

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

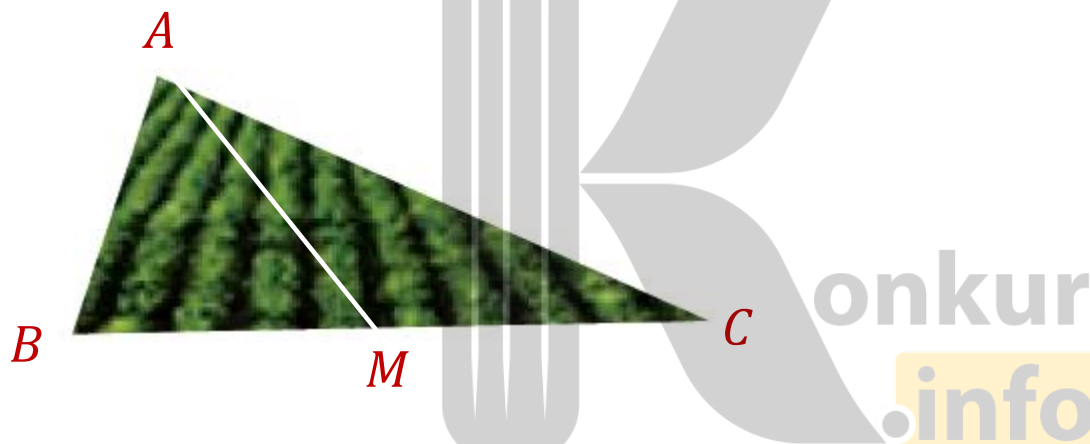
ترسیم های هندسی

درس ۱

اهداف

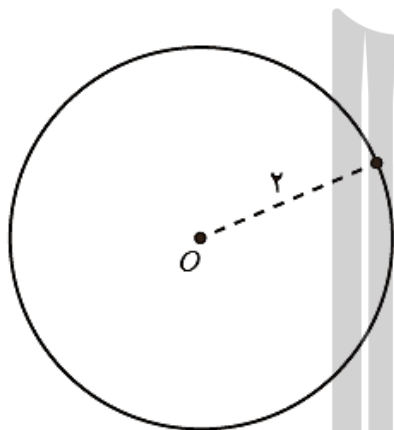
- توانایی رسم مثلث، با مشخص بودن اندازه سه ضلع آن
- توانایی رسم عمود منصف یک پاره خط و درک خواص آن
- توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه ای واقع بر آن یا غیر واقع بر آن خط
- توانایی رسم خط موازی با یک خط داده شده، از نقطه ای غیر واقع بر آن خط
- توانایی رسم نیمساز یک زاویه و درک خواص آن

فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می توان این کار را انجام داد؟



با رسم یکی از میانه های مثلث ، شکل به دو قسمت با مساحت های برابر تقسیم می شود .

یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟

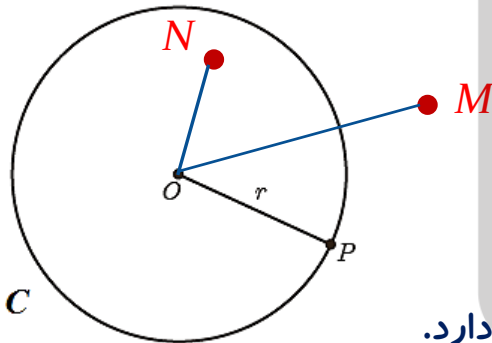


دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر

یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟ **۲ سانتی متر**

دایره $C(O,r)$

دایره ای به نام C به مرکز O و شعاعی به اندازه r است. در این دایره هر نقطه که از مرکز دایره به فاصله r قرار داشته باشد، روی دایره واقع شده است و هر نقطه که روی دایره قرار دارد، فاصله آن از مرکز دایره برابر r است.

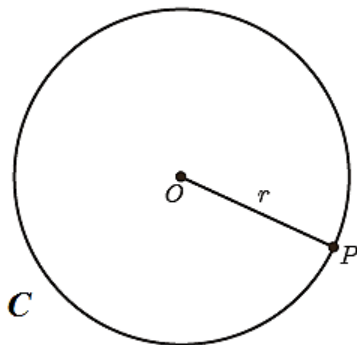


نقطه ای مانند P که فاصله آن از O به اندازه r است، روی محیط دایره قرار دارد.

