درس اول : رفع ابهام حد توابع در حالت $\frac{0}{0}$

حد توابع کسری

با قضیه‌ی زیر از پایه‌ی قبل آشنا هستیم:

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آن‌ها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طور که $m \neq o$ آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

مثال: $\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲-۳x+۲}{x+۱}=\frac{۱۲}{۶}=۲$

در سال گذشته دیدیم که برای محاسبه $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}$ اگر به $\frac{0}{0}$ برسیم می گوییم جواب حد **مبهم** است یعنی جواب واقعی حد را به دست نیاورده ایم در این صورت دیگر قضیه‌ی بالا برای محاسبه‌ی حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد.

پس باید عملیاتی برای به دست آوردن حد واقعی انجام دهیم تا **رفع ابهام** گردد.

نکته: برای رفع ابهام عامل صفر کننده یعنی $(x-a)$ را در صورت و مخرج ایجاد می کنیم و با ساده کردن آن از صورت و مخرج، مقدار حد را در صورت وجودبه دست می آوریم.

$(x-a)$ راعامل صفر کننده گوییم زیرا:

$$x \to a \Rightarrow x-a \to ۰$$

بخش اول :رفع ابهام توابع چندجمله ای

حالت اول :حذف عامل صفر کننده به کمک تجزیه

یادآوری تجزیه چند جمله‌ای‌ها: برای تجزیه چند جمله‌ای‌ها از دو روش زیر استفاده می کنیم

الف) فاکتورگیری   ب) تجزیه به کمک اتحادها

برای تجزیه یک عبارت ابتدا به سراغ فاکتورگیری می‌رویم که شرط استفاده از فاکتورگیری وجود یک عبارت مشترک است.

الف) **فاکتورگیری:** عبارت مشترک با توان کمتر را به عنوان فاکتور در نظر می گیریم و بقیه عبارات را بر فاکتور تقسیم می کنیم و در پرانتز دیگری قرار می‌دهیم:

۱) $x^{۲}-x \xrightarrow{x \text{ مشترک پس } x \text{ فاکتور}} x(x-۱)$ $\frac{x^{۲}}{x}=x \quad , \quad \frac{x}{x}=۱$	۲) $x^{۳}-۴x^{۲}+x=x(x^{۲}-۴x+۱)$
۳) $x^{۳}-۴x^{۲}=x^{۲}(x-۴)$	۴) $۲x^{۲}-۴x=۲x(x-۲)$
۵) $۲x-۴=۲(x-۲)$	۶) $۵x^{۲}-۷x=x(۵x-۷)$
۷) $x^{۵}-۴x^{۴}=x^{۴}(x-۴)$	۸) $۲x^{۳}+۱۶=۲(x^{۳}+۸)$
۹) $۴x-۶=۲(x-۳)$	۱۰) $-۱۵x^{۲}-۲۰x^{۳}=-۵x^{۲}(۳+۴x)$
۱۱) $-x^{۲}-x=-x(x+۱)$	۱۲) $-x-۵=-(x+۵)$

ب) **تجزیه به کمک اتحادها:**

دو جمله باشند
- I) اتحاد مزدوج $a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)$
- II) اتحاد چاق و لاغر $a^{۳}\pm b^{۳}=(a\pm b)(a^{۲}\mp ab+b^{۲})$

سه جمله باشند : اتحاد جمله مشترک ($x^{۲}$ ضریب یک داشته باشد) $x^{۲}+(a+b)x+a.b$

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $x^{۳}-۳x^{۲}=x^{۲}(x-۳)$

۲) $x^{۲}+x-۲=(x-۱)(x+۲)$

۳) $x-x^{۲}=x(۱-x)$

۴) $۳x-۶=۳(x-۲)$

۵) $-x-۲=-(x+۲)$

۶) $x^{۳}-۴x^{۲}+x=x(x^{۲}-۴x+۱)$

۷) $۵x^{۵}-۴x^{۴}+x^{۳}=x^{۳}(۵x^{۲}-۴x+۱)$

۸) $x^{۵}-x^{۴}=x^{۴}(x-۱)$

۹) $۴x^{۵}-x^{۳}=x^{۳}(۴x^{۲}-۱)=x^{۳}(۲x-۱)(۲x+۱)$

۱۰) $۶x+۸=۲(۳x+۴)$

۱۱) $۲-۴\sqrt{x}=۲(۱-۲\sqrt{x})$

۱۲) $x^{۲}-۴=(x-۲)(x+۲)$

۱۳) $x^{۲}-۱=(x-۱)(x+۱)$

۱۶) $x^{۲}-۲=(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})$

۱۷) $x^{۳}-۴x=x(x^{۲}-۴)=x(x-۲)(x+۲)$

۱۸) $x^{۳}+۸=(x+۲)(x^{۲}-۲x+۴)$

۱۹) $x^{۳}-۸=(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)$

۲۰) $x^{۳}+۲۷=(x+۳)(x^{۲}-۳x+۹)$

۲۱) $x^{۳}-۶۴=(x-۴)(x^{۲}+۴x+۱۶)$

۲۲) $۸x^{۳}-۲۷=(۲x-۳)(۴x+۶x+۹)$

۲۳) $x^{۲}-۴x+۳=(x-۳)(x-۱)$

۲۴) $x^{۲}-۴x+۴=(x-۲)(x-۲)=(x-۲)^{۲}$

۲۵) $x^{۲}-۶x+۸=(x-۴)(x-۲)$

۲۶) $x^{۲}-x-۲=(x-۲)(x+۱)$

۲۷) $x^{۲}-۶x+۵=(x-۵)(x-۱)$

۲۸) $x^{۲}+x-۶=(x+۳)(x-۳)$

۲۹) $x^{۲}-۱۸x+۷۲=(x-۶)(x-۱۲)$

۳۰) $x^{۲}-۱۵x+۵۰=(x-۱۰)(x-۵)$

۳۱) $x^{۲}-۵x-۶=(x-۶)(x+۱)$

۳۲) $۲x^{۳}-۳۲x=۲x(x^{۲}-۱۶)=۲x(x-۴)(x+۴)$

مثال : حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}$ را به دست آورید.

روش اول: با جایگذاری عدد۲ به جای xبه $\frac{0}{0}$ می رسیم که برای رفع ابهام بایستی عامل صفرکننده را در صورت و مخرج درست کنیم و با هم حذف کنیم تا رفع ابهام گردد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\frac{(2)^2-4}{(2)^2-6(2)+8}=\frac{0}{0}$$

$x\to 2\Rightarrow x-2\to 0\Rightarrow x-2$ عامل صفر کننده

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}=\frac{2+2}{2-4}=\frac{4}{-2}=-2$$

مثال : حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^{۲}+x^{۴}+x^{۳}}{۵x^{۴}-۲x^{۳}+۳x^{۲}}$ کدام است؟

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^{۲}+x^{۴}+x^{۳}}{۵x^{۴}-۲x^{۳}+۳x^{۲}}\xrightarrow{\text{تجزیه}}\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}(۲+x^{۲}+x)}{x^{۲}(۵x^{۲}-۲x+۳)}=\frac{۲}{۳}$$

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}$ را محاسبه کنید.

حل: صورت و مخرج کسر به ازای x=۱ برابر صفرند. بنابر این هم صورت و هم مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند.

این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۲)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۱+۱}{۱+۲}=\frac{۲}{۳}$$

مثال : حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to -۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x}$

حل)

$$\lim_{x\to -۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x}=\lim_{x\to -۳}\frac{(x+۳)(x-۳)}{x(x+۳)}=\lim_{x\to -۳}\frac{(x-۳)}{x}=\frac{-۶}{-۳}=۲$$

ب) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲x-۶}$ (نهایی – دی ۹۱)

حل)عبارت $x^۲-۹$ را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم: $a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{۲(x-۳)}=\frac{۶}{۲}=۳$$

پ) $\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲+۳x+۲}{۳x+۳}$

حل) عبارت $x^۲+۳x+۲$ را با استفاده از اتحاد حمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x+۲)}{۳(x+۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x+۲}{۳}=\frac{-۱+۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

ت) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-x}$ (نهایی – دی ۹۰)

حل)

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۴)(x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{۱-۴}{۱}=-۳$$

مثال: a را طوری بیابید که $\lim_{x\to 2a}\frac{x-2a}{x^2-4a^2}=\frac{1}{8}$ باشد. (نهایی – خرداد ۸۶)

$$\lim_{x\to 2a}\frac{x-2a}{x^2-4a^2}=\lim_{x\to 2a}\frac{x-2a}{(x-2a)(x+2a)}=\frac{1}{2a+2a}=\frac{1}{4a}=\frac{1}{8}\Rightarrow 4a=8\Rightarrow=2$$

حالت دوم:تجزیه توابع چند جمله ای به کمک تقسیم

نکته:اگر به کمک فاکتورگیری و تجزیه نتوانیم عبارت را تجزیه کنیم به کمک تقسیم تجزیه می کنیم .

تذکر: در حالت های زیراز تقسیم استفاده می کنیم:

حالت اول)سه جمله درجه دو ضریب دار مانند $2x^2-5x-3$

حالت دوم) عبارت درجه ۳که بیشتر از دوجمله داشته باشدمانند $2x^3+3x+4$

یادآوری تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای:

مرحله ۱: چند جمله‌ای مقسوم و چند جمله‌ای مقسوم علیه را به صورت استاندارد (از توان زیادبه کم) می‌نویسیم و تقسیم را به صورت چکشی می‌نویسیم.

مرحله ۲: جمله‌ی اول چند جمله‌ای مقسوم را بر جمله‌ی اول مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم و آن را در خارج قسمت می‌نویسیم.

مرحله ۳: حاصل به دست آمده مرحله قبل را در تک تک جملات مقسوم علیه ضرب می‌کنیم.

مرحله ۴: جواب به دست آمده در مرحله قبل را قرینه کرده و با مقسوم جمع می‌کنیم.

مرحله ۵: این روند را آنقدر تکرار می‌کنیم که درجه‌ی باقی مانده از مقسوم علیه کمتر شود.

$(2x^3-6x+9x^2-4)\div(1+2x)$

مرحله۱ :

$$
\begin{array}{r|l}
۲x^۳ + ۹x^۲ - ۶x - ۴ & ۲x + ۱ \\ \cline{2-2}
-۲x^۳ - x^۲ & x^۲ + ۴x - ۵ \\ \cline{1-1}
۸x^۲ - ۶x - ۴ & \\
-۸x^۲ - ۴x & \\ \cline{1-1}
-۱۰x - ۴ & \\
۱۰x + ۵ & \\ \cline{1-1}
۱ &
\end{array}
$$

مرحله۲ : $\frac{۲x^۳}{۲x} = x^۲$

مرحله۳ : $x^۲(۲x + ۱) = ۲x^۳ + x^۲$

مرحله۴ : $-۲x^۳ - x^۲$

مرحله۵ : تکرار مراحل قبل

$\frac{۸x^۲}{۲x} = ۴x$

$۴x(۲x + ۱) = ۸x^۲ + ۴x$

$-۸x^۲ - ۴x$

تکرار مراحل قبل $\frac{-۱۰x}{۲x} = -۵$

$-۵(۲x + ۱) = -۱۰x - ۵$

قرینه $۱۰x + ۵$

درجه باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه
کمتر است پس تقسیم انجام شد.

$$
\begin{array}{r|l}
۲۷x^۳ - ۸ & ۳x - ۲ \\ \cline{2-2}
-۲۷x^۳ + ۱۸x^۲ & ۹x^۲ + ۶x + ۴ \\ \cline{1-1}
۱۸x^۲ - ۸ & \\
-۱۸x^۲ + ۱۲x & \\ \cline{1-1}
۱۲x - ۸ & \\
-۱۲x + ۸ & \\ \cline{1-1}
۰ \quad ۰ &
\end{array}
$$

بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $(x-a)$ و تجزیه آنها به کمک تقسیم

مثال: چند جمله‌ای $f(x)=۳x^۲-۵x-۲$ را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x-۲)$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲-۵x-۲ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{-(۳x^۲-۶x)} & ۳x+۱ \\ \quad x-۲ & \\ \underline{-(x-۲)} & \\ \quad\quad ۰ & \end{array}$$

دراین تقسیم چون باقیمانده برابر صفر است. بنابر این $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش پذیر است.

بنابر رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$f(x)=۳x^۲-۵x-۲=(x-۲)(۳x+۱)+۰$$

$$\rightarrow f(x)=۳x^۲-۵x-۲=(x-۲)(۳x+۱)$$

همانگونه که دیده می‌شود، $f(x)$ به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشته شده است.

مثال: چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x-۳)$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲-۵x+۱ & x-۳ \\ \cline{2-2} \underline{-(۲x^۲-۶x)} & ۲x+۱ \\ \quad x+۱ & \\ \underline{-(x-۳)} & \\ \quad\quad ۴ & \end{array}$$

بنابر رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$f(x)=۲x^۲-۵x+۱=(x-۳)(۲x+۱)+۴$$

چون باقیمانده صفر نشده پس نمی توان $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول نوشت.

اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چند جمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x-a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چند جمله‌ای $Q(x)$ و باقیمانده‌ی آن عدد ثابت R باشد: رابطه‌ی تقسیم به صورت زیر است:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} & Q(x) \\ \overline{} & \\ R & \end{array}$$

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

این رابطه،اگر باقیمانده R برابر صفر شود(یعنی مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر باشد) آنگاه خواهیم داشت:

$$f(x)=(x-a)Q(x)$$

یعنی، $f(x)$ به صورت **حاصل ضرب عامل‌های اول** نوشته شده است.

به دست آوردن باقیمانده تقسیم چندجمله ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بدون انجام تقسیم

مثال: چند جمله‌ای $f(x) = ۲x^۲ - ۵x + ۱$ را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x - ۳)$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۲ - ۵x + ۱ & x - ۳ \\ \hline -(۲x^۲ - ۶x) & ۲x + ۱ \\ \quad x + ۱ & \\ -(x - ۳) & \\ \hline \quad ۴ & \end{array}$$

-در تقسیم بالا، باقیمانده را با R نشان می دهیم وبرابر ۴ است.

مقسوم علیه $(x - ۳)$ را مساوی صفر قرار می دهیم و در مقسوم $(۲x^۲ - ۵x + ۱)$ قرار می دهیم داریم:

$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$

$f(۳) = ۲(۹) - ۵(۳) + ۱ = ۱۸ - ۱۵ + ۱ = ۴$

-مقدار $f(۳)$ و باقیمانده با هم برابرند یعنی $f(۳) = R$

اکنون می‌خواهیم در حالت کلی چند جمله‌ای دلخواه $f(x)$ را بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x - a)$ تقسیم کنیم. فرض کنیم خارج قسمت این تقسیم، چند جمله‌ای $Q(x)$ و باقیمانده‌ی آن عدد ثابت R باشد: رابطه‌ی تقسیم به صورت زیر است:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x - a \\ \hline & Q(x) \\ R & \end{array}$$

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

این رابطه، به ازای تمام مقادیر x درست است؛ از جمله به ازای x=a با قرار دادن a به جای x در دو طرف رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$f(a) = \underbrace{(a - a)Q(a)}_{o} + R \Rightarrow f(a) = R$$

قضیه: در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه‌ی اول $(x-a)$ باقی مانده‌ی تقسیم برابر $f(a)$ است.

به زبان ساده تر:برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)$ بدون انجام تقسیم مقسوم علیه یعنی $(x-a)$ را مساوی صفر قرار می دهیم وعدد به دست آمده را در مقسوم یعنی $f(x)$قرار می دهیم.

نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.

مثال :نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دو جمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر است.

$x+۲=۰\to x=-۲$

$$f(-۲)=۲(-۲)^۳+۵(-۲)^۲-۳(-۲)-۱۰=-۱۶+۲۰+۶-۱۰=۰\Rightarrow \boxed{R=۰}$$

مثال:الف) نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر دوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

سوال ۱: الف)

$x+۱=۰\to x=-۱$

$$f(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۲+۱=-۲+۱+۱=o\to \boxed{R=o}$$

ب)

$$\begin{array}{l|l}
۲x^۳+x^۲+۱ & x+۱ \\ \cline{2-2}
\underline{-(۲x^۳+۲x^۲)} & ۲x^۲-x+۱ \\
-x^۲+۱ & \\
\underline{-(-x^۲-x)} & \\
x+۱ & \\
\underline{-(x+۱)} & \\
۰ &
\end{array}$$

$$f(x)=(x+۱)(۲x^۲-x+۱)$$

مثال: چند جمله‌ای $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۱$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $g(x)$ بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر است؟ بله چرا؟

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \to g(-۱) = ۲(-۱)^۳ + (-۱)^۲ \pm ۲ + ۱ + ۱ = ۰$$

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۳ + x^۲ + ۱ & x + ۱ \\ \hline \underline{-(۲x^۳ + ۲x^۲)} & ۲x^۲ - x + ۱ \\ \quad -x^۲ + ۱ & \\ \underline{-(-x^۲ - x)} & \\ \quad x + ۱ & \\ \underline{-(x + ۱)} & \\ \quad ۰ & \end{array}$$

پ) $g(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنوسید.

$$g(x) = (x+۱)(۲x^۲ - x + ۱)$$

مثال : باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) = ۳x^۳ - ۵x^۲ + ۱۴x - ۲۰$ را بر $x + ۲$ را به‌دست آورید.

$$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \to f(-۲) = ۳(-۲)^۳ - ۵(-۲)^۲ + ۱۴(-۲) - ۲۰ = -۲۴ - ۲۰ - ۲۸ - ۲۰ = -۹۲$$

مثال: نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۵x + ۶$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است و سپس $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌ها بنویسید.

حل)اگر $f(۱) = ۰$ شود، آن‌گاه $f(x)$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است:

$$f(۱) = ۲(۱)^۳ - ۳(۱)^۲ - ۵(۱) + ۶ = ۲ - ۳ - ۵ + ۶ = ۰$$

پس $f(x)$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است. $f(x)$ را بر $x - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۵x + ۶ & x - ۱ \\ \hline & ۲x^۲ - x - ۶ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} -۲x^۳ + ۲x^۲ \\ \hline -x^۲ - ۵x + ۶ \\ x^۲ - x \\ \hline -۶x + ۶ \\ ۶x - ۶ \\ \hline ۰ \end{array}$$

بنابر رابطه‌ی تقسیم، داریم:

$$۲x^۳ - ۳x^۲ - ۵x + ۶ = (x - ۱)(۲x^۲ - x - ۶)$$

عبارت درجه‌ی دوم $۲x^۲ - x - ۶$ به صورت $(۲x + ۳)(x - ۲)$ تجزیه می‌شود و در نتیجه داریم:

$$۲x^۳ - ۳x^۲ - ۵x + ۶ = (x - ۱)(۲x + ۳)(x - ۲)$$

مثال: اگر $f(x) = x^۴ + ax^۲ + ۴x + ۵$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را به‌دست آورید.

حل) $f(x)$ بر ۱-x بخش‌پذیر است، پس: $f(۱) = ۰$

$$f(۱) = ۱^۴ + a(۱)^۴ + ۴(۱) + ۵ = a + ۱۰ = ۰ \Rightarrow a = -۱۰$$

مثال: اگر $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx - ۶$ بر $x - ۲$ بخش‌پذیر باشد و باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x + ۱$ برابر۱۸- باشد، مقدار $f(۱)$ را به‌دست آورید.

حل) $f(x)$ بر $x - ۲$ بخش‌پذیر است، بنