 5 < 2 \Rightarrow \ln 5 = 1/\dots$$

جهت نامساوی عوض نمی‌شود

$$\log_{0.002} 0.002 \Rightarrow 10^{-3} < 0.002 < 10^{-2} \xrightarrow{\log_{0.3}} \log_{0.3} 10^{-3} < \log_{0.3} 0.002 < \log_{0.3} 10^{-2} \Rightarrow -3 < \log_{0.3} 0.002 < -2 \Rightarrow \log_{0.3} 0.002 = -2/\dots$$

جهت نامساوی عوض نمی‌شود

نکته‌ی طلایی: برای تعیین قسمت صحیح لگاریتم اعشاری عدد X (یعنی قسمت صحیح جواب $\log_{0.3} X$)، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $X > 1$ باشد، قسمت صحیح جواب، یک واحد کم‌تر از تعداد ارقام عدد X است. به عنوان مثال، داریم:

$\log 221 = 2/\dots$ ، $\log 175 = 2/\dots$ ، $\log 139 = 3/\dots$ ، $\log 7 = 0/\dots$
 رقم ۳ رقم ۳ رقم ۴ رقم ۱

۲) اگر $0 < X < 1$ باشد، جواب $\log_{0.3} X$ قطعاً منفی است. قدرمطلق قسمت صحیح جواب برابر با تعداد صفرهای کنار هم جلوی ممیز است. به عنوان

مثال داریم:

$$\log_{0.3} 0.002 = -3/\dots$$
 ، $\log_{0.3} 0.0003 = -4/\dots$ ، $\log_{0.3} 0.139 = -1/\dots$

قدرمطلق قسمت صحیح جواب \rightarrow ۲ صفر جلوی ممیز

دقت کنیم: اگر عدد بین صفر و یک برابر با توان‌های صحیح منفی عدد 10^0 باشد، استثنای حالت ۲ رخ می‌دهد. داریم:

$$\log_{0.3} 10^{-1} = \log_{0.3} 0.1 = -1$$
 ، $\log_{0.3} 10^{-2} = \log_{0.3} 0.01 = -2$ ، $\log_{0.3} 10^{-3} = \log_{0.3} 0.001 = -3$

(آزاد ریاضی ۸۱)

حاصل $[\log_6 2] + [\log_6 6]$ برابر است با: ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی (۲). برای محاسبه‌ی حاصل $[\log_6 2] + [\log_6 6]$ ، کافی است قسمت صحیح $\log_6 2$ و $\log_6 6$ (عبارت‌های داخل براکت) را مشخص کنیم. داریم:

$$\log_6 6: 6^0 < 2 < 6^1 \xrightarrow[a=6>1]{\log_6} \log_6 6^0 < \log_6 2 < \log_6 6^1 \Rightarrow 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow \log_6 2 = 0/\dots$$

$$\log_6 6: 2^2 < 6 < 2^3 \xrightarrow[a=2>1]{\log_2} \log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3 \Rightarrow 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow \log_2 6 = 2/\dots$$

$$\begin{cases} 0 < \log_6 2 < 1 \Rightarrow [\log_6 2] = 0 \\ 2 < \log_2 6 < 3 \Rightarrow [\log_2 6] = 2 \end{cases} \Rightarrow [\log_6 2] + [\log_2 6] = 0 + 2 = 2$$

۱۶۱- حاصل $[\log_{10} 0.02] + [\log_{10} 1319]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱) صفر
۲ (۲) ۱ (۱)
۳ (۳) ۲ (۲)
۴ (۴) ۳ (۳)
صفر (۴) ۲ (۲) ۱ (۱)
۱ (۱) مقدار $A = \log_{\delta} 626$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟
۱ (۱) $\frac{1}{5} < A < \frac{1}{4}$
۲ (۲) $5 < A < 6$
۳ (۳) $4 < A < 5$
۴ (۴) $-5 < A < -4$
۱ (۱) اگر $\log_{\frac{1}{\delta}} \frac{1}{\delta} = a$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟
۱ (۱) $-3 < a < -2$
۲ (۲) $a > -2$ یا $a < -3$
۳ (۳) $2 < a < 3$
۴ (۴) $a > 3$ یا $a < 2$
۱ (۱) لگاریتم عدد 0.0506 در مبنای 10 ، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟
۱ (۱) صفر، -۱
۲ (۲) -۱، -۲
۳ (۳) -۲، -۳
۴ (۴) -۳، -۴

۱۶۷- بیشترین مقدار تابع $y = (\log_{\delta} 3)^{\cos x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{2}$
۲ (۲) $\log_{\delta} 3$
۳ (۳) $\log_{\delta} 3$
۴ (۴) $\log_{\delta} 3$

۱۶۸- اگر $\log a = 3/64$ باشد، عدد a^3 چند رقمی است؟

- ۱ (۱) ۹
۲ (۲) ۱۰
۳ (۳) ۱۱
۴ (۴) ۱۲

۱۶۹- اگر $\log_{\frac{100}{a}} = 4/124$ ، آن‌گاه عدد a^5 بعد از ممیز چند صفر کنار هم دارد؟

- ۱ (۱) ۸
۲ (۲) ۹
۳ (۳) ۱۰
۴ (۴) ۱۱

۱۷۰- اگر $\log \sqrt{a} = -1/0.74$ ، آن‌گاه تعداد صفرهای بعد از ممیز و در سمت چپ عدد اعشاری a^3 کدام است؟

- ۱ (۱) ۶
۲ (۲) ۷
۳ (۳) ۸
۴ (۴) ۹

۱۷۱- اگر $\log 2 = 0/301$ ، عدد 5^{18} چند رقمی است؟

- ۱ (۱) ۱۱
۲ (۲) ۱۴
۳ (۳) ۱۲
۴ (۴) ۱۳

حل معادلات نمایی پیچیده با استفاده از لگاریتم

یادآوری: همان‌طور که در مبحث معادلات نمایی اشاره شد، برای به‌دست آوردن جواب معادله، کافی است در دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم‌پایه ایجاد کرده و سپس توان‌ها را با هم برابر قرار دهیم. به عنوان مثال در معادله $2^{3x} = 8$ داریم:

$$2^{3x} = 8 = 2^3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

ممکن است در حل برخی معادلات نمایی، نتوانیم دو طرف تساوی را هم‌پایه کنیم. در این حالت، کافی است ابتدا معادله را بر حسب $a^{u(x)}$ حل کنیم (یعنی مقدار $a^{u(x)}$ را به‌دست آوریم) و سپس از طرفین تساوی در مبنای پایه‌ی a ، لگاریتم بگیریم (یا \ln بگیریم). به عنوان مثال در معادله‌ی

$$2^{3x} = 7 \Rightarrow \log_2 2^{3x} = \log_2 7 \Rightarrow 3x \log_2 2 = \log_2 7 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \log_2 7 = \frac{1}{3} \frac{\ln 7}{\ln 2} = \frac{\ln 7}{\ln 8}$$

تست آموزشی ۲۳

(تمرین کتاب درسی ریاضی عمومی)

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$ کدام است؟

(۴) $\ln \frac{35}{8}$

(۳) $\ln \frac{35}{4}$

(۲) $\ln \frac{35}{2}$

(۱) $\ln 35$

پاسخ: گزینه‌ی (۲)

$$(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x - 5 = 0 \Rightarrow e^x = 5 \xrightarrow{\ln} x = \ln 5 \\ 2e^x - 7 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{7}{2} \xrightarrow{\ln} x = \ln \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \ln 5 + \ln \frac{7}{2} = \ln \frac{35}{2}$$

تست آموزشی ۲۴

ریشه‌ی معادله‌ی $2e^{x-2} = \frac{1}{e^{x+1}}$ کدام است؟

(۴) $1 - \frac{1}{2} \ln 2$

(۳) $1 + \frac{1}{2} \ln 2$

(۲) $2 + \ln 2$

(۱) $2 + \ln 2$

پاسخ: گزینه‌ی (۴)

$$2e^{x-2} = \frac{1}{e^{x+1}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} 2e^{x-2} \times e^{x+1} = 1 \Rightarrow 2e^{(x-2)+(x+1)} = 1 \Rightarrow e^{2x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\ln} 2x - 2 = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\ln \frac{1}{2} + 2}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \ln 2^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

(تمرین کتاب درسی)

۱۷۲- معادله‌ی $(e^x + 3)^2 - 25 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۷۳- ریشه‌های معادله‌ی $(e^x - 7)(e^{2x} + 6) = 0$ کدام است؟

(۴) $\ln 6$

(۳) $\ln 3$

(۲) $\ln 7$

(۱) $\ln 3$ و $\ln 7$

۱۷۴- ریشه‌ی معادله‌ی $(e^x + 3)^3 = 125$ کدام است؟

(۴) $\ln \frac{1}{2}$

(۳) $\ln 5$

(۲) $\ln 3$

(۱) $\ln 2$

۱۷۵- جواب معادله‌ی $3^x = 3^{1-x}$ کدام است؟

(۴) $\ln 6$

(۳) $\log_6 2$

(۲) $\log_6 6$

(۱) $\ln 2$

۱۷۶- معادله‌ی $|e^{3x} - 1| = |2e^{3x} - 5|$ چند ریشه دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۱۷۷- اگر $\frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} - 1} = 5$ باشد، آن‌گاه حاصل $e^{\ln x}$ کدام است؟

(۴) $\ln \frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2} \ln 2$

(۱) $\ln 2$

۱۷۸- جواب معادله‌ی $2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$ کدام است؟

(۴) $\ln 2$

(۳) $\ln \sqrt{2}$

(۲) $\ln \frac{1}{2}$

(۱) -۱

۱۷۹- ریشه‌ی معادله‌ی $e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 6e$ کدام است؟

(۴) e

(۳) $\ln 6$

(۲) $\ln 5$

(۱) $\ln 2$

۱- (۳) با توجه به درسنامه‌ی مطرح شده گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۲- (۳) می‌دانیم در توابع نمایی، پایه باید مثبت و مخالف یک باشد، پس داریم:

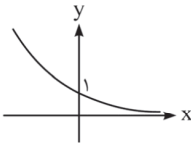
$$\begin{cases} \frac{2-a}{2+a} > 0 \Rightarrow -2 < a < 2 \\ \frac{2-a}{2+a} \neq 1 \Rightarrow 2-a \neq 2+a \Rightarrow a \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a \in (-2, 2) - \{0\}$$

۳- (۱) برای آن که تابع نمایی $y = a^x$ صعودی باشد، باید پایه‌ی آن (یعنی a) را بزرگ‌تر از یک قرار دهیم:

$$y = \underbrace{(-m^2 + 6m - 4)}_a^x \xrightarrow{\substack{\text{تابع نمایی} \\ \text{صعودی است}}} a > 1 \Rightarrow -m^2 + 6m - 4 > 1 \Rightarrow -m^2 + 6m - 5 > 0 \Rightarrow 1 < m < 5$$

با همان پایه

۴- (۲) برای آن که بتوانیم در مورد تابع $y = e^{-x}$ اظهار نظر کنیم، باید ضابطه‌ی آن را به شکل $y = a^x$ درآوریم. داریم:



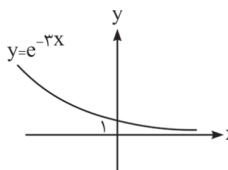
$$y = e^{-x} = (e^{-1})^x = \left(\frac{1}{e}\right)^x$$

$0 < a < 1$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، چون پایه‌ی تابع نمایی (یعنی $a = \frac{1}{e}$) بین صفر و یک است، در نتیجه نمودار آن نزولی می‌باشد. این تابع محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده و محور x ها را هرگز قطع نمی‌کند. بنابراین جواب درست، گزینه‌ی (۲) است.

۵- (۱) چون پایه‌ی عبارت نمایی $y = 3^x$ (یعنی ۳)، بزرگ‌تر از یک است، نمودار تابع نمایی صعودی می‌باشد و جواب درست گزینه‌ی (۱) خواهد بود. دقت کنیم که برد تابع نمایی، مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. در نتیجه گزینه‌ی (۳) و گزینه‌ی (۴) نادرست‌اند.

۶- (۲) **روش اول:** برای رسم تابع $y = e^{-3x}$ ، کافی است شکل ضابطه‌ی تابع را به صورت $y = a^x$ تبدیل کنیم. با



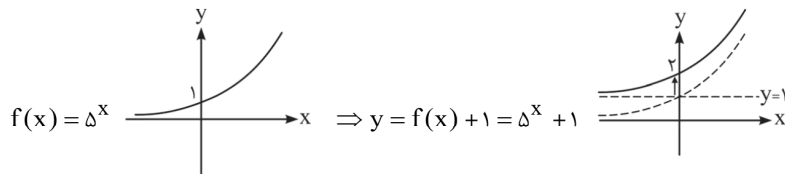
$$y = e^{-3x} = (e^{-3})^x = \left(\frac{1}{e^3}\right)^x$$

$0 < a < 1$


چون پایه‌ی تابع نمایی فوق، یعنی $a = \frac{1}{e^3}$ ، بین صفر و یک است، نمودار تابع نزولی خواهد بود.

روش دوم: در تابع $y = a^{mx+n}$ اگر $a^m > 1$ باشد، تابع صعودی بوده و اگر $0 < a^m < 1$ باشد، تابع نزولی می‌باشد. در تابع $y = e^{-3x}$ ابتدا مقدار $a^m = e^{-3}$ را محاسبه می‌کنیم. چون $a^m = \frac{1}{e^3}$ بین صفر و یک می‌باشد، پس تابع نزولی است. از طرفی تابع همواره بالای محور x ها است، پس گزینه‌ی (۲) درست می‌باشد.

۷- (۲) برای رسم تابع $y = 5^x + 1$ ، ابتدا نمودار 5^x را رسم کرده و سپس ۱ واحد آن را رو به بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم، تا نمودار تابع $y = 5^x + 1$ به دست آید. دقت کنیم چون پایه‌ی عبارت نمایی 5^x ، بزرگ‌تر از یک است، نمودار آن صعودی خواهد بود:

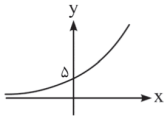


۸- (۴) با کمی دقت در ضابطه‌ی تابع $y = \frac{(\frac{1}{4})^x}{3^{-x}}$ به راحتی می‌توانیم که ضابطه‌ی این تابع با استفاده از عملیات جبری به شکل $y = a^x$ در خواهد آمد. داریم:

$$y = \frac{(\frac{1}{4})^x}{3^{-x}} = \left(\frac{1}{4}\right)^x \times 3^x = \left(\frac{3}{4}\right)^x \xrightarrow{0 < a < 1} \text{تابع نزولی است}$$


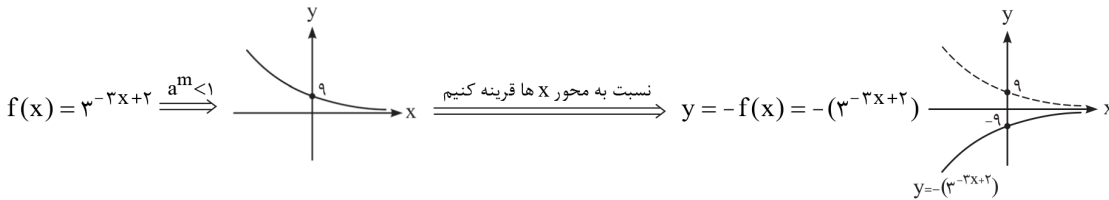
۹- (۱)

نمودار تابع $y = 5^{2x+1}$ به صورت $y = a^{mx+n}$ است. چون در تابع $a^m = 5^2 = 25$ بزرگتر از یک است، در نتیجه نمودار این تابع صعودی می‌باشد.