نقطه ای مانند M که فاصله آن از O بیشتر از اندازه r است، بیرون از دایره قرار دارد.

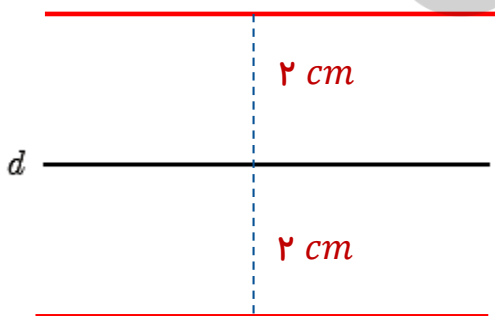
نقطه ای مانند N که فاصله آن از O کمتر از اندازه r است، درون دایره قرار دارد.

مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.



فاصله نقاط درون دایره تا مرکز : کمتر از ۲ سانتی متر
فاصله نقاط بیرون دایره تا مرکز : بیشتر از ۲ سانتی متر

خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند را مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟

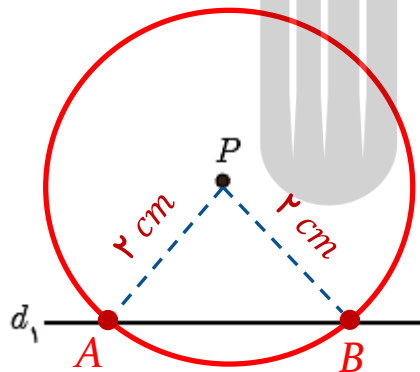


دو خط موازی با خط d با فاصله ۲ سانتی متری از آن

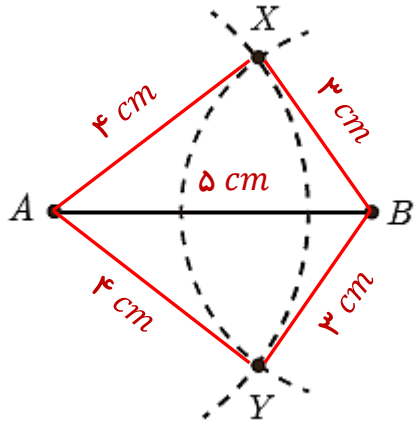
نقطه P به فاصله یک سانتی متری از خط d_1 قرار دارد.
الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر و مرکز P

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متری از نقطه P هستند، مشخص کنید.

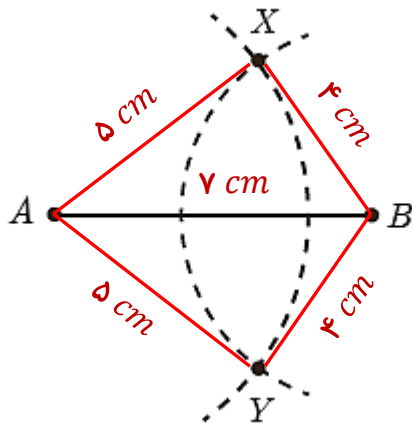


نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.



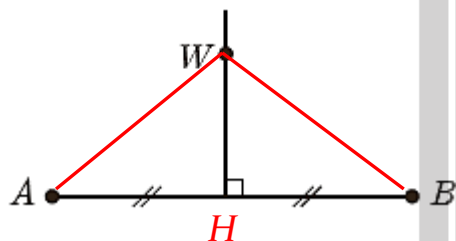
الف) اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید.

ب) توضیح دهید که چگونه می توانید مثلثی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.



پاره خط AB به طول ۷ سانتی متر را رسم می کنیم.
 کمانی به شعاع ۵ سانتی متر به مرکز A رسم می کنیم و
 سپس کمان دیگری به شعاع ۴ سانتی متر به مرکز B رسم می کنیم.

در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده اند. نقطه ای دلخواه مانند W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دو سر AB به یک فاصله است.

