

بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**.info**

<https://konkur.info>

## درس دوم: بهینه سازی

مسائل بهینه سازی، مسائلی هستند که در آن‌ها، به دنبال یافتن ماگزیمم یا مینیمم (مطلق) یک کمیت مانند حجم، مساحت، محیط، هزینه و ... هستیم. به عنوان مثال، یک شرکت تولیدی همواره به دنبال کم کردن هزینه و بیش تر کردن سود است..

**برای حل مسائل بهینه سازی ۵مرحله ی زیر را انجام می دهیم:**

**مرحله ۱: رسم شکل (در صورت امکان) و نوشتن معادله تابع هدف:**

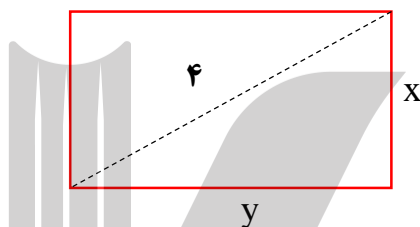
در صورت امکان شکل مناسبی برای مسئله رسم می‌کنیم روی شکل اطلاعات مسأله را پیاده کرده و مقادیر مجهول را با  $X$  و  $Y$  یا ... نامگذاری می‌کنیم.

سپس کمیتی که قرار است ماگزیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم را مشخص کرده و تابع مرتبط با آن کمیت را با توجه به مسأله می‌نویسیم. به این تابع ، **تابع**

**هدف** می‌گوییم

مثلاً اگر بخواهیم مساحت یک مستطیل را ماگزیمم کنیم، کمیت موردهدف، مساحت مستطیل بوده که تابع آن با توجه به شکل زیر از دو متغیر  $x$  و  $y$  تشکیل شده است و به صورت زیر است:

$$\text{مساحت} = S = xy$$



مرحله ۲: نوشتن معادله کمکی:

تابع هدف یک معادله دو متغیره است که بایستی به یک معادله یک متغیره تبدیل شود. برای این کار از معادله کمکی استفاده می کنیم

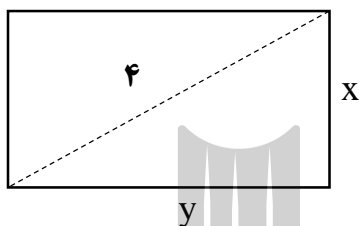
دقت کنیم: برای نوشتن معادله کمکی حالت های زیر وجود دارند

الف) در صورت مساله رابطه‌ای بین متغیرها داده شده باشد:

مثال: اگر  $2x + y = 100$  باشد، ماگزیمم  $xy$  را به دست آورید.  $(x, y > 0)$

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده که به صورت  $2x + y = 100$  است.

ب) در شکلی که رسم نموده‌ایم رابطه‌ای بین متغیرها به وجود می‌آید.



مثل رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های قائم الزاویه. خوبی این رابطه‌ی کمکی این است که دو متغیر را به هم مرتبط می‌کند مثلاً رابطه‌ی کمکی در شکل مقابل به صورت زیر است:

$$\Rightarrow \text{رابطه‌ی کمکی: } x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

ج) از روابطی که قبل خوانده ایم استفاده می‌کنیم مانند رابطه بین سرعت - زمان  $t = \frac{x}{v}$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

بعد از نوشتن رابطه‌ی کمکی، باید یک متغیر را بر حسب دیگر به دست آورد

$$\Rightarrow \text{رابطه‌ی کمکی } x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 16 - x^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{16 - x^2} \\ \text{یا} \\ x^2 = 16 - y^2 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{16 - y^2} \end{cases}$$

پیشنهاد: برای راحتی کار بهتر است  $y$  را بر حسب متغیر  $x$  بنویسیم. (کاری

کنیم  $y$  تنها شود)

#### مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

رابطه‌ی کمکی در مرحله قبل را در تابع هدف جایگذاری کنیم تا تابع هدف به یک معادله تک متغیره تبدیل شود.

$$\text{مساحت} = S = xy \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{رابطه کمکی } y = \sqrt{16 - x^2}} \text{تابع هدف } S = x\sqrt{16 - x^2} \\ \xrightarrow{\text{رابطه کمکی } x = \sqrt{16 - y^2}} \text{تابع هدف } S = \sqrt{16 - y^2} \cdot y \end{cases}$$

**پیشنهاد:** برای راحتی کار بهتراست به جای  $y$  در تابع هدف، معادله کمکی را قرار دهیم تا تابع هدف برحسب متغیر  $x$  به دست آید.

#### مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

از معادله‌ی به دست آمده (معادله هدف با یک متغیر) مشتق گرفته و نقاط بحرانی را به دست آورده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را به دست می‌آوریم.

مسائل مربوط به بهینه سازی را می توان به ۴ دسته زیر تقسیم کرد :

**دسته اول) مسائل مربوط به بیشترین و کمترین مقدار**

**مثال:** اگر  $2x + y = 100$  باشد، ماگزیمم  $xy$  را به دست آورید.  $(x, y > 0)$

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

می خواهیم ماگزیمم  $xy$  را به دست آوریم. پس فرض می کنیم  $S = xy$  باشد (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه ی کمکی را خود مسئله داده، یعنی  $2x + y = 100$  (معادله کمکی)

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی

از معادله ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $y$  تنها شود)

$$2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

مرحله ۴: جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y=100-2x} S = -2x^2 + 100x$$

مرحله ۵: به دست آوردن مقدار ماکزیمم یا مینیمم مطلق :

نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، (از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم)

$$S' = -4x + 100 \stackrel{S'=0}{\implies} -4x + 100 = 0 \implies 4x = 100 \implies x = \frac{100}{4} = 25$$

بنابر این با جای‌گذاری  $x$  به دست آمده در تابع  $S$  ماکزیمم آن را می‌یابیم:

$$S = -2x^2 + 100x \stackrel{x=25}{\implies} S_{max} = -2(25)^2 + 100(25) \\ \implies S_{max} = 2 - (625) + 2500 = 1250$$

**مثال:** اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت و  $3x+4y=12$  باشد، بیش‌ترین مقدار  $xy$  را به دست آورید.

