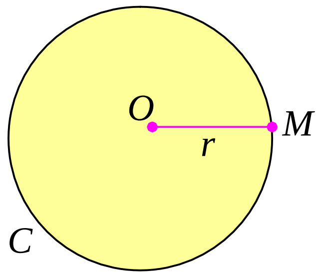
درس اوّل : ترسیم های هندسی

آشنایی با مفاهیم هندسی برای یادگیری و درک عمیق دیگر مفاهیم ریاضیات مـوثر اسـت. در ایـن فـصل ، برخی از مفاهیم مقدماتی هندسه بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : دایره



دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز و فاصله‌ی ثابت را شعاع می نامند.

دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نمایش می دهند.

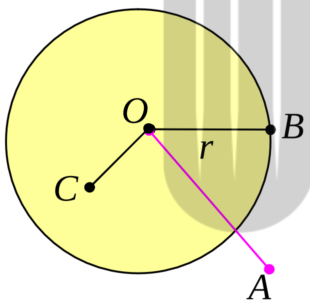
تمرین ۱ : دایره ای شعاع ۲ سانتی رسم کنید. سپس

الف : نقطه ای تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره ۳ سانتی متر باشد.

ب : نقطه ای تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره ۱/۵ سانتی متر باشد.

ج : نقطه ای تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره ۲ سانتی متر باشد.

نتیجه : هر دایره صفحه را به سه بخش مجزا تقسیم می کند.

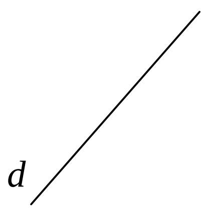


الف: نقاط خارج دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است. ($OA > r$)

ب: نقاط روی دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است. ($OB = r$)

ج: نقاط داخل دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر است. ($OC < r$)

تمرین برای حل :



۲ : خط d در شکل مقابل را در نظر بگیرید. تمام نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از خط d هستند را مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟

۳ : نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۱ سانتی متر از خط d قرار دارد.

الف : تمام نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از نقطه‌ی P هستند را مشخص کنید.

ب : تمام نقاطی از خط d را که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از P هستند را تعیین کنید.

۴ : پاره خط AB به طول ۵ سانتی متر در نظر بگیرید. سپس نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصله‌ی ۴ سانتی متر و از B به فاصله‌ی ۵ سانتی متر باشند. (مسئله چند جواب دارد؟)

۵ : مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر باشند.

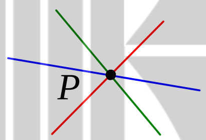
***

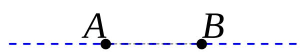
قسمت دوّم : مفهوم اصل :

هر واقعیت که بدیهی بوده و نیازمند استدلال نباشد را اصل می نامند. برای مثال به اصول زیر توجه کنید.

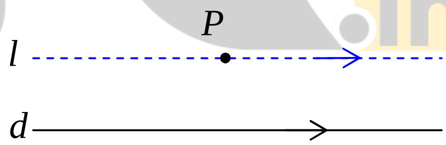
اصل۱ : از یک نقطه روی صفحه، چند خط می گذرد.

اصل ۲ : از هر دو نقطه‌ی متمایز روی صفحه فقط و فقط یک خط راست می گذرد.





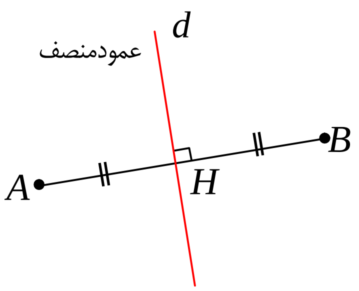
اصل ۳ : از هر نقطه‌ی خارج یک خط راست فقط و فقط یک خط راست موازی آن می توان رسم کرد.



***

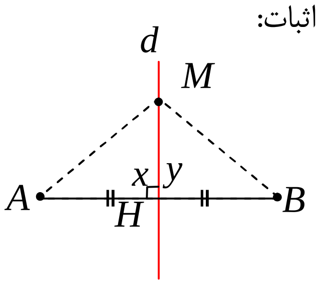
قسمت سوّم : عمود منصف پاره خط و خواص آن

هر خط که هم از نقطه‌ی وسط یک پاره خط بگذرد و هم عمود بر آن باشد را عمود منصف آن پاره خط می‌نامند.



تمرین۶ : ثابت کنید که هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اثبات:

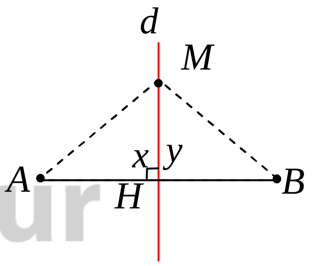


$$\left.\begin{aligned} MH &= MH \quad \text{مشترک} \\ \angle x = \angle y &= ۹۰^\circ \\ AH &= BH \end{aligned}\right\} \to \overset{\Delta}{AMH} \underset{(\text{ض‌زض})}{\cong} \overset{\Delta}{BMH} \to MA = MB$$

***

تمرین۷ : اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد،آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

اثبات : از نقطه ی M خطی چنان رسم می‌کنیم که از نقطه ی وسط پاره‌خط AB بگذرد. پس:



$$\left.\begin{aligned} MA &= MB \quad \text{طبق فرض} \\ MH &= MH \quad \text{مشترک} \\ AH &= BH \end{aligned}\right\} \to \overset{\Delta}{AMH} \underset{(\text{ض ض ض})}{\cong} \overset{\Delta}{BMH} \to \angle x = \angle y$$

از طرفی طبق اصل زاویه‌ی نیم صفحه، واضح است که $\angle x + \angle y = ۱۸۰^\circ$ پس:

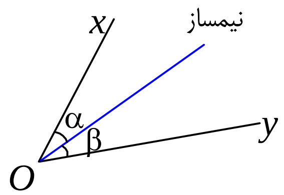
$$\angle x = \angle y = ۹۰^\circ \to d \perp AB$$

و چون $AH = BH$ و $d \perp AB$ پس d عمود منصف AB است.

***

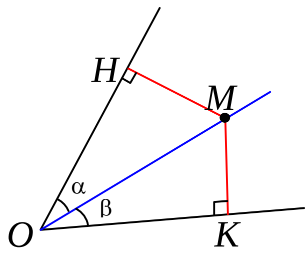
قسمت چهارم : نیمساز زاویه

تعریف : نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد و آن را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.



$$\angle \alpha = \angle \beta$$

تمرین۸ : هرگاه نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.



فرض : $MH = MK$

حکم : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

اثبات : دو مثلث OMH و OMK قائم‌الزاویه هستند پس

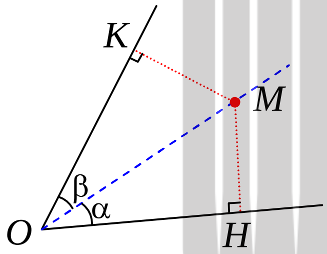
$$\left.\begin{array}{l} MH = MK \\ \text{مشترك} \quad OM = OM \end{array}\right\} \to \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \to \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

(وتر و یک ضلع)

تمرین۹ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حکم : $MK = MH$

اثبات : دو مثلث $\overset{\Delta}{OHM}$ و $\overset{\Delta}{OKM}$ قائم‌الزاویه هستند. پس :



$$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha = \angle\beta \\ \text{وتر مشترک}\ OM = OM \end{array}\right\} \to \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \to MH = MK$$

(وتر و یک زاویه ی حاده)

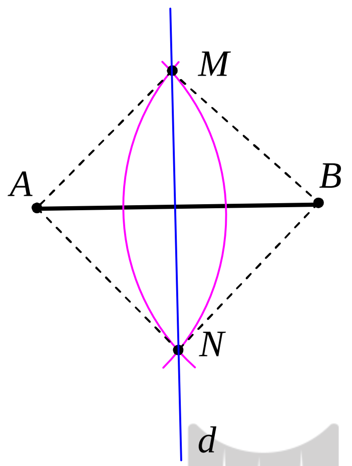
***

قسمت پنجم : آشنایی با چند ترسیم هندسی

گاهی برای حل مسائل مختلف لازم است از ترسیم های هندسی استفاده شود. بدین معنی که در اینگونه مسائل شکل هایی را رسم می کنیم که دارای ویژگی معینی باشند و بعد از ترسیم و با استفاده از ویژگی های شکل به پاسخ مسئله می رسیم. توجه داشته باشیم که ابزارهای مورد استفاده در اینگونه مسائل فقط خط کش

و پرگار[1] می باشند. از خط کش برای رسم خط راست و از پرگار برای رسم دایره با شعاع معین استفاده می شود.

