

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

فصل سوم

تابع

❖ درس اول:

آشنایی با برخی از انواع تابع

❖ درس دوم:

وارون یک تابع و تابع یک به یک

❖ درس سوم:

اعمال جبری روی توابع

konkur
info

تابع:

یک رابطه هنگامی تابع است که بتوانیم به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از B را نسبت دهیم.

ضابطه و دامنه تابع:

به دستور یا قانون بیانگر تابع، ضابطه آن تابع می‌گوییم.

$$y = f(x)$$

یک تابع با ضابطه و دامنه آن مشخص می‌شود، اگر دامنه تابع ذکر نشود، بزرگترین دامنه ممکن را برای آن تابع در نظر می‌گیریم.

دامنه تابع چند جمله‌ای برابر مجموعه اعداد حقیقی (R) است

انواع توابع:

(۲) ثابت

(۴) همانی

(۶) گویا

(۸) پله‌ای

(۱۰) یک به یک

(۱۲) لگاریتمی

(۱) چند جمله‌ای

(۳) چند ضابطه‌ای

(۵) قدر مطلق

(۷) رادیکالی

(۹) جزء صحیح

(۱۱) مثلثاتی

(۱۳) نمایی

با توابع ۱ تا ۵ در سال دهم آشنا شده‌اید.

توابع گویا:

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم

که صورت و مخرج، چند جمله‌ای هستند و مخرج صفر نیست.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ مثل:}$$

(فعالیت ص ۴۹)

توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند:

$$f(x) = \frac{x}{x+5}, \quad f(x) = \frac{x+3}{x-10}$$

$$f(x) = \sqrt{5x}, \quad f(x) = 2$$

دامنه توابع گویا:

توابع گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند تعریف نمی‌شود چون کسری که مخرجش صفر است وجود ندارد. بنابراین دامنه آن به صورت:

$$D_f = R - \{\text{ریشه های مخرج}\}$$

تذکر: همواره دامنه تابع را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می‌کنیم.

مثل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x = 0 \rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{5}{x-2} \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_f = R - \{2\}$$

دامنه هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x}{x+5} \rightarrow x+5=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow D_f = R - \{-5\}$$

$$g(x) = \frac{3}{x-4} \rightarrow x-4=0 \rightarrow x=4 \rightarrow D_g = R - \{4\}$$

② دامنه تابع گویای $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به دست آورید.

④ تابعی گویا بنویسید که دامنه $D_g = R - \{-1\}$ شود.

تساوی دو تابع:

شرط تساوی دو تابع:

(۱) تساوی دامنه ها

(۲) تساوی ضابطه ها

✓ نکته: اگر دو تابع برابر باشند، نمودار آنها کاملاً بر هم

منطبقند

✓ در تشخیص تساوی دو تابع ابتدا تساوی دامنه را

چک می کنیم

(مثال ص ۵۱)

آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{x}$ ، $g(x) = 2$ مساویند؟

چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

(گارد رگلاسی ۱ ص ۵۱)

① آیا دو تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{x}$ ، $g(x) = x$ مساویند؟

چرا؟ خیر زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R - \{0\} \\ D_g = R \end{array} \right\} \rightarrow D_f \neq D_g$$

③ در هر مورد آیا دو تابع مساویند؟

الف) $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ ، $g(x) = \frac{|x|}{x}$

ب) $f(x) = x - 2$ ، $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

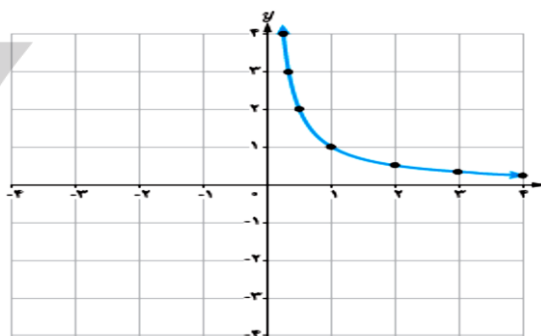
رسم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$

(فعالیت ص ۴۹)