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم ماکزیمم  $xy$  را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم  $S=xy$  باشد(تابع

هدف

## مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده، یعنی  $2x+y=100$  (معادله کمکی)

## مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

$$3x + 4y = 12 \xrightarrow{y \text{ را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم}} 4y = 12 - 3x \xrightarrow{\div 4}$$

$$y = \frac{1}{4}(12 - 3x)$$

## مرحله ۴: جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y = \frac{1}{4}(12 - 3x)} S = x \times \frac{1}{4}(12 - 3x) \Rightarrow$$

$$S(x) = \frac{1}{4}(12x - 3x^2) \quad , \quad 0 < x < 4$$

## مرحله ۵: به دست آوردن مقدار ماکزیمم یا مینیمم مطلق :

نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، (از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم)



$$S'(x) = \frac{1}{2}(12 - 6x) \xrightarrow{S'(x)=0} 12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$S(2) = \frac{1}{4}(24 - 3(2)^2) = 3$$

**مثال:** اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت و  $2x+y=16$  باشد. بیشترین مقدار  $xy$  را به دست آورید.

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم ماگزیمم  $xy$  را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم  $S=xy$  باشد (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خود مسئله داده، یعنی  $2x+y=16$  (معادله کمکی)

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

$$2x + y = 16 \xrightarrow{y \text{ را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم}} y = 16 - 2x$$

مرحله ۴: جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y=16-2x} S(x) = x(16-2x) = -2x^2 + 16x$$

مرحله ۵: به دست آوردن مقدار ماکزیمم یا مینیمم مطلق :

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = -4x + 16 \xrightarrow{S'(x)=0} -4x + 16 = 0 \Rightarrow 4x = 16$$

$$\Rightarrow x = 4 \rightarrow S(4) = -2(4)^2 + 16(4) = 32$$

مثال: مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۸ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای

حاصل ضرب آن‌ها را پیدا کنید. (نهایی - دی ۹۷)

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم  $x$  و  $y$  دو عدد مثبت باشند می‌خواهیم ماکزیمم  $xy$  را به دست

آوریم. پس فرض می‌کنیم  $S=xy$  باشد (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی برابر  $x + y = 18$  است. (معادله کمکی)

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی

از معادله ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $y$  تنها شود)

$$x + y = 18 \xrightarrow{y \text{ را بر حسب } x \text{ می نویسیم}} y = 18 - x$$

مرحله ۴: جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y=18-x} S(x) = x(18 - x) = 18x - x^2, \\ x \in (0, 18)$$

مرحله ۵: به دست آوردن مقدار ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه ی بحرانی را به دست می آوریم، بنابراین از  $S(x)$  مشتق می گیریم و آن را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\Rightarrow S'(x) = 18 - 2x \xrightarrow{S'(x)=0} 18 - 2x = 0 \Rightarrow x = 9$$

$$\Rightarrow S(9) = 18 \times 9 - 9^2 = 81$$

---

مثال: اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت باشند به طوری که  $xy=24$  کمترین

مقدار عبارت  $3x+8y$  را به دست آورید.

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم مینیمم  $3x + 8y$  را به دست آوریم. پس فرض می‌کنیم

$$P = 3x + 8y \text{ باشد (تابع هدف)}$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

در این مثال رابطه‌ی کمکی را خودِ مسأله داده، یعنی  $xy = 24$  (معادله کمکی)

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی

از معادله‌ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

$$xy = 24 \xrightarrow{\text{لا را بر حسب } x \text{ می‌نویسیم}} y = \frac{24}{x}$$

مرحله ۴: جایگذاری معادله کمکی در تابع هدف

$$P = 3x + 8y \xrightarrow{y = \frac{24}{x}} P(x) = 3x + 8 \times \frac{24}{x} = 3x + \frac{192}{x}$$

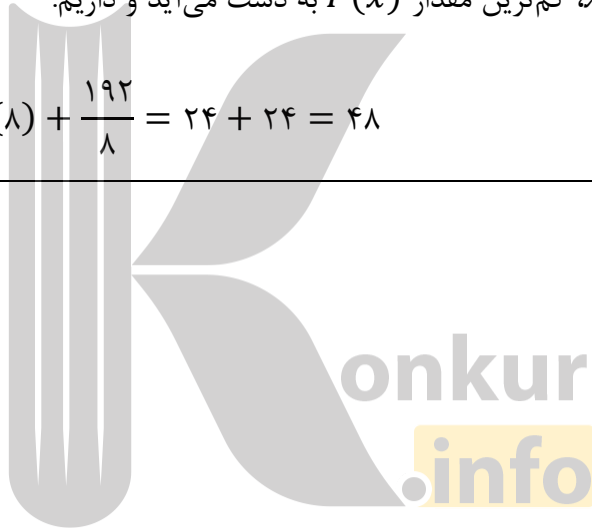
## مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $P(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$P'(x) = 3 - \frac{192}{x^2} \stackrel{P'(x)=0}{=} 3 = \frac{192}{x^2} \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

به ازای  $x = 8$ ، کم‌ترین مقدار  $P(x)$  به دست می‌آید و داریم:

$$P_{min} = 3(8) + \frac{192}{8} = 24 + 24 = 48$$



دسته دوم) مسایل مربوط به بیشترین و کمترین مقدار محیط و مساحت

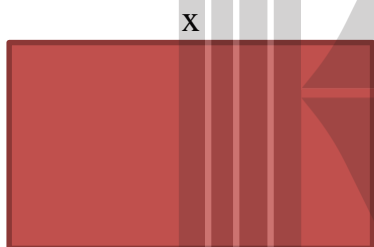
مثال: از بین تمام مستطیل‌های با محیط ۲۴ سانتی‌متر، مستطیل با بیش-

ترین مقدار مساحت را مشخص کنید.

(مشابه مثال ۱ صفحه‌ی ۱۱۴ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم  $x$  و  $y$  به ترتیب طول و عرض مستطیل، مطابق شکل باشد:



می‌خواهیم مساحت مستطیل، یعنی  $S=xy$  بیش‌ترین مقدار شود. (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، محیط مستطیل برابر ۲۴ سانتی متر است: (معادله کمکی)

$$P = 2(x + y) = 24$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

$$P = 2(x + y) = 24 \Rightarrow x + y = 12 \xrightarrow{\text{بر حسب } x \text{ می‌نویسیم}}$$

$$y = 12 - x$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = xy \xrightarrow{y=12-x} S(x) = x(12 - x) = 12x - x^2, \\ x \in (0, 12)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = 12 - 2x \xrightarrow{S'(x)=0} 12 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

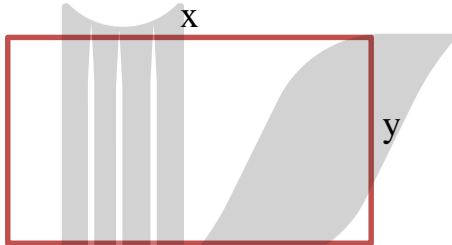
به ازای  $x = 6$ ،  $S(x)$  بیش‌ترین مقدار را دارد و داریم:

$$S(6) = 12 \times 6 - 6^2 = 36$$

مثال: از بین تمام مستطیل‌ها با مساحت ۱۶، مستطیل با کم‌ترین محیط را مشخص کنید.

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم  $x$  و  $y$  به ترتیب طول و عرض مستطیل، مطابق شکل باشد:



می‌خواهیم محیط مستطیل، یعنی  $P = 2(x + y)$  کم‌ترین مقدار شود. (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۱۶ است: (معادله کمکی)

$$S = xy = 16$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

$$xy = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{x}$$



مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$P = 2(x + y) \xrightarrow{y = \frac{16}{x}} P(x) = 2\left(x + \frac{16}{x}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌-

آوریم، بنابراین از  $P(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) \Rightarrow P'(x) = \frac{2(x^2 - 16)}{x^2} \xrightarrow{P'(x)=0} x^2 - 16 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 4$$

کم‌ترین مقدار  $P(x)$  به ازای  $x=4$  به دست می‌آید و داریم:

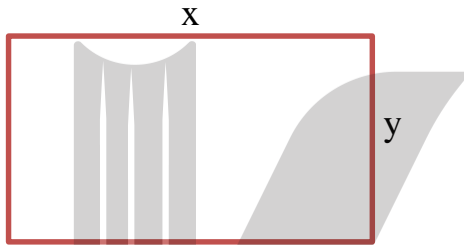
$$y = \frac{16}{x} \xrightarrow{x=4} y = \frac{16}{4} = 4$$

$$P = 2(x + y) \xrightarrow{x=4 \text{ و } y=4} P = 2(4 + 4) = 16$$

مثال: کم‌ترین محیط مستطیل که مساحت آن ۱۸ واحد مربع باشد، را به دست آورید.

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

فرض کنیم  $x$  و  $y$  به ترتیب طول و عرض مستطیل، مطابق شکل باشد:



می‌خواهیم محیط مستطیل، یعنی  $P = 2(x + y)$  کم‌ترین مقدار شود. (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۱۸ است: (معادله کمکی)

$$S = xy = 18$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $y$  تنها شود)

$$xy = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف:

$$P = 2(x + y) \xrightarrow{y = \frac{18}{x}} P(x) = 2\left(x + \frac{18}{x}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه ی بحرانی را به دست می آوریم، بنابراین از  $P(x)$  مشتق می گیریم و آن را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{18}{x^2}\right) \Rightarrow P'(x) = \frac{2(x^2 - 18)}{x^2} \xrightarrow{P'(x)=0} x^2 - 18 = 0 \xrightarrow{x>0} x = 3\sqrt{2}$$

کمترین مقدار  $P(x)$  به ازای  $x = 3\sqrt{2}$  به دست می آید و داریم:

$$y = \frac{18}{x} \xrightarrow{x=3\sqrt{2}} y = \frac{18}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

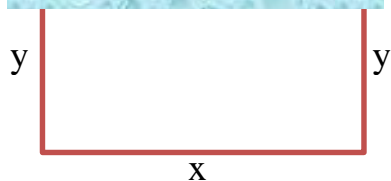
$$P = 2(x + y) \xrightarrow{x=3\sqrt{2}, y=3\sqrt{2}} P = 2(3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

مثال : بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک

طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر



مربع است. طول طناب چند متر است؟



مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

با توجه به شکل، طول طناب برابر  $x + 2y$  است:

می‌خواهیم طول طناب برابر  $x + 2y$  کم‌ترین مقدار شود. (تابع هدف)

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۶۴۸ است: (معادله کمکی)

$$S = xy = 648$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

$$xy = 648 \Rightarrow y = \frac{648}{x}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$L = x + 2y \xrightarrow{y = \frac{648}{x}} L(x) = x + \frac{2 \times 648}{x}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می-

آوریم، بنابراین از  $L(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

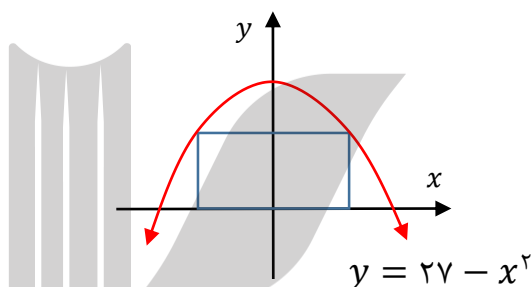
$$L'(x) = 1 - \frac{1296}{x^2} = \frac{x^2 - 1296}{x^2}$$

$$\xrightarrow{L'(x)=0} x^2 - 1296 = 0 \Rightarrow x^2 = 1296 \xrightarrow{x>0} x = 36 \Rightarrow L(36)$$

$$= 36 + \frac{2 \times 648}{36} = 72$$

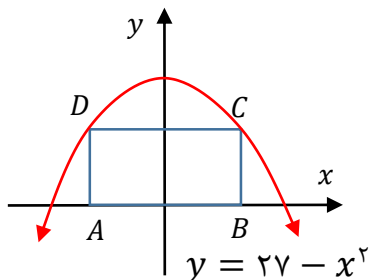
مثال : مستطیل در سهمی  $y = 27 - x^2$  طوری محاط شده است که یک ضلع آن روی محور  $x$ ها و دو رأس آن روی سهمی مطابق شکل می باشد. ماگزیمم مساحت این مستطیل را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۳ صفحه ی ۱۶۰ کتاب درسی)



مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

مطابق شکل، راس های مستطیل را با نقاط  $A, B, C, D$  مشخص می کنیم.



می‌خواهیم مساحت مستطیل، یعنی  $S = AB \times BC$  بیشترین مقدار شود. (تابع هدف)

مطابق شکل، اگر طول نقطه‌ی  $B$  برابر  $x$  باشد، آن‌گاه طول مستطیل برابر  $AB = 2x$  است.

اگر عرض نقطه‌ی  $C$  برابر  $y$  باشد، آن‌گاه عرض مستطیل برابر  $BC = y$  است.

بنابراین

$$S = AB \times BC \xrightarrow{AB=2x, BC=y} S = 2x \cdot y$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، معادله سهمی برابر  $x^2 - 27 = y$  است: (معادله کمکی)

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $y$  تنها شود)

(در این سوال  $y$  بر حسب  $x$  داده شده است)

$$y = 27 - x^2$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = 2x \times y \xrightarrow{y=27-x^2} \Rightarrow S(x) = 2x \times (27 - x^2) \\ = 54x - 2x^3$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = 54 - 6x^2 \xrightarrow{S'(x)=0} 54 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 54 \Rightarrow x^2 \\ = \frac{54}{6} = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3 \Rightarrow$$

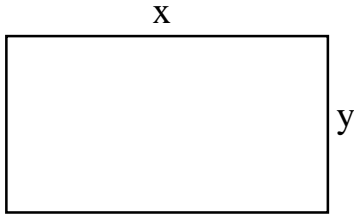
$$S(3) = 53 \times 3 - 2 \times (3)^3 = 159 - 54 = 105$$

مثال : کشاورزی می‌خواهد در مزرعه‌ی خود، زمینی مستطیل شکل به مساحت ۳۰۰۰ متر مربع را جدا کند و آن را دیوارکشی کند. اگر هزینه‌ی هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی دویست و پنجاه هزار تومان و هزینه‌ی هر متر دیوارهای شرقی و غربی یک میلیون تومان باشد، کم‌ترین هزینه‌ی دیوارکشی چند هزار تومان است؟ (مشابه تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۲۰ کتاب درسی)



## مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

اگر  $x$  و  $y$  به ترتیب طول و عرض مستطیل باشد، آن گاه:



می‌خواهیم هزینه دیوارکشی، کمترین مقدار شود. (تابع هدف)

+ (هزینه یک متر)  $\times$  (اندازه ضلع جنوبی + اندازه ضلع شمالی) = هزینه کل  
(هزینه یک متر)  $\times$  (اندازه ضلع غربی + اندازه ضلع شرقی)

$$C = (x + x) \times 25000 + (y + y) \times 10000 \Rightarrow$$

$$C = 50000x + 20000y$$

## مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، مساحت مستطیل برابر ۳۰۰۰ است: (معادله کمکی)

$$S = xy = 3000$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $y$  تنها شود)

$$xy = 3000 \Rightarrow y = \frac{3000}{x}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$\begin{aligned} C &= 50000x + 20000y \xrightarrow{y=\frac{3000}{x}} C(x) \\ &= 50000x + 20000 \times \frac{3000}{x} \\ &= 50000 \left( x + \frac{12000}{x} \right) \end{aligned}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه ی بحرانی را به دست می-

آوریم، بنابراین از  $C(x)$  مشتق می گیریم و آن را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 50000 \left( 1 + \frac{-12000}{x^2} \right) = 50000 \left( \frac{x^2 - 12000}{x^2} \right) = 0$$

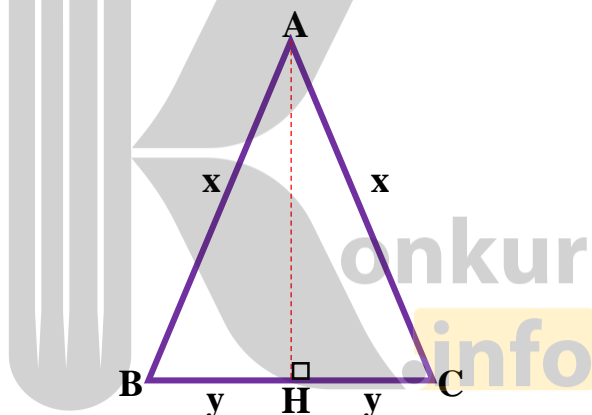
$$\Rightarrow x^2 - 12000 = 0 \Rightarrow x^2 = 30 \times 20^2 \Rightarrow x = 20\sqrt{30}$$

$$\Rightarrow C(20\sqrt{30}) = 50000 \left( 20\sqrt{30} + \frac{12000}{20\sqrt{30}} \right)$$

مثال : می‌خواهیم کنار یک رودخانه یک محوطه را به شکل مثلث متساوی الساقین در بیاوریم به طوری که بیشترین مساحت ممکن را داشته باشد. اگر تنها، هزینه‌ی ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ماگزیمم مساحت این مثلث کدام است؟ (مشابه تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۲۰ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

در مثلث متساوی الساقین زیر ، ارتفاع وارد بر قاعده را رسم کرده‌ایم:



می‌خواهیم مثلث بیشترین مساحت را داشته باشد (تابع هدف)

$$S = \frac{AH \times BC}{2}$$

مساحت مثلث برابر است با:

طول ارتفاع  $AH$  را بر حسب  $x$  و  $y$  می‌نویسیم:

رابطه فیثاغورس

$$\implies AH^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow AH = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$BC = 2y$$

در نتیجه:

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \xrightarrow{AH=\sqrt{x^2-y^2}, BC=2y} S = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} \times (2y)}{2}$$

$$\Rightarrow S = y\sqrt{x^2 - y^2}$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

طبق فرض، محیط مثلث برابر ۱۲۰ می باشد (معادله کمکی)

بنابر این:

$$2y + 2x = 120$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله ی کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $y$  تنها شود)

$$\Rightarrow y + x = 60 \Rightarrow y = 60 - x$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = y\sqrt{x^2 - y^2} \xrightarrow{y=60-x} S = (60-x)\sqrt{x^2 - (60-x)^2}$$
$$\Rightarrow S(x) = (60-x)\sqrt{x^2 - (3600 - 120x + x^2)}$$
$$= (60-x)\sqrt{120x - 3600}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = (-1)(\sqrt{120x - 3600}) + \frac{120}{2\sqrt{120x - 3600}}(60 - x)$$
$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} S'(x) = \frac{-120x + 3600 + 3600 - 60x}{\sqrt{120x - 3600}}$$
$$= \frac{-180x + 7200}{\sqrt{120x - 3600}} = 0 \Rightarrow -180x + 7200 = 0 \Rightarrow x = 40$$

$$\Rightarrow S(40) = (60 - 40)\sqrt{40^2 - (60 - 40)^2} = 20\sqrt{1600 - 400}$$
$$= 20\sqrt{1200} = 400\sqrt{3}$$

مثال : هر صفحه‌ی یک کتاب شامل یک متن با ۷۲ سانتی متر مربع است.  
 هنگام طراحی این کتاب، باید حاشیه‌های بالا و پایین برای هر صفحه به  
 اندازه‌ی ۲ سانتی متر و حاشیه‌های کناری هر کدام به اندازه‌ی یک سانتی  
 متر در نظر گرفته شود. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر  
 صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن شود.

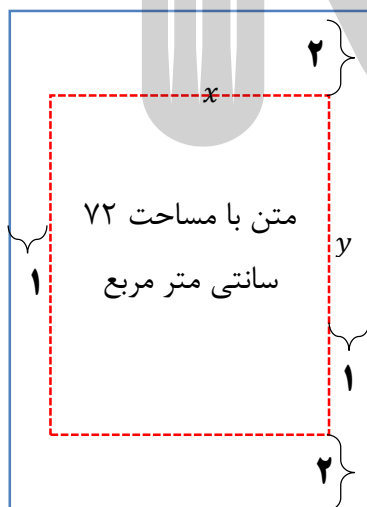
(مشابه تمرین ۴ صفحه‌ی ۱۲۰ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

می‌خواهیم مساحت کل صفحه (مستطیل بزرگ) کم‌ترین مقدار شود. (تابع هدف)

$$S = (\text{عرض}) (\text{طول})$$

طبق شکل، داریم:



$$\text{عرض صفحه} = x + 1 + 1 = x + 2$$

$$\text{طول صفحه} = y + 2 + 2 = y + 4$$

بنابراین:

$$S = (x + 2)(y + 4) = xy + 4x + 2y + 8$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال مساحت مستطیل کوچک برابر ۷۲ است. (معادله کمکی)

$$\text{مساحت مستطیل کوچک} = 72 \Rightarrow xy = 72$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله کمکی،  $y$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $y$  تنها شود)

$$xy = 72 \Rightarrow y = \frac{72}{x}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف:

$$S = xy + 4x + 2y + 8 \xrightarrow{y = \frac{72}{x}} S = 72 + 4x + 2 \times \left(\frac{72}{x}\right) + 8$$

$$\Rightarrow S(x) = 80 + 4x + \frac{144}{x}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = 4 - \frac{144}{x^2} = \frac{4x^2 - 144}{x^2}, S'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

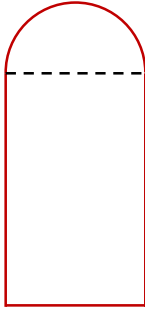
$$y = \frac{72}{x} \quad x=6 \Rightarrow y = \frac{72}{6} = 12$$

بنابر این:

$$\text{طول صفحه} = y + 4 \xrightarrow{y=12} \text{طول صفحه} = 12 + 4 = 16$$

$$\text{عرض صفحه} = x + 2 \xrightarrow{x=6} \text{عرض صفحه} = 6 + 2 = 8$$





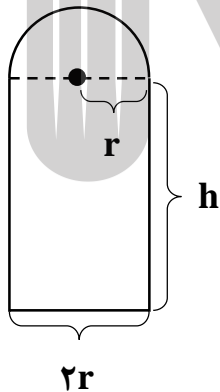
مثال : در پنجره‌ی شکل مقابل، قطر نیم دایره با عرض مستطیل برابر است. اگر محیط پنجره برابر ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری به دست آورید که پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد.

(مشابه مثال ۴ صفحه‌ی ۱۱۶ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

هرچه مساحت پنجره بیش‌تر باشد، نوردهی بیش‌تر است:

می‌خواهیم مساحت پنجره ماکزیمم شود (تابع هدف)



مساحت پنجره مطابق شکل بالا برابر است با:

$$S = (\text{مساحت مستطیل}) + (\text{مساحت نیم دایره}) = (2r)h + \frac{1}{2}(\pi r^2)$$

## مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض داریم محیط پنجره برابر ۶ متر است (معادله کمکی):

$$\text{محیط پنجره} = 2r + 2h + \frac{1}{2}(\underbrace{2\pi r}_{\text{محیط دایره}}) = 2r + 2h + \pi r = 6$$

## مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله کمکی،  $h$  را بر حسب  $r$  می نویسیم (کاری می کنیم  $h$  تنها شود)

$$2r + 2h + \pi r = 6 \Rightarrow 2h = 6 - 2r - \pi r = 6 - r(\pi + 2)$$

$$\Rightarrow h = 3 - \frac{1}{2}(\pi + 2)r$$

## مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$S = (2r)h + \frac{1}{2}(\pi r^2) \xrightarrow{h=3-\frac{1}{2}(\pi+2)r}$$

$$\begin{aligned} S(r) &= 2r \times \left( 3 - \frac{1}{2}(\pi + 2)r \right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= 6r - (\pi + 2)r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 \end{aligned}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

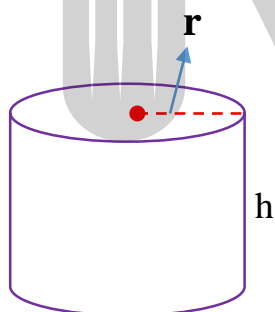
برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(r)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(r) = 6 - 2(\pi + 2)r + \pi r = 6 + r \overbrace{(\pi - 2(\pi + 2))}^{-\pi - 4} = 0$$

$$\Rightarrow (\pi + 4)r = 6 \Rightarrow r = \frac{6}{\pi + 4}$$

مثال: برای ساخت یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز به حجم  $64\pi$ ، ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم

شود.



### مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

برای آن که مقدار فلز به کار رفته در تولید قوطی مینیمم شود باید مساحت کل این قوطی در باز، کمترین مقدار شود. (تابع هدف)

مساحت جانبی + مساحت قاعده = مساحت کل قوطی (استوانه‌ی درباز)

بنابر این:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h$$

### مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال حجم استوانه برابر  $64\pi$  است. (معادله کمکی)

$$\text{حجم استوانه} = 64\pi \Rightarrow \pi r^2 h = 64\pi \Rightarrow \text{حجم استوانه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

### مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله‌ی کمکی،  $h$  را بر حسب  $r$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $h$  تنها شود)

$$\pi r^2 h = 64\pi \Rightarrow h = \frac{64\pi}{\pi r^2} = \frac{64}{r^2}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمی در تابع هدف

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h \xrightarrow{h = \frac{64}{r^2}} S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{64}{r^2}\right) \\ = \pi r^2 + \frac{128\pi}{r} = \pi \left(r^2 + \frac{128}{r}\right)$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $S(r)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow S' = \pi \left(2r - \frac{128}{r^2}\right) = \pi \times \frac{2r^3 - 128}{r^2} = 0 \Rightarrow 2r^3 - 128 = 0$$

$$\Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4$$

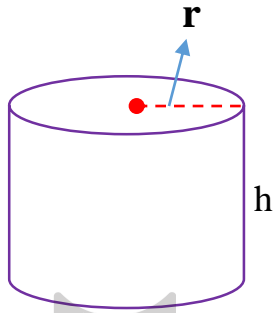
$$h = \frac{64}{r^2} \xrightarrow{r=4} h = \frac{64}{16} = 4$$

مثال: حجم یک قوط استوانه‌ای شکل  $54\pi$  واحد مکعب است. اگر هزینه‌ی

فلز به کار رفته در تولید این قوطی کم‌ترین مقدار ممکن باشد. کم‌ترین

مساحت فلز به کار رفته را به دست آورید.