۱ : روش رسم عمود منصف یک پاره خط



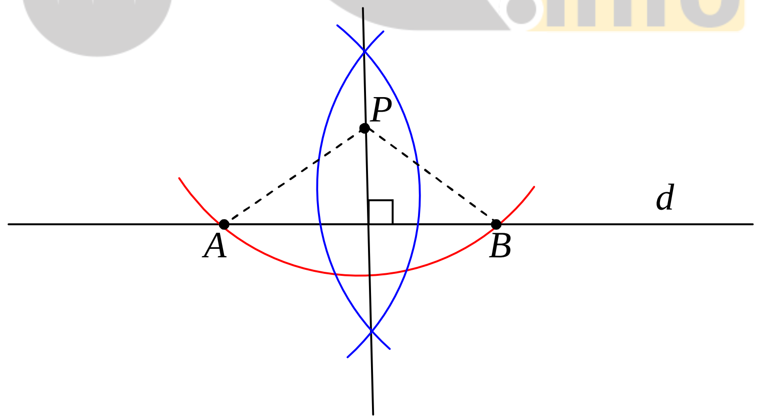
ابتدا پرگار را به اندازه ای باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد، سپس از دو سر پاره خط AB دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند. چون دو نقطه‌ی M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند. پس روی عمود منصف AB قرار دارند. لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی d عمود منصف AB است.

تمرین ۱۰ : ابتدا یک پاره خط به طول ۴ سانتی متر بکشید، سپس به کمک خط کش و پرگار عمود منصف آن را رسم کنید.

***

۲ : رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

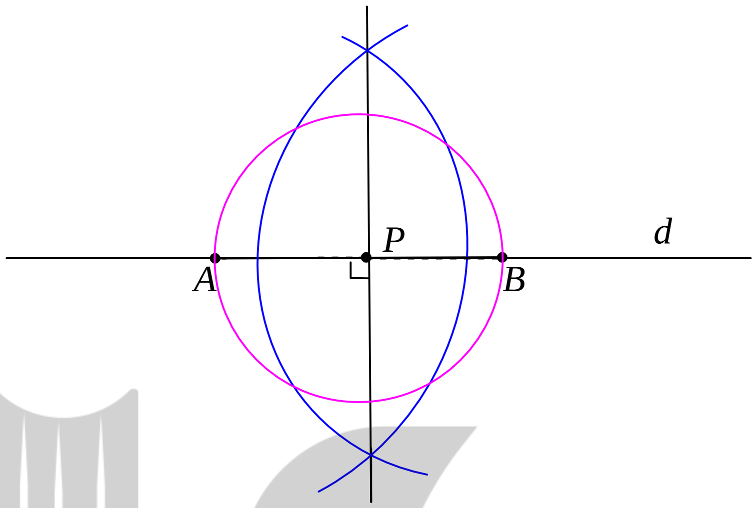
از نقطه‌ی P یک کمان را طوری رسم می کنیم که خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم که جواب مسئله است.



[1] . خط کش غیر مدرج فرض می شود، مگر آنکه اندازه ی پاره خط قید شود.

۳ : رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی روی آن

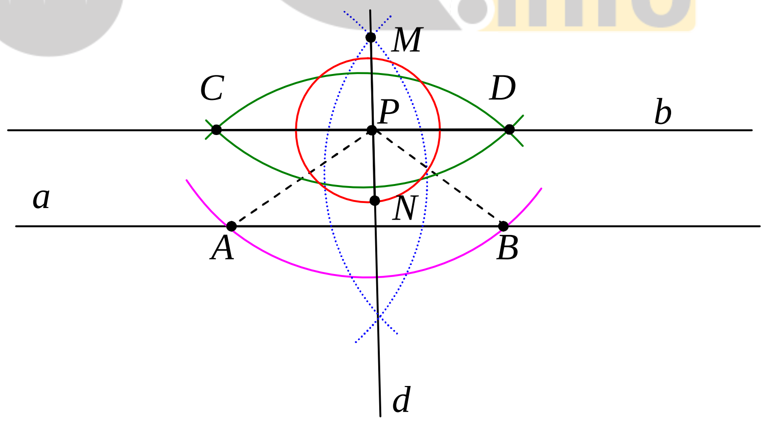
به مرکز نقطه‌ی P دایره ای رسم کرده تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم که جواب مسئله است.



***

۴ : رسم خط موازی یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

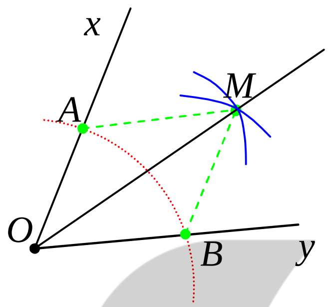
ابتدا از نقطه‌ی P واقع در خارج خط a یک خط مانند d عمود بر a رسم می کنیم. این خط از نقطه‌ی P می گذرد. اکنون از نقطه ی P واقع بر d خط b را عمود بر d رسم می کنیم. چون $a \perp d$ و $b \perp d$ پس $a \parallel b$ و لذا b جواب مسئله است.



***

۵ : رسم نیمساز یک زاویه

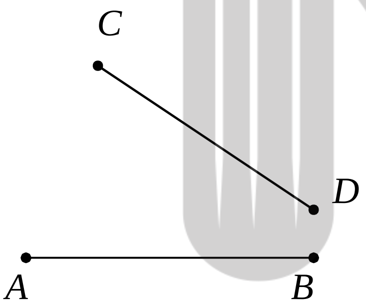
از رأس زاویه‌ی xOy یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. اکنون از نقاط A و B دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند. چون دو مثلث OAM و OBM به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند. لذا $\angle AOM = \angle BOM$ یعنی OM نیمساز زاویه ی xOy می باشد و جواب مسئله است.



***

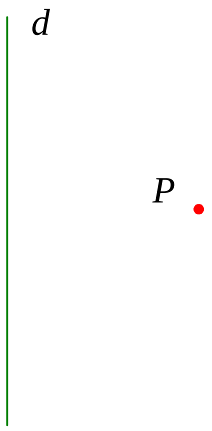
تمرین برای حل :

۱۱ : دو پاره خط AB و CD مطابق شکل مقابل داده شده اند. نقطه ای بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و از دو نقطه-ی C و D نیز به یک فاصله باشد.



۱۲ : مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه‌ی برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۱۳ : مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمساز های دو زاویه‌ی این مثلث را رسم کنید و نقطه‌ی برخورد آنها را O بنامید. از نقطه‌ی O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمود ها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



۱۴ : فرض کنید نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از خط d باشد. در هر مورد روش رسم یک مثلث متساوی الساقین که نقطه‌ی P یک رأس باشد را توضیح دهید.

الف) قاعده‌ی این مثلث بر خط d منطبق باشد.

ب) قاعده‌ی این مثلث بر خط d منطبق بوده و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

ج) قاعده‌ی این مثلث بر خط d منطبق بوده و مساحت آن ۸ سانتی مترمربع باشد.

۱۵: سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، در نظر بگیرید، سپس نقطه ای پیدا کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. (روش کار را توضیح دهید.)

***

درس دوم : مقدمات استدلال و قضیه ی تالس

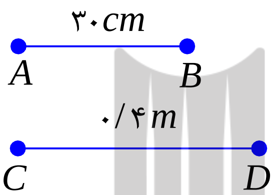
در این درس ابتدا با مفهوم نسبت و تناسب و همچنین استدلال و انواع آن آشنا می شویم. سپس با بیان ویژگی خطوط موازی و قضیه‌ی تالس و کاربردهای آن، این مفاهیم را به صورت دقیق بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : نسبت و تناسب

نسبت دو کمیت کسری است که صورت و مخرج آن اندازه‌های آن دو کمیت برحسب یک واحد باشند.

مثلاً : کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت a بر b گویند هرگاه b و a برحسب یک واحد باشند.

مثال : نسبت اندازه پاره خط AB بر پاره خط CD را با توجه به شکل مقابل بنویسید.



$$\frac{AB}{CD}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$$

نتیجه : نسبت دو کمیت یک عدد حقیقی است و به واحد اندازه‌گیری آنها بستگی ندارد.

بیان تساوی دو نسبت را تناسب گویند.

مثلاً : تساوی دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، $b,d \neq ۰$ را یک تناسب گویند.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

در یک تناسب مانند تناسب فوق جملات d و a را طرفین (جملات کناری) و c و b را وسطین (جملات میانی) می‌نامند.

جملات میانی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ جملات کناری

خاصیت اصلی تناسب

در هر تناسب حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری با حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی آن برابر است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow ad=bc$$

اثبات : چون $b,d \neq ۰$ پس $bd \neq ۰$. حال کافی است دو طرف تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم.

خواهیم داشت :

$$bd\,(\frac{a}{b})=bd\,(\frac{c}{d}) \rightarrow ad=bc$$

خواص دیگر تناسب

۱ : در یک تناسب می‌توان جای دو جمله‌ی میانی و یا دو جمله‌ی کناری را عوض کرد و تناسب جدیدی به دست آورد. $(a,b,c,d \neq ۰)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجايي جملات ميانی}} \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجايي جملات كناري}} \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{جابجايي جملات كناري}]{\text{جابجايي جملات ميانی}} \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

نتیجه: در یک تناسب می‌توان هر دو نسبت را معکوس کرد و تناسب جدیدی به دست آورد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \qquad (a,b,c,d \neq ۰)$$

۲ : در یک تناسب از ترکیب نسبت در صورت (یا در مخرج) تناسبی جدید به وجود می‌آید. $(b,d \neq ۰)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکيب نسبت در صورت}} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکيب نسبت درمخرج}} \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

۳ : در یک تناسب ، نسبت مجموع صورتها به مجموع مخرجها برابر هر یک از نسبت‌های تناسب است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k \qquad (b,d \neq ۰)$$

توجه : خاصیت ۳ برای چند نسبت مساوی نیز قابل تعمیم است.