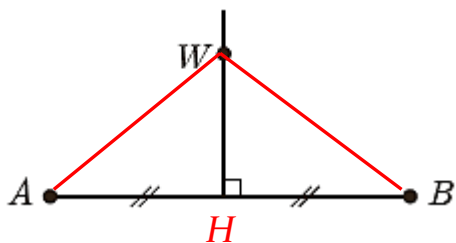


$$\left. \begin{array}{l}
 AH = BH \text{ فرض مسئله} \\
 HW = HW \text{ ضلع مشترک} \\
 \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ
 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta AHW \cong \Delta BHW \Rightarrow AW = BW$$



هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه ای قرار دارند که W از دو سر AB به یک فاصله است. (یعنی $AW = BW$). نشان دهید روی عمود منصف قرار دارد.



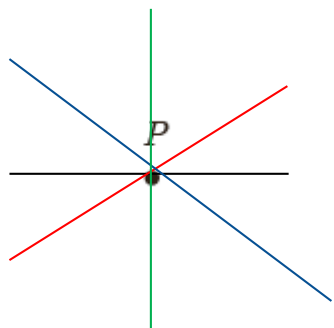
راهنمایی

از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم نهشتی مثلث ها نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض مسئله } AW = BW \\ \text{ضلع مشترک } HW = HW \\ \text{فرض مسئله } AH = BH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta AHW \cong \Delta BHW \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

نتیجه

هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.



نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می توانید رسم کنید
که از نقطه P عبور نمایند؟ **بیشمار**

دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده اند. چند خط متمایز می توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B
عبور نمایند؟ **فقط یک خط**



فعالیت ۳ صفحه ۲۷ کتاب درسی

به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ **دو نقطه**

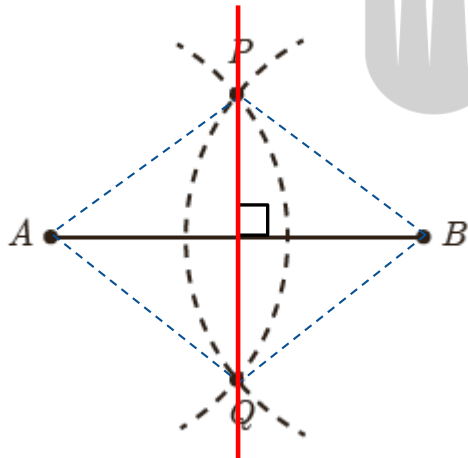
رسم عمود منصف یک پاره خط داده شده

می خواهیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم.

(۱) دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یکبار به مرکز نقطه A و بار دیگر به مرکز نقطه B و با همان شعاع کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاط P و Q قطع کنند.

نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمود منصف پاره خط AB هستند زیرا از دو سر پاره خط به یک فاصله اند .

(۲) پاره خطی که از نقاط P و Q عبور می کند همان عمود منصف پاره خط AB است زیرا برای مشخص کردن یک خط داشتن دو نقطه از آن کفایت می کند.

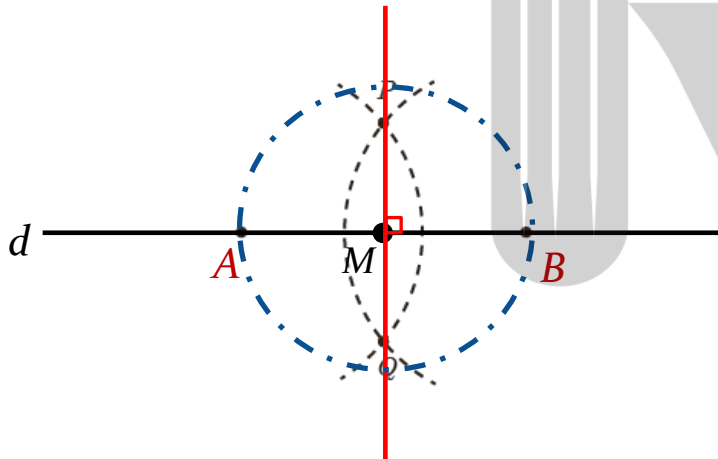


رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن

خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

(۱) به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d تعیین می کنیم که $AM = MB$ باشد.

(۲) عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم.



