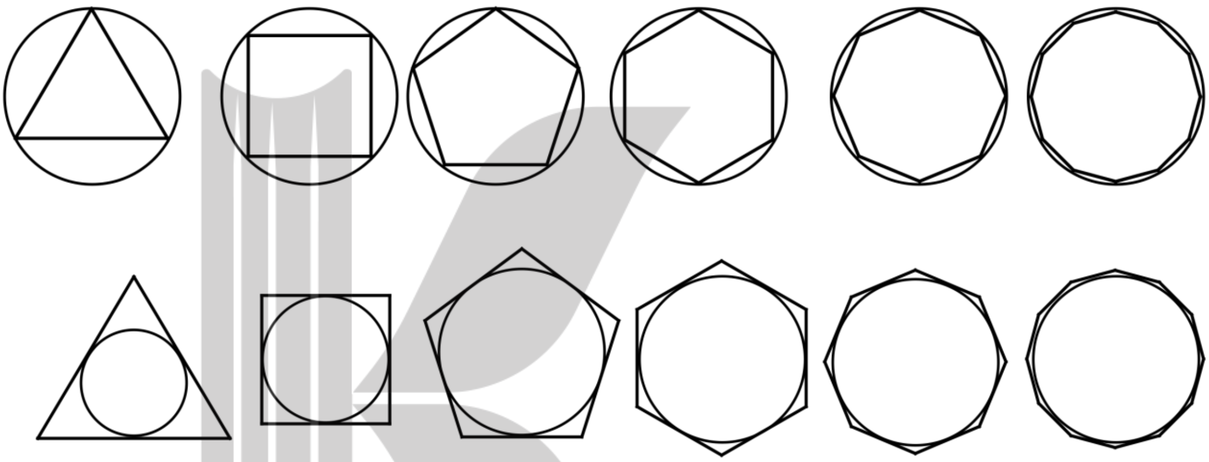
فرایند حدی:

تا حالا از خودتان پرسیده اید که رابطه ی مساحت دایره از کجا آمده است؟ یا اولین کسانی که مساحت یک دایره را پیدا کرده اند از چه روشی استفاده کردند؟

برای پیدا کردن مساحت دایره از روشی استفاده می کنیم که به آن فرایند حدی می گوییم.



در این شکل ها چند ضلعی هایی رسم شده اند که در یک دایره محاط اند یا بر یک دایره محیط هستند.(چند ضلعی محاطی یعنی چند ضلعی که داخل یک دایره قرار می گیرد و چند ضلعی محیزی یعنی چند ضلعی که بیرون دایره قرار می گیرد.) همانطور که در شکل ها می بینید هر چقدر تعداد اضلاع چند ضلعی ها زیاد می شود مساحت چند ضلعی به مساحت دایره نزدیک تر می شود.

در مورد چند ضلعی های محاطی، مساحت چند ضلعی را به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به قدر کافی بزرگ اختیار کنیم به مساحت دایره نزدیک تر می شود. همین روش برای مساحت چند ضلعی های محیطی هم صادق است یعنی هر چه قدر تعداد اضلاع چند ضلعی محیطی را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم مساحت چند ضلعی به مساحت دایره نزدیک تر می شود.

☆ در این جا اصطلاحاً می گوییم حد مساحت چند ضلعی های محیطی و چند ضلعی های محاطی برابر مساحت دایره است.

اولین بار در یونان باستان ارشمیدس مقدار تقریبی را با استفاده از محیط چند ضلعی های منتظم محاط در دایره به شعاع واحد وقتی که تعداد اضلاع به قدر کافی بزرگ اختیار می شود را به دست آورید. در واقع ریاضی دانان باستان درکی از مفهوم حد داشتند.

مفهوم حد:

مفهوم حد در ریاضی را می توان با این مثال توضیح داد:

دنباله اعداد $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},...$ را در نظر بگیرید اگر به همین حالت ادامه دهیم همواره به صفر نزدیک تر می شود ولی هیچ گاه به صفر نمی رسد. بنابراین اصطلاحاً می گوییم که صفر حد این دنباله از اعداد است.

موضوع حد، به منظور بیان رفتار یک تابع می پردازد و می تواند رفتار آن را در نقاط روی صفحه و یا بی نهایت هم ارزیابی کند. ما در دنیای واقعی با پدیده های طبیعی زیاد سروکار داریم.

مثلاً شما یک ماشین را در نظر بگیرید که قرار است در یک جاده هموار با سرعت ثابت حرکت کند. فرض کنید این سرعت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت باشد، اما شما می دانید که هر لحظه نمی توان سرعت را در همان عدد ۱۰۰ ثابت نگه داشت بلکه آنچه ما در هر لحظه خواهیم داشت یک عدد تقریبی و نزدیک به ۱۰۰ هست اما هیچگاه نمی تواند دقیقاً خود ۱۰۰ باشد در واقع حد یعنی بررسی رفتار یک تابع در اطراف و نزدیک به یک نقطه معین است

مثال:

تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x & x>۱ \\ x+۱ & x\le ۱ \end{cases}$ را در نظر می گیریم:

جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\longrightarrow$	۱	$\longleftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	......	....	.....	$\longrightarrow$	؟	$\longleftarrow$	......	......	......