تمرین ۱ : با توجه به خواص تناسب، در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲}\rightarrow ۵\times .... = ۱۵\times ....$

ب) $۳\times ۴۰ = ۱۲\times ۱۰ \rightarrow \frac{۳}{....}=\frac{۱۲}{....}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰}\rightarrow \frac{۱۰}{۷}=....$

ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳}\rightarrow \frac{۶}{۱۸}=.... \quad , \quad \frac{۳۳}{۱۱}=....$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵}\rightarrow \frac{۱۸}{۱۴}=.... \quad , \quad \frac{۴}{۱۸}=....$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴}\rightarrow \frac{-۷}{۱۲}=.... \quad , \quad \frac{۵}{-۷}=....$

تمرین ۲ : اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ را به دست آورید.

حل :

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{۳+۴}{۴}\rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{۷}{۴}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{۳-۴}{۴}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{-۱}{۴}$$

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{-۱}{۴}}\Longrightarrow \frac{a+b}{a-b}=-۷$$

تمرین برای حل :

۳ : در هر مورد مقدار مجهول را بیابید.

الف) $\frac{x}{۳}=\frac{۹}{۱۰}$ ب) $\frac{y}{y+۲}=\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{z+۱}{z}=\frac{۴}{z}$ د) $\frac{۲a+۱}{۱۸}=\frac{۳۵}{b}=\frac{۵}{۲}$

۴ : محیط مستطیلی ۲۱۰ سانتی‌متر و نسبت طول به عرض آن $\frac{۴}{۳}$ است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۵ : متناظر با تساوی زیر یک تناسب بنویسید.

$$۵x + y = ۲x + ۷y$$

۶ : اگر $\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۶} = \frac{۳}{۵}$ ، حاصل $x + y + z$ را به دست آورید.

۷ : در هر مورد مقدار عددی $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰ + a} = \frac{b}{۸ + b}$

ب) $\frac{۳a + ۱۰}{۱۰ + ۲a} = \frac{۳b + ۷}{۷ + ۲b}$

***

قسمت دوّم : استدلال در ریاضی و هندسه

استدلال و انواع آن

عمل ارائه‌ی دلیل برای اثبات درستی یک گزاره به کمک دانسته های قبلی را استدلال می نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

الف: استدلال استقرایی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای تعداد محدودی مشاهده را استدلال استقرایی می نامند.

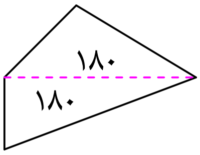
ب : استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایق پذیرفته شده را استدلال استنتاجی می نامند.

***

مثال : رحمان وقتی در مورد مجموع زاویه های داخلی یک چهار ضلعی محدب با پژمان و پیمان صحبت می کرد. آنها گفتند مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است و استدلالی که بکار بردند متفاوت بود.

استدلال پژمان : در تمام چهارضلعی هایی از قبیل مربع ، مستطیل ، لوزی ، متوازی الاضلاع با توجه به اینکه زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند، مجموع زاویه های داخلی ۳۶۰ درجه است، لذا مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.



استدلال پیمان : با توجه به اینکه مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. لذا با رسم یک قطر در هر چهارضلعی محدب می توان آن را به دو مثلث تبدیل کرد. لذا مجموع زاویه های داخلی چهارضلعی محدب برابر مجموع زاویه های داخلی این دو مثلث می باشد، در نتیجه برابر ۳۶۰ درجه است.

با توجه به تعریف ارائه شده برای انواع استدلال ، واضع است که استدلال پژمان استقرایی و استدلال پیمان استنتاجی است.(چرا؟)

تمرین ۸ : تفاوت های بین انواع استدلال را بنویسید.

حل:

استقرایی	از جزء به کل است.	متکی بر تعداد محدودی مشاهده است.	تجربی است.	نتایج آن احتمالی است.
استنتاجی	از کل به جزءاست.	متکی بر حقایق پذیرفته شده است.	منطقی است.	نتایج آن قطعی است.

توجه : چون استدلال استقرایی مبتنی بر تجربه بوده و تمام حالات ممکن را بررسی نمی کند پس نتایج بدست آمده از آن قطعی نیست ولی در استدلال استنتاجی نتایج بدست آمده همواره قطعی هستند، زیرا این استدلال مبتنی بر حقایق بوده و تجربی نمی باشد.

❋❋❋

مثال نقض : نتایج بدست آمده از استدلال استقرایی قطعی نیستند و گاهی قابل رد هستند. برای رد یک نتیجه ی کلی که از استدلال استقرایی بدست می آید، ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است. مثال نقض ، مثالی است که نشان می دهد یک نتیجه گیری کلی نادرست است.

مثال : گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید.

حاصل جمع هر دو عدد گنگ ، یک عدد گنگ است.

این گزاره درست نیست، زیرا اعداد $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند ولی حاصل جمع آنها برابر صفر است که یک عدد گویا می باشد.

$$(\sqrt{۲})+(-\sqrt{۲})=۰$$

تمرین۹ : با یک مثال نقض گزاره های زیر را رد کنید.

الف : مربع هر عدد بزرگتر یا مساوی آن عدد است.

ب : حاصل عبارت $p=x^{۲}+x+۴۱$ به ازاء اعداد طبیعی همواره یک عدد اوّل است.

حل:

الف: این گزاره نادرست است زیرا: $(۰/۵)^{۲}=۰/۲۵$ در حالی که $۰/۲۵ \ngeq ۰/۵$

ب: این گزاره نادرست است زیرا اگر عدد ۴۱ را به جای x قرار دهیم حاصل ۱۷۶۳ مـی شـود کـه عـدد اوّل نیست. (بر۴۱ بخش پذیر است.)

***

تمرین برای حل : برای رد درستی هر یک از گزاره های کلی زیر یک مثال نقض ارائه کنید.

۱۰ : از وصل کردن هر سه رأس یک هفت ضلعی منتظم،یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می گردد.

۱۱ : هر دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، هم نهشت هستند.

۱۲ : در هر مثلث هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچکتر است.

۱۳ : همه‌ی اعداد اوّل فرد هستند.

۱۴ : هیچ عدد اوّل بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

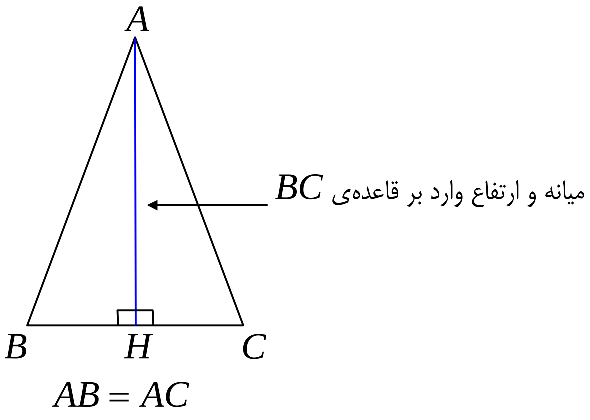
نتیجه : برای پذیرفتن درستی یک گزاره لازم است استدلال کرد و این استدلال باید استنتاجی باشد ولی برای رد درستی یک گزاره ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است.

تمرین۱۵ : از دو گزاره‌ی زیر آنکه درست است، ثابت کنید و آنکه نادرست است با یک مثال نقض رد کنید.

الف : در هر مثلث میانه‌ی وارد بر یک ضلع از ارتفاع نظیر همان ضلع بزرگتر است.

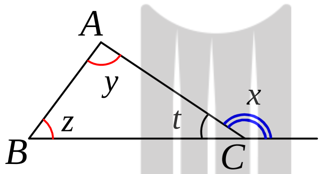
ب : در هر مثلث ، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن است.

حل:



الف: این گزاره نادرست است، زیرا در مثلث متساوی الساقین[1] میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند و لذا با هم مساویند.

ب: این گزاره درست است. برای اثبات آن از تعریف زاویه‌ی خارجی و همچنین مجموع زاویه های داخلی استفاده می کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} x+t=۱۸۰ \\ y+z+t=۱۸۰ \end{array}\right\} \to x+t=y+z+t \to x=y+z$$

***

مفهوم قضیه

هر گزاره‌ی درست و کلی که به کمک استدلال استنتاجی بدست می آید را **قضیه** می نامند.

مثال:

۱ : در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

۲ : مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۳ : در هر مثلث مجموع اندازه های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوّم بزرگتر است.

۴ : برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y همواره $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$ است.

۵ : برای هر دو مجموعه‌ی A و B همواره $A-B=A\bigcap B'$

[1] . در مثلث متساوی الاضلاع میانه و ارتفاع تمام اضلاع بر هم منطبق هستند.