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف



برای آن که مقدار فلز به کار رفته در تولید قوطی مینیمم شود باید مساحت کل این قوطی در باز، کمترین مقدار شود. (تابع هدف)

مساحت جانبی + مساحت قاعده  $\times 2$  = مساحت کل قوطی (استوانه‌ی)

بنابر این:

$$S = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال حجم استوانه برابر  $54\pi$  است. (معادله کمکی)

$$\text{حجم استوانه} = 54\pi \Rightarrow \pi r^2 h = 54\pi \Rightarrow \text{حجم استوانه} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،  $h$  را بر حسب  $r$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $h$  تنها شود)

$$\pi r^2 h = 64\pi \Rightarrow h = \frac{64\pi}{\pi r^2} = \frac{64}{r^2}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \xrightarrow{h = \frac{64}{r^2}} S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left( \frac{64}{r^2} \right) \\ &= 2\pi r^2 + \frac{128\pi}{r} = 2\pi \left( r^2 + \frac{64}{r} \right) \end{aligned}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از  $S(r)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow S' = 2\pi \left( 2r - \frac{64}{r^2} \right) = 2\pi \times \frac{2r^3 - 64}{r^2} = 0 \Rightarrow 2r^3 - 64 = 0$$

$$\Rightarrow r^3 = 32 \Rightarrow r = 3.2$$

$$= S(r) = 2\pi \left( r^2 + \frac{64}{r} \right) \xrightarrow{r=3.2} S(3.2) = 2\pi \left( (3.2)^2 + \frac{64}{3.2} \right) = 64\pi$$

مثال : در ساخت یک مخزن به شکل مکعب مستطیل در باز به حجم ۱۵۰ متر مکعب که طول کف مخزن ۳ برابر عرض آن است، در صورتی که هزینه-ی هر متر مربع برای کف ۴۵ هزار تومان و برای دیواره‌ها ۲۵ هزار تومان باشد. ارتفاع کدام باشد تا هزینه کم‌ترین مقدار شود؟

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

حل) برای آنکه هزینه کمترین شود باید مساحت کمترین شود (تابع هدف)  
 $25000 \times (\text{مساحت جانبی مکعب مستطیل}) + 45000 \times (\text{مساحت کف مکعب مستطیل}) = \text{هزینه}$   
 باتوجه به شکل زیر:



$$y = 3x$$

$$\text{مساحت کف مکعب مستطیل} = 3x \times x = 3x^2$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی مکعب مستطیل}$$

$$= (2(3x + x)) \times h = 8xh$$



بنابراین:

$$C = (3x^2) \times 45000 + (\lambda xh) \times 25000 = 135000x^2 + 200000xh$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال حجم مکعب مستطیل برابر ۱۵۰ متر مکعب است. (معادله کمکی)

$$150 = \text{حجم مکعب مستطیل} \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

$$\Rightarrow 3x \times x \times h = 150 \Rightarrow 3x^2h = 150$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله کمکی،  $h$  را بر حسب  $x$  می نویسیم (کاری می کنیم  $h$  تنها شود)

$$3x^2h = 150 \Rightarrow h = \frac{150}{3x^2} = \frac{50}{x^2}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$\begin{aligned} C &= 135000x^2 + 200000xh \xrightarrow{h=\frac{50}{x^2}} C = 135000x^2 + 200000x\left(\frac{50}{x^2}\right) \\ &= 135000x^2 + \left(\frac{10000000}{x}\right) \\ &= 10000 \left(135x^2 + \frac{10000}{x}\right) \end{aligned}$$

## مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

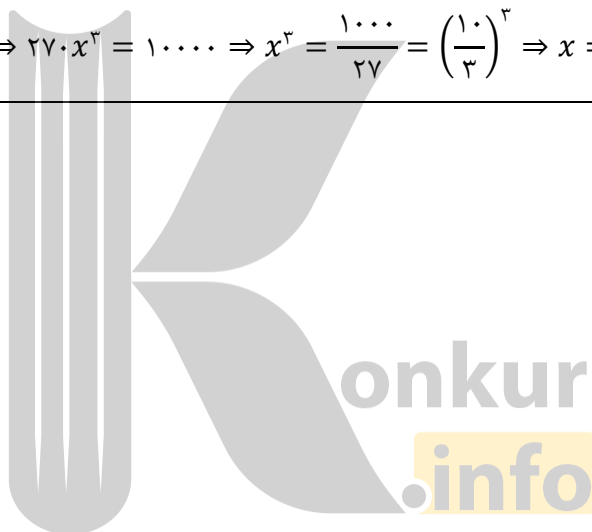
برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از  $C(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(x) = 1000 \left( 270x - \frac{10000}{x^2} \right) = 1000 \left( \frac{270x^3 - 10000}{x^2} \right)$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 270x^3 = 10000 \Rightarrow x^3 = \frac{10000}{27} = \left( \frac{10}{3} \right)^3 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

---



دسته سوم) مسایل مربوط به بیشترین و کمترین مقدار حجم

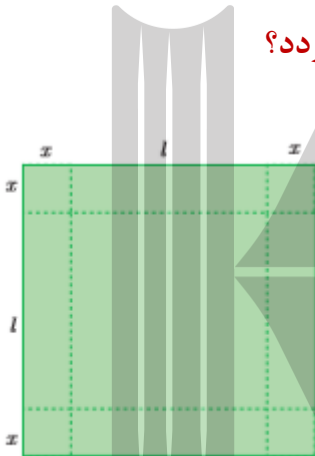
مثال : ورق فلزی مربع شکل به طول ۳۰ سانتی متر را در نظر بگیرید.

مطابق شکل می خواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع  $x$

برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط

چین های مشخص شده در شکل، یک قوطی در باز بسازیم. مقدار  $x$  چقدر

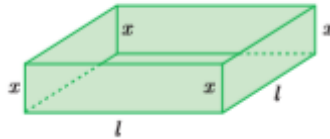
باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟



onkur  
.info

### مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

مطابق شکل، طول و عرض قاعده‌ی مکعب مستطیل برابر  $l$  و ارتفاع آن مساوی  $x$  است.