حل:

x از سمت راست به ۱ نزدیک می شود — x از سمت چپ به ۱ نزدیک می شود

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\longrightarrow$	۱	$\longleftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\longrightarrow$	۲	$\longleftarrow$	۲/۰۰۲	۲/۰۲	۲/۲

$f(x)$ به ۲ نزدیک می شود — $f(x)$ به ۲ نزدیک می شود

مفهوم میل کردن (نزدیک شدن):

☆ نماد $x\to x_0^-$ (میل کردن x به x_0 از سمت چپ) یعنی x با مقادیر کوچکتر از x_0 به عدد x_0 خیلی نزدیک می شود.

☆ نماد $x\to x_0^+$ (میل کردن x به x_0 از سمت راست) یعنی x با مقادیر بزرگتر از x_0 به عدد x_0 خیلی نزدیک می شود.

تعریف حد چپ:

فرض کنید تابع f در بازه ی (a,x_0) تعریف شده باشد کوییم حد چپ f در x_0 برابر با L است هر گاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود و می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

تعریف حد راست:

فرض کنید تابع f در بازه ی (x_0,b) تعریف شده باشد کوییم حد راست f در x_0 برابر با L است هر گاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود و می نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

تعریف حد تابع:

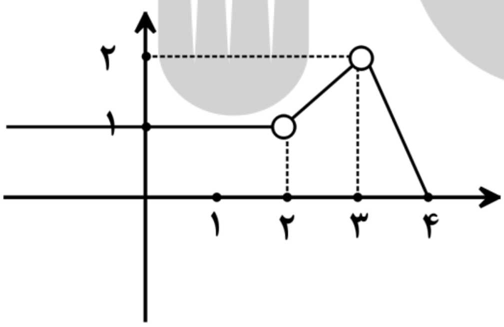
$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ و $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$

مثال ۱: با توجه به نمودار تابع f حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=......$

ب) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=......$

ج) $\lim_{x\to ۳} f(x)=......$



حل:

الف) $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۲$ ب) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=۲$ ج) $\lim_{x\to ۳} f(x)=۲$

چون حد راست در ۳ و حد چپ با هم برابر هستند پس مقدار حد تابع در ۳ برابر ۲ می باشد.

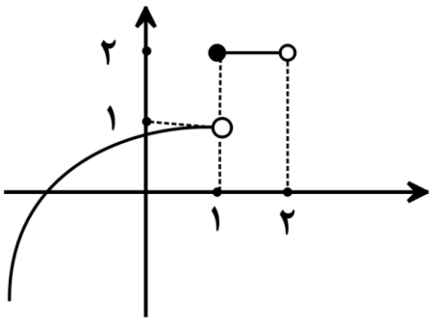
نکته: $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) =$ وجود ندارد

مثال ۲: با توجه به نمودار تابع f حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ldots\ldots$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ldots\ldots$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ldots\ldots$



حل:

الف) حد چپ تابع را در نقطه ۱ خواسته پس باید با مقادیر کمتر از ۱ به سمت آن نزدیک شویم:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$

ب) حد راست تابع را در نقطه ۱ خواسته پس باید با مقادیر بیشتر از ۱ به سمت آن نزدیک شویم:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ وجود ندارد چون:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ وجود ندارد

مثال ۳: با رسم نمودار $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، حد راست و حد چپ ان را در مجاورت نقطه $x_\circ = 2$ به دست آورید.

حل: برای رسم از روش انتقال $f(x) = \sqrt{x}$ استفاده می کنیم:

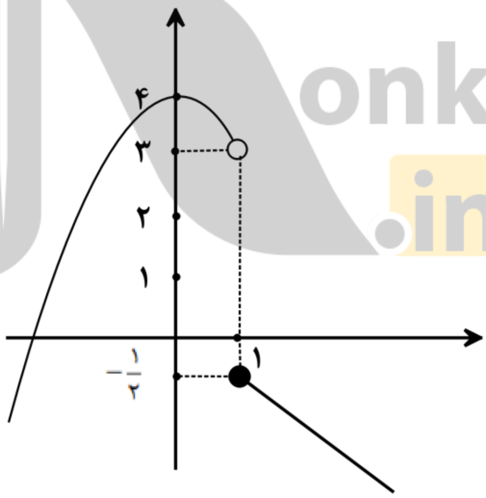
چون جزء دامنه نیست:
$\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2} =$ وجود ندارد

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2} =$ وجود ندارد

مثال۴: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x & x\geq 1 \\ 4-x^2 & x<1 \end{cases}$ را رسم کنید و حاصل $2\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)-f(1)$ را بدست آورید.

حل:



$$2\lim_{x\to 1^+} f(x)+\lim_{x\to 1^-} f(x)-f(1) = 2(-\frac{1}{2})+3-(-\frac{1}{2}) = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

نکته بسیار مهم: در محاسبه ی حد توابع وقتی می گوییم x به سمت عدد a میل کرده است به این مفهوم است که x به عدد a بسیار بسیار نزدیک شده است ولی به خود a نرسیده است.

تست: تابع $f(x)=\begin{cases} -۱ & x\in \mathbb{Z} \\ ۲ & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$ مفروض است در این تابع حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{۵}} f(x) + \lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ کدام است؟

الف) ۱ ☐ ب) ۲- ☐ ج) ۴ ☐ د) ۱- ☐

حل: وقتی $x\to ۵$ به معنی آن است که x به عدد ۵ نزدیک شده ولی به خود ۵ نرسیده است یعنی $x\neq ۵$ یعنی عددی غیر صحیح است در نتیجه:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to ۵^+} f(x) = +۲ \\ \lim\limits_{x\to ۵^-} f(x) = +۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۵} f(x) = +۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۵} f(x) + \lim\limits_{x\to\sqrt{۵}} f(x) = ۲+۲=۴$$

درس نامه (۲)

قضایای حد:

برای سهولت در حد گرفتن از قوانین زیر استفاده می شود.

(۱) حد یک تابع ثابت در هر نقطه، برابر همان مقدار ثابت است یعنی: $\lim\limits_{x\to a} k = k$

(۲) حد یک تابع همانی در هر نقطه، برابر طول آن نقطه است یعنی: $\lim\limits_{x\to a} x = a$

(۳) حد یک تابع چند جمله ای در هر نقطه، برابر مقدار تابع در همان نقطه است یعنی:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

(۴) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, k عددی ثابت باشد داریم:

$$\lim_{x\to a} kf(x) = kL$$

(۵)اگر g,f دو تابع باشند که در $x=a$ دارای حد باشند آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$)

(۶) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $n\in\mathbb{N}$ آنگاه:

الف) چنان چه n عددی فرد باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

ب) چنان چه n عددی زوج و $L>0$ باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

مثال ۱: حاصل حد زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۳x-۱}{۴x+۱}$$

حل: چون صورت و مخرج کسر چند جمله ای هستند پس:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۳x-۱}{۴x+۱}=\frac{\lim_{x\to ۲}\left(x^{۲}+۳x-۱\right)}{\lim_{x\to ۲}\left(۴x+۱\right)}=\frac{۲^{۲}+۳\left(۲\right)-۱}{۴\left(۲\right)+۱}=\frac{۹}{۹}=۱$$

نکته (۱) در توابع شامل رادیکال با فرجه زوج اگر عبارت زیر رادیکال براب صفر شود باید حد راست و حد چپ را جداگانه حساب کنیم:

مثال ۲ : $\lim_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}$

چون $\sqrt{۲\left(۳\right)-۶}=۰$ پس:

$$\lim_{x\to ۳^{+}}\sqrt{۲x-۶}=\sqrt{۲\left(۳\right)-۶}=\sqrt{۰^{+}}=۰$$

$$\lim_{x\to ۳^{-}}\sqrt{۲x-۶}=\sqrt{۲\left(۳\right)-۶}=\sqrt{۰^{-}}=$$ **تعریف نشده**

پس $\lim_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}$ وجود ندارد.

نکته ۲: در توابع چند جمله ای اگر بخواهیم حد را در نقاطی که ضابطه تابع عوض می شود حساب کنیم باید حد راست و حد چپ را جداگانه حساب کنیم.

مثال: حد تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}۲x-۳ & x\ge ۱\\ x^{۲}-۲ & x<۱\end{cases}$ **را در نقطه** $x=۱$ **بدست آورید.**

حل: چون ضابطه تابع در $x=۱$ **عوض می شود پس باید:**

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to ۱^{+}}f\left(x\right)=\lim_{x\to ۱^{+}}\left(۲x-۳\right)=-۱\\ \lim_{x\to ۱^{-}}f\left(x\right)=\lim_{x\to ۱^{-}}\left(x^{۲}-۲\right)=-۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}f\left(x\right)=-۱$$

نکته ۳ : در تابع هایی که شامل قدر مطلق، جزء صحیح که توابع چند جمله ای هستند باید مقدار حد راست و حد چپ را جداگانه به دست آوریم.

مثال: حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\frac{[x]}{x}=$$

حل: چون صورت $[x]$ است پس حد راست و حد چپ باید بدست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{[x]}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]}{\lim\limits_{x\to ۲^+}x}=\dfrac{[۲^+]}{۲}=۱\\[2ex] \lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{[x]}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to ۲^-}[x]}{\lim\limits_{x\to ۲^-}x}=\dfrac{[۲^-]}{۲}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{[x]}{x}=\text{حد ندارد}$$

$$۲)\ \lim_{x\to -۱}\left(x[x]+[x]\right)=$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -۱^+}\left(x[x]+[x]\right)=\lim\limits_{x\to -۱^+}\left(-۱[-۱^+]+[-۱^+]\right)=-(-۱)-۱=۰\\[2ex] \lim\limits_{x\to -۱^-}\left(x[x]+[x]\right)=\lim\limits_{x\to -۱-}\left(-۱[-۱^-]+[-۱^-]\right)=-(-۲)-۲=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -۱}\left(x[x]+[x]\right)=۰$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}|x-۲|=$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}|x-۲|=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x-۲)=۰\\[2ex] \lim\limits_{x\to ۲^-}|x-۲|=\lim\limits_{x\to ۲^-}-(x-۲)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}|x-۲|=۰$$

حد توابع مثلثاتی:

الف) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

ب) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos x}{۲+\sin x}=$

۲) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\sin^{۴}x-\cos^{۴}x\right)=$

حل:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\cos x}{۲+\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to ۰}\cos x}{\lim\limits_{x\to ۰}(۲+\sin x)}=\frac{۱}{۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\sin^{۴}x-\cos^{۴}x\right)=\sin^{۴}\pi-\cos^{۴}\pi=۰-(-۱)^{۴}=-۱$

درس نامه (۳)

رفع ابهام توابع کسری مبهم:

در محاسبه ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ در حالتی که حد صورت و حد مخرج صفر می شود، در این حالت حاصل حد مشخص نیست که اصطلاحاً به آن حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می گویند برای محاسبه حد این گونه توابع برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ حالت های زیر را در نظر می گیریم:

الف) صورت و مخرج چند جمله ای هستند:

در این حالت اگر $x \to a$ ، صورت و مخرج بر $x-a$ بخش پذیرند صورت و مخرج بر $x-a$ ساده می کنیم بعد حد تابع را پیدا می کنیم.

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^4-5x+4}$ چیست؟

حل: عبارت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ است. چون صورت و مخرج چند جمله ای است صورت و مخرج را بر $x-1$ تقسیم می کنیم داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x^4-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+4x+2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-4)}=\frac{1+4+2}{1+1+1-4}=-7$$

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$ را به دست آورید.

حل: چون صورت کسر قدر مطلق دار است پس باید حد چپ و راست را پیدا کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{|x-۲|}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{۱}{(x+۲)}=+\dfrac{۱}{۴}\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{|x-۲|}{x^۲-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-۱}{(x+۲)}=-\dfrac{۱}{۴}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{|x-۲|}{x^۲-۴}=\text{حد ندارد}$$

۲- صورت یا مخرج (یا هر دو) تابع مثلثاتی هستند:

در این حالت برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از اتحادهای مثلثاتی کمک گرفته و در صورت و مخرج عباراتی را که حدش برابر صفر می شود را حذف می کنیم.

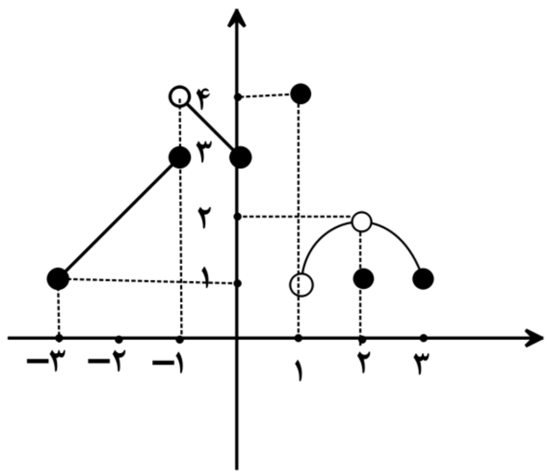
مثال: حاصل حد $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{۱+\cos x}{\sin^۲ x}$ **را پیدا کنید.**

حل: حاصل $\frac{۰}{۰}$ می شود پس برای رفع ابهام از اتحاد مثلثاتی $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ **استفاده می کنیم.**

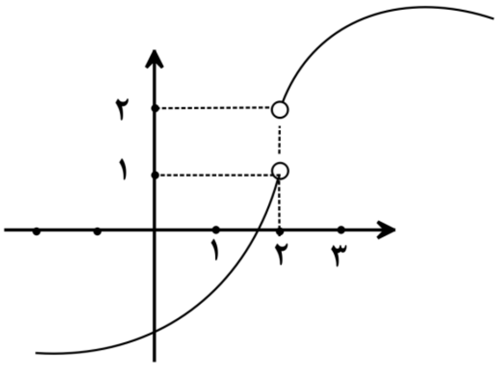
$$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{۱+\cos x}{\sin^۲ x}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{۱+\cos x}{۱-\cos^۲ x}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{۱+\cos x}{(۱+\cos x)(۱-\cos x)}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{۱}{(۱-\cos x)}=\frac{۱}{۲}$$

تمرینات تکمیلی:

۱- با توجه به نمودار زیر، حاصل $\dfrac{\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)+f(۰)-f(۲)}{\lim\limits_{x\to ۲} f(x)-f(f(۲))}$ **را پیدا کنید.**



۲- با توجه به شکل مقابل، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\left[f(x)\right]$ را بدست آورید.



۳- نمودار تابع های زیر را رسم کنید و حدود زیر را برای $x_\circ$ داده شده در هر قسمت در صورت وجود رسم کنید.

$\lim\limits_{x\to x_\circ}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to x_\circ^-}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to x_\circ^+}$

الف) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\qquad x_\circ=\circ$

ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<\circ \\ x-۱ & x>\circ \end{cases}$ $\qquad x_\circ=\circ$

۴- نمودار تابع $f(x)=۱+\frac{[x]}{|x|}$ را در بازه ی $(-۱,۱)$ رسم کنید و حد چپ و راست آن را در $x=\circ$ بیابید.

۵- حد های زیر را پیدا کنید.([ ] جزء صحیح)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{x^۲+x-۲\circ}{x-۴}=$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x^۲+۲x+۱}=$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{[x]+۲}{x-۱}=$

۴) $\lim\limits_{x\to -۱}\left(\frac{x+۲}{۳x^۲+۴}\times\frac{|x+۲|}{۲x}\right)=$

۵) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{۳x^۲-۱۲}=$

۶) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-۴|}{|x-۲|+|x^۲-۴|}=$

۷) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{۱+\cos^۳ x}{\sin^۲ x}=$

۸) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\left(\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x\right)=$

۹) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\left[2\sqrt{2}\cos 2x\right]=$

۱۰) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{[x^2]-[x]^2}{x^2-4}=$

۶- تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x^2-4a} & x\geq 2\\ x+b & -2\leq x\leq 2\\ x^2+bx+3a & x\leq -2\end{cases}$ مفروض است. b,a را طوری بیابید که تابع f در $x=-2$ دارای حد باشد و $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=2$

۷- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^2-2a & x>1\\ 2bx^2+a & x<1\end{cases}$ اگر $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ آنگاه $a+b$ را بدست آورید.

۸- نمودار تابع $f(x)=\frac{|x+1|}{x+1}$ را رسم کنید و بگویید در چه نقاطی حد ندارد.

۹- اگر $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2f(x)-ax+1}{1-2af(x)}=5$ آنگاه مقدار a را حساب کنید.

۱۰-مقدار a را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-5x^2+6x-3}{ax^3-a}=4$.

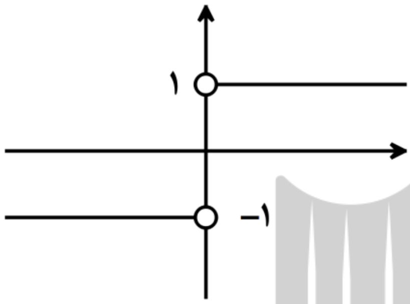
حل تمرینات تکمیلی:

۱- $\frac{۳+۳-۱}{۲-f(۱)}=\frac{۵}{۲-۴}=-\frac{۵}{۲}$

۲- با توجه به شکل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱$ و چون $x\to ۲^-$ پس مقادیر تابع همواره از ۱ کوچک تر هستند

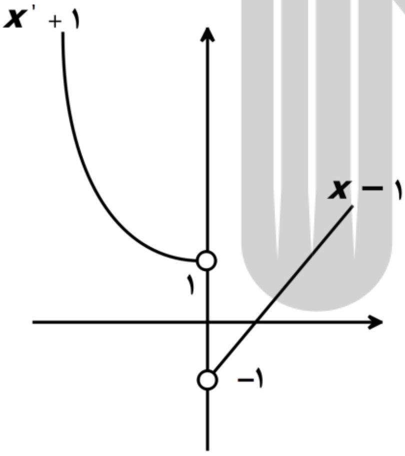
پس $\lim\limits_{x\to ۲^-}[f(x)]=[۱^-]=۰$

۳- الف)



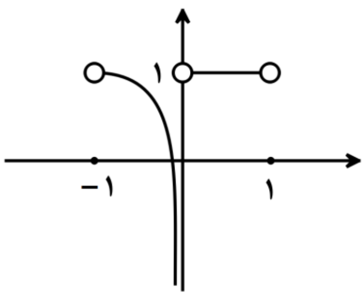
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x}=-۱\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$$ وجود ندارد

ب)



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} x-۱=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} x^۲+۱=۱\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$$ وجود ندارد

۴-



$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۱+\frac{۱}{x} & x<۰\end{cases}$$

$$D=(-۱,۱)-\{۰\}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} =$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to 0^+} = 1$

-۵

$$1)\lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x-4}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)}=\lim_{x\to 4}(x+5)=9$$

$$2)\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{1+2+1}=2$$

$$3)\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x]+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{[x]+2}{x-1}=\dfrac{1+2}{2-1}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{[x]+2}{x-1}=$$ وجود ندارد

$$4)\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x+2}{3x^2+4}\times\frac{|x+2|}{2x}\right)=\frac{-1+2}{3+4}\times\frac{121}{-2}=-\frac{1}{7}$$

$$5)\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{3(x+2)}=\frac{2^2+4+4}{3(2+2)}=\frac{12}{12}=1$$

$$6)\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|}{|x-2|+|x^2-4|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+2|}{|x-2|+|x-2||x+2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2||x+2|}{|x-2|(1+|x+2|)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x+2|}{(1+|x+2|)}=\frac{4}{1+4}=\frac{4}{5}$$

$$7)\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1+\cos x)}=\frac{1+(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

$$8)\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2\frac{\pi}{3}+\sin 3\frac{\pi}{3})=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(\pi-\frac{\pi}{3})+\sin\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0=\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}^-}\left[2\sqrt{2}\cos 2x\right]=\left[2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^+\right]=\left[2^+\right]=2 \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}^+}\left[2\sqrt{2}\cos 2x\right]=\left[2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^-\right]=\left[2^-\right]=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\left[2\sqrt{2}\cos 2x\right]=\text{وجود ندارد}$$

دقت: می دانیم $x<\frac{\pi}{4}$ آنگاه $\cos>\frac{\sqrt{2}}{2}$ و اگر $x>\frac{\pi}{4}$ آنگاه $\cos<\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

$$10)\lim_{x\to 2^+}\frac{\left[x^2\right]-\left[x\right]^2}{x^2-4}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

۶- باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x) = \lim_{x\to -۲^+} (x+b) = -۲+b$$

$$\lim_{x\to -۲^-} f(x) = \lim_{x\to -۲^-} (x^۲+bx+۳a) = ۴-۲b+۳a$$

$$\Rightarrow -۲+b = ۴-۲b+۳a \Rightarrow b-a=۲ *$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۲ \Rightarrow \sqrt{۲\times ۴ - ۴a} = ۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۸-۴a=۴ \Rightarrow \boxed{a=۱}$$

$$* \Rightarrow b-a=۲ \Rightarrow b-۱=۲ \Rightarrow \boxed{b=۳}$$

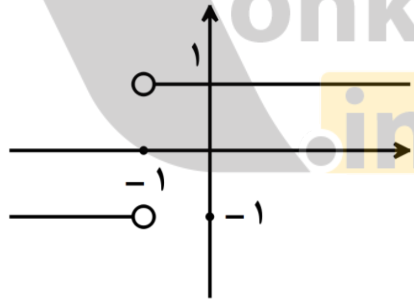
-۷

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲-۲a) = ۱-۲a \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-}(۲bx^۲+a) = ۲b+a \end{array}\right\} \Rightarrow ۱-۲a = ۲(۲b+a) \Rightarrow ۴b+۴a=۱ \Rightarrow \boxed{a+b=\frac{۱}{۴}}$$

-۸

$$|x+۱| \Rightarrow x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+۱}{x+۱} & x>-۱ \\ \dfrac{-(x+۱)}{x+۱} & x<-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۱ & x>-۱ \\ -۱ & x<-۱ \end{cases}$$



تابع در $x=-۱$ حد ندارد

-۹

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲f(x)-ax+۱}{۱-۲af(x)} = ۵ \Rightarrow \frac{۲\lim\limits_{x\to ۲} f(x) - \lim\limits_{x\to ۲}(ax-۱)}{۱-۲a\lim\limits_{x\to ۲} f(x)} = ۵$$

$$\Rightarrow \frac{۲(۵)-۲a+۱}{۱-۱۰a} = ۵ \Rightarrow ۵-۵۰a = ۱۱-۲a \Rightarrow \boxed{a=\frac{-۱}{۸}}$$

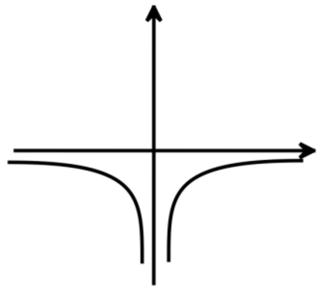
-۱۰

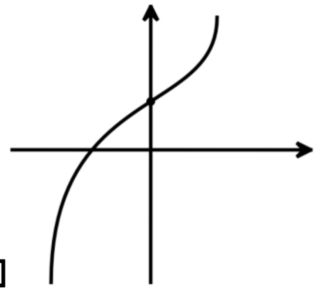
$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x^۳-۵x^۲+۶x-۳}{ax^۳-a}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۲x^۲-۳x+۳)}{a(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{۲}{۳a}=۴$$