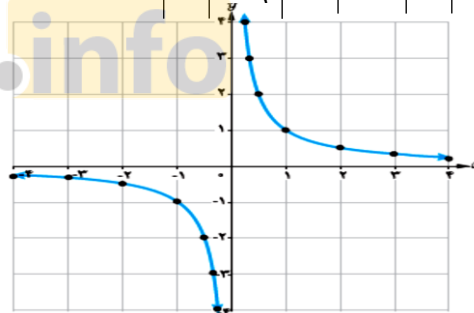
نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را با هر یک از دامنه های

$D_f = R - \{0\}$ و $D_f = (0, +\infty)$ رسم کنید. حل:

$$D_f = (0, +\infty) \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{x} & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$



$$D_f = R - \{0\} \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & \dots & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \dots \\ \hline y & \dots & -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \dots \end{array}$$



① نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ را با دامنه

$D_f = [-5, 5] - \{0\}$ رسم کنید.

توابع رادیکالی:

هر تابع به شکل $f(x) = \sqrt{g(x)}$ را یک تابع رادیکالی می‌نامیم که در آن $g(x)$ منفی نیست (یعنی صفر یا مثبت است).
مثال: $f(x) = \sqrt{x}$

دامنه توابع رادیکالی:

برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می‌دهیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$D_f = g(x) \geq 0$$

مثال:

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

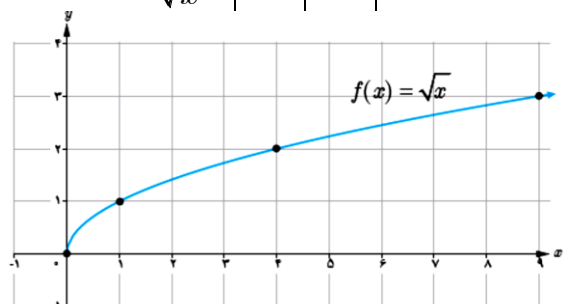
رسم تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x}$:

ابتدا دامنه را مشخص و سپس از طریق نقطه یابی نمودار را رسم می‌کنیم.

(مثال ص ۵۲)

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_f = [0, +\infty)$$

x	۰	۱	۴
\sqrt{x}	۰	۱	۲



یادآوری:

مراحل رسم توابع به کمک انتقال:

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af(bx + c) + d$$

- a, d روی عرض نقاط (y) تاثیر مستقیم دارند و انتقال به صورت آسانسوری است
- b, c روی طول نقاط (x) تاثیر معکوس دارند و انتقال قطاری است.

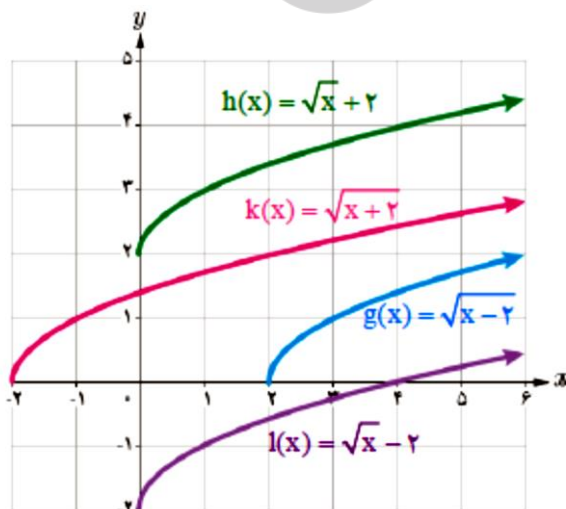
اولویت:

اول (x) یا (y) فرقی ندارد ولی:

- در (x) ها اول c سپس b
- در (y) ها اول a سپس d

رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع باضابطه $f(x) = \sqrt{x}$:

- ① مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنه آنها را تعیین کنید. حل:



$$g(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

توابع پله ای:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{را تابع پله ای می نامیم. مثل:}$$