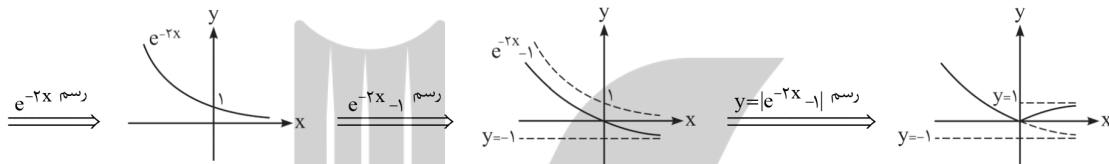
۱۰- (۳)

برای رسم نمودار تابع $y = -(3^{-3x+2})$ ، ابتدا نمودار تابع $f(x) = 3^{-3x+2}$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نکاتی که برای رسم نمودار تابع $y = a^{mx+n}$ بیان کردیم، چون $a^m = 3^{-3} = \frac{1}{27} < 1$ است، در نتیجه نمودار تابع نمایی f نزولی می‌باشد. سپس کل نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x) = -(3^{-3x+2})$ به دست آید. داریم:

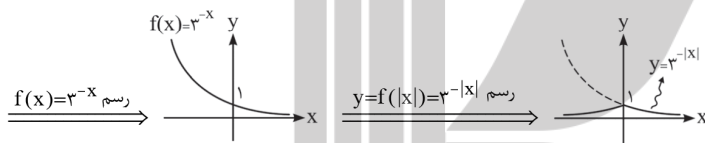


۱۱- (۳)

برای رسم نمودار تابع $y = |e^{-2x} - 1|$ ابتدا باید نمودار عبارت داخل قدرمطلق را رسم کنیم. برای این منظور باید نمودار e^{-2x} را رسم کرده و یک واحد رو به پایین انتقال دهیم. سپس آن قسمتی از نمودار را که زیر محور x ها است، نسبت به محور x ها قرینه نماییم. داریم:

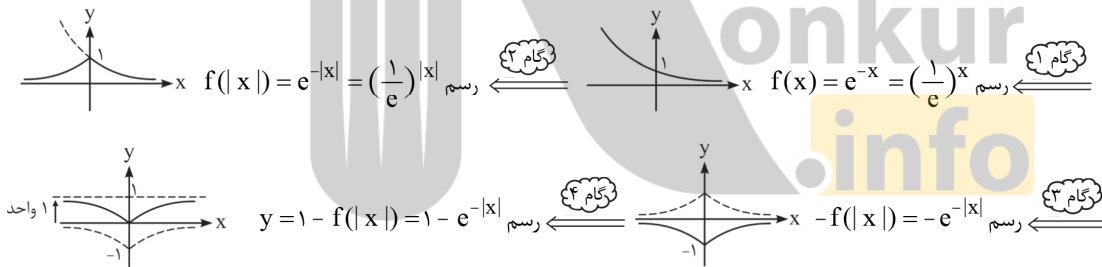


۱۲- (۲)



۱۳- (۳)

برای رسم تابع $y = 1 - e^{-|x|}$ ، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱۴- (۳)

به ازای $a = 0$ و $a = 1$ که اعدادی نامنفی هستند، داریم:

وارون پذیر نیست \Rightarrow تابع ثابت، غیریک‌به‌یک است $\Rightarrow 1^x = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ a=0 \end{array} \right.$
وارون پذیر نیست \Rightarrow تابع ثابت، غیریک‌به‌یک است $\Rightarrow 0^x = 0$

بنابراین تابع f به ازای دو مقدار نامنفی برای a ، وارون پذیر نیست. در غیر این صورت تابع نمایی، قطعاً وارون پذیر خواهد بود.

۱۵- (۴)

چون $0 < a < 1$ است، نمودار y_1 به صورت می‌باشد. همچنین چون b و c بزرگتر از یک هستند، بنابراین نمودار آن‌ها به صورت می‌باشد. از آنجا که $b < c$ است، نمودار y_2 در قسمت مثبت محور x ها بالاتر از نمودار y_3 قرار می‌گیرد و در قسمت منفی محور x ها نمودار y_2 بالای y_3 قرار می‌گیرد.

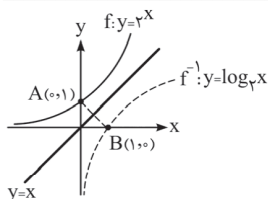
نکته: در توابع نمایی $y = k(a^x)$ و $k \neq 0$ همواره به ازای افزایش یا کاهش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی (متغیر مستقل x)، مقادیر خروجی (متغیر وابسته y) در عدد ثابت و مثبت غیر یک ضرب می‌شوند.

x	۱	۳	۵
y	-۱۹۲	-۲۴	-۳

$\times \frac{1}{8}$ $\times \frac{1}{8}$

در گزینه‌ی (۲) به ازای افزایش ۲ واحد در مقادیر x ، مقادیر y در عدد مثبت غیر یک $\frac{1}{8}$ ضرب می‌شوند. پس این گزینه بیان‌گر تغییرات یک تابع نمایی با ضابطه‌ی $y = k(a^x)$ است.

در گزینه‌ی (۱)، مقادیر y در عدد نامثبت (-۴) و در گزینه‌ی (۴)، مقادیر y در عدد ثابت ۱ ضرب شده‌اند. پس بیان‌گر تغییرات تابع نمایی $y = k(a^x)$ نیستند. گزینه‌ی (۳) بیان‌گر تغییرات تابع $y = x^2$ است که یک تابع نمایی نیست.



روش اول: برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها، کافی است نمودار آن‌ها را تجسم کنیم. این فاصله برابر با طول AB است:

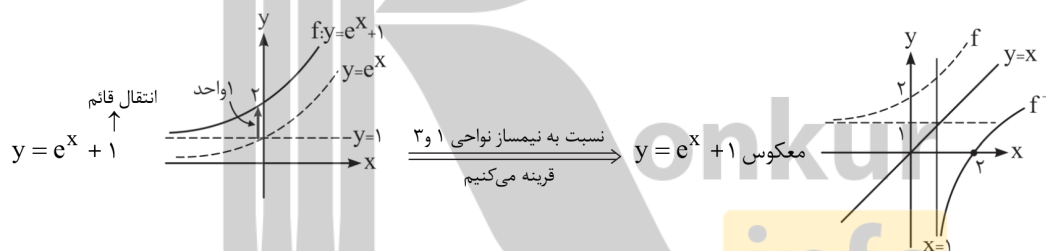
$$A(0,1), B(1,0) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

روش دوم: بدون رسم نمودار تابع $y = 2^x$ و معکوسش نیز می‌توانیم فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع با محور x ها را مشخص نماییم. برای تعیین مختصات نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها، کافی است در ضابطه‌ی تابع، به جای x صفر قرار دهیم. داریم:

$$y = 2^x \xrightarrow{x=0} y = 2^0 = 1 \xrightarrow{\text{نقطه‌ی برخورد تابع نمایی با محور } y \text{ ها}} A(0,1) \in f$$

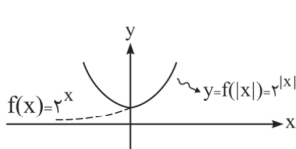
حال اگر جای x و y نقطه‌ی A را عوض کنیم، به راحتی نقطه‌ی برخورد معکوس این تابع با محور x ها مشخص می‌شود:

$$\xrightarrow{\text{نقطه‌ی برخورد معکوس تابع نمایی با محور } x \text{ ها}} B(1,0) \in f^{-1} \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



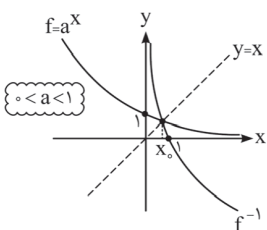
توابع نمایی با ضابطه‌ی $y = ka^{mx+n}$ ، همواره یک‌به‌یک و معکوس پذیرند. بنابراین توابع گزینه‌ی (۱)، گزینه‌ی (۲) و گزینه‌ی (۳) همگی یک‌به‌یک و معکوس پذیرند:

اما در گزینه‌ی (۴) به ازای مثلاً $x = -1$ و $x = 1$ ، یک مقدار برای تابع حاصل می‌شود. پس تابع غیر یک‌به‌یک و معکوس ناپذیر است.



$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 2^{|1|} = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 2^{|-1|} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{غیر یک‌به‌یک و معکوس ناپذیر}$$

با توجه به رسم نمودار تابع گزینه‌ی (۴) نیز می‌توانیم به این موضوع پی ببریم. داریم:



اگر تابع نمایی $y = a^x$ معکوسش را قطع کند، حتماً تابع نمایی نزولی بوده و پایه‌ی آن بین صفر و یک است، یعنی $0 < a < 1$. حال از روی نمودار تابع نمایی و تابع معکوسش پی می‌بریم که طول نقطه‌ی تلاقی، بین صفر و یک می‌باشد، یعنی $0 < x_0 < 1$.

(۴) - ۲۱

چون $f(x) = 4^x$ است. پس داریم:

$$f(x+1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4 \times 4^x - 4^x = 4^x(4 - 1) = 3 \times 4^x = 3f(x)$$

(۲) - ۲۲

چون $f(x) = (\sqrt{3})^x$ است. پس داریم:

$$f(x+5) - f(x+3) = Af(x+1) \Rightarrow (\sqrt{3})^{x+5} - (\sqrt{3})^{x+3} = A(\sqrt{3})^{x+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\sqrt{3})^{x+5} - (\sqrt{3})^{x+3}}{(\sqrt{3})^{x+1}} \Rightarrow A = \frac{(\sqrt{3})^{x+3}((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^0)}{(\sqrt{3})^{x+1}} = 9 - 3 = 6$$

(۴) - ۲۳

$$f(x) = \frac{3^{x+3} - 3^{x+2} - 3^{x+1}}{9^x + 9^x + 9^x} = \frac{3^{x+1}(3^2 - 3 - 1)}{3 \times 9^x} = \frac{5 \times 3^{x+1}}{3 \times (3^2)^x} = 5 \times \frac{3^{x+1}}{3^{2x+1}} = 5 \times 3^{(x+1)-(2x+1)} = 5 \times 3^{-x} = \frac{5}{3^x}$$

(۲) - ۲۴

برای حل معادله‌ی $8^{x^2+1} = 2^{5x+1}$ ، کافی است پایهی عبارت سمت راست را تجزیه کرده و به صورت عاملی از ۲ تبدیل کنیم. با انجام این کار، دو طرف تساوی، هم‌پایه خواهند شد.

داریم:

$$2^{5x+1} = 8^{x^2+1} \Rightarrow 2^{5x+1} = (2^3)^{x^2+1} \Rightarrow 2^{5x+1} = 2^{3x^2+3} \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

البته می‌توانستیم مجموع ریشه‌ها را از $S = -\frac{b}{a}$ هم به دست آوریم. داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$$

(۴) - ۲۵

دو طرف تساوی را تجزیه کرده و به صورت عبارات نمایی با پایهی ۲ می‌نویسیم. با انجام این کار دو طرف تساوی، هم‌پایه می‌شوند. داریم:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 3^{2x+1} \Rightarrow (2^{-3})^{3x} = (2^5)^{x+1} \Rightarrow 2^{-9x} = 2^{5x+5} \Rightarrow -9x = 5x+5 \Rightarrow -9x = 5x+5 \Rightarrow x = -\frac{5}{14}$$

(۲) - ۲۶

$$\frac{1}{5^{2x+2}} = 25^{2x} \Rightarrow 5^{-(2x+2)} = (5^2)^{2x} \Rightarrow 5^{-2x-2} = 5^{4x} \Rightarrow -2x-2 = 4x \Rightarrow -2x-2 = 4x \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

(۴) - ۲۷

چون حاصل عبارت سمت راست تساوی به‌صورت 2^A نوشته شده است، لذا صورت و مخرج کسر سمت چپ تساوی را تجزیه کرده و به‌صورت 2^B تبدیل می‌کنیم تا مقدار A مشخص شود. داریم:

$$\left(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}\right)^2 = \left(\frac{(2^2)^{4\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\frac{2^{8\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}}\right)^2 = (2^{8\sqrt{2}-2\sqrt{2}})^2 = (2^{6\sqrt{2}})^2 = 2^{12\sqrt{2}} = 2^A \Rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

(۳) - ۲۸

برای حل معادله باید دو طرف تساوی را هم‌پایه می‌کنیم. برای این منظور یکی از عبارتهای نمایی را به سمت دیگر تساوی انتقال می‌دهیم. داریم:

$$3^{x-2} - 9 \times 3^{2x+2} = 0 \Rightarrow 3^{x-2} = 9 \times 3^{2x+2} \Rightarrow 3^{x-2} = 3^{2x+4} \Rightarrow x-2 = 2x+4 \Rightarrow x = -6$$

(۲) - ۲۹

$$\left(\frac{1}{3^{x+1}}\right)^{x+3} = (9^2)^{x(x+1)} \Rightarrow (3^{-(x+1)})^{x+3} = ((3^2)^2)^{x(x+1)} \Rightarrow 3^{-(x+1)(x+3)} = 3^{4x(x+1)}$$

$$\Rightarrow 3^{-x^2-4x-3} = 3^{4x^2+4x} \Rightarrow -x^2-4x-3 = 4x^2+4x \Rightarrow 5x^2+8x+3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{8}{5}$$

البته می‌توانیم بدون محاسبه‌ی ریشه‌ها، مجموع ریشه‌ها را از $S = -\frac{b}{a}$ هم به دست بیاوریم. داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = S = -\frac{b}{a} = -\frac{8}{5}$$

(۱) - ۳۰

برای حل معادله‌ی نمایی صورت تست، کافی است دو طرف تساوی، دو، عبارت نمایی هم‌پایه تشکیل دهیم. داریم:

$$5^{x+|x-2|} = 25 = 5^2 \Rightarrow x+|x-2| = 2 \Rightarrow \underbrace{x-2}_u = \underbrace{2-x}_{-u} \xrightarrow{|u|=-u \Rightarrow u \leq 0} x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

(۱) - ۳۱

$$\frac{2^x \times (\sqrt{2})^{x-1}}{1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \Rightarrow \frac{2^x \times (2^{\frac{1}{2}})^{x-1}}{2^2} = (2^{-2})^{x^2} \Rightarrow \frac{2^x \times 2^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}}{2^2} = 2^{-2x^2} \Rightarrow \frac{2^{x + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})}}{2^2} = 2^{-2x^2}$$

$$\Rightarrow 2^{\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) - 2} = 2^{-2x^2} \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}} = 2^{-2x^2} \Rightarrow \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = -2x^2 \Rightarrow 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

حال برای تعیین حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق، کافی است $P = \frac{c}{a}$ را محاسبه نماییم. داریم:

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌های معادله} = P = \frac{c}{a} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{2}{1}} = -\frac{5}{4}$$

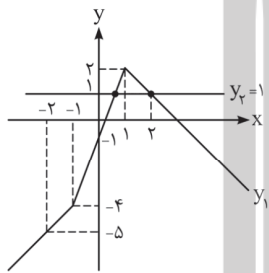
(۳) - ۳۲

$$4^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 72 \Rightarrow (2^2)^{1-x} + (2^{-1})^{2x+1} = 72 \Rightarrow 2^{-2x+2} + 2^{-2x-1} = 72 \Rightarrow 2^{-2x-1}(2^3 + 1) = 72$$

$$\Rightarrow 2^{-2x-1} \times 8 = 72 \Rightarrow 2^{-2x-1} = 9 \Rightarrow -2x - 1 = 2 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

(۴) - ۳۳

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{|x-1|} = 3^{1-|x+1|} \Rightarrow (3^{-2})^{|x-1|} = 3^{1-|x+1|} \Rightarrow 3^{-2|x-1|} = 3^{1-|x+1|} \Rightarrow -2|x-1| = 1-|x+1| \Rightarrow |x+1| - 2|x-1| = 1$$



برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی قدرمطلق فوق، کافی است از روش رسم نمودار بهره بگیریم. برای این منظور دو طرف تساوی را رسم کرده و به تعداد نقاط برخورد آن‌ها، ریشه خواهیم داشت. داریم:

$$\underbrace{|x+1|}_{y_1} - 2 \underbrace{|x-1|}_{y_2} = 1$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، دو تابع y_1 و y_2 در دو نقطه با طول‌های مثبت، یک‌دیگر را قطع می‌کنند. پس معادله، دارای دو ریشه‌ی مثبت است.