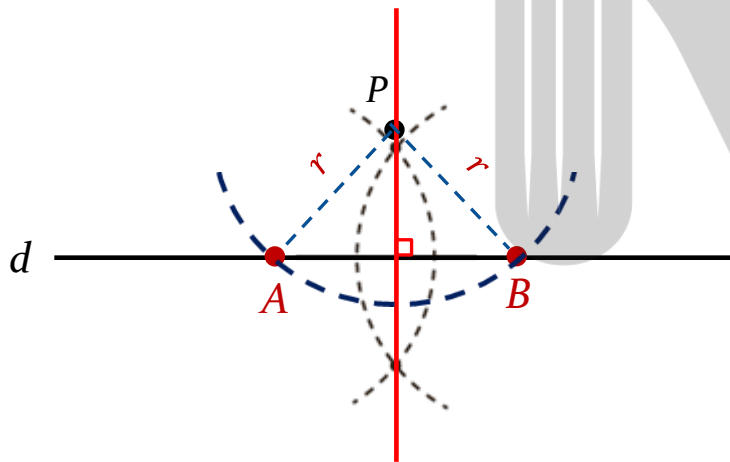
عمود منصف پاره خط AB خطی است که از M می گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل داده شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

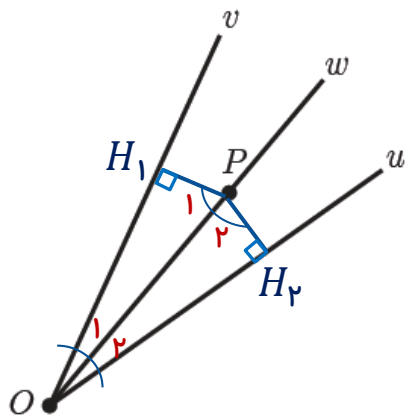
(۱) به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d طوری تعیین می کنیم که از نقطه P به یک فاصله باشند. برای این کار دهانه پرگار را به اندازه r باز کرده به مرکز P کمانی رسم می کنیم.

(۲) عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم.



عمود منصف پاره خط AB خطی است که از P می گذرد و بر خط d عمود است.

در شکل مقابل نیم خط OW نیمساز زاویه \widehat{vOu} است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی OW باشد. ثابت کنید فاصله P از دو ضلع زاویه \widehat{vOu} یکسان است.



راهنمایی

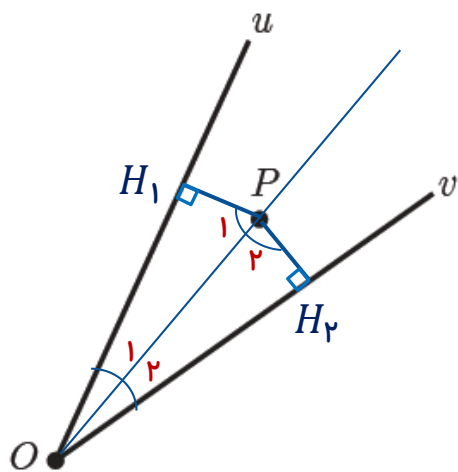
از نقطه P عمود هایی بر Ov و Ou رسم می کنیم و نشان می دهیم که طول آنها باهم برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} OP = OP \rightarrow \text{ضلع مشترک (وتر)} \\ \widehat{vOu} \text{ نیمساز زاویه } OW \rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{وز}} \Delta OH_1P \cong \Delta OH_2P \Rightarrow PH_1 = PH_2$$

نتیجه

هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه \widehat{Ou} یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه \widehat{Ou} قرار دارد.



راهنمایی

پاره خط OP و همچنین از نقطه P عمود هایی بر Ov و Ou رسم می کنیم و از طریق هم نهستی مثلث ها نشان می دهیم $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ است.

$$\left. \begin{array}{l} OP = OP \rightarrow \text{ضلع مشترک (وتر)} \\ PH_1 = PH_2 \rightarrow \text{مسئله فرض} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وض}} \Delta OH_1P \cong \Delta OH_2P \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$$

نتیجه

هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز یک زاویه

زاویه \widehat{vOu} را در نظر بگیرید.