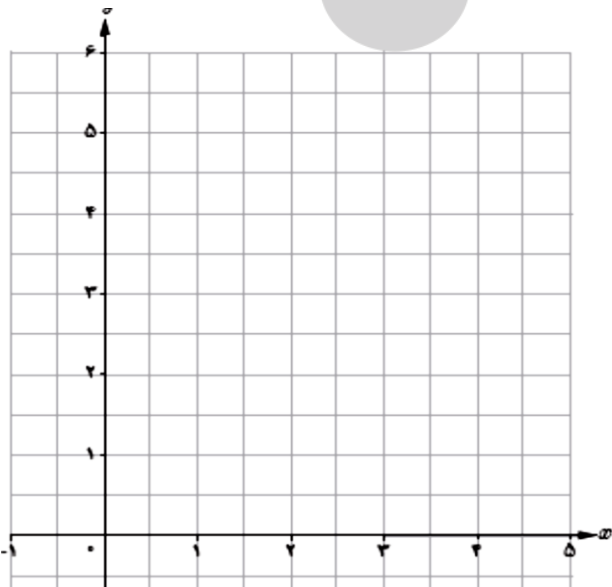
در یک پارکینگ، هزینه پارک خودرو به این صورت محاسبه می شود:

هزینه (هزار تومان)	زمان
۳	از هنگام ورود تا کمتر از ۲ ساعت
۴	از ۲ ساعت تا ۲/۵ ساعت
۵	از بیشتر از ۲/۵ ساعت تا کمتر از ۳ ساعت
۶	از ۳ ساعت تا ۵ ساعت

الف) ضابطه تابع هزینه پارکینگ خودرو چیست؟ حل:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2/5 \\ 5 & 2/5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



$$h(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_h = [0, +\infty)$$

$$k(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow D_k = [-2, +\infty)$$

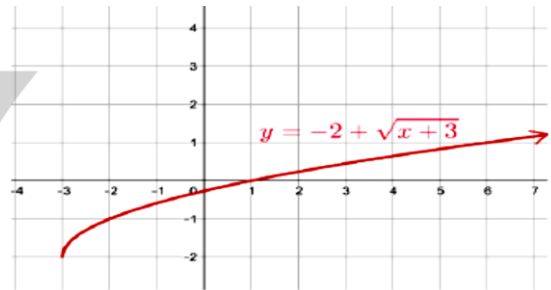
$$l(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x \geq 0 \rightarrow D_l = [0, +\infty)$$

② نمودار تابع با ضابطه $y = -2 + \sqrt{x+3}$ را رسم کنید.

حل: برای رسم $y = \sqrt{x+3} - 2$ نمودار $y = \sqrt{x}$ را

را ۳ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل می کنیم

$$y = -2 + \sqrt{x+3} \rightarrow x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow D = [-3, +\infty)$$



③ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ را رسم

کنید. سپس دامنه آن را بیابید.

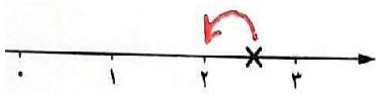
onkur
info

⑤ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x-4}$ را رسم

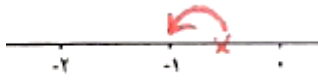
کنید.

مثل:

$$\lceil 2/4 \rceil = 2$$



$$\lceil -0/7 \rceil = -1$$



✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می برد و در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار، یک واحد هم کم می کند. مثل:

$$\lceil 2/7 \rceil = 2$$

$$\lceil -2/7 \rceil = -2 - 1 = -3$$

(مثال ص ۵۴ و کاربرد کلاسی او ۲ ص ۵۵ و تمرین ۶ ص ۵۶)

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\lceil 4 \rceil = 4 \quad \lceil 6/1 \rceil = 6 \quad \lceil 0 \rceil = 0$$

$$\lceil -4/3 \rceil = -5 \quad \lceil -3 \rceil = -3 \quad \lceil -3/4 \rceil = -4$$

$$\lceil -2 \rceil = -2 \quad \lceil -1/9 \rceil = 0 \quad \lceil 0/4 \rceil = 0$$

$$\lceil -0/4 \rceil = 0 \quad \lceil 4/25 \rceil = 4 \quad \lceil 3 \rceil = 3$$

$$\lceil 2/3 \rceil = 2 \quad \lceil 1/7 \rceil = 1 \quad \lceil 1/2 \rceil = 1$$