(۴) - ۳۴

$$e^{4-x} \times e^{2x-19} = e^{15-x} \Rightarrow e^{4-x+2x-19} = e^{15-x} \Rightarrow |4-x| + |2x-19| = |15-x|$$

در مبحث قدرمطلق آموختیم که اگر $|a| + |b| = |a+b|$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $a \cdot b \geq 0$ است. با توجه به این توضیح، داریم:

$$\underbrace{|4-x|}_a + \underbrace{|2x-19|}_b = \underbrace{|x-15|}_{a+b} \xrightarrow{a \cdot b \geq 0} (4-x)(2x-19) \geq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq \frac{19}{2}$$

در فاصله‌ی $\frac{19}{2} \leq x \leq 4$ ، شش عدد صحیح وجود دارد. پس معادله‌ی فوق، دارای ۶ ریشه‌ی صحیح است.

(۱) - ۳۵

برای حل معادله، نمی‌توانیم دو طرف تساوی را هم‌پایه کنیم. کافی است با تغییر متغیر $t = 3^x$ ، شکل معادله‌ی مفروض را به صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم درآوریم. ایده‌ی تغییر متغیر، یک سلیقه‌ی ذاتی و یک دید زیبا می‌خواهد ...

$$9^x + 3^x - 2 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 + 3^x - 2 = 0 \xrightarrow{3^x = t} t^2 + t - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ t = 3^x = -2 \xrightarrow{\text{جواب ندارد}} x \in \emptyset \end{cases}$$

چون 3^x همواره مثبت است، هرگز نمی‌تواند مقدار -2 به خود بگیرد. در نتیجه معادله‌ی فوق، تنها یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

(۳) - ۳۶

از روش تغییر متغیر، استفاده می‌کنیم:

$$4^x - 2^{x+1} + 1 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 1 = 0 \xrightarrow{2^x = t} t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

در نتیجه معادله‌ی $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ ، تنها دارای یک جواب حقیقی است.

۳۷- (۲)

برای حل معادله‌ی نمایی صورت تست، به هیچ عنوان نمی‌توانیم دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم پایه بسازیم. از طرفی چون در معادله‌ی مذکور یک عبارت نمایی یکسان در همه‌ی جمله‌ها وجود ندارد، نمی‌توانیم از تغییر متغیر نیز استفاده کنیم. برای حل این معادله باید ابتکار عمل داشته و طرفین را بر 4^x تقسیم کنیم تا عبارت‌های نمایی با پایه‌های یکسان در معادله ایجاد شود. داریم:

$$9^x + 6^x = 2 \times 4^x \xrightarrow{\div 4^x} \frac{9^x}{4^x} + \frac{6^x}{4^x} = 2 \Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x = 2 \Rightarrow \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$$

حال با تغییر متغیر $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ شکل معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 \xrightarrow{\text{جواب ندارد}} x \in \emptyset \end{cases}$$

۳۸- (۴)

$$\begin{cases} y_1 = 2^x \\ y_2 = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \xrightarrow{y_1=y_2} 2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \Rightarrow 2^x - \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^x = t &\Rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} \\ &\begin{cases} t_1 = (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2^2}x = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 3 \\ t_2 = (\sqrt{2})^x = -\sqrt{2} \text{ (غیرواقع)} \end{cases} \end{aligned}$$

حال با معلوم بودن طول نقطه‌ی تقاطع دو منحنی، عرض نقطه‌ی تقاطع را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$x = 3 \xrightarrow{y = 2^x} y = 2^3 = 8 \xrightarrow{\text{نقطه‌ی تقاطع}} B(3, 8)$$

$$A(0, 4), B(3, 8) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

۳۹- (۲)

تابع $y = \log_a x$ به ازای $0 < a < 1$ و $a > 1$ به ترتیب نزولی و صعودی است. بنابراین جواب درست گزینه‌ی (۲) است.

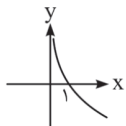
۴۰- (۲)

برای این‌که تابع لگاریتمی $y = \log_a x$ نزولی باشد، باید مبنای لگاریتم را بین صفر و یک قرار دهیم. داریم:

$$y = \log_{\frac{1-m}{a}} x \xrightarrow{\substack{\text{تابع لگاریتمی نزولی است} \\ 0 < a < 1}} 0 < 1 - m^2 < 1 \xrightarrow{-1} -1 < -m^2 < 0 \xrightarrow{\times (-1)} 0 < m^2 < 1 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 0 < |m| < 1$$

۴۱- (۴)

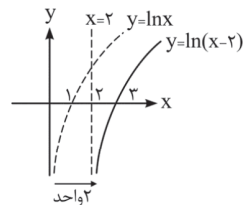
چون در تابع لگاریتمی $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ، مبنای عددی بین صفر و یک است ($a = \frac{1}{3}$)، در نتیجه تابع لگاریتمی نزولی بوده و نمودار آن به صورت شکل مقابل است.



۴۲- (۱)

ضابطه‌ی تابع $y = \ln(x - 2)$ بسیار شبیه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = \ln x$ است. با این تفاوت که باید به جای x ، $x - 2$ را جایگزین کنیم، یعنی $y = f(x - 2) = \ln(x - 2)$. پس کافی است نمودار f را رسم کرده و ۲ واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم. داریم:

$$f(x) = \ln x \xrightarrow{\substack{x \rightarrow x-2 \\ \text{انتقال افقی}}} y = f(x - 2) = \ln(x - 2)$$

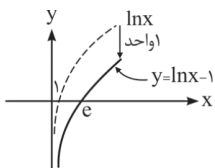


۴۳- (۳)

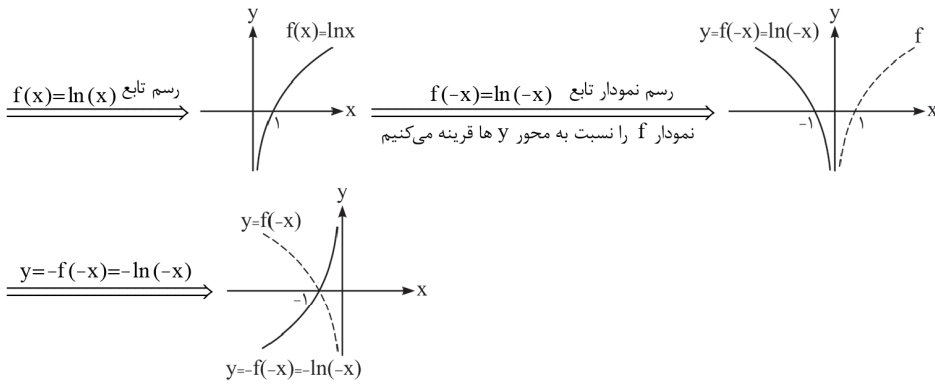
برای رسم نمودار تابع $y = \ln x - 1$ کافی است، نمودار $\ln x$ را یک واحد در راستای قائم روبه پایین انتقال دهیم. داریم:

برای محاسبه‌ی طول از مبدأ تابع $y = \ln x - 1$ کافی است به جای y مقدار $y = 0$ را جایگزین کنیم. کمی بعد با حل معادله‌ی لگاریتمی $\ln x = 1$ ، آشنا می‌شویم. ولی از این به بعد به خاطر بسپاریم که:

$$\log_a \bigcirc = 1 \Rightarrow \bigcirc = a^1 \rightarrow y = \ln x - 1 \xrightarrow{y=0} 0 = \ln x - 1 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$$

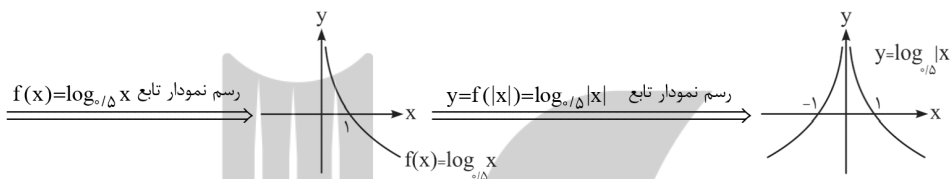


(۲) - ۴۴

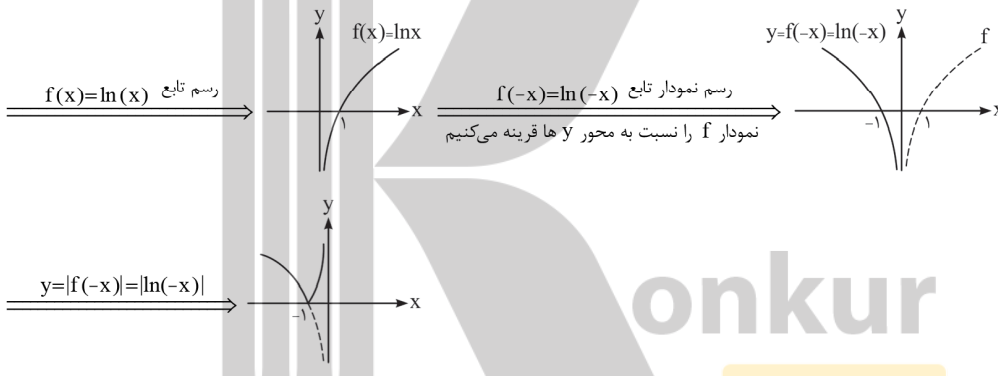


(۱) - ۴۵

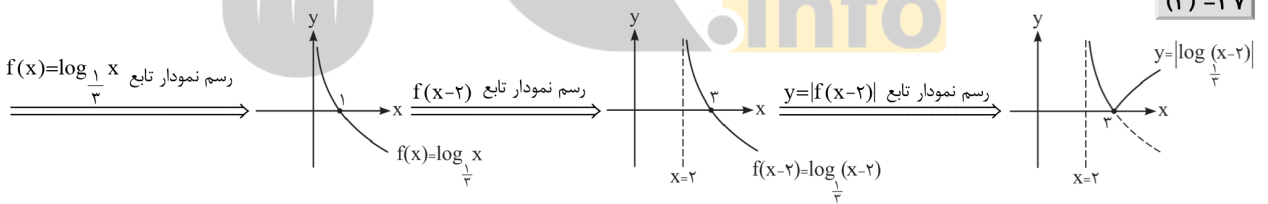
ضابطه‌ی تابع $y = \log_{\frac{1}{\Delta}} |x|$ بسیار شبیه به ضابطه‌ی تابع $f(x) = \log_{\Delta} x$ است. با این تفاوت که باید به جای x ، $|x|$ را جایگزین کنیم، یعنی $y = f(|x|) = \log_{\frac{1}{\Delta}} |x|$. پس کافی است نمودار f را رسم کرده و آن قسمتی از نمودار f که در سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن، قرینه‌ی سمت راست منحنی نسبت به محور y ها را رسم نماییم. دقت کنیم در تابع f ، چون مبنای لگاریتم بین صفر و یک است، نمودار آن نزولی می‌باشد. داریم:



(۲) - ۴۶



(۲) - ۴۷



(۱) - ۴۸

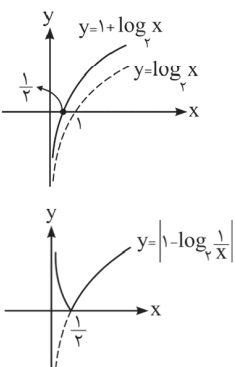
ابتدا با توجه به قواعد لگاریتم، ضابطه‌ی تابع را کمی تغییر می‌دهیم. داریم:

$$y = \left| 1 - \log_{\frac{1}{3}} x \right| = \left| 1 - \log_{\frac{1}{3}} x^{-1} \right| = \left| 1 - (-\log_3 x) \right| = \left| 1 + \log_3 x \right|$$

حال شروع به رسم تابع می‌کنیم. برای این منظور ابتدا باید تابع داخل قدرمطلق را رسم کنیم:

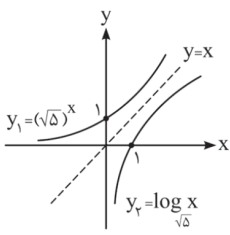
$$1 + \log_3 x = 0 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

حال آن قسمت‌هایی از نمودار رسم‌شده که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = \left| 1 - \log_{\frac{1}{3}} x \right|$ به دست آید. داریم:



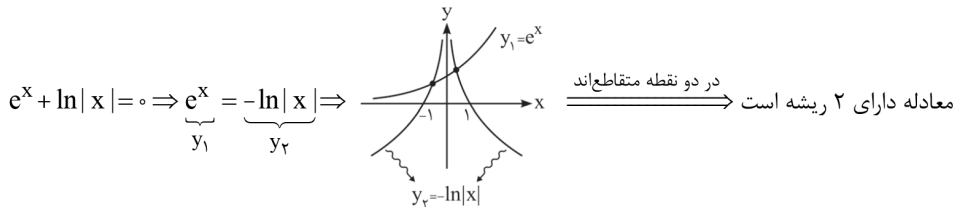
۴۹- (۱)

برای بررسی تعداد ریشه‌های معادله $\log_{\sqrt{\Delta}} x = (\sqrt{\Delta})^x$ ، کافی است توابع دو طرف تساوی را رسم کرده و نقاط برخورد آن‌ها را به عنوان ریشه‌های معادله، معرفی نماییم. توابع $y_1 = (\sqrt{\Delta})^x$ و $y_2 = \log_{\sqrt{\Delta}} x$ معکوس یکدیگرند. چون پایه‌ی عبارت نمایی در تابع y_1 بزرگ‌تر از یک است، لذا تابع نمایی صعودی بوده و معکوس خود، یعنی تابع y_2 را هرگز قطع نمی‌کند. بنابراین معادله‌ی فوق، هیچ ریشه‌ای ندارد. به شکل مقابل دقت کنید:



$$\underbrace{\log_{\sqrt{\Delta}} x}_{y_2} = \underbrace{(\sqrt{\Delta})^x}_{y_1} \xrightarrow{y_1 \neq y_2} x \in \emptyset$$

۵۰- (۳)



۵۱- (۱) چون تابع \ln ، همان تابع \log_e است و e عددی بزرگ‌تر از صفر و مخالف ۱ می‌باشد، پس فقط و فقط باید عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر

از صفر قرار دهیم. برای این منظور از جدول تعیین علامت $\frac{x-3}{2-x}$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$y = \ln \frac{x-3}{2-x} \Rightarrow \frac{x-3}{2-x} > 0 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 3 \\ \hline - & + & - \\ \hline \end{array} \Rightarrow 2 < x < 3 \Rightarrow D_f = (2, 3)$$

تعریف نشده

۵۲- (۴) برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_x(x^2 + 9)$ ، چون عبارت جلوی لگاریتم، یعنی $x^2 + 9$ ، همواره بزرگ‌تر از صفر است، تنها

کافی است مبنای لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار داده و مقادیری از x که مبنای را برابر با ۱ می‌کنند، از مجموعه‌ی جواب کنار بگذاریم:

$$D_f = \{x \mid x > 0, x \neq 1\}$$

۵۳- (۲)

برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\log(x-1)}{\log(4-x^2)}$ ، ابتدا دامنه‌ی تعریف صورت و مخرج را مشخص می‌کنیم و بین مجموعه‌ی جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} \log(x-1) \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ \log(4-x^2) \Rightarrow 4-x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < x < 2$$

حال کافی است به این نکته توجه کنیم که برای تعیین دامنه‌ی توابع کسری، باید مخرج را مخالف صفر در نظر بگیریم. منظور از این جمله این است که مقادیری از x که مخرج، یعنی $\log(4-x^2)$ را صفر می‌کنند، از مجموعه‌ی جواب به دست آمده کنار بگذاریم. اگر به نمودار تابع لگاریتمی توجه کنیم، زمانی که جلوی لگاریتم برابر یک است، مقدار لگاریتم صفر می‌شود. به عبارت دیگر لگاریتم عدد یک، در هر مبنایی صفر است. پس داریم:

$$\log(4-x^2) = 0 \Rightarrow 4-x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

حال $x = \pm\sqrt{3}$ (ریشه‌های مخرج) را از مجموعه‌ی جواب $1 < x < 2$ کنار می‌گذاریم تا دامنه‌ی تابع فوق به دست آید:

$$D_f = \{x \mid 1 < x < 2, x \neq \sqrt{3}\}$$

۵۴- (۲)

ابتدا دامنه‌ی تعریف لگاریتم را مشخص کرده و سپس عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 & (1) \\ \ln(x-1) \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 2 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

تذکر: با توجه به نمودار تابع لگاریتمی که مبنای آن بزرگ‌تر از یک است، زمانی حاصل لگاریتم بزرگ‌تر یا مساوی صفر است که عبارت جلوی لگاریتم، بزرگ‌تر یا مساوی یک باشد.

۵۵- (۳)

$$\log_y x = z \Rightarrow x = y^z \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } \frac{1}{z} \text{ می‌رسانیم}} x^{\frac{1}{z}} = (y^z)^{\frac{1}{z}} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{z}}$$

(۴) - ۵۶

لگاریتم عدد ۲۷ در مبنای مجهولی مانند a برابر ۳- است. با توجه به مفهوم حاصل لگاریتم، داریم:

$$\log_{a=?} 27 = -3 \Rightarrow 27 = a^{-3} \xrightarrow{\text{به توان } -\frac{1}{3} \text{ می‌رسانیم}} (27)^{-\frac{1}{3}} = (a^{-3})^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow a = 27^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

(۴) - ۵۷

$$\left. \begin{aligned} \log_{\Delta} A = \frac{1}{2} &\Rightarrow A = \Delta^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \\ \log_{32} B = \frac{1}{2} &\Rightarrow B = 32^{\frac{1}{2}} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A+B}{A-B} = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9$$

(۳) - ۵۸

با توجه به حاصل لگاریتم، داریم:

$$\log_2 12 = \alpha \Rightarrow 12 = 2^\alpha$$

$$4^{\alpha-2} = (2^2)^{\alpha-2} = 2^{2\alpha-4} = \frac{2^{2\alpha}}{2^4} = \frac{(2^\alpha)^2}{16} = \frac{12^2}{16} = \left(\frac{12}{4}\right)^2 = 3^2 = 9$$

(۳) - ۵۹

اگر به عدد ۳۰۱، x واحد اضافه کنیم، لگاریتم آن در مبنای ۸، برابر ۳ می‌شود. در نتیجه می‌نویسیم:

$$\log_8 (301 + x) = 3 \Rightarrow 301 + x = 8^3 = 512 \Rightarrow x = 512 - 301 = 211$$

(۲) - ۶۰

$$f(x) = \log_7 (x+4) \Rightarrow \begin{cases} f(4) = \log_7 (\overbrace{4+4}^8) = \log_7 2^3 = 3 \log_7 2 = 3 \\ f(-3) = \log_7 (\overbrace{-3+4}^1) = \log_7 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(4) + f(-3) = 3 + 0 = 3$$

(۱) - ۶۱

$$\log_y \sqrt{x} = \log_y x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_y x \xrightarrow{\log_y x = 3} \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

(۲) - ۶۲

برای تعیین حاصل $\log_{\Delta} (\sqrt{125})^3$ ، عبارت جلوی لگاریتم را به صورت عامل توانی با پایه‌ی ۵ می‌نویسیم. داریم:

$$\log_{\Delta} (\sqrt{125})^3 = \log_{\Delta} (\sqrt{5^3})^3 = \log_{\Delta} (5^{\frac{3}{2}})^3 = \log_{\Delta} 5^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \times \log_{\Delta} 5 = \frac{9}{2} \times 1 = \frac{9}{2}$$

(۴) - ۶۳

عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را به صورت عوامل توانی با پایه‌ی ۲ می‌نویسیم. داریم:

$$\log_{\frac{1}{4}} 8\sqrt[3]{2} = \log_{2^{-2}} (2^3 \times 2^{\frac{1}{3}}) = \log_{2^{-2}} 2^{3+\frac{1}{3}} = \frac{10}{3} \log_{2^{-2}} 2 = \frac{10}{-2} \log_2 2 = -\frac{10}{2} = -5$$

(۲) - ۶۴

$$\left| \log_{\frac{1}{2}} 8 \right| + \log_8 \frac{\sqrt{2}}{2} = \left| \log_2 2^3 \right| + \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}-1} = \left| \log_2 2^3 \right| + \log_{2^3} 2^{-\frac{1}{2}} = \left| \frac{3}{-1} \log_2 2 \right| + \frac{-\frac{1}{2}}{3} \log_2 2 = |-3| - \frac{1}{6} = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

(۴) - ۶۵

با کمی دقت متوجه می‌شویم که $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$ است. در نتیجه اعداد $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ معکوس یکدیگرند. داریم:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}+1)^{-1}$$

$$\log_{\sqrt{2}+1} (\sqrt{2}-1) = \log_{\sqrt{2}+1} (\sqrt{2}+1)^{-1} = -\log_{\sqrt{2}+1} (\sqrt{2}+1) = -1$$

با استفاده از عملیات جبری، عبارت جلوی لگاریتم و مبنای لگاریتم را به صورت عوامل توانی با پایه‌ی یکسان x می‌نویسیم: (۴) - ۶۶

$$\log_{x\sqrt{x}} x\sqrt{x} = \log_{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} x \cdot x^{\frac{1}{2}} = \log_{x^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \log_x x = \frac{1}{1} = 1$$

(۳) - ۶۷

$$\log_{x\sqrt{x}} \sqrt{x^2 \sqrt{x}} = \log_{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} (x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \log_{x^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} \log_x x = \frac{5 \times 2}{4 \times 3} = \frac{5}{6}$$

(۲) - ۶۸

$$x = y^3 = \sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ y^3 = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \end{cases} \xrightarrow[\text{طرفین تساوی را به توان } \frac{2}{3} \text{ می‌رسانیم.}]{\text{طرفین تساوی را به توان } \frac{2}{3}} (y^3)^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y^2 = a^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \log_a x + \log_a y^2 \stackrel{x=a^{\frac{1}{2}}, y^2=a^{\frac{1}{3}}}{=} \log_a a^{\frac{1}{2}} + \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \log_a a + \frac{1}{3} \log_a a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

(۴) - ۶۹

$$A = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{5} = 32 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} 4A^2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 (2^5)^2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 (2^{10})^2 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^{22} = \frac{22}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = 44$$

(۴) - ۷۰

$$9\sqrt{3} = 3^a \Rightarrow 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a^2 = \log_{\frac{1}{2}} a^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_{\frac{1}{2}} a = \frac{5}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{25}{4} \log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{25}{4} \times 1 = \frac{25}{4}$$

(۱) - ۷۱

$$4^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow (2^2)^a = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow \log_4 (4a+1) \stackrel{a=\frac{5}{4}}{=} \log_4 (4(\frac{5}{4})+1) = \log_4 6 = 1$$

به صورت سؤال خوب نگاه کنیم. چون $x = y^3 = \sqrt{a}$ است، بنابراین مقادیر x و y به ترتیب برابر با $\sqrt[3]{a}$ و \sqrt{a} است. با قرار دادن مقادیر x و y در عبارت $\log_a x + \log_a y$ به راحتی جواب به دست می‌آید. داریم: (۳) - ۷۲

$$\log_a x + \log_a y = \log_a \sqrt[3]{a} + \log_a \sqrt{a} = \frac{1}{3} \log_a a + \frac{1}{2} \log_a a = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

(۱) - ۷۳

یادآوری:

$$\log_a x^n = \log_{\frac{1}{a^n}} x$$

$$\log_{a^n} x = \log_a x^n$$

حال طبق یادآوری بالا، حاصل عبارت $\log_{\frac{1}{b}} a$ برابر است با: $\log_{\frac{1}{b}} a = \log_{b^{-1}} a = \log_b a^{-1} = \log_b \frac{1}{a}$ (معکوس)

(۳) - ۷۴

دامنه‌ی هر دو تابع f و g برابر با $x > 0$ است. به علاوه وقتی براساس قواعد لگاریتم، ضابطه‌ی توابع f و g را ساده کنیم، داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x \\ g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

چون ضابطه و دامنه‌ی دو تابع f و g یکسان هستند، در نتیجه نمودار این دو تابع، منطبق برهم می‌باشند.

(۳) - ۷۵

برای تعیین حاصل $\log_{(1+\sqrt{2})} (3 + 2\sqrt{2})^3$ ، باید عبارت جلوی لگاریتم را براساس مبنای آن بنویسیم. داریم:

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} \quad (*)$$

$$\log_{(1+\sqrt{2})} (3 + 2\sqrt{2})^3 \stackrel{(*)}{=} \log_{(1+\sqrt{2})} ((1 + \sqrt{2})^2)^3 = \log_{(1+\sqrt{2})} (1 + \sqrt{2})^6 = 6 \log_{(1+\sqrt{2})} (1 + \sqrt{2}) = 6$$

(۳) - ۷۶

$$x = 8 \log_4 2\sqrt{2} = 8 \log_{2^2} 2^{3/2} = 8 \left(\frac{3}{2} \log_2 2 \right) = 8 \times \frac{3}{2} = 12 \Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow \log_x 4(x+3) \stackrel{x=12}{=} \log_6 4(6+3) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

(۱) - ۷۷

می‌دانیم $\log_5 3 = a$ است. حال برای محاسبه‌ی حاصل $\log_{25} \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، کافی است عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را تجزیه کرده تا بتوانیم از فرض صورت تست استفاده کنیم. داریم:

$$\log_{25} \frac{\sqrt{3}}{3} = \log_{5^2} 3^{-1/2} = -\frac{1}{2} \log_5 3 = -\frac{1}{2} a = -\frac{a}{2}$$

(۳) - ۷۸

برای محاسبه‌ی $\log_3 15$ ، باید شکل فرض سوال، یعنی $\log_3 5 = a$ را ایجاد کنیم. برای این منظور عدد جلوی لگاریتم را تجزیه کرده و داریم:

$$\log_3 15 = \log_3 (5 \times 3) \stackrel{\log_a (AB) = \log_a A + \log_a B}{=} \log_3 5 + \log_3 3 = a + 1$$

(۴) - ۷۹

ابتدا فرض صورت تست را ساده می‌کنیم. داریم:

$$\log_y x \cdot \log_{y^2} \sqrt{y} y^2 = 4 \Rightarrow \log_y x \cdot \log_{y^{2+\frac{1}{2}}} y^2 = 4 \Rightarrow \log_y x \times \frac{2}{\frac{5}{2}} \log_y y = 4 \Rightarrow \log_y x \times \frac{4}{5} = 4 \Rightarrow \log_y x = 5$$

حال با داشتن مقدار $\log_y x = 5$ ، مقدار $\log_{y^2} \sqrt{x}$ برابر است با:

$$\log_{y^2} \sqrt{x} = \log_{y^2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_y x = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

(۲) - ۸۰

$$f(x) = \log_6 (x-3) \Rightarrow f(12) + f(7) = \log_6 (12-3) + \log_6 (7-3) = \log_6 (9 \times 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$$

(۱) - ۸۱

$$\log_a A + \log_a B + \dots + \log_a K = \log_a (A \times B \times \dots \times K)$$

نکته:

با توجه به نکته‌ی فوق، برای محاسبه‌ی عبارت $\log_5 5 + \log_5 200 + \log_5 500 + \log_5 2000$ حاصل عبارت $\log_5 5 + \log_5 200 + \log_5 500 + \log_5 2000$ ، چون لگاریتم‌ها هم مبنا هستند، می‌توانیم اعداد جلوی لگاریتم‌ها را در هم ضرب کرده و مجموع لگاریتم‌ها را تبدیل به یک لگاریتم کنیم. داریم:

$$\log_5 5 + \log_5 200 + \log_5 500 + \log_5 2000 = \log_5 (5 \times 200 \times 500 \times 2000) = \log_5 100000000 = \log_5 10^8 = 8 \log_5 10 = 8$$

(۲) - ۸۲

$$\log_2 \frac{1}{9} + \log_2 \frac{9}{10} + \log_2 \frac{10}{11} + \dots + \log_2 \frac{31}{32} = \log_2 \left(\frac{1}{9} \times \frac{9}{10} \times \frac{10}{11} \times \dots \times \frac{31}{32} \right) = \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$$

(۲) - ۸۳

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k$$

۸۴- (۴) می‌دانیم $\log 2 = 0/301$ و $\log 3 = 0/477$. حال برای محاسبه‌ی $\log 6000$ ، کافی است عبارت جلوی لگاریتم را تجزیه کرده و به صورت عواملی

از ۲، ۳، ۱۰ (یعنی مبنا) بنویسیم. داریم:

$$\log 6000 = \log(2 \times 3 \times 10^3) = \log 2 + \log 3 + \log 10^3 = 0/301 + 0/477 + 3 = 3/778$$

$$\log_{0/3} 3 = \log \frac{3}{100} = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$$

$$\log 30 = \log(3 \times 10) = \log 3 + \log 10 = \log 3 + 1$$

$$+ \log 300 = \log(3 \times 100) = \log 3 + \log 100 = \log 3 + 2$$

جمع می‌کنیم $\rightarrow \log_{0/3} 3 + \log 30 + \log 300 = (\log 3 - 2) + (\log 3 + 1) + (\log 3 + 2) = 3 \log 3 + 1 = 3(0/477) + 1 = 2/431$

$$\log_{10} 0/36 - \log_{10} \frac{9}{4} = \log_{10} \frac{36}{100} - \log_{10} \frac{9}{4} = \log_{10} \frac{36}{9} \cdot \frac{100}{4} = \log_{10} \left(\frac{4 \times 9}{9 \times 100} \right) = \log_{10} \frac{16}{100} = \log_{10} 16 - \log_{10} 100$$

$$= \log_{10} 2^4 - \log_{10} 10^2 = 4 \log_{10} 2 - 2 \log_{10} 10 \stackrel{\log_{10} 2 = a}{=} 4a - 2$$

۸۷- (۲) می‌دانیم $\log 2 + \log 3 = a$ ، $\log 2 + \log 7 = b$ ، $\log 3 + \log 7 = c$ و $\log 2 + \log 7 = c$ ، کافی است به این نکته توجه کنیم

که $42 = 2 \times 3 \times 7$ است. پس می‌توانیم به جای محاسبه‌ی $\log 42$ ، مجموع $\log 2 + \log 3 + \log 7$ را به دست آوریم. حال برای محاسبه‌ی مجموع $\log 2 + \log 3 + \log 7$ (یعنی $\log 42$)، سه معادله را با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} \log 2 + \log 3 = a \\ \log 3 + \log 7 = b \\ \log 2 + \log 7 = c \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 2(\log 2 + \log 3 + \log 7) = a + b + c \Rightarrow \log 2 + \log 3 + \log 7 = \frac{a + b + c}{2}$$

پس:

$$\log 42 = \log 2 + \log 3 + \log 7 = \frac{a + b + c}{2}$$

۸۸- (۴) ابتدا شکل $\log 25$ را تغییر می‌دهیم:

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5$$

بنابراین باید با داشتن مقدار $\log 2 = a$ ، مقدار $\log 5$ را مشخص کنیم تا جواب $\log 25$ به دست آید.

$$\log 2 = 1 - \log 5 \quad \text{و} \quad \log 5 = 1 - \log 2$$

نکته‌ی مهم:

$$\log 25 = 2 \log 5 = 2(1 - \log 2) = 2(1 - a) = 2 - 2a$$

$$\log_{1/2} 25 = \log \frac{25}{100} = \log 25 - \log 100 = \log 5^2 - \log 10^2 = 2 \log 5 - 2 \log 10$$

$$\stackrel{\log 5 = 1 - \log 2}{=} 2(1 - \log 2) - 2(1) \stackrel{\log 2 = a}{=} 2(1 - a) - 2 = 2 - 2a - 2 = -2a$$

$$\log 6 = a \Rightarrow \log(2 \times 3) = a \Rightarrow \log 2 + \log 3 = a \xrightarrow{\log 3 = b} \log 2 + b = a \Rightarrow \log 2 = a - b$$

$$\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2(1 - \log 2) \stackrel{\log 2 = a - b}{=} 2(1 - (a - b)) = 2(1 - a + b)$$

$$\log \sqrt[3]{\frac{16}{5}} = \log \left(\frac{16}{5} \right)^{1/3} = \frac{1}{3} \log \frac{16}{5} = \frac{1}{3} (\log 16 - \log 5) = \frac{1}{3} (\log 2^4 - (1 - \log 2))$$

$$= \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1 + \log 2) = \frac{1}{3} (5 \log 2 - 1) \stackrel{\log 2 = 0/301}{=} \frac{1}{3} (5(0/301) - 1) = \frac{1}{3} (1/505 - 1) = \frac{1}{3} (0/505) \approx 0/168$$

(۱) - ۹۲

$$\log \sqrt[3]{16} = \log \left(\frac{16}{10} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (\log 16 - \log 10) = \frac{1}{3} (\log 2^4 - 1) = \frac{1}{3} (4 \log 2 - 1)$$

$$\frac{\log 2 = 1 - \log 5}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} (4(1 - \log 5) - 1) = \frac{\log 5 = 3k}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} (4(1 - 3k) - 1) = \frac{1}{3} (4 - 12k - 1) = \frac{1}{3} (3 - 12k) = 1 - 4k$$

(۱) - ۹۳

$$\log_{15} 625 = \log_{15} 5^4 = 4 \log_{15} 5 = 4 \log_{15} \left(\frac{15}{3} \right) = 4 (\log_{15} 15 - \log_{15} 3) = 4(1 - a)$$

تذکر: اگر بخواهیم مقدار $\log_a c$ را با معلوم بودن مقدار $\log_a b$ به دست آوریم، باید عدد جلوی لگاریتم، یعنی c را با عوامل a و b بسازیم. در این تست برای تعیین مقدار $\log_{15} 5$ با معلوم بودن مقدار $\log_{15} 3 = a$ باید عدد 5 را با عوامل 3 و 15 بسازیم. برای این منظور می‌نویسیم $5 = \frac{15}{3}$ و ...

(۴) - ۹۴

$$\log_{\sqrt{e}} 4 = k \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} 20 = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} (4 \times 5) = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} 4 + \log_{\sqrt{e}} 5 = \frac{1}{k} \Rightarrow 1 + \log_{\sqrt{e}} 5 = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} 5 = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$$

(۲) - ۹۵

$$\log_3 2 \times \log_3 3 \times \log_3 4 \times \log_3 4 = \log_3 2 \times \log_3 3 \times \log_3 2^2 \times \log_3 2^2 = \log_3 2 \times \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \log_3 2 = 2 \log_3 2 \times \log_3 2 = 2(1) = 2$$

(۱) - ۹۶

$$\underbrace{\log_{\sqrt{2}} 2 \times \log_{\sqrt{4}} 4 \times \log_{\sqrt{8}} 8 \times \dots \times \log_{\sqrt{128}} 128}_{\log_{\sqrt{2}} 2} = \log_{\sqrt{2}} 2 \times \underbrace{\log_{\sqrt{4}} 4 \times \dots \times \log_{\sqrt{128}} 128}_{\log_{\sqrt{2}} 2} = \log_{\sqrt{2}} 2 \times \log_{\sqrt{2}} 2 \times \dots \times \log_{\sqrt{2}} 2 = \dots$$

$$= \log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(۲) - ۹۷

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5} \times \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{9} \times \log_{\frac{1}{25}} 8 = \log_{\sqrt{3}} 5^{\frac{1}{2}} \times \log_{\sqrt{5}} 3^{-2} \times \log_{5^{-2}} 2^3 = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(3)}{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} \frac{\log_{\sqrt{5}} 5 \times \log_{\sqrt{3}} 3 \times \log_{\sqrt{5}} 2}{\log_{\sqrt{5}} 5}$$

$$= 2 \log_{\sqrt{5}} 5 \times \log_{\sqrt{5}} 2 = 2(1) = 2$$

(۴) - ۹۸

با کمی دقت پی می‌بریم که برای محاسبه‌ی $\log_{\frac{2}{a}} 2$ ، اولین گام این است که در عبارت $\log_a 8 = -\frac{3}{4}$ ، a را از مبنای لگاریتم به جلوی لگاریتم منتقل کنیم. داریم:

$$\log_a 8 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \log_a 2^3 = -\frac{3}{4} \Rightarrow 3 \log_a 2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \log_a 2 = -\frac{1}{4} \xrightarrow[\text{جواب عکس می‌شود}]{\text{جای عبارت و مبنا را عوض می‌کنیم}} \log_{\frac{2}{a}} a = -4$$

حال برای محاسبه‌ی مقدار $\log_{\frac{2}{a}} 2$ ، داریم:

$$\log_{\frac{2}{a}} 2 = \frac{\log_a \frac{2}{a}}{\log_a \frac{2}{a}} = \frac{\log_a 2 - \log_a a}{\log_a 2 - \log_a a} = \frac{-4 - 1}{-4 - 1} = 5$$

(۲) - ۹۹

$$\log_3 3 = a \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{a}$$

$$\log_{\sqrt[4]{3}} 625 = \log_{\frac{3}{2}} 5^4 = \frac{4}{\frac{2}{3}} \log_{\frac{3}{2}} 5 = 6 \log_{\frac{3}{2}} 5 = 6 \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{6}{a}$$

(۴) - ۱۰۰

$$A = \log_{\sqrt{e}} \sqrt[5]{e^2} = \log_{\sqrt{e}} e^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_{\sqrt{e}} e \Rightarrow \log_{\sqrt{e}} e = \frac{\Delta A}{2} \xrightarrow[\text{و جواب عکس می‌شود}]{\text{جای عبارت و مبنا را عوض می‌کنیم}} \log_e 2 = \frac{2}{\Delta A}$$

حال با معلوم بودن مقدار $\log_e 2 = \frac{2}{\Delta A}$ ، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{\sqrt{e}} 2^5$ را مشخص می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{\frac{1}{e^2}} 2^5 = \frac{5}{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{e^2}} 2 = 10 \left(\frac{2}{\Delta A} \right) = \frac{20}{\Delta A} = \frac{4}{A}$$

۱۰۱-۲) ابتدا باید جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را در فرض مسئله با هم عوض کنیم تا مبنا به ۳ تغییر کند. با انجام این کار می‌توانیم مطمئن

باشیم مقدار $\log_3 2$ به دست می‌آید ... امیدوار باشیم ...

$$\log_{12} 3 = a \xrightarrow{\text{جای عبارت جلوی لگاریتم و مبنا را عوض می‌کنیم}} \log_3 12 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 (2^2 \times 3) = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 2^2 + \log_3 3 = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 2 \log_3 2 + 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{\frac{1}{a} - 1}{2} = \frac{1-a}{2a}$$

۱۰۲-۳) با توجه به رابطه $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ داریم:

$$a = \frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_4 12} = \log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} (3 \times 4) = \log_{12} 12 = 1 \Rightarrow a = 1$$

حال با داشتن مقدار $a = 1$ ، حاصل $\log_{(a^2+7)} \sqrt{a+1}$ را مشخص می‌کنیم:

$$\log_{(a^2+7)} \sqrt{a+1} \stackrel{a=1}{=} \log_{(1^2+7)} \sqrt{1+1} = \log_8 \sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{6}$$

۱۰۳-۳)

$$\frac{1}{\log_a 6} + \frac{1}{\log_b 6} + \frac{1}{\log_c 6} = 2 \Rightarrow \log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 2 \Rightarrow \log_6 (abc) = 2 \Rightarrow abc = 6^2$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{abc}} 6 = \log_{(abc)^{\frac{1}{2}}} 6 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{abc} 6 \stackrel{abc=6^2}{=} 2 \log_{6^2} 6 = \frac{2}{2} \log_6 6 = 1$$

۱۰۴-۱) با توجه به فرمول $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$ ، داریم:

$$\frac{\log 5}{\log 2} + \frac{\log 36}{\log 4} - \frac{\frac{1}{2} \log 15}{\frac{1}{2} \log \sqrt{2}} = \log_2 5 + \log_4 36 - \log_2 15 = \log_2 5 + \log_{2^2} 6^2 - \log_2 15 = \log_2 5 + \log_2 6^2 - \log_2 15$$

$$= \log_2 \frac{5 \times 6^2}{15} = \log_2 2 = 1$$

۱۰۵-۲) برای محاسبه‌ی حاصل $\log_y x^2$ ، باید از فرمول تغییر مبنا استفاده کنیم (چون در فرض صورت تست، $\log x = a$ و $\log y = b$ در

مبنای ۱۰ هستند). داریم:

$$\log_B A \stackrel{\text{تغییر مبنا به } C}{=} \frac{\log_C A}{\log_C B}$$

$$\log_y x^2 = \frac{x^2}{x} \log_y x \stackrel{\text{تغییر مبنا به } 10}{=} \frac{\log x}{\log y} = \frac{a}{b}$$

۱۰۶-۲) در صورت تست $\log 3 = b$ و $\log 5 = a$ ، ابتدا مبنای لگاریتم را به ۱۰ تبدیل می‌کنیم.

چون در فرض صورت تست، مبنای لگاریتم‌ها برابر ۱۰ می‌باشد. پس داریم:

$$\log_{30} 12 \stackrel{\text{تغییر مبنا به } 10}{=} \frac{\log 12}{\log 30} = \frac{\log(2^2 \times 3)}{\log(3 \times 10)} = \frac{\log 2^2 + \log 3}{\log 3 + \log 10} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 3 + 1}$$

$$\frac{\log 2 = 1 - \log 5}{\log 3 + 1} = \frac{2(1 - \log 5) + \log 3}{\log 3 + 1} = \frac{2(1-a) + b}{b+1} = \frac{b+2-2a}{b+1}$$

۱۰۷-۳)

$$\log_{18} \sqrt{12} \stackrel{\text{تغییر مبنا به } 10}{=} \frac{\log \sqrt{12}}{\log 18} = \frac{\log(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}}{\log(2 \times 3^2)} = \frac{\frac{1}{2} \log(2^2 \times 3)}{\log(2 \times 3^2)} = \frac{\frac{1}{2} (2 \log 2 + \log 3)}{\log 2 + 2 \log 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (2a + b)}{a + 2b} = \frac{2a + b}{2a + 4b}$$

$$\frac{\log_3 16}{\log_5 8 + \log_5 4} = \frac{\log_3 16}{\log_5 32} = \frac{\log_3 2^4}{\log_5 2^5} = \frac{4 \log_3 2}{5 \log_5 2} = \frac{4 \times \frac{1}{\log_2 3}}{5 \times \frac{1}{\log_2 5}} = \frac{4}{5} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{4}{5} \log_3 5$$

(۱) - ۱۰۸

$$\log_5 8 = a \Rightarrow \log_5 2^3 = a \Rightarrow 3 \log_5 2 = a \Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{3}$$

(۲) - ۱۰۹

$$\log_{10} 2 \stackrel{\text{تعبیر مناسبه به } \Delta}{=} \frac{\log_{\Delta} 2}{\log_{\Delta} 10} = \frac{\log_{\Delta} 2}{\log_{\Delta} (2 \times 5)} = \frac{\log_{\Delta} 2}{\log_{\Delta} 2 + \log_{\Delta} 5} \stackrel{\log_{\Delta} 2 = \frac{a}{3}}{=} \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3} + 1} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a+3}{3}} = \frac{a}{a+3}$$

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a} \Rightarrow a^{\log_x b} - b^{\log_x a} = 0$$

(۱) - ۱۱۰ با توجه به قاعده‌ی ۱۰، داریم:

$$\sqrt[3]{\log_8 2} = x^{\log_8 2} = x^{\log_{2^3} 2} = x^{\frac{1}{3} \log_2 2} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

(۳) - ۱۱۱

$$4^{\log_2 2} + 3^{\log_2 2} = 2^{\log_2 4} + 2^{\log_2 3} = 2 + 2 = 4$$

(۳) - ۱۱۲

$$x^{\log_a b} \times b^{\log_b a} = b^{\log_a a} \times a^{\log_b b} = b^1 \times a^1 = ab$$

(۳) - ۱۱۳

$$25^{1-\log_5 2} = \frac{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}{25^{\log_5 2}} = \frac{25^1}{25^{\log_5 2}} = \frac{25}{25^{\log_5 2}} = \frac{25}{2^2} = \frac{25}{4}$$

(۲) - ۱۱۴

$$(0.25)^{-1+\log_5 \sqrt{10}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+\log_5 \frac{10}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+\log_5 10 - \frac{1}{2} \log_5 2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+\log_5 10} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 \times 10 \times \frac{1}{2} = 4 \times 10 \times \frac{1}{2} = 4 \times 10 \times 0.5 = 20$$

(۳) - ۱۱۵

$$\Delta (\log_5 2 + 3 \log_5 3) = \frac{a^{x+y} = a^x \cdot a^y}{\Delta^{\log_5 2} \times \Delta^{3 \log_5 3}} = \frac{a^{\log_5 a} = a^m}{2^2 \times 3^3} = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$$

(۴) - ۱۱۶

$$e^{-\ln \Delta} + \ln \sqrt{\Delta^e} = e^{-\log_e \Delta} + \ln e^{\frac{e}{2}} = \Delta^{-1} + \frac{e}{2} \ln e = \frac{1}{\Delta} + \frac{e}{2} = 1$$

(۴) - ۱۱۷

$$\sqrt{10} (\log_5 \sqrt{16} - \log_5 4) = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}} (\log_5 2^2 - \log_5 2^2) = 10^{\frac{1}{2}} (\log_5 2^2 - \frac{1}{2} \log_5 2^4) = 10^{\frac{1}{2}} (2 \log_5 2 - \log_5 2^2) = \frac{2 \log_5 2}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{2}}}{(10^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 5}} = \frac{2}{\sqrt{2} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

(۴) - ۱۱۸

$$\sqrt{25 \log_5 2 + 49 \log_5 7} = \sqrt{25 \log_5 2 + 49 \log_5 7} = \sqrt{5^2 \log_5 2 + 7^2 \log_5 7} = \sqrt{5 \log_5 2^5 + 7 \log_5 7^7} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 1$$

(۱) - ۱۱۹

$$\ln \frac{1}{e^2} + \frac{\log_{\sqrt{e}} x \sqrt{x}}{\ln x} - e^{2 \ln 2} = \ln e^{-2} + \frac{\frac{1}{2} \log_e x \sqrt{x}}{\log_e x} - 2^2 \ln e = -2 + \frac{1}{2} - 4 = -3$$

(۲) - ۱۲۰

۱۲۱- (۲) برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x(x-1)\log_{10} x = 0$ ، کافی است تک‌تک عبارت‌ها را برابر صفر قرار دهیم. داریم:

$$x(x-1)\log_{10} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{عبارت جلوی لگاریتم نمی‌تواند صفر باشد} \\ \text{(غ ق ق)} \rightarrow x = 0 \\ \text{کنترل} \\ \text{ق ق} \rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{کنترل} \\ \text{ق ق} \rightarrow \log_{10} x = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس این معادله تنها دارای جواب $x = 1$ است.

۱۲۲- (۲)

$$\log_x(4x+1) = \log_x(x^2+4) \Rightarrow 4x+1 = x^2+4 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مبنای لگاریتم‌ها برابر یک می‌شود} \\ \text{(غ ق ق)} \rightarrow x = 1 \\ \text{ق ق} \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

۱۲۳- (۱)

به راحتی می‌توانیم دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم مینا (با ضرب ۱) ایجاد کنیم. داریم:

$$\log(x-1) + \log(x+1) = \log 3 \Rightarrow \log \frac{x^2-1}{(x-1)(x+1)} = \log 3 \Rightarrow \log(x^2-1) = \log 3 \\ \Rightarrow x^2-1=3 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق} \rightarrow x = 2 \\ \text{عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود} \\ \text{(غ ق ق)} \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

۱۲۴- (۱) روش اول:

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} 64 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2^2}} x = \log_{\frac{1}{2^2}} 64 \xrightarrow{\log_a x = \log_a x^{\frac{1}{n}}} \log_2 x^2 = \log_2 64 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق} \rightarrow x = 8 \\ \text{غ ق ق} \rightarrow x = -8 \end{cases}$$

روش دوم: در معادله‌ی صورت تست، عبارت سمت راست تساوی (یعنی $\log_2 64$) برابر عدد ۶ است. پس داریم:

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_{\sqrt{2}} 64 = 6 \Rightarrow x = (\sqrt{2})^6 = (2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^3 = 8 \Rightarrow x = 8 \text{ (ق ق)}$$

۱۲۵- (۴)

در معادله‌ی $2 \log(x-2) = \log(x+10)$ ، اگر بتوانیم ضرب ۲ را از پشت لگاریتم سمت چپ برداریم، به راحتی دو طرف تساوی، دو لگاریتم اعشاری ایجاد می‌شود که با حذف آن‌ها، جواب معادله به دست می‌آید. با توجه به قواعد لگاریتم، داریم:

$$2 \log(x-2) = \log(x+10) \Rightarrow \log \underbrace{(x-2)^2}_f = \log \underbrace{(x+10)}_g \xrightarrow{f=g} x^2 - 4x + 4 = x + 10 \xrightarrow{x^2 - 5x - 6 = 0} \begin{cases} \text{غ ق ق} \rightarrow x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$$

حال با داشتن مقدار $x = 6$ ، حاصل $\log_4(x+2)$ برابر است با:

$$\log_4(x+2) \stackrel{x=6}{=} \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_{2^2} 2 = \frac{3}{2}$$

۱۲۶- (۱) برای حل معادله‌ی $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2 \log x = \log 2$ ، سعی می‌کنیم در دو طرف تساوی، دو لگاریتم اعشاری بسازیم:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2 \log x = \log 2 \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + \log x^2 = \log 2 \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{x}\right) x^2 = \log 2 \Rightarrow \log(x^2+x) = \log 2$$

$$\Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \text{ق ق} \rightarrow x = 1 \\ \text{غ ق ق} \rightarrow \log x \text{ به ازای } x = -2 \text{ تعریف نمی‌شود} \\ x = -2 \end{cases}$$

بنابراین $\frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2$ خواهد بود.

۱۲۷- (۴)

$$\log_3(2x^2+1) - \log_3(x+2) = 1 \Rightarrow \log_3 \frac{2x^2+1}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+1}{x+2} = 3^1 \Rightarrow 2x^2+1 = 3x+6$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x-5=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \text{غ ق ق} \rightarrow x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \log_8(2x-1) \stackrel{x=\frac{5}{2}}{=} \log_8\left(2\left(\frac{5}{2}\right)-1\right) = \log_{2^3}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

(۳) - ۱۲۸

$$\begin{aligned} \log_x(3x+8) &= 2 - \log_x(x-6) \Rightarrow \log_x(3x+8) + \log_x(x-6) = 2 \Rightarrow \log_x(3x+8)(x-6) = 2 \\ \Rightarrow \log_x(3x^2 - 10x - 48) &= 2 \Rightarrow 3x^2 - 10x - 48 = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \\ \Rightarrow (x-8)(x+3) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \text{ (قق)} \\ x=-3 \text{ (غقق)} \end{cases} \Rightarrow \log_4 x \stackrel{x=8}{=} \log_4 8 = \log_2 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(۴) - ۱۲۹

$$\begin{aligned} \log_x(x^2+4) &= 1 + \log_x 5 \Rightarrow \log_x(x^2+4) - \log_x 5 = 1 \\ \Rightarrow \log_x \frac{x^2+4}{5} &= 1 \Rightarrow \frac{x^2+4}{5} = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \xrightarrow{\text{مینای لگاریتم نمی تواند ۱ باشد}} \text{(غقق)} \\ x=4 \Rightarrow \text{(قق)} \end{cases} \Rightarrow \log_2 x \stackrel{x=4}{=} \log_2 4 = 2 \log_2 2 = 2 \end{aligned}$$

(۳) - ۱۳۰

$$\begin{aligned} \log(x-2) + \log(x-3) &= \log 3 \Rightarrow \log(x-2)(x-3) = \log 3 \Rightarrow \log 10 \times 3 \stackrel{f=g}{=} x^2 - 5x + 6 = 3 \\ \Rightarrow x^2 - 5x - 24 &= 0 \xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (x-8)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \text{ (قق)} \\ x=-3 \text{ (غقق)} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین معادله‌ی فوق، تنها دارای یک ریشه‌ی مثبت (یعنی $x=8$) است.

(۱) - ۱۳۱

$$\begin{aligned} \log(x^2 - x + 1) + \log(x+1) &= 1 \Rightarrow \log(x^2 - x + 1)(x+1) = 1 \Rightarrow \log(x^3 + 1) = 1 \Rightarrow x^3 + 1 = 10^1 \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9} \\ \text{حال مقدار لگاریتم } x = \sqrt[3]{9} &\text{ در پایه‌ی ۳ را به دست می‌آوریم:} \\ \log_3 x \stackrel{x = \sqrt[3]{9}}{=} \log_3 \sqrt[3]{9} &= \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3} (1) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(۴) - ۱۳۲

سمت چپ تساوی را تبدیل به یک لگاریتم می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \log \frac{x+1}{x+2} + \log \frac{x+2}{x+3} + \log \frac{x+3}{x+4} &= -1 \Rightarrow \log \left(\frac{x+1}{x+2} \right) \left(\frac{x+2}{x+3} \right) \left(\frac{x+3}{x+4} \right) = -1 \Rightarrow \log_1 \frac{x+1}{x+4} = -1 \\ \Rightarrow \frac{x+1}{x+4} &= 10^{-1} \Rightarrow \frac{x+1}{x+4} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x + 10 = x + 4 \Rightarrow 9x = -6 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ریشه‌ی به دست آمده را کنترل می‌کنیم. چون به ازای $x = -\frac{2}{3}$ همه‌ی عبارت‌های جلوی لگاریتم‌ها مثبت هستند، این ریشه قابل قبول است.

(۲) - ۱۳۳

$$\begin{aligned} \log_4(4x+2) - \log_4 \sqrt{x+4} &= 1 \Rightarrow \log_4(4x+2) - \log_4(\sqrt{x+4})^2 = 1 \Rightarrow \log_4 \frac{4x+2}{x+4} = 1 \\ \Rightarrow \frac{4x+2}{x+4} &= 4^1 \Rightarrow 4x+2 = 2x+8 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

با جای‌گذاری $x=3$ در معادله‌ی فوق، نتیجه می‌گیریم که این مقدار قابل قبول است. پس جواب معادله برابر با $x=3$ می‌باشد.

حال با معلوم بودن $x=3$ ، حاصل $\log_{\sqrt[3]{9}} x$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\log_{\sqrt[3]{9}} x \stackrel{x=3}{=} \log_{\sqrt[3]{9}} 3 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{9}} 3 = \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt[3]{9} = \frac{1}{2}$$

(۱) - ۱۳۴

$$\log_{10}(2x-1) + \left(\frac{1}{2}\right) \log_{10}(x^2) = \log_{10} 3 \Rightarrow \log_{10}(2x-1) + \log_{10}(x^2)^{\frac{1}{2}} = \log_{10} 3 \Rightarrow \log_{10}(2x-1) + \log_{10} x = \log_{10} 3$$

$$\Rightarrow \log_{10}(2x-1)x = \log_{10} 3 \Rightarrow 2x^2 - x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \xrightarrow{\text{جلوی لگاریتم منفی می شود}} \text{(غ قق)} \\ x = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{کنترل}} \text{(قق)} \end{cases}$$

حال مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ را در مبنای ۴ مشخص می نماییم:

$$\log_4 \frac{x}{3} \stackrel{x=\frac{3}{2}}{=} \log_4 \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \log_4 1 = \log_{2^2} 2^{-1} = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2}$$

(۲) - ۱۳۵ برای حل این معادله ی لگاریتمی، باید دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم مینا ساخته و سپس عبارتهای جلوی لگاریتمها را برابر قرار دهیم. داریم:

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \Rightarrow \log \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x - 3)(2x - 5)$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 2x^2 - 11x + 15 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ غ قق} \\ x = 7 \end{cases}$$

حال حاصل لگاریتم $\sqrt{x+1}$ در پایه ی ۴ را به دست می آوریم. داریم:

$$\log_4 \sqrt{x+1} \stackrel{x=7}{=} \log_4 \sqrt{7+1} = \log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

(۳) - ۱۳۶ ابتدا با حل معادله ی لگاریتمی $\log 3 + \log \sqrt[3]{3} = \log(81)^K$ مقدار K را مشخص می کنیم. برای این منظور کافی است با استفاده از قواعد لگاریتمها در دو طرف تساوی، دو لگاریتم اعشاری (با ضریب ۱) ساخته و سپس ادعا کنیم که عبارتهای جلوی دو لگاریتم اعشاری، با هم برابرند. داریم:

$$\log 3 + \log \sqrt[3]{3} = \log(81)^K \Rightarrow \log 3 \sqrt[3]{3} = \log(81)^K \Rightarrow 3 \sqrt[3]{3} = (81)^K$$

حال برای حل معادله ی نمایی حاصل، دو عبارات نمایی دو طرف تساوی را هم پایه کرده و توانهای آنها را برابر هم قرار می دهیم:

$$3^1 \times 3^{\frac{1}{3}} = (3^4)^K \Rightarrow 3^{1+\frac{1}{3}} = 3^{4K} \Rightarrow 3^{\frac{4}{3}} = 3^{4K} \Rightarrow \frac{4}{3} = 4K \Rightarrow K = \frac{5}{16}$$

بنابراین با داشتن مقدار K، لگاریتم $\frac{5}{K}$ در مبنای ۲ برابر است با:

$$\log_2 \frac{5}{K} \stackrel{K=\frac{5}{16}}{=} \log_2 \frac{5}{\frac{5}{16}} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$$

(۳) - ۱۳۷ گوی ظاهر معادله ی $\log_3 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_9 x$ را نباید خورد. چون سمت چپ تساوی به راحتی ساده شده و تبدیل به یک عدد خواهد شد. داریم:

$$\log_3 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_9 x \Rightarrow \log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_9 x \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 3 + \frac{1}{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_9 x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + 2 = \log_9 x \Rightarrow \log_9 x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{5}{2}} = (3^2)^{\frac{5}{2}} = 3^5 \text{ (قق)}$$

(۴) - ۱۳۸ چون در جلوی لگاریتمهای اعشاری، عاملهای ۱۰ وجود دارد، ابتدا شکل معادله را تغییر می دهیم:

$$\log_{10} 1000000 = \log_{10} x + \log_{10} 1000 \Rightarrow 6 \log_{10} 10 = \log_{10} x + 3 \log_{10} 10 \Rightarrow \log_{10} x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000 \text{ (قق)}$$

(۳) - ۱۳۹ در حل معادله ی لگاریتمی $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ ، چون در سمت راست تساوی عدد ۶ وجود دارد، باید در سمت چپ

تساوی یک لگاریتم ایجاد کنیم. در سمت چپ تساوی سه لگاریتم با هم جمع شده اند. ابتدا مبنای آنها را یکسان می کنیم. داریم:

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6 \Rightarrow \log_3 x + \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}} x + \log_{3^{-1}} x = 6 \Rightarrow \log_3 x + \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 x + \frac{1}{-1} \log_3 x = 6$$

$$\Rightarrow \log_3 x + 2 \log_3 x - \log_3 x = 6 \Rightarrow 2 \log_3 x = 6 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27 \text{ (قق)}$$

۱۴۰- (۳) اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\log_9 x = \log_9 \frac{1}{x^2} + 4/5 \Rightarrow \log_9 x - \log_9 \frac{1}{x^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \log_9 \frac{x}{x^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \log_9 x^{-1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \log_9 x^3 = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x^3 = 9^{\frac{4}{5}} = (3^2)^{\frac{4}{5}} = 3^{\frac{8}{5}} \Rightarrow x^3 = 3^{\frac{8}{5}} \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x = \sqrt[3]{3^{\frac{8}{5}}} = 3^{\frac{8}{15}} = 27 \Rightarrow x = 27 \text{ (قق)}$$

۱۴۱- (۱)

$$\log_{10} (x-1) + \log_{10} (x-2) = \log_{10} (x^2+2) \Rightarrow \log_{10} (x-1)(x-2) = \log_{10} (x^2+2) \Rightarrow (x-1)(x-2) = x^2+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{عبارت جلوی لگاریتمها منفی می شود (غقق)} \\ x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3) = -11 < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

ریشه‌ی حقیقی ندارد. بنابراین معادله‌ی لگاریتمی فوق، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۱۴۲- (۴)

در این معادله اگر به جای عدد ۱، عبارت $\log_{10} 10$ را جایگزین نماییم، به راحتی می‌توانیم در دو طرف تساوی، دو لگاریتم هم‌مبنا و بدون ضریب بسازیم، داریم:

$$2 \log_{10} x = 1 + \log_{10} (x + \frac{12}{5}) \Rightarrow \log_{10} x^2 = \log_{10} 10 + \log_{10} (x + \frac{12}{5}) \Rightarrow \log_{10} x^2 = \log_{10} 10 (x + \frac{12}{5})$$

$$\Rightarrow x^2 = 10 (x + \frac{12}{5}) \Rightarrow x^2 = 10x + 24 \Rightarrow x^2 - 10x - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{عبارت جلوی لگاریتمها منفی می شود (غقق)} \\ x = 12 & \text{کنترل (قق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta} (2x+1) \stackrel{x=12}{=} \log_{\Delta} (2 \times 12 + 1) = \log_{\Delta} 25 = \log_{\Delta} 5^2 = 2 \log_{\Delta} 5 = 2$$

۱۴۳- (۴)

نکته: $\log_a \log_b \log_c x = k \Rightarrow x = c^{b^a k}$

دقت کنیم: عبارت $c^{b^a k}$ برابر با $((c^b)^a)^k$ نیست. پس به هوش باشیم که $c^{b^a k} \neq c^{bak}$.

طبق قاعده‌ی مطرح‌شده، داریم:

$$\log_7 \log_7 (1+2x) = 1 \Rightarrow (1+2x) = 7^1 = 7 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{کنترل}} \text{ (قق)}$$

۱۴۴- (۳)

$$\log_7 (\log_7 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}) = -2 \Rightarrow \frac{1}{4} \log_7 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = -2 \Rightarrow \log_7 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = -8 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = 7^{-8} = \frac{1}{7^8} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{7^4} \Rightarrow x = \frac{1}{7^8} = \frac{1}{5764801}$$

۱۴۵- (۳)

نکته: هرگاه $\log_a x$ ، $\log_a y$ و $\log_a z$ تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، آن‌گاه عبارت‌های جلوی لگاریتمها، یعنی x ، y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

اثبات: x ، y و z تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند $\Rightarrow xz = y^2 \Rightarrow \log_a (xz) = \log_a y^2 \Rightarrow \log_a x + \log_a z = 2 \log_a y$

با توجه به نکته بالا چون $\log_{10} x$ ، $\log_{10} (x+3)$ و $\log_{10} 4x$ تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، در نتیجه x ، $(x+3)$ و $4x$ تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. بنابراین می‌نویسیم:

$$\Rightarrow x \times 4x = (x+3)^2 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 & \text{عبارت جلوی لگاریتمها منفی می شود (غقق)} \\ x = 3 & \text{کنترل (قق)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta} (x+1) \stackrel{x=3}{=} \log_{\Delta} (3+1) = \log_{\Delta} 4 = \log_{\Delta} 2^2 = 2 \log_{\Delta} 2 = \frac{2}{3}$$

۱۴۶- (۳) ابتدا با حل معادله‌ی نمایی $4\sqrt{2} = 4^x$ ، مقدار x را به دست می‌آوریم. برای این منظور دو طرف تساوی را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم تا

دو طرف، هم‌پایه شوند. داریم:

$$4\sqrt{2} = 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = (2^2)^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^{2x} \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

سپس مقدار به دست آمده را در معادله‌ی لگاریتمی $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار y به دست آید. می‌نویسیم:

$$x = \frac{5}{4} \Rightarrow 1 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \log y \Rightarrow 1 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log y - \log \frac{3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \log_1 \left(\frac{y}{\frac{3}{2}} \right) = 1 \Rightarrow \frac{y}{\frac{3}{2}} = 10^1 \Rightarrow y = 15 \text{ (قق)}$$

البته می‌توانستیم این کار را هم بکنیم:

$$1 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log (10 \times \frac{3}{2}) = \log y \Rightarrow y = 15$$

۱۴۷- (۳)

$$\log_1 (y+2) = 1 \Rightarrow y+2 = 10^1 \Rightarrow y = 8$$

$$\log_1 (y-x) + \log_1 (4x+y) = 2 \Rightarrow \log_1 (y-x)(4x+y) = 2 \Rightarrow (y-x)(4x+y) = 10^2$$

$$\xrightarrow{y=8} (8-x)(4x+8) = 100 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 36 = 0 \xrightarrow{\div(-4)} x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{کنترل قق}}$$

۱۴۸- (۴)

برای حل دستگاه معادلات $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ ، کافی است معادله‌ی اول را از شکل لگاریتمی خارج کنیم. داریم:

$$\log_3 x - \log_3 y = 0 \Rightarrow \log_3 x = \log_3 y \Rightarrow \log_3 x = \log_3 y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} x^2 = y$$

حال در دستگاه حاصل، مقدار $x+y$ برابر است با:

$$\begin{cases} x^2 = y \\ 2x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{y=x^2} 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x+y = 2$$

۱۴۹- (۱)

x و y اعداد مثبت‌اند و داریم:

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \Rightarrow \log_3 (xy) = 2 \Rightarrow xy = 3^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \Rightarrow (x+y)^2 - 2 \times 9 = 46 \Rightarrow (x+y)^2 = 64 \xrightarrow{\substack{x>0 \\ y>0}} x+y = 8$$

بنابراین لگاریتم $x+y$ در پایه‌ی ۴ برابر است با:

$$\log_4 (x+y) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

۱۵۰- (۲) می‌دانیم $\log_x 5 = \frac{1}{\log_x x} = \frac{1}{\log_x 5}$. حال اگر در معادله‌ی داده شده در صورت تست، به جای $\log_x 5$ ، $\frac{1}{\log_x 5}$ را جایگزین نماییم، می‌توانیم از

روش تغییر متغیر معادله را حل کنیم. داریم:

$$\log_{\Delta} x + \log_x \Delta = 2 \xrightarrow{\log_x \Delta = \frac{1}{\log_{\Delta} x}} \log_{\Delta} x + \frac{1}{\log_{\Delta} x} = 2 \xrightarrow{\log_{\Delta} x = t} t + \frac{1}{t} = 2 \xrightarrow{\substack{xt \\ t \neq 0}} t^2 + 1 = 2t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_{\Delta} x = 1 \Rightarrow x = \Delta$$

چون $x = \Delta$ جلوی لگاریتم را صفر نمی‌کند و برای مبنا نیز مشکلی به وجود نمی‌آورد، جواب قابل قبول است. بنابراین معادله‌ی فوق تنها دارای یک ریشه‌ی حقیقی می‌باشد.

۱۵۱- (۳)

$$\begin{cases} 4^x + 2^x = 72 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \xrightarrow{2^x = t} t^2 + t - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -9 = 2^x \text{ (نشدنی)} \\ t = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3 \end{cases} \\ \log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2 \Rightarrow \log_1 4(2y+9) = 2 \Rightarrow 8y + 36 = 10^2 \end{cases} \Rightarrow 8y = 64 \Rightarrow y = 8$$

۱۵۲- (۲)

در دستگاه معادلات زیر، فرض می‌کنیم $\log_{10} y$ و $\log_{10} x$ متغیرهای دستگاه هستند. داریم:

$$\begin{cases} \log_{10} x - \log_{10} y = 2 & (1) \\ \log_{10} x^2 - \log_{10} y = 4 \Rightarrow 2 \log_{10} x - \log_{10} y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2) - (1)}{1} \log_{10} x = 2 \Rightarrow \log_{10} y = 0$$

$$\Rightarrow \log_{10} (x^2 y) = \log_{10} x^2 + \log_{10} y = 2 \log_{10} x + \log_{10} y = 2(2) + 0 = 4$$

۱۵۳- (۳)

حل این معادله، احتیاج به ابتکار عمل دارد. اگر در کل معادله، متغیر را به صورت $\log_7 x$ ایجاد نماییم، از روش تغییر متغیر معادله قابل حل است. داریم:

$$(\log_7 x)^2 - 9 \log_7 x = 4 \Rightarrow (\log_7 x)^2 - 9 \log_7 x - 4 = 0 \Rightarrow (\log_7 x)^2 - \frac{9}{3} \log_7 x - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\log_7 x = t} \begin{cases} t = \log_7 x = -1 \Rightarrow x = 7^{-1} = \frac{1}{7} & \text{کنترل (ف.ق)} \\ t = \log_7 x = 4 \Rightarrow x = 7^4 = 2401 & \text{کنترل (ف.ق)} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت $x = \frac{1}{7}$ و $x = 2401$ می‌باشند.

دقت کنیم: به جای $(\log_7 x)^2$ نمی‌توانیم عبارت $2 \log_7 x$ را جایگزین کنیم. چون توان روی کل عبارت $(\log_7 x)$ قرار دارد، نمی‌توانیم عدد ۲ را به پشت لگاریتم ببریم. به عبارتی داریم:

$$(\log_7 x)^2 \neq 2 \log_7 x$$

۱۵۴- (۴)

در گزینه‌ی (۱)، چون مبنا و عبارت جلوی لگاریتم هر دو بزرگ‌تر از یک هستند، در نتیجه جواب لگاریتم مثبت است. پس درست می‌باشد. در گزینه‌ی (۲)، چون مبنا و عبارت جلوی لگاریتم هر دو بین صفر و یک هستند، در نتیجه جواب لگاریتم مثبت بوده و این گزینه نیز درست است.

در گزینه‌ی (۳)، مبنا و عبارت جلوی لگاریتم، یکی بین صفر و یک و دیگری بزرگ‌تر از یک است. پس جواب لگاریتم منفی بوده و گزینه‌ی (۳) نیز درست است.

در گزینه‌ی (۴)، جواب $\log_2 2$ قطعاً عددی بین صفر و یک است. چون:

$$1 < 2 < 10 \xrightarrow{\text{از طرفین در مبنا ۱۰ لگاریتم می‌گیریم}} \log 1 < \log 2 < \log 10 \Rightarrow 0 < \log 2 < 1$$

حال در عبارت $\log_{10} (\log 2)$ چون عبارت جلوی لگاریتم بین صفر و یک بوده و مبنا بزرگ‌تر از یک است، در نتیجه جواب آن قطعاً منفی می‌باشد. پس گزینه‌ی (۴) نادرست است.

۱۵۵- (۴)

در تمام گزینه‌ها پایه‌ی لگاریتم‌ها بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد، بنابراین چون در گزینه‌ی (۴)، $\frac{2}{3} < 1$ است، پس $\log_{10} \frac{2}{3} < 0$ می‌باشد. اما سایر گزینه‌ها مثبت هستند. زیرا اعداد ۳، $\frac{3}{2}$ و ۲ همگی از ۱ بزرگ‌ترند. پس $\log_{10} 3 > 0$ ، $\log_{10} \frac{3}{2} > 0$ و $\log_{10} 2 > 0$ می‌باشد. در نتیجه گزینه‌ی (۴) که منفی است از سایر گزینه‌ها کوچک‌تر می‌باشد.

۱۵۶- (۱)

$$\text{درست است} \Rightarrow 100 < \frac{1}{100} \xrightarrow{\text{مبنا بین صفر و یک است جهت عوض می‌شود}} \log_{\frac{1}{100}} \frac{1}{100} > \log_{\frac{1}{100}} 100 \text{ گزینه‌ی (۱)}$$

$$\text{نادرست است} \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 5 \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 5 \Rightarrow \log_3 3 < \log_3 5 = 1 \Rightarrow \log_3 3 < 1 \text{ گزینه‌ی (۳)}$$

$$\text{نادرست است} \Rightarrow 3 < 2 \xrightarrow{\text{مبنا بین صفر و یک است جهت عوض می‌شود}} \log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 2 \text{ گزینه‌ی (۴)}$$

برای بررسی نادرستی گزینه‌ی (۲) نیز، مانند گزینه‌ی (۳) عمل می‌کنیم.