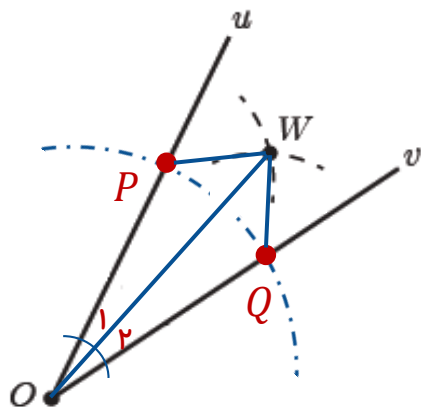
(۱) به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم می کنیم تا نیم خط های Ov و Ou را در نقاطی مانند P و Q قطع کند. در نتیجه پاره خط های OP و OQ ایجاد می شوند که با هم برابرند.

(۲) دهانه پراگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه ای مانند W قطع کنند.

پاره خط های به وجود آمده PW و QW با هم برابرند.

(۳) با رسم پاره خط های WP و WO و WQ مثلثهای هم نهشت OPW و OQW ایجاد می شوند.

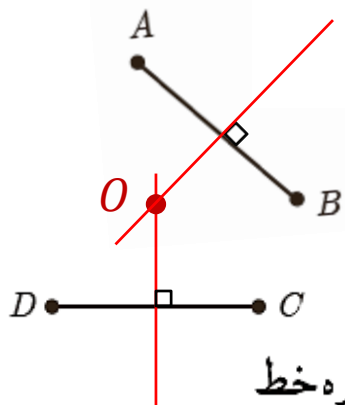
از هم نهشتی مثلثهای OPW و OQW نتیجه می گیریم که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ است. پس OW نیمساز زاویه \widehat{vOu} است.



الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A

و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد.

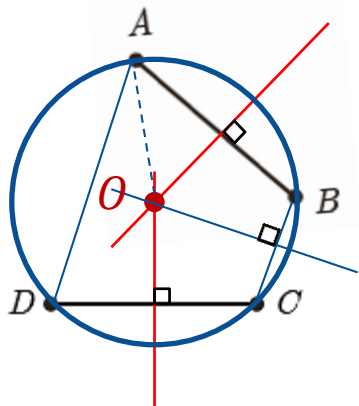
نقطه مورد نظر محل برخورد عمود منصف‌های دو پاره خط AB و CD است.



ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط

BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$

نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

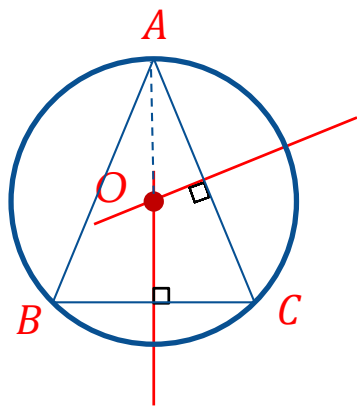


راس‌های A و B و C و D روی دایره قرار دارند. O روی عمود منصف

پاره خط‌های AB و CD و BC قرار دارد، پس از دو سر آنها به یک

فاصله است یعنی $OA = OB = OC = OD$

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

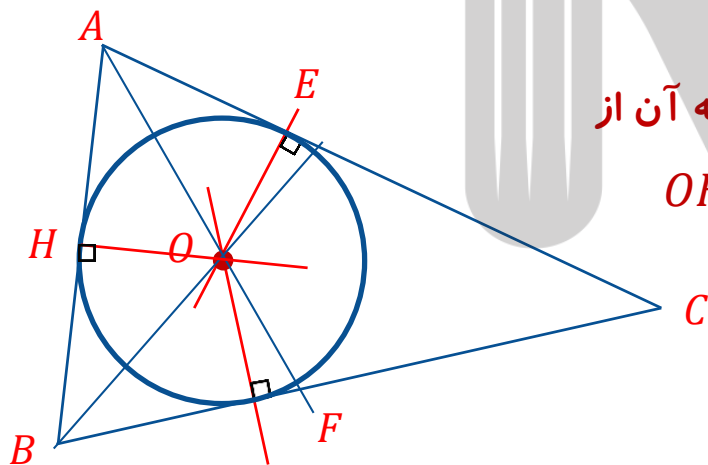


نقاط B و C روی دایره قرار دارند. O روی عمود منصف پاره خط‌های BC و AC قرار دارد، پس از دو سر آنها به یک فاصله است یعنی