هر قضیه را می توان به صورت یک گزاره‌ی مرکب که به صورت ترکیب شرطی بیان می شود. بنابراین دارای دو قسمت می باشد:

الف) فرض (شرط) : آن قسمت از گزاره است که آن را می پذیریم.

ب) حکم (جواب شرط) : آن قسمت از گزاره است که باید درستی آن را نتیجه بگیریم.

بنابراین هر قضیه دارای الگویی به صورت زیر است.

قضیه : اگر .... آنگاه ....

فرض (p)   حکم (q)

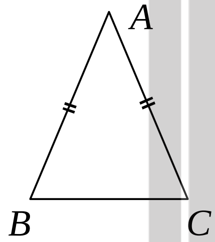
مثال : قضیه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

قضیه : در هر مثلث متساوی‌الساقین ، دو زاویه‌ی مجاور به قاعده مساویند.

گرچه این قضیه به ظاهر گزاره شرطی نیست ولی می‌توان به سادگی آن را به شکل زیر نوشت.

اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد آنگاه دو زاویه‌ی مجاور به قاعده آن مساویند.

فرض   حکم



فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$

تمرین ۱۶ : قضیه‌های زیر را به صورت شرطی بیان کنید و فرض و حکم آنها را مشخص کنید.

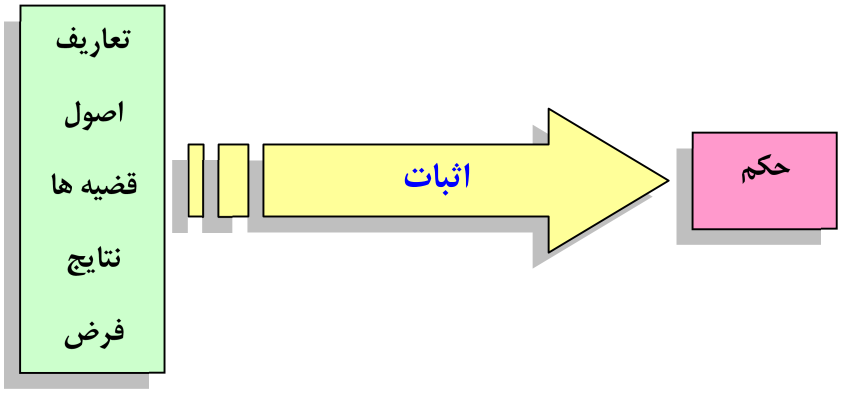
الف : هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند.

ب : هر دو زاویه‌ی مساوی مکمل های مساوی دارند.

ج : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

د : در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

قضیه ها در ریاضی و هندسه باید اثبات شوند، به عبارتی دیگر برای درستی آنها باید استدلال کرد. هر حرکت مرحله به مرحله و منطقی که به کمک استدلال استنتاجی، منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.



بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اوّلین گام در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

***

قضیه‌ی عکس: اگر جای فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم، یک گزاره‌ی شرطی جدید بدست می آید که آن را عکس قضیه می نامیم. عکس قضیه، ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد. درصورتی که عکس یک قضیه درست باشد، آن را قضیه‌ی عکس می نامند.

مثال :

قضیه : اگر مثلثی متساوی الساقین باشد،آنگاه در آن دو زاویه ی مجاور به قاعده مساویند.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند،آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

در مثال فوق عکس قضیه‌ی داده شده، درست است و لذا خود یک قضیه می باشد. در مثال زیر عکس قضیه درست نیست.

مثال:

قضیه : اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آنگاه آن دو زاویه مساویند.

عکس قضیه : اگر دو زاویه مساوی باشند،آنگاه آن دو زاویه متقابل به رأس هستند.

تمرین۱۷ : عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید.

الف) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.

ب) اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

ج) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه‌ی آن نیز برابر خواهند بود.

***

قضیه‌ی دو شرطی : اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی خود یک قضیه‌ی شرطی باشد. به کمک یکی از الگو های زیر می توان آن دو قضیه را ترکیب کرد و به صورت یک قضیه بیان نمود. این قضیه را قضیه‌ی دو شرطی می نامند.

- اگر p آنگاه q و برعکس
- p اگر و تنها اگر q
- p شرط لازم و کافی است برای q

مثال :

قضیه: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد،آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه است.

قضیه‌ی دو شرطی:

- اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است و برعکس.
- مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر باشد.
- قائم الزاویه بودن مثلث شرط لازم وکافی است برای اینکه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

مثال : هر یک از قضیه های زیر دوشرطی هستند.

الف) دو ضلع از یک مثلث برابرند، اگر و تنها اگر زاویه های روبرو به این دو ضلع با هم برابر باشند.

ب) در مثلث متساوی الاضلاع ، یک پاره خط نیمساز است، اگر و تنها اگر میانه باشد.

تمرین برای حل : قضیه های زیر را در نظر بگیرید. سپس :

الف : عکس هر کدام را بنویسید.

ب : با ترکیب قضیه و عکس آن یک قضیه‌ی دو شرطی بیان کنید.

۱۸ : در هر مثلث ، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه‌ی روبرو به آنها نیز برابرند.

۱۹ : اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

۲۰ : در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

۲۱ : اگر دو دایره شعاع های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت های آنها نیز برابر هستند.

توجه : برای اثبات یک قضیه‌ی دوشرطی باید قضیه های تشکیل دهنده‌ی آن را جداگانه ثابت کرد. یعنی ابتدا فرض و حکم را تعیین می کنیم و قضیه را ثابت می کنیم. سپس با جابجا کردن فرض و حکم قضیه‌ی عکس را نیز اثبات کرد.

***

عکس نقیض یک قضیه : اگر فرض و حکم قضیه ای را جابجا و نقیض کنیم،گزاره‌ی حاصل همواره درست خواهد بود. این گزاره را قضیه‌ی عکس نقیض می نامند.

مثال :

قضیه: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد،آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس نقیض : اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر نباشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه نیست.

توجه : اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن می باشد و ضرورتی به اثبات عکس نقیض آن نیست.

***

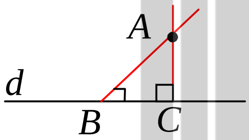
برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه نشان می دهیم که خلاف حکم آن درست نیست و سپس نتیجه می گیریم با این شرایط خود حکم درست است. این روش استدلال که نوعی استدلال استنتاجی است را برهان خلف یا اثبات غیر مستقیم می نامند.

روند کار در این روش بدین ترتیب است که ابتدا خلاف حکم را تشکیل می دهیم و آن را فرض خلف می نامیم، سپس استدلال خود را با تکیه بر این فرض ادامه می دهیم. در نهایت به خلاف فرض یا یک قضیه ی اثبات شده ی قبلی یا خلاف یک اصل (حقیقت) می رسیم. در آخر فرض خلف را باطل می کنیم و خود حکم رامی پذیریم.

***

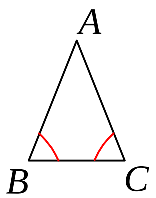
مثال ۱ : ثابت کنید که، از یک نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست نمی توان بیش از خط بر آن عمود کرد.



اثبات به روش برهان خلف : فرض می کنیم که این حکم نادرست است و از یک نقطه‌ی دلخواه مانند A واقع بر خارج خط d می توان دو عمود بر آن رسم کرد. در این صورت یک مثلث تشکیل می شود که دو زاویه‌ی قائمه دارد. لذا مجموع زاویه های داخلی این مثلث بیش از ۱۸۰ درجه خواهد شد و این غیر ممکن است. پس فرض خلف نمی تواند درست باشد و حکم درست است.

***

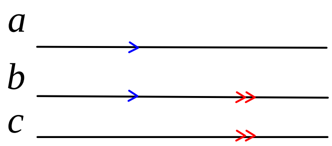
مثال ۲ : ثابت کنید که، اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\angle B \neq \angle C$



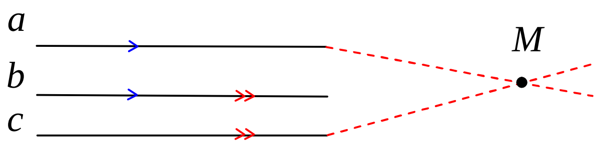
اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\angle B = \angle C$ باشد. یعنی مثلث ABC دو زاویه‌ی مساوی دارد. بنابراین مثلث متساوی الساقین است. لذا $AB = AC$ و این خلاف فرض می باشد و نمی تواند درست باشد.

تمرین ۲۲ : ثابت کنید که هر دو خط که با خط سوّمی موازی باشند، خود با هم موازیند.

اثبات : در این مسئله از اینکه $b \| c$ و $a \| b$ می خواهیم ثابت کنیم. $a \| c$



برای اثبات به روش برهان خلف عمل می کنیم. فرض کنیم که خط a مـوازی c نباشـد. لـذا ایـن دو خـط همـدیگر را در نقطـه‌ای ماننـد M قطـع می‌کنند، در این صـورت از نقطـه‌ی M دو خط موازی b رسم شده است و این خـلاف اصل توازی اقلیدس می باشد، پس $a \parallel c$

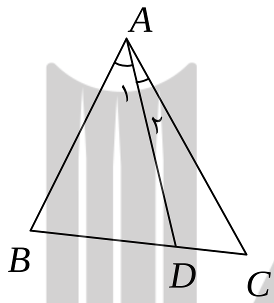


تمرین برای حل : به روش برهان خلف، گزاره های زیر را ثابت کنید.