می‌خواهیم حجم قوطی، بیشترین مقدار ممکن گردد. (تابع هدف)

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب مستطیل}$$

مطابق شکل:

$$V = (l \times l) \times x = l^2 x$$

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به فرض سوال طول ضلع مربع برابر ۳۰ است. (معادله کمکی)

$$30 = \text{طول ضلع مربع}$$

$$\Rightarrow x + l + x = 30 \Rightarrow 2x + l = 30$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

از معادله‌ی کمکی،  $l$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم (کاری می‌کنیم  $l$  تنها شود)

$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x, \quad x \in (0, 15)$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$V = l^2 x \xrightarrow{l=30-2x} V = (30 - 2x)^2 x$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

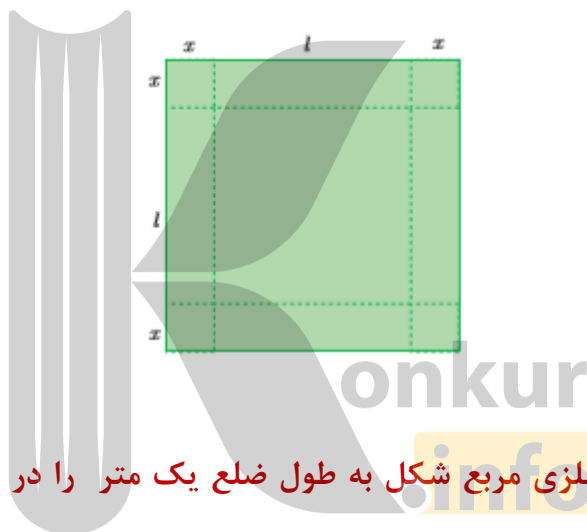
برای به دست آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از  $V(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} V'(x) &= (2(30 - 2x)(-2)) \times x + 1(30 - 2x)^2 \\ &= (30 - 2x)(-4x + 30 - 2x) \\ &= (30 - 2x)(30 - 6x) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} 30 - 2x = 0 \Rightarrow x = 15 & (\text{غ. ق. ق.}) \\ 30 - 6x = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

به ازای  $x = 5$ ، بیش‌ترین حجم مکعب مستطیل به دست می‌آید.

تمرین : ورق فلزی مربع شکل به طول ۳۶ سانتی‌متر را در نظر بگیرید.  
 مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع  $x$   
 برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط  
 چین‌های مشخص شده در شکل، یک قوطی در باز بسازیم. مقدار  $x$  چقدر  
 باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد. جواب:  $x = 6$



تمرین : ورق فلزی مربع شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید.  
 می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع  $x$  برش بزنیم و  
 آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه  $x$  برمی‌گردانیم تا یک  
 جعبه در باز ساخته شود. مقدار  $x$  چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار  
 ممکن گردد. جواب:  $x = \frac{1}{6}$  (امتحان نهایی خرداد ۹۸)

دسته چهارم) مسایل مربوط به بیشترین و کمترین مقدار مکان و زمان و سرعت

مثال : ابوالفضل می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب

و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با

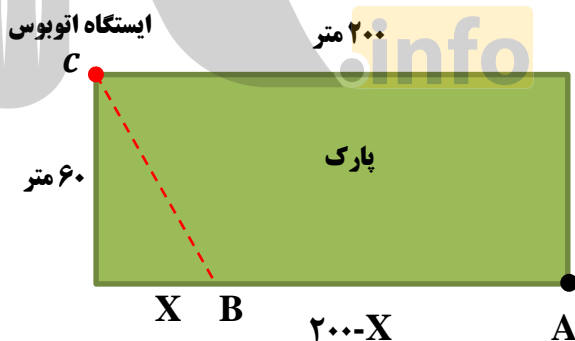
سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب

برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ متر بر ثانیه

عبور کند. با توجه به شکل، مقدار  $x$  را طوری تعیین کنید که او در کمترین

زمان ممکن به ایستگاه برسد. (تمرین ۵ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی)

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف



می خواهیم در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد (تابع هدف)

زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  به  $C$  برابر است با:

زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $B$  به  $C$  + زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  به  $B$  = زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  به  $C$

می دانیم اگر  $x$  مسافت طی شده با سرعت ثابت  $V$  در مدت زمان  $t$  باشد. آن گاه

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

اگر  $t_1$  زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  (موقیت کنونی ابوالفضل) به  $B$  با سرعت

$$t_1 = \frac{200-x}{3}$$

۳ متر بر ثانیه باشد، آن گاه

اگر  $t_2$  زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $B$  به نقطه‌ی  $C$  با سرعت ۲ متر بر ثانیه

باشد، آن گاه:

$$t_2 = \frac{BC}{2}$$

اگر  $t$  زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  به  $C$  باشد، آن گاه:

زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $B$  به  $C$  + زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  به  $B$  = زمان رسیدن ابوالفضل از نقطه‌ی  $A$  به  $C$

$$t = t_1 + t_2 \Rightarrow t(x) = \frac{(200-x)}{3} + \frac{BC}{2}$$



## مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:  $BC^2 = 60^2 + x^2$  (معادله کمکی)

## مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله کمکی،  $BC$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم

$$BC^2 = 60^2 + x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{60^2 + x^2}$$

## مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$t(x) = \frac{(200-x)}{3} + \frac{BC}{2}$$

$$\xrightarrow{BC = \sqrt{60^2 + x^2}} t(x) = \frac{(200-x)}{3} + \frac{\sqrt{60^2 + x^2}}{2}$$

## مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از  $t(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

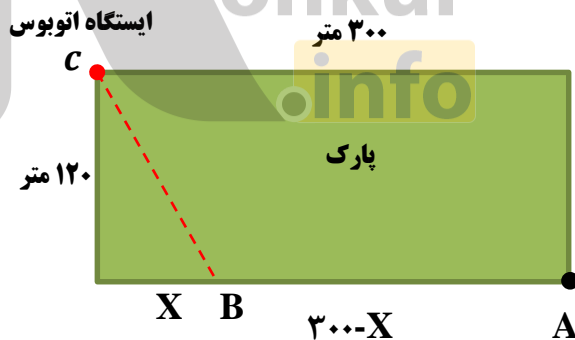
$$t'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{60^2 + x^2}} = \frac{-2\sqrt{60^2 + x^2} + 3x}{6\sqrt{60^2 + x^2}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2\sqrt{60^2 + x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 2\sqrt{60^2 + x^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} 9x^2 = 4(60^2 + x^2)$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 60^2 \Rightarrow \sqrt{5}x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 12\sqrt{5}$$

تمرین: در شکل مقابل، شخصی در نقطه‌ی **A** قرار دارد. او می‌خواهد به ایستگاه اتوبوس برسد. این شخص می‌تواند با سرعت ۴ متر بر ثانیه از نقطه‌ی **A** به سمت غرب برود و هم چنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ متر بر ثانیه عبور کند. مقدار  $x$  کدام باشد تا این شخص در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد؟

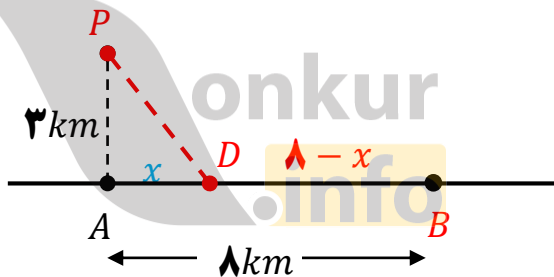


مثال: کیان درون قایقی در نقطه  $P$  قرار دارد که فاصله‌ی آن از نزدیک-ترین نقطه‌ی ساحل یعنی نقطه‌ی  $A$  معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه‌ی  $B$  در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری  $A$  قرار دارد فرض کنید سرعت حرکت قایق  $2\text{ km/h}$  و سرعت پیاده روی کیان در ساحل  $4\text{ km/h}$  باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به  $B$  برسد، در چه نقطه‌ای

از ساحل باید پیاده شده و به سوی  $B$  پیاده روی کند؟

مرحله ۱: رسم شکل و نوشتن معادله تابع هدف

(مثال ۵ صفحه‌ی ۱۱۷ کتاب درسی)



نقطه‌ای از ساحل را که شخص پیاده می‌شود،  $D$  می‌نامیم.