$$OA = OB = OC$$

دایره محیطی مثلث

۳ مثلی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



اضلاع مثلث ABC بر دایره مماسند زیرا

O روی نیمساز زاویه های A و B قرار دارد، پس فاصله آن از

اضلاع مثلث به یک اندازه است یعنی $OH = OE = OF$

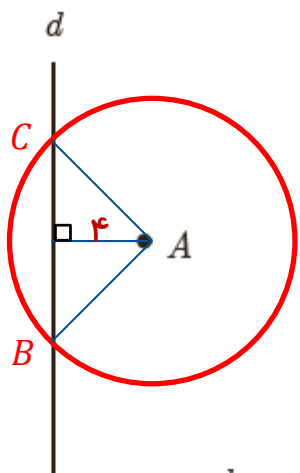
دایره محاطی درون مثلث

۴ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

دایره ای به مرکز A و شعاع بزرگتر از ۴ سانتی متر رسم می کنیم.

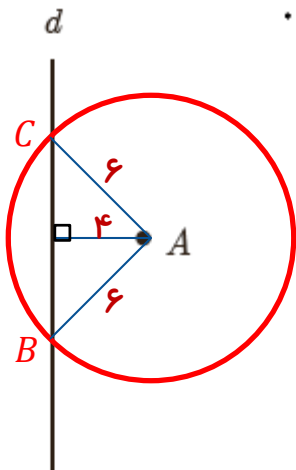
$$AB = AC > 4$$



ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

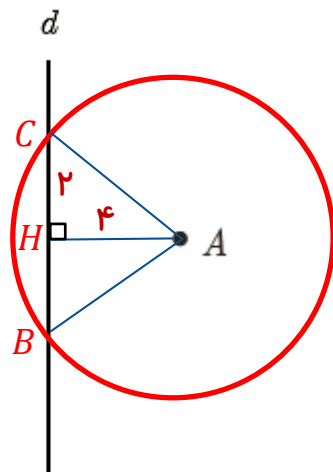
دایره ای به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر رسم می کنیم.

$$AB = AC = 6$$



۴ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث های زیر را توضیح دهید.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.



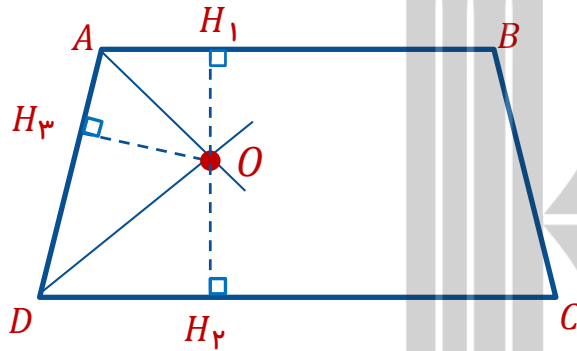
ارتفاع (AH) برابر ۴ سانتی متر است. برای اینکه مثلث مساحتی برابر ۸ سانتی متر مربع را دارا باشد، باید قاعده آن (BC) برابر ۴ باشد. با توجه به عمود منصف بودن AH می توان گفت CH برابر ۲ است.

$$AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

دایره ای به مرکز A و شعاع $2\sqrt{5}$ سانتی متر رسم می کنیم.

تمرین تکمیلی

نقطه O محل برخورد نیمساز های زاویه های A و D از دوزنقه $ABCD$ است. مجموع فاصله های O از دو قاعده و ساق AD چه نسبتی با ارتفاع دوزنقه ایجاد می کند؟



$$\left. \begin{array}{l} \text{نقطه } O \text{ روی نیمساز زاویه } A \text{ قرار دارد} \longrightarrow OH_1 = OH_3 \\ \text{نقطه } O \text{ روی نیمساز زاویه } D \text{ قرار دارد} \longrightarrow OH_3 = OH_2 \end{array} \right\} \longrightarrow OH_1 = OH_2 = OH_3 = \frac{1}{2} H_1 H_2$$

$$OH_1 + OH_2 + OH_3 = \frac{3}{2} H_1 H_2$$

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>