۲۳: اگر n یک عدد طبیعی و $n^۲$ عددی فرد باشد، آنگاه n نیز فرد است.

۲۴: فرض کنیم AD نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد.

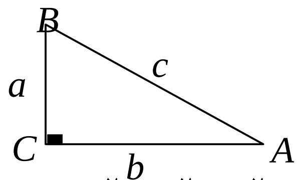
اگر $BD \neq DC$ باشد، آنگاه $AB \neq AC$



***

قسمت سوّم : قضیه‌ی فیثاغورس

در ادامه یکی از قضیه های اساسی در مورد مثلث قائم الزاویه معروف به قضیه ی فیثاغورس را بیان و اثبات می کنیم.



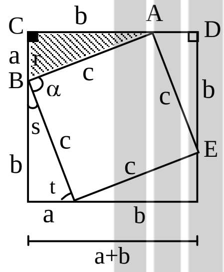
قضیه(قضیه‌ی فیثاغورس): در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن برابر است.

حکم: $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$

اثبات :

مرحله‌ی۱: مربعی به ضلع $a+b$ رسم می‌کنیم، سپس در این مربع چهار مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع a و b تشکیل می‌دهیم.

مرحله‌ی۲: بنا به حالت (ض‌زض) این چهار مثلث با همدیگر و با مثلث اصلی همنهشت هستند.



$$\left.\begin{array}{l} BC=AD \\ \hat{C}=\hat{D}=۹۰^{\circ} \\ AC=DE \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ADE}$$

(ض‌زض)

پس دارای وترهایی برابر c می‌باشند.

مرحله‌ی ۳: چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است. زیرا

الف: چهارضلع مساوی دارد. ب: یک زاویه قائمه دارد.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S}+\hat{t}=۹۰^{\circ} \\ \hat{r}=\hat{t} \end{array}\right\} \rightarrow \hat{S}+\hat{r}=۹۰^{\circ} \xrightarrow{\hat{r}+\hat{\alpha}+\hat{S}=۱۸۰^{\circ}} \hat{\alpha}=۹۰^{\circ}$$

مرحله‌ی۴ : طبق اصل مجموع مساحت‌ها می‌توان نوشت:

مساحت ۴ مثلث همنهشت + مساحت مربع کوچک = مساحت مربع بزرگ

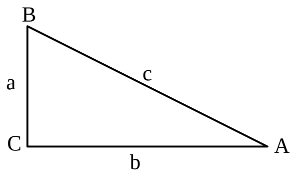
$$(a+b)^{۲}=c^{۲}+۴(\frac{۱}{۲}a.b)$$

$$\rightarrow a^{۲}+۲ab+b^{۲}=c^{۲}+۲ab \rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

***

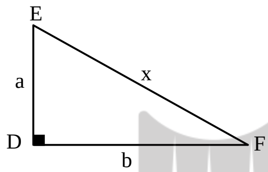
قضیه (عکس قضیه‌ی فیثاغورس) :

اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر باشد آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر قائمه است.



فرض : $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

اثبات:مثلثی قائم الزاویه به نام DEF طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه‌ی قائمه ی آن b و a باشند.آنگاه داریم



$$a^{۲} + b^{۲} = x^{۲}$$

و با مقایسه با فرض قضیه می‌توان نوشت

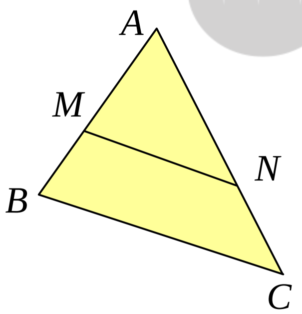
$$x^{۲} = c^{۲} \rightarrow x = c$$

لذا مثلث‌های ABC و DEF بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند و چون زاویهD قائمه است پس زاویه متناظر آن یعنی زاویه C نیز قائمه است.

***

قسمت چهارم : خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

قضیه (قضیه‌ی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند روی آنها پاره خطهای متناسب بوجود می‌آورد.

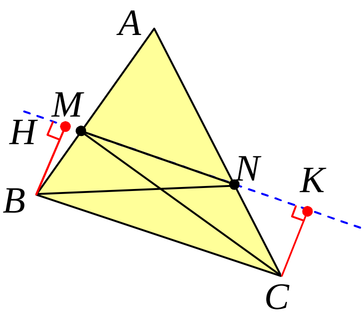


فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

اثبات :

مرحله‌ی اوّل :



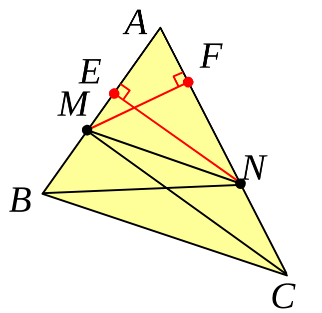
نقطه ی N را به B و همچنین نقطه‌ی M را به C وصل می‌کنیم.

دو مثلث MNB و MNC حاصل می‌شود که ارتفاع نظیر

ضلع MN در هر دو یکسان است. زیرا چهـــارضلعی $BHKC$ مستطیل می‌باشد و در مستطیل اضلاع روبرو مساویند ($BH = CK$) . لذا طبق آنچه گفته شد داریم :

$$S_{\overset{\Delta}{MNB}} = \frac{۱}{۲} MN.BH = \frac{۱}{۲} MN.CK = S_{\overset{\Delta}{MNC}}$$

مرحله‌ی دوّم : از نقطه‌ی N بر ضلع AB پاره خط NE را عمود می‌کنیم. پس



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AM.NE}{\frac{۱}{۲} MB.NE} = \frac{AM}{MB}$$

مرحله‌ی سوّم : از نقطه‌ی M بر ضلع AC پاره خط MF را عمود می‌کنیم پس

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AN.MF}{\frac{۱}{۲} NC.MF} = \frac{AN}{NC}$$

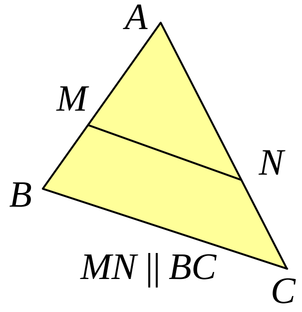
مرحله‌ی چهارم : طبق دو مرحله دوّم و سوّم داریم

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}} = \dfrac{AM}{MB} \\ \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}} = \dfrac{AN}{NC} \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{MNB}} = S_{\overset{\Delta}{MNC}}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

***

نتیجه : رابطه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



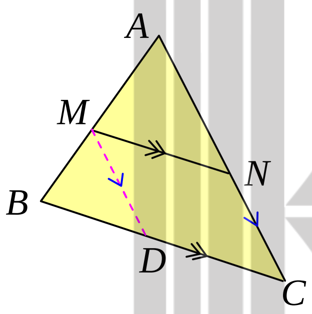
اثبات : کافی است نسبت را در مخرج ترکیب کنیم.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

توجه : اگر رابطه‌ی تالس را به صورت $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ بنویسیم، می‌گوییم، رابطه به صورت جزء به جزء نوشته شده است. در حالی که در حالت $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ رابطه را جزء به کل گویند.

***

قضیه (قضیه‌ی کلی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلث دیگری بوجود می‌آورد که اضلاع آن با اضلاع متناظر از مثلث اصلی متناسبند.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

اثبات : تناسب $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ (۱) طبق قضیه‌ی تالس بدیهی است. از طرفی اگر از نقطه‌ی M پاره‌خط MD را موازی AC رسم کنیم. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم :

$$MD \parallel AC \rightarrow \frac{BM}{AB}=\frac{BD}{BC}\rightarrow\frac{-BM}{AB}=\frac{-BD}{BC}$$

و با ترکیب نسبت در صورت می توان نوشت:

$$\frac{AB-BM}{AB}=\frac{BC-BD}{BC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{DC}{BC}$$

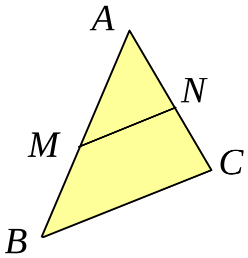
ولی چهارضلعی $MNCD$ متوازی الاضلاع است پس $MN=DC$ و لذا

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \qquad (۲)$$

حال طبق نتایج ۱ و ۲ به دست آمده می‌توان نوشت:

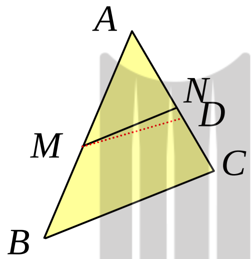
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

***



قضیه (عکس قضیه‌ی تالس) : اگر خطی دو ضلع مثلثی (یا امتداد آنها) را قطع کند و روی آنها پاره‌خط‌های متناسب پدید آورد، آن خط با ضلع سوّم مثلث موازی است.