$$\lceil \frac{41}{37} \rceil = 1 \quad \lceil -\frac{13}{51} \rceil = -1$$

$$\lceil 300/4002 \rceil = 0$$

$$\lceil -103/003 \rceil = -103$$

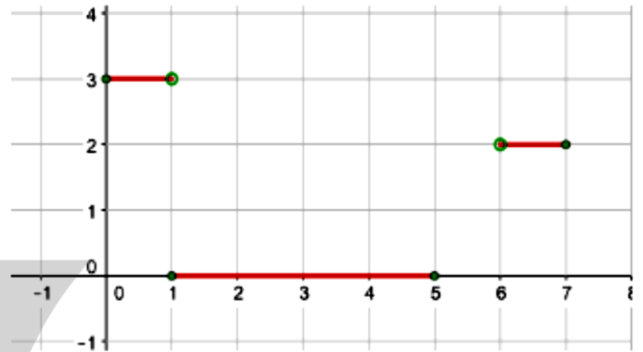
$$\lceil -2309/54 \rceil = -2309$$

(تمرین ۷ ص ۵۶)

⑦ تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1) \\ 0 & x \in [1, 5] \\ 2 & x \in (6, 7] \end{cases}$$

حل:



توابع جزء صحیح:

توابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به

صورت $f(x) = [x]$ می باشد که می خوانیم جزء صحیح x

یا براکت x . مثل $f(x) = [2]$

دامنه توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازی و هر عددی که وارد تابع شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد. بنابراین:

$$D_f = R$$

✓ نکته: جزء صحیح (براکت) هر عدد صحیح، برابر

است با خود آن عدد

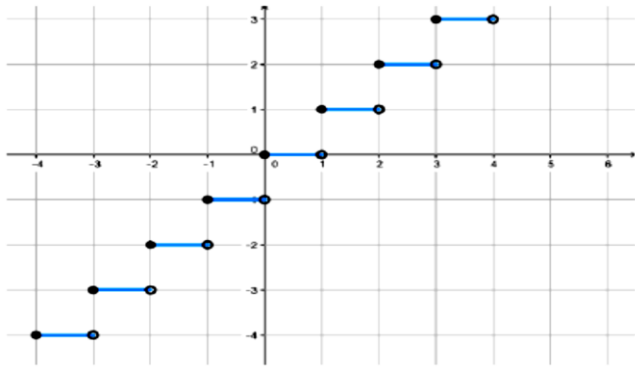
$$\begin{cases} x \\ \downarrow \\ x \in Z \end{cases} = x \rightarrow [2] = 2, \quad [-2] = -2$$

✓ جزء صحیح (براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است

با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

$$\begin{cases} x \\ \downarrow \\ x \notin Z \end{cases} \xrightarrow{n < x < n+1} n$$

$$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$$



⑧ تابع با ضابطه $f(x) = [x] + 2$ و دامنه $D_f = [-3, 3)$ را رسم کنید.

✓ نکته: اگر x عدد حقیقی و n عددی صحیح باشد:

$$[x \pm k] = [x] \pm k$$

$$[x + 2] = [x] + 2$$

$$[x - 5] = [x] - 5$$

(فعالیت ۱ ص ۵۵)

① اگر $[x] = 2$ آن گاه x برابر چه اعدادی می تواند باشد؟

حل:

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow [2, 3)$$

مرآل رسم تابع جزء صحیح:

۱) بازه داده شده را به چند زیر بازه تقسیم می کنیم.

۲) براکت هر بازه را به دست می آوریم

۳) نقاط را روی محور پیدا کرده و نمودار را رسم می کنیم

(فعالیت ۲ ص ۵۵)

② تابع با ضابطه $f(x) = [x]$ و دامنه $D_f = [-4, 4)$ را رسم کنید.

حل:

x	$y = [x]$
$[-4, -3)$	-4
$[-3, -2)$	-3
$[-2, -1)$	-2
$[-1, 0)$	-1
$[0, 1)$	0
$[1, 2)$	1
$[2, 3)$	2
$[3, 4)$	3

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>