۱۵۷- (۱)

قبل از حل نامعادله، دامنه‌ی عبارت لگاریتمی را مشخص می‌کنیم. برای این منظور عبارت جلوی لگاریتم را مثبت قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} & (1) \\ \log_7 (2x - 1) > -2 \xrightarrow{\text{مبنا بزرگ‌تر از یک است}} 2x - 1 > 7^{-2} \Rightarrow 2x - 1 > \frac{1}{49} \Rightarrow 2x > \frac{50}{49} \Rightarrow x > \frac{25}{49} & (2) \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک (1) \cap (2)}} x > \frac{5}{8}$$

۱۵۸- (۳) قبل از حل نامعادله‌ی لگاریتمی، دامنه‌ی متغیر x را مشخص می‌کنیم:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad (1)$$

$$2 + \log_{0.25}(x-3) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x-3) \geq -2 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شود}]{\text{مبنای صفر و یک}} x-3 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = (2^{-2})^{-2} = 2^4 \Rightarrow x-3 \leq 16 \Rightarrow x \leq 19 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \text{جواب: } 3 < x \leq 19 \text{ یا } x \in (3, 19]$$

۱۵۹- (۲)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} > 0 \xrightarrow{\times 2} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (1) \\ \log_{\frac{9}{4}} \frac{x-1}{2} \geq 0 \xrightarrow[\text{مبنای بزرگ‌تر از یک است}]{\text{مبنای بزرگ‌تر از یک است}} \frac{x-1}{2} \geq 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 1 \xrightarrow{\times 2} x-1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 3 \quad (2) \end{array} \right. \xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = [3, +\infty)$$

۱۶۰- (۱) برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع، ابتدا دامنه‌ی لگاریتم را مشخص کرده و سپس عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{3x+4}{5} > 0 \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$-1 - \log_2 \frac{3x+4}{5} \geq 0 \Rightarrow \log_2 \frac{3x+4}{5} \leq -1 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{\text{مبنای بزرگ‌تر از یک}} \frac{3x+4}{5} \leq 2^{-1} \Rightarrow \frac{3x+4}{5} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 5} 3x+4 \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 3x \leq -\frac{3}{2} \xrightarrow{\div 3} x \leq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \text{دامنه‌ی تعریف تابع } f: -\frac{4}{3} < x \leq -\frac{1}{2} \text{ یا } D_f = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right]$$

۱۶۱- (۲)

$$10^{-2} < 0.02 < 10^{-1} \xrightarrow{\log_{10}} \log 10^{-2} < \log 0.02 < \log 10^{-1} \Rightarrow -2 < \log 0.02 < -1 \Rightarrow \log 0.02 = -1.7...$$

$$10^3 < 1319 < 10^4 \xrightarrow{\log_{10}} \log 10^3 < \log 1319 < \log 10^4 \Rightarrow 3 < \log 1319 < 4 \Rightarrow \log 1319 = 3.1...$$

$$\Rightarrow [\log 0.02] + [\log 1319] = [-1.7...] + [3.1...] = (-2) + 3 = 1$$

۱۶۲- (۳)

$$\log_{\sqrt[3]{3}} 4 = \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}} 4 = \frac{\log_a A}{\log_a a} = \frac{\log_a A}{\frac{1}{n}} = \log_a A^n = \log_3 4^3 = \log_3 64$$

حال برای تعیین قسمت صحیح جواب $\log_3 64$ ، ابتدا باید عدد ۶۴ را بین توان‌های متوالی عدد ۳ (مبنای لگاریتم) قرار دهیم. داریم:

$$3^3 < 64 < 3^4 \xrightarrow{\log_3} \log_3 3^3 < \log_3 64 < \log_3 3^4 \Rightarrow 3 < \log_3 64 < 4 \Rightarrow \log_3 64 = 3.1...$$

$$\Rightarrow [\log_{\sqrt[3]{3}} 4] = [\log_3 64] = [3.1...] = 3$$

۱۶۳- (۱)

$$5 \log 2 = \log 2^5 = \log 32 \Rightarrow 10^1 < 32 < 10^2 \xrightarrow{\log_{10}} \log 10^1 < \log 32 < \log 10^2 \Rightarrow 1 < \log 32 < 2 \Rightarrow \log 32 = 1.7...$$

$$\frac{1}{5} \log 2 = \log 2^{\frac{1}{5}} = \log \sqrt[5]{2} \Rightarrow 10^0 < \sqrt[5]{2} < 10^1 \xrightarrow{\log_{10}} \log 10^0 < \log \sqrt[5]{2} < \log 10^1 \Rightarrow 0 < \log \sqrt[5]{2} < 1 \Rightarrow \log \sqrt[5]{2} = 0.1...$$

$$\Rightarrow [5 \log 2] + \left[\frac{1}{5} \log 2\right] = [\log 32] + [\log \sqrt[5]{2}] = [1.7...] + [0.1...] = 1 + 0 = 1$$

۱۶۴- (۳) می‌دانیم که عدد ۶۲۶ بین اعداد ۶۲۵ (یعنی 5^4) و 5^5 می‌باشد. بنابراین:

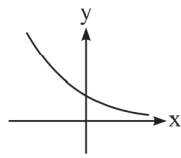
$$5^4 < 626 < 5^5 \xrightarrow[\text{در مبنای ۵ می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم}} \log_5 5^4 < \log_5 626 < \log_5 5^5 \Rightarrow 4 < \log_5 626 < 5 \Rightarrow 4 < A < 5$$

۱۶۵- (۱)

$$\frac{1}{125} < \frac{1}{26} < \frac{1}{25} \Rightarrow 5^{-3} < \frac{1}{26} < 5^{-2} \xrightarrow{\log_5} \log_5 5^{-3} < \log_5 \frac{1}{26} < \log_5 5^{-2} \Rightarrow -3 < \log_5 \frac{1}{26} < -2 \Rightarrow -3 < a < -2$$

$$0/001 < 0/00506 < 0/01 \Rightarrow 10^{-3} < 0/00506 < 10^{-2} \xrightarrow{\log_{10}} \log 10^{-3} < \log 0/00506 < \log 10^{-2} \Rightarrow -3 < \log 0/00506 < -2$$

دقت کنیم: برای آن که متوجه شویم $0/00506$ بین کدام دو عدد اعشاری است، همیشه اولین عدد غیر از صفر بعد از ممیز را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال عدد $0/00506$ را به صورت $0/005$ در نظر می‌گیریم و از بقیه‌ی ارقام صرف‌نظر می‌کنیم. حال به راحتی نتیجه می‌گیریم که $0/005$ بین $0/01$ و $0/001$ است.



پایه‌ی تابع نمایشی $y = (\log_3 3)^{\cos x}$ عددی بین صفر و یک است. می‌دانیم توان یک عبارت نمایی که پایه‌اش بین صفر و یک است، هرچه کوچک‌تر باشد، عبارت نمایی بزرگ‌تر می‌شود. پس برای تعیین بیشترین مقدار تابع، کم‌ترین مقدار توان (یعنی -1) را جایگزین کرده و داریم:

$$\uparrow \max y = \max (\log_3 3)^{\cos x} \downarrow = (\log_3 3)^{-1} = \frac{1}{\log_3 3} = \log_3 5$$

بین صفر و یک

نکته‌های به یادماندنی:

اگر قسمت صحیح جواب لگاریتم عددی در مبنای 10 ، معلوم و برابر با عددی مثبت یا صفر باشد، کافی است به قسمت صحیح، 1 واحد اضافه کنیم تا تعداد ارقام این عدد مشخص شود. به عنوان مثال اگر $\log A = 2/000$ ، عدد A قطعاً سه رقمی است. یا مثلاً اگر $\log B = 0/000$ ، عدد B یک رقمی خواهد بود.

اگر جواب لگاریتم عددی در مبنای 10 منفی باشد، این عدد بین صفر و یک بوده و به اندازه‌ی قدرمطلق قسمت صحیح این جواب، صفر کنار هم در جلوی ممیز اعشاری این عدد خواهیم داشت. به عنوان مثال در $\log A = -2/000$ ، چون $|-2| = 2$ ، نتیجه می‌گیریم که عدد A بین صفر و یک بوده و در جلوی ممیز اعشاری آن، 2 رقم صفر وجود دارد. یعنی $0/001 \leq A < 0/01$.

حال به سراغ حل تست می‌رویم. می‌دانیم $\log a = 3/64$ ، برای این که تعداد ارقام عدد a^3 را به دست آوریم، باید قسمت صحیح مقدار لگاریتم a^3 را در مبنای 10 ، مشخص کنیم. داریم:

$$\log a = 3/64 \Rightarrow \log a^3 = 3 \log a = 3(3/64) = 10/92 \Rightarrow \text{قسمت صحیح} = 10$$

حال تعداد ارقام عدد a^3 ، یک واحد بیش‌تر از قسمت صحیح مقدار $\log a^3$ ، یعنی $10 + 1 = 11$ رقم است.

$$\log \frac{100}{a} = 4/224 \Rightarrow \log 100 - \log a = 4/224 \Rightarrow -\log a = 2/124 \Rightarrow \log a = -2/124$$

می‌دانیم اگر جواب لگاریتم اعشاری عددی منفی باشد، این عدد بین صفر و یک بوده (یعنی این عدد، عددی اعشاری است) و به ازای قدرمطلق قسمت صحیح این جواب منفی، صفر در جلوی ممیز اعشاری این عدد بین صفر و یک قرار دارد. پس برای بی بردن به این که عدد a^5 بعد از ممیز چند صفر کنار هم دارد، باید جواب لگاریتم اعشاری عدد a^5 (که قطعاً منفی است) را محاسبه کرده و قدرمطلق قسمت صحیح جواب لگاریتم آن را به دست آوریم. داریم:

$$\log a^5 = 5 \log a = 5(-2/124) = -10/248 \xrightarrow{\text{قدرمطلق قسمت صحیح}} |-10| = 10$$

جواب a^5

پس عدد a^5 ، 10 صفر کنار هم در جلوی ممیز اعشاری دارد.

$$\log \sqrt{a} = -1/074 \Rightarrow \log a^{1/2} = -1/074 \Rightarrow \frac{1}{2} \log a = -1/074 \Rightarrow \log a = -2/148$$

$$\log a^3 = 3 \log a = 3(-2/148) = -6/444$$

$$\Rightarrow a^3 = 6 \quad | -6 | = 6 \quad \text{قسمت صحیح جواب لگاریتم اعشاری} = \text{تعداد صفرهای جلوی ممیز در کنار هم عدد } a^3$$

برای بی بردن به تعداد ارقام عدد 5^8 ، لگاریتم اعشاری (مبنای 10) آن را به دست می‌آوریم. سپس به قسمت صحیح جواب، یک واحد اضافه می‌کنیم:

$$\log 5^8 = 8 \log 5 = 8(1 - \log 2) = 8(1 - 0/301) = 8 \times 0/699 = 5/592 \Rightarrow \text{تعداد ارقام} = 12 + 1 = 13$$

قسمت صحیح

برای محاسبه‌ی سریع‌تر قسمت صحیح جواب می‌توانیم با تقریب خوبی $0/699$ را $0/7$ در نظر بگیریم، دقت کنیم:

$$18 \times 0/7 = 12/6 \Rightarrow \text{تعداد ارقام} = 12 + 1 = 13$$

(۲) - ۱۷۲

$$(e^x + 3)^2 - 25 = 0 \Rightarrow (e^x + 3)^2 = 25 = 5^2 \xrightarrow{x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y} \begin{cases} e^x + 3 = 5 \Rightarrow e^x = 2 \xrightarrow{\ln} x = \ln 2 \\ e^x + 3 = -5 \Rightarrow e^x = -8 \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} \text{(غقق)} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی فوق تنها دارای یک ریشه حقیقی است.

(۲) - ۱۷۳

چون حاصل ضرب دو عبارت برابر صفر است، پس تک تک آن‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$(e^x - 7)(e^{2x} + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x - 7 = 0 \Rightarrow e^x = 7 \xrightarrow{\ln} x = \ln 7 \\ e^{2x} + 6 = 0 \Rightarrow e^{2x} = -6 \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} \text{(غقق)} \end{cases}$$

(۱) - ۱۷۴ ابتدا دو طرف تساوی را تبدیل به دو عبارت نمایی با توان ۳ می‌کنیم. سپس ادعا می‌کنیم، پایه‌ها نیز باید مساوی باشند (چون توان فرد است این ادعا درست است). در نتیجه داریم:

$$(e^x + 3)^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow e^x + 3 = 5 \Rightarrow e^x = 2 \xrightarrow{\ln} \ln e^{x+3} = \ln 2 \Rightarrow x \ln e = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

(۳) - ۱۷۵

$$3^x = 2^{1-x} \Rightarrow 3^x = \frac{2^1}{2^x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می‌کنیم}} 3^x \times 2^x = 2^1 \Rightarrow 6^x = 2 \xrightarrow{\log_6} x = \log_6 2$$

(۳) - ۱۷۶

برای حل معادله‌ی $|2e^{3x} - 5| = |e^{3x} - 1|$ ، ابتدا کافی است با استفاده از قاعده‌ی $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$ ، قدرمطلق‌ها را برداریم:

$$|e^{3x} - 1| = |2e^{3x} - 5| \Rightarrow e^{3x} - 1 = \pm(2e^{3x} - 5) = \begin{cases} e^{3x} = 4 \Rightarrow \ln e^{3x} = \ln 4 \Rightarrow 3x = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln 4 \\ 3e^{3x} = 6 \Rightarrow e^{3x} = 2 \Rightarrow \ln e^{3x} = \ln 2 \Rightarrow 3x = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ln 2 \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی صورت تست، دارای دو ریشه است.

(۳) - ۱۷۷

می‌دانیم $e^{\ln x} = x$ است. پس برای محاسبه‌ی حاصل $e^{\ln x}$ ، کافی است x را از حل معادله‌ی نمایی $\frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} - 1} = 5$ ، به عنوان جواب تست معرفی کنیم. داریم:

$$\frac{e^{2x} - 3}{e^{2x} - 1} = 5 \Rightarrow e^{2x} - 3 = 5e^{2x} - 5 \Rightarrow 4e^{2x} = 2 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\ln} \ln e^{2x} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$$

(۲) - ۱۷۸

در معادله‌ی $2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0$ ، اگر e^x را t در نظر بگیریم (روش تغییر متغیر)، شکل معادله به صورت یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که با حل آن، مقدار e^x به دست می‌آید. داریم:

$$(e^x)^2 \uparrow \quad 2e^{2x} + 5e^x - 3 = 0 \xrightarrow{e^x = t} 2t^2 + 5t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \Rightarrow e^x = -3 \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} \text{(غقق)} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\ln} x = \ln \frac{1}{2} \end{cases}$$

(۳) - ۱۷۹

$$e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 6e \Rightarrow e^{2x} \times e - 5e^x \times e = 6e \xrightarrow{\div e} e^{2x} - 5e^x - 6 = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - 5e^x - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{e^x = t} t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = e^x = -1 \xrightarrow{\text{عبارت نمایی همواره مثبت است}} \text{(غقق)} \\ t = e^x = 6 \xrightarrow{\ln} x = \ln 6 \end{cases}$$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>