فرض : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حکم : $MN \parallel BC$



اثبات : (به کمک برهان خلف) گیریم که MN موازی BC نباشد. پس از نقطه‌ی M خط MD را چنان رسم می‌کنیم که موازی BC باشد و AC (یا امتداد آن را در نقطه‌ی D) قطع کند. حال طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

و با مقایسه با فرض می توان نوشت:

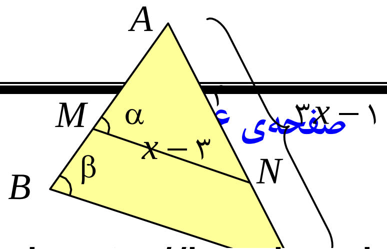
$$\frac{AN}{AC}=\frac{AD}{AC}$$

لذا :

$$AN=AD$$

و این وقتی ممکن است که نقـــطه‌ی D بر N منطبق باشد پس پاره‌خط MD بر MN منطبق می‌شود و چون $MD \parallel BC$ پس $MN \parallel BC$ و حکم ثابت است.

تمرین۲۵ : در شکل زیر زاویه های α و β مساویند. مقدار x را به دست آورید.



حل : چون زاویه های αو β لذا خطوط MN و BC موازیند. لذا قضیه‌ی تالس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

و چون اندازه های اضلاع AM و AB را نداریم. تناسب را به صورت زیر می نویسیم.

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\rightarrow \frac{۴}{۳x-۱}=\frac{x-۳}{۲x-۳}\rightarrow (x-۳)(۳x-۱)=۴(۲x-۳)$$

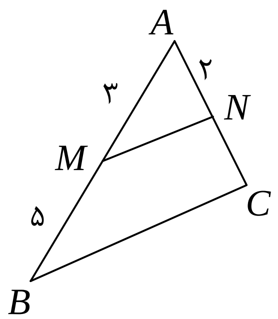
$$\rightarrow ۳x^{۲}-x-۹x+۳=۸x-۱۲\rightarrow ۳x^{۲}-۱۸x+۱۵=۰\xrightarrow{\div ۳}x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$$\rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰\rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=۱ \end{cases}$$

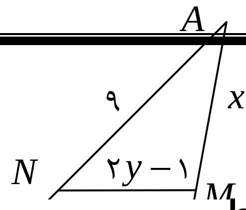
که با توجه به داده های مسئله جواب $x=۱$ قابل قبول نیست.

تمرین برای حل :

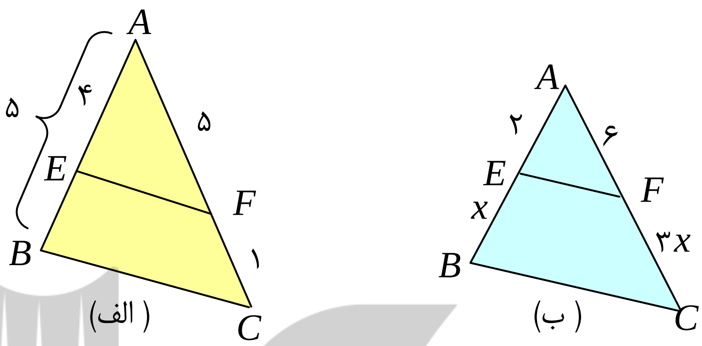
۲۶: در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، اندازه های AC و NC را به دست آورید.



۲۷ : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را به دست آورید.

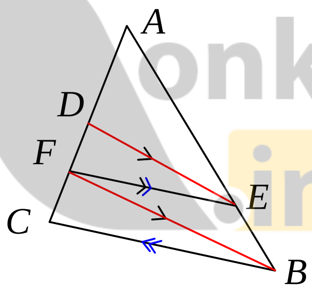


۲۸ : در کدام مورد $EF \parallel BC$ است؟



۲۹ : ثابت کنید، در هر مثلث پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوّم موازی و مساوی نصف آن است.

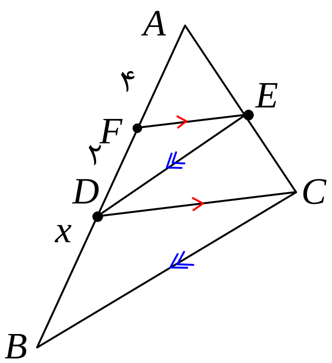
۳۰ : در شکل زیر $DE \parallel FB$ و $FE \parallel BC$ ثابت کنید که $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



۳۱ : با توجه به شکل مقابل اگر $FE \parallel DC$ و $DE \parallel BC$

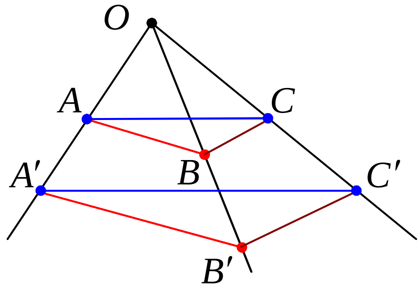
اولاً : ثابت کنید که $AD^{2} = AF.AB$

ثانیاً : مقدار x را به دست آورید.

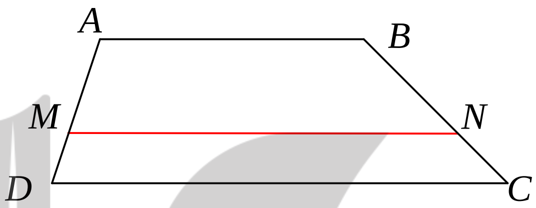


۳۲ : در شکل زیر $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید:

$AC \parallel A'C'$



۳۳ : در ذوزنقه‌ی زیر $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید، $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$. (قضیه‌ی تالس در ذوزنقه)



***

درس سوّم : تشابه مثلث ها

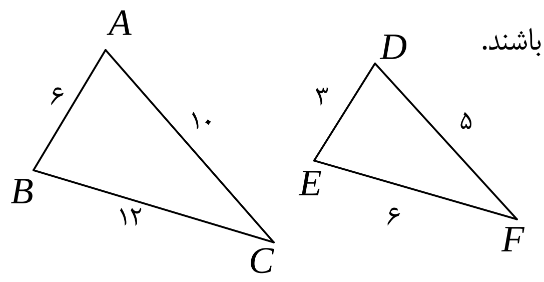
در این درس مفهوم تشابه دو مثلث را بررسی نموده و کاربردهایی را پیرامون آن بیان می کنیم.

قسمت اوّل : مفهوم تشابه دو مثلث

دو مثلث را متشابه گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

الف : زاویه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

ب : اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.



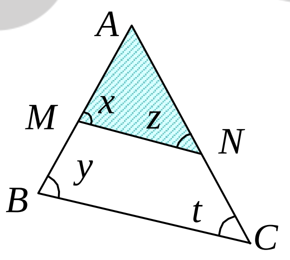
$$\left.\begin{array}{r}\angle A=\angle D,\angle B=\angle E,\angle C=\angle F\\ \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta(ABC)\sim\Delta(DEF)$$

در دو مثلث متشابه ، نسبت دو ضلع متناظر[1] را نسبت تشابه دو مثلث می نامند. در مثال فوق نسبت تشابه

می‌تواند $k=\frac{۶}{۳}=۲$ یا $k=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

برای ورود به بحث تشابه مثلث ها ، لازم است ابتدا با قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث آشنا شویم.

قضیه (قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث ها) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلثی بوجود می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

اثبات : کافی است که نشان دهیم ، دو شرط مربوط به تعریف تشابه را برقرارند.

شرط اوّل(تساوی زاویه‌های متناظر) : زاویه‌ی A در دو مثلث مشترک است. از طرفی چون $MN \parallel BC$

پس $\angle z=\angle t$ و $\angle x=\angle y$. پس زاویه های نظیر مساویند.

[1]. اضلاع روبرو به زاویه های مساوی

شرط دوّم (تناسب اضلاع متناظر):

چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه‌ی تالس داریم $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}$. در نتیجه اضلاع متناسبند.

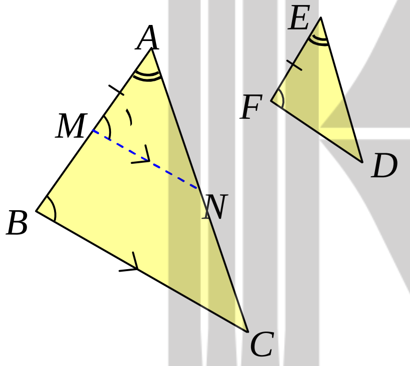
***

حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث ، می توان سه قضیه‌ی اصلی برای حالت های مختلف تشابه دو مثلث بیان کرد.