می‌خواهیم در کمترین زمان ممکن به نقطه  $B$  ایستگاه برسد (تابع هدف)

زمان رسیدن کیان از نقطه‌ی  $P$  به  $B$  برابر است با:

زمان پیاده روی مسیر  $D$  تا  $B$  + زمان پارو زدن مسیر  $P$  تا  $D$  = زمان رسیدن کیان از نقطه‌ی  $P$  به  $B$

می دانیم اگر  $x$  مسافت طی شده با سرعت ثابت  $V$  در مدت زمان  $t$  باشد. آن گاه

$$x = Vt \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

اگر  $t_1$  زمان پارو زدن مسیر از نقطه‌ی  $P$  (موقیت کنونی کیان) به  $D$  با سرعت ۲

کیلومتر بر ساعت باشد، آن گاه

$$t_1 = \frac{PD}{2} : \text{ زمان پارو زدن مسیر } P \text{ تا } D$$

اگر  $t_2$  زمان پیاده روی از نقطه‌ی  $D$  به نقطه‌ی  $B$  با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت

باشد، آن گاه:

$$t_2 = \frac{DB}{4} = \frac{8-x}{4} = 2 - \frac{1}{4}x$$

اگر  $t$  کل زمان رسیدن کیان از نقطه‌ی  $P$  به  $B$  برابر است با:

زمان پیاده روی مسیر  $D$  تا  $B$  + زمان پارو زدن مسیر  $P$  تا  $D$  = زمان رسیدن کیان از نقطه‌ی  $P$  به  $B$

$$t = t_1 + t_2 \Rightarrow t = \frac{PD}{2} + 2 - \frac{1}{4}x$$

## مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

با توجه به رابطه فیثاغورس داریم:  $(PD^2 = 9 + x^2)$ . (معادله کمکی)

## مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی:

از معادله کمکی،  $PD$  را بر حسب  $x$  می‌نویسیم

$$(PD^2 = 9 + x^2) \Rightarrow PD = \sqrt{x^2 + 9}$$

## مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$t(x) = \frac{PD}{2} + 2 - \frac{1}{4}x \xrightarrow{PD = \sqrt{x^2 + 9}} t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{2} + \left(2 - \frac{1}{4}x\right), x \in [0, 8]$$

## مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از  $t(x)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$t'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 9}}{4\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 9} = 0 \Rightarrow 4x^2 = x^2 + 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

---

مثال : هزینه‌ی سوخت یک اتومبیل در هر ساعت برای حرکت با سرعت ثابت  $V$  کیلومتر بر ساعت، برابر  $35V^2$  تومان است. اگر سایر هزینه‌ها برای هر ساعت به طور ثابت برابر ۲۸۳۵ تومان باشد، اتومبیل با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه‌ی آن در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟  
(مشابه کاردر کلاس ۲ صفحه‌ی ۱۱۸ کتاب درسی)

مرحله ۱: نوشتن معادله تابع هدف

هزینه‌ی در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد (تابع هدف)

$$\text{هزینه اتومبیل} = (\text{مدت زمان}) \times (\text{هزینه ثابت}) + (\text{مدت زمان}) \times (\text{هزینه سوخت})$$

بنابراین:

$$C = (35V^2)t + (2835)t$$

هزینه‌ی  $t$  ساعت حرکت اتومبیل

مرحله ۲: نوشتن رابطه کمکی

$$\text{فرمول } t = \frac{x}{V} \text{ را داریم: (معادله کمکی)}$$

مرحله ۳: نوشتن یک متغیر بر حسب متغیر دیگر در رابطه کمکی :

معادله‌ی کمکی،  $t = \frac{x}{v}$  بر حسب  $t$  داده شده است :

$$t = \frac{x}{v} \xrightarrow{\text{هزینه یک کیلومتر حرکت } x=1} t = \frac{1}{v}$$

مرحله ۴: جایگذاری رابطه کمکی در تابع هدف

$$C = (35v^2)t + (2835)t \xrightarrow{t=\frac{1}{v}}$$
$$C(V) = (35v^2) \times \left(\frac{1}{v}\right) + (2835) \times \left(\frac{1}{v}\right) = 35v + \frac{2835}{v}$$

مرحله ۵: به دست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق:

برای به دست آوردن مقدار مینیمم مطلق ، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم،

بنابراین از تابع  $C(V)$  مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(V) = 35 - \frac{2835}{v^2} = \frac{35v^2 - 2835}{v^2} = 0 \Rightarrow 35v^2 - 2835 = 0$$

$$\Rightarrow v^2 = 81 \Rightarrow v = 9 \text{ km/h}$$

**تذکر:** اگر تابع هدف داده شده بر حسب یک متغیر باشد کفایت از تابع

هدف مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم مانند مثال زیر

**مثال:** غلظت یک داروی شیمیایی در خون،  $t$  ساعت پس از تزریق در ماهیچه از

رابطه‌ی  $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 128}$  به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو،

غلظت آن در خون، بیش‌ترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل) در این مثال تابع هدف  $C$  بر حسب یک متغیر داده شده است برای به دست

آوردن مقدار ماکزیمم مطلق، نقطه‌ی بحرانی را به دست می‌آوریم، بنابراین از  $C(t)$

مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$C'(t) = \frac{3(t^3 + 128) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 128)^2} = \frac{-6t^3 + 3 \times 128}{(t^3 + 128)^2}$$

$$\xrightarrow{C'(t)=0} 3 \times 128 - 6t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = 64 \Rightarrow t = 4 \text{ (ساعت)}$$



بروزترین و برترین  
سایت کنکوری کشور

[WWW.KONKUR.INFO](http://WWW.KONKUR.INFO)

**K**onkur  
**.info**

<https://konkur.info>