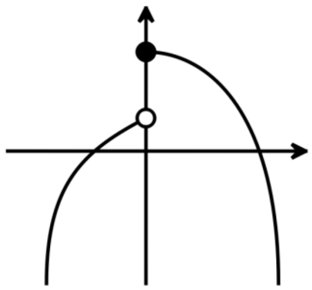
$$\Rightarrow ۲=۱۲a\Rightarrow \boxed{a=\frac{۱}{۶}}$$

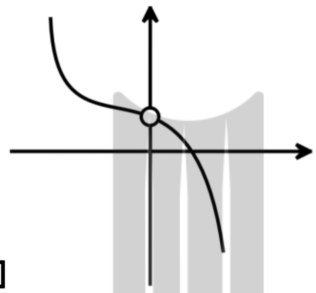
سؤالات چهار گزینه ای:

۱-کدام یک از توابع زیر در $x=0$ دارای حد راست می باشد ولی حد ندارد؟

الف)  □

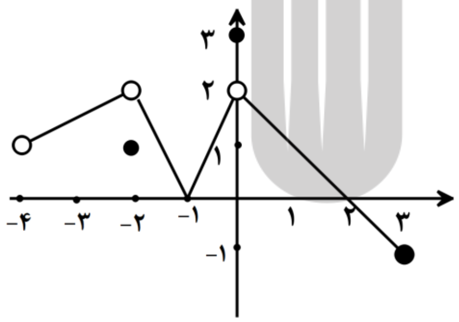
ب)  □

ج)  □

د)  □

۲-با توجه به شکل حاصل $\lim\limits_{x\to -2} f(x) - \lim\limits_{x\to 3^-} |f(x)| + f(f(-1))$ **کدام است؟**

الف) ۶ □   ب) ۴ □   ج) ۵ □   د) ۳ □



۳-کدام گزینه در مورد حدود تابع $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$ **در نقطه** $x=0$ **صحیح است؟**

الف) حد دارد □   ب) حد چپ آن ۱+ است □

ج) حد چپ و راست ندارد □   د) حد چپ و راست دارد ولی برابر نیستند. □

۴- در تابعی با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax & x\geq ۲ \\ -x+۳ & x<۲ \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، داریم

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)+\lim_{x\to ۲^-} f(x)=f(۱)$$

الف) $-\frac{۳}{۲}$ ☐ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ☐ ج) $\frac{۱}{۲}$ ☐ د) $\frac{۳}{۲}$ ☐

۵- اگر $\lim_{x\to ۰} f(x)=\sqrt{۳}$, $\lim_{x\to ۰} g(x)=۱$ آنگاه $\lim_{x\to ۰}\frac{۱+f(x)}{g(x)-f(x)}$ کدام است؟

الف) $-۲+\sqrt{۳}$ ☐ ب) $۱-\sqrt{۳}$ ☐ ج) $\sqrt{۳}+۱$ ☐ د) $-۲-\sqrt{۳}$ ☐

۶- قدر مطلق تفاضل مقادیر حد چپ و حد راست تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}+\frac{|x-۲|}{x-۲}$ وقتی $x\to ۲$ میل می کند، چقدر است؟

الف) ۲ ☐ ب) ۳ ☐ ج) ۴ ☐ د) ۵ ☐

۷-حاصل $\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|-[۲x]}{۲|x|+[x]}$ کدام است؟

الف) صفر ☐ ب) $\frac{۱}{۲}$ ☐ ج) تعریف نشده ☐ د) $-\frac{۱}{۲}$ ☐

۸-حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^{۲}-۲x-۱}{x^{۳}-۲}$ برابر است با :

الف) ۱ ☐ ب) $\frac{۴}{۳}$ ☐ ج) $\frac{۲}{۳}$ ☐ د) صفر ☐

۹-حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}(\tan\frac{\pi x}{۳}+\sin\frac{\pi x}{۶})$ کدام است؟

الف) $۳\sqrt{۳}$ ☐ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ☐ ج) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ ☐ د) $\sqrt{۳}$ ☐

۱۰- $f(x)=\begin{cases} a\sin\frac{\pi x}{۳}+\sqrt{۲} & x\geq\frac{۱}{۲} \\ b\tan\frac{\pi x}{۳}-\sqrt{۳} & ۰<x<\frac{۱}{۲}\end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} f(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$, $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^{-}} f(x)=۰$ آن گاه $a+b$ کدام است؟

الف) ۱ ☐ ب) ۴ ☐ ج) ۲ ☐ د) ۳ ☐

۱۱- حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۵x+۴}$ کدام است؟

الف) $\frac{۴}{۳}$ ☐ ب) $\frac{۳}{۴}$ ☐ ج) $-\frac{۲}{۵}$ ☐ د) $-\frac{۲}{۳}$ ☐

۱۲-حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^{-}}(x+۱)\left[\frac{۱}{x+۱}\right]$ کدام است؟

الف) -۱ ☐ ب) صفر ☐ ج) $\frac{۱}{۲}$ ☐ د) ۱ ☐

۱۳- مجموع حد چپ و حد راست $f(x)=(x^{۲}+۱)[x^{۲}-۲]$ وقتی $x\to\sqrt{۲}$ کدام است؟

الف) ۶ ☐ ب) ۳ ☐ ج) -۳ ☐ د) -۶ ☐

۱۴- با فرض $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۶x+۵}{x^{۲}+ax+b}=۲$ مقدار $۲a+b$ کدام است؟

الف) ۵ ☐ ب) -۵ ☐ ج) ۴ ☐ د) -۴ ☐

۱۵-حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x+3|-|2x-3|}{3x}$ کدام است؟

الف) $\dfrac{4}{3}$ ☐ ب) $\dfrac{3}{4}$ ☐ ج) $\dfrac{2}{3}$ ☐ د) $-\dfrac{2}{3}$ ☐

پاسخنامه سؤالات چهار گزینه ای:

۱)گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در گزینه ۱: حد چپ و راست تابع در صفر متناهی نیست.

گزینه ۲و ۴ حد چپ و حد راست تابع در $x=0$ با هم برابرند.

۲)گزینه ۲

$$\lim_{x\to -2} f(x)-\lim_{x\to 3^-}|f(x)|+f(f(-1))=2-|-1|+f(0)=2-1+3=4$$

۳) گزینه ۴

$$f(x)=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases} x+\dfrac{x}{x}=x+1 & x>0\\[2mm] x+\dfrac{-x}{x}=x-1 & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=+1$$

۴) گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax)=2^2+2a=4+2a\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x+3)=-2+3=+1\end{array}\right\}\Rightarrow 4+2a+1=2\Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}}$$

۵)گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱+f(x)}{g(x)-f(x)}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=-۲-\sqrt{۳}$$

۶) گزینه ۱

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to ۲^+}f(x)&=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}+\frac{x-۲}{x-۲}=۴+۱=۵\\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)&=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}+\frac{-(x-۲)}{x-۲}=۴-۱=۳\end{aligned}\right\}\Rightarrow|۵-۳|=۲$$

۷) گزینه ۲

تذکر: در محاسبه ی حد توابعی که شامل جزء صحیح و قدر مطلق می باشند ابتدا مقدار جزء صحیح و وضعیت قدر مطلق را در نقطه ی حدی مشخص می کنیم بعد از تابع حد می گیریم.

$$x\to ۰^+\Rightarrow\begin{cases}|x|=x\\ [x]=۰\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۰}{۲x+۰}=\frac{۱}{۲}$$

۸) گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲-۲x-۱}{x^۳-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۳x+۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\frac{۴}{۳}$$

۹) گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۴}(\tan\frac{\pi x}{۳}+\sin\frac{\pi x}{۶})=\tan\frac{۴\pi}{۳}+\sin\frac{۴\pi}{۶}=\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})+\sin\frac{۲\pi}{۳}=$$

$$\tan\frac{\pi}{۳}+\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۰)گزینه ۳

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^{+}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^{+}}\left(a\sin\frac{\pi x}{3}+\sqrt{2}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^{-}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^{-}}\left(b\tan\frac{\pi x}{3}-\sqrt{3}\right)=\frac{b\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2mm] \dfrac{b\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+2=1\\ b-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{a+b=2}$$

۱۱) گزینه ۴

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)}=-\frac{2}{3}$$

۱۲) گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1^{-}}(x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right]=\lim_{x\to 1^{-}}(x+1)\lim_{x\to 1^{-}}\left[\frac{1}{x+1}\right]=(1+1)\times\left[\frac{1}{2}^{-}\right]=2\times 0=0$$

۱۳) گزینه ۳

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^{+}}(x^2+1)\left[x^2-2\right]=(2+1)\times\left[\sqrt{2}^{2}-2\right]=3\times\left[0^{+}\right]=3\times 0=0$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^{-}}(x^2+1)\left[x^2-2\right]=(2+1)\times\left[\sqrt{2}^{2}-2\right]=3\times\left[0^{-}\right]=3\times(-1)=-1$$

$$\Rightarrow -3+0=-3$$

۱۴) گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱} x^۲-۶x+۵=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} x^۲+ax+b=۰$$

$$\Rightarrow ۱^۲+a+b=۰ \Rightarrow b=-a-۱ \Rightarrow x^۲+ax-a-۱=(x-۱)(x+a+۱)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+b}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۵)}{(x-۱)(x+a+۱)}=\frac{۱-۵}{۱+a+۱}=۲ \Rightarrow \boxed{a=-۴}$$

$$\Rightarrow b=-a-۱=-(-۴)-۱=۳ \Rightarrow \boxed{۲a+b=-۵}$$

۱۵) گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x+۳+۲x-۳}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴x}{۳x}=\frac{۴}{۳}$$

چون در اطراف $x=۰$ عبارت $۲x+۳>۰ , ۲x-۳<۰$ است.