قضایای اصلی تشابه دو مثلث

قضیه‌ی ۱ : اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تساوی دو زاویه)



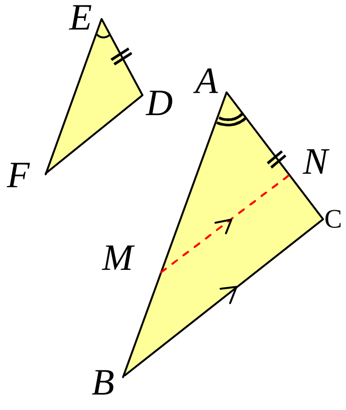
فرض : $\angle A=\angle E$ و $\angle B=\angle F$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

***

قضیه‌ی ۲ : اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه های بین آنها)



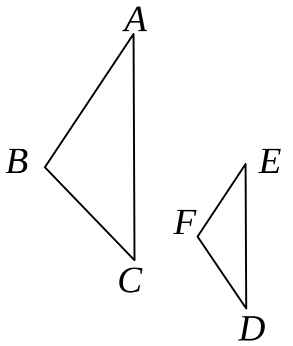
فرض : $\angle A=\angle E$ و $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

***

قضیه‌ی ۳ : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

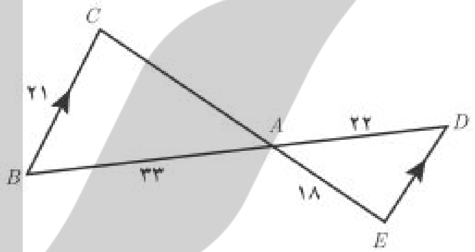
(حالت تناسب سه ضلع)



فرض : $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{DF}{BC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

تمرین ۱: در شکل زیر $BC \parallel DE$ است. اندازه های پاره خط های DE و AC را به دست آورید.



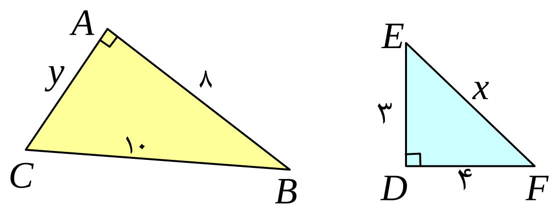
توجه : هنگام نوشتن نسبت اضلاع متناظر از دو مثلث متشابه لازم است به دو نکته‌ی زیر توجه نمود.

۱ : صورت‌ها مربوط به یک مثلث و مخرج‌ها مربوط به مثلث دیگر باشند.

۲ : دو ضلع در یک نسبت (کسر) قرار می‌گیرند، هرگاه روبرو به زاویه های مساوی باشند.

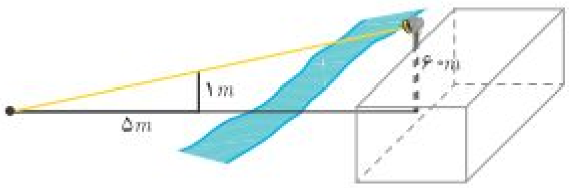
تمرین برای حل :

۲ : آیا دو مثلث قائم الزاویه‌ی زیر متشابهند؟ چرا؟

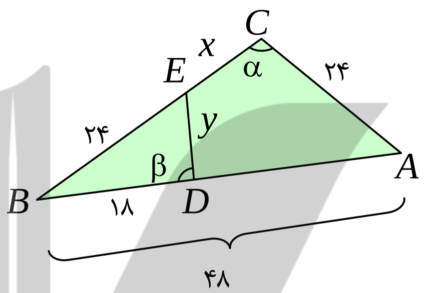


۳ : بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی کـه در طـرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله‌ی خود را تا پایه‌ی نور افکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طـول

یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه‌ی چوب برابر ۵ متر است. فاصله‌ی این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

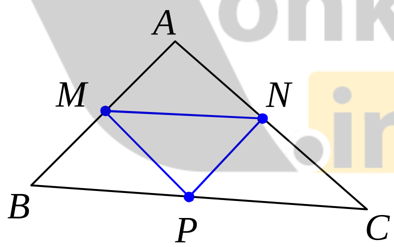


۴ : در شکل زیر $\angle\alpha=\angle\beta$ است. طول y و x را پیدا کنید.



۵ : در شکل زیر نقاط M و N و P وسط های اضلاع مثلث ABC می باشند. ثابت کنید:

$$\Delta(ABC)\sim\Delta(MNP)$$

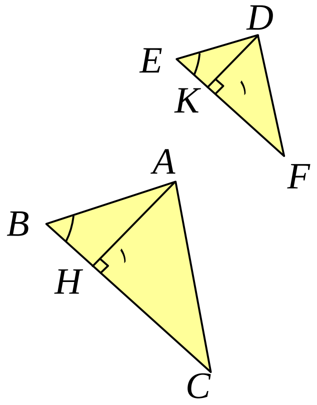


۶ : ثابت کنید که دو مثلث متشابه با یک مثلث، خود با متشابه اند. در مورد نسبت تشابه آنها چه می توان گفت؟ چرا؟

***

قسمت دوّم : قضایای محیط و مساحت مثلث های متشابه

قضیه : نسبت ارتفاع‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$ و $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = k$

حکم : $\dfrac{AH}{DK} = k$

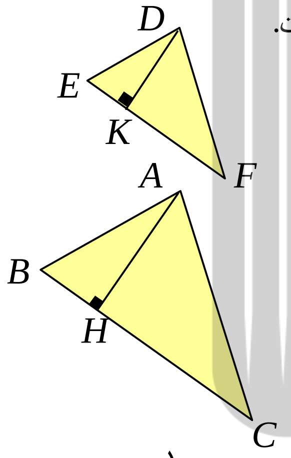
اثبات : چون دو مثلث ABC و DEF متشابهند، پس $\angle B = \angle E$

از طرفی $\angle H_1 = \angle K_1 = 90^\circ$ لذا

$$\Delta(ABH) \sim \Delta(DEK) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BH}{EK} = \frac{AH}{DK}$$

و چون $\dfrac{AB}{DE} = k$ پس $\dfrac{AH}{DK} = k$

قضیه : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.



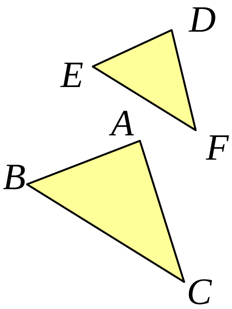
فرض : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ و $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k$

حکم : $\dfrac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}} = k^2$

اثبات : با توجه به قضیه‌ی قبل داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}} = \frac{\frac{1}{2}BC.AH}{\frac{1}{2}EF.DK} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AH}{DK} = k.k = k^2$$

قضیه : نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.



فرض : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ و $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k$

حکم : $\dfrac{P_{\Delta(ABC)}}{P_{\Delta(DEF)}} = k$

اثبات : با توجه به خواص تناسب داریم

$$\frac{P_{\underset{ABC}{\Delta}}}{P_{\underset{DEF}{\Delta}}}=\frac{AB+BC+AC}{DE+EF+DF}=\frac{k(DE)+k(EF)+k(DF)}{DE+EF+DF}$$

$$=\frac{k(DE+EF+DF)}{(DE+EF+DF)}=k$$

***

تمرین۷ : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۲۵}$ است، نسبت محیط‌های این دو مثلث را پیدا کنید.

حل :

نسبت محیط ها $k^۲=\frac{۸۱}{۲۵}\rightarrow k=\frac{۹}{۵}$

تمرین۸ : اگر مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلثی دیگر به محیط ۱۸ متشابه باشد.

الف: مساحت مثلث دوّم را بدست آورید.

ب : اندازه‌ی اضلاع مثلث دوّم را محاسبه کنید.

حل: در مثلث اوّل، چون $۵^۲=۴^۲+۳^۲$ پس مثلث قائم الزاویه بوده و دوضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۳ و۴ می باشند. در نتیجه مساحت این مثلث برابر $۶=۴\times۳\times\frac{۱}{۲}$ است.

	ضلع اوّل	ضلع دوّم	ضلع سوّم	محیط	مساحت
مثلث اوّل	$a=۳$	$b=۴$	$c=۵$	$p=۱۲$	$S=۶$
مثلث دوّم	a'	b'	c'	$p'=۱۸$	S'

$$k=\frac{p}{p'}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\frac{S}{S'}=k^۲}\frac{S}{S'}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{S=۶}\frac{۶}{S'}=\frac{۴}{۹}\rightarrow S'=\frac{۶\times۹}{۴}=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$$

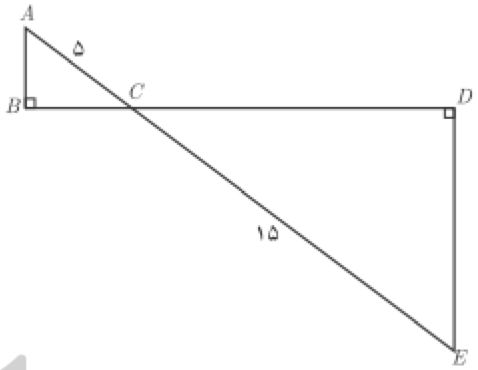
$$\frac{b}{b'}=k\rightarrow\frac{۴}{b'}=\frac{۲}{۳}\rightarrow b'=۶$$

$$\frac{a}{a'}=k\rightarrow\frac{۳}{a'}=\frac{۲}{۳}\rightarrow a'=۴/۵$$

$$\frac{c}{c'}=k\rightarrow\frac{۵}{c'}=\frac{۲}{۳}\rightarrow c'=۷/۵$$

تمرین برای حل :

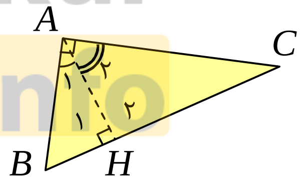
۹ : در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می کنید. نسبت محیط ها و مساحت های آنها را به دست آورید.



***

قسمت سوّم : برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر تبدیل می کند. این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابهند.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ABH): \angle A_۱ + \angle B = ۹۰^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = ۹۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\angle A_۱ = \angle C \\ \angle H_۱ = \angle A = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \ \ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ACH): \angle A_۲ + \angle C = ۹۰^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle A_۲ = \angle C$$

$$\left.\begin{array}{r}\angle A_۲ = \angle B \\ \angle H_۲ = \angle A = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \ \ \ (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ACH)$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ACH) \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^۲ = BH \times CH$$

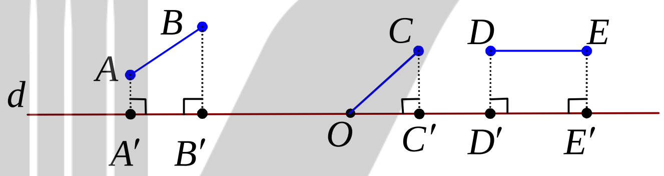
قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث برابر است.

اثبات : کافی است مساحت مثلث قائم الزاویه را به دو شکل متفاوت محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{aligned} S(ABC) &= \frac{۱}{۲}(AB)(AC) \\ S(ABC) &= \frac{۱}{۲}(AH)(BC) \end{aligned}\right\} \to \frac{۱}{۲}(AH)(BC) = \frac{۱}{۲}(AB)(AC)$$

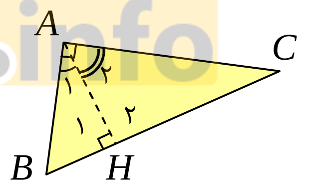
$$\to (AH)(BC) = (AB)(AC)$$

توجه : اگر AB پاره خط غیرمنطبق بر خط d باشد.تصویر پاره خط AB روی خط d پاره خطی است مانند $A'B'$ می‌باشد هرگاه $BB' \perp d$ و $AA' \perp d$ باشد.



قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه‌ی هر ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی تصویر همان ضلع بر وتر برابر است.

اثبات :



$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \to \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\to \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \to AB^{۲} = BC \times BH$$

$$\Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \to \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB}$$

$$\to \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \to AC^{۲} = BC \times CH$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است (قضیه‌ی فیثاغورس).

اثبات :

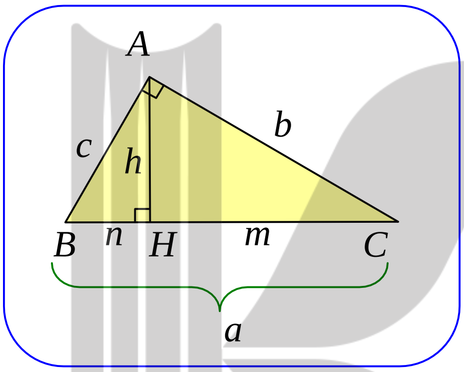
$$\left.\begin{array}{l} AB^{۲} = BC \times BH \\ AC^{۲} = BC \times CH \end{array}\right\} \rightarrow AB^{۲} + AC^{۲} = BC \times BH + BC \times CH$$

$$\rightarrow AB^{۲} + AC^{۲} = BC(BH + CH) = BC \times BC = BC^{۲}$$

تمرین ۱۰ : با استفاده از محاسبه‌ی مساحت ، ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

***

برخی از روابط طولی مهم در هر مثلث قائم الزاویه



۱) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$

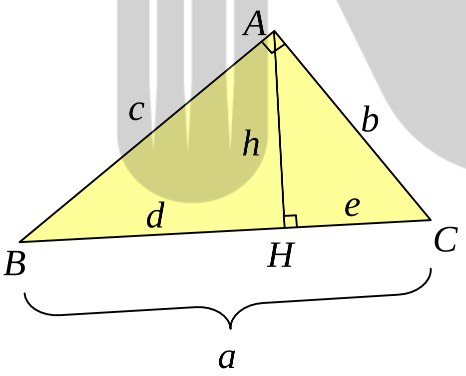
۲) $b^{۲} = a \times m$

۳) $c^{۲} = a \times n$

۴) $h^{۲} = m \times n$

۵) $a \times h = b \times c$

تمرین ۱۱ : در هر مورد با توجه به اطلاعات داده شده پیرامون مثلث قائم الزاویه‌ی شکل مقابل، ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



الف) $h = ۵$ و $d = ۷$ و $e = ?$

ب) $d = ۵$ و $e = ۳$ و $b = ?$ و $c = ?$

ج) $c = ۸$ و $b = ۶$ و $h = ?$

حل :

الف :

$$h^{۲} = d \times e \rightarrow (۵)^{۲} = ۷ \times e \rightarrow e = \frac{۲۵}{۷}$$

ب :

$$b^{۲} = a \times e \rightarrow b^{۲} = ۸ \times ۳ \rightarrow b = ۲\sqrt{۶}$$

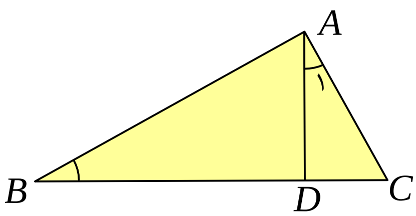
$$c^{۲} = a \times d \rightarrow c^{۲} = ۸ \times ۵ \rightarrow c = ۲\sqrt{۱۰}$$

ج :

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow a^{۲}=(۶)^{۲}+(۸)^{۲}\rightarrow a=۱۰$$

$$a\times h=b\times c\rightarrow (۱۰)(h)=(۶)(۸)\rightarrow h=\frac{۲۴}{۵}$$

تمرین۱۲: در شکل روبرو $\angle A_{۱}=\angle B$ و $AC=۴$ و $BD=۶$. طول BC را به دست آورید.



حل : قرار می دهیم $BC=x$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_{۱}=\angle B\\ \angle C=\angle C\end{array}\right\}\rightarrow \Delta(ADC)\approx\Delta(ABC)\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{AC}$$

$$\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}\rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{x-۶}{۴}\rightarrow x^{۲}-۶x=۱۶\rightarrow x^{۲}-۶x-۱۶=۰$$

$$\rightarrow (x-۸)(x+۲)=۰\rightarrow x=۸\ ,\ x=-۲$$

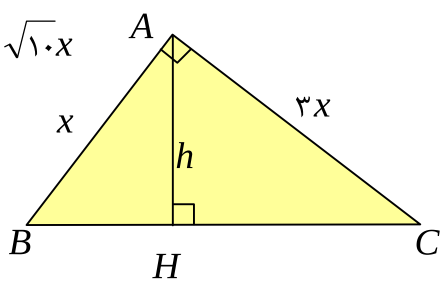
جواب $x=-۲$ غیر قابل قبول است.

تمرین۱۳ : در یک مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱و۳ و مساحت آن۶۰ واحد مربـع اسـت. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

حل :

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=x^{۲}+۹x^{۲}=۱۰x^{۲}\rightarrow BC=\sqrt{۱۰}x$$

$$S=۶۰\rightarrow\frac{(x)(۳x)}{۲}=۶۰\rightarrow x^{۲}=۴۰\rightarrow x=۲\sqrt{۱۰}$$



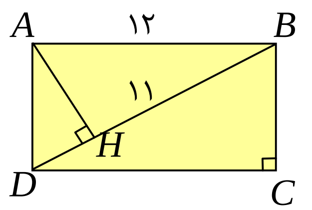
می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابرند. پس :

$$(AH)(BC)=(AB)(AC)\to h(\sqrt{۱۰}x)=(x)(۳x)$$

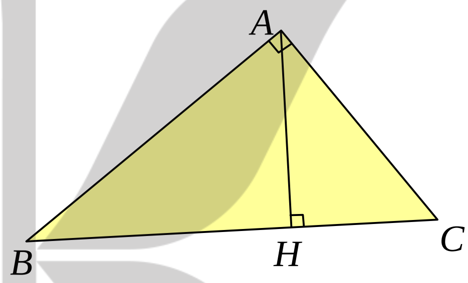
$$\to h=\frac{۳x}{\sqrt{۱۰}}\xrightarrow{x=۲\sqrt{۱۰}}h=\frac{۳(۲\sqrt{۱۰})}{\sqrt{۱۰}}=۶$$

تمرین برای حل :

۱۴ : درشکل مقابل، مستطیلی به طول ۱۲ داده شده است. با توجه به اندازه های داده شده ، طول قطر مستطیل و اندازه‌ی عرض مستطیل را به دست آورید.



۱۵ : در مثلث قائم الزاویه زیر، در هر حالت ، اندازه‌ی پاره خط خواسته شده را به دست آورید.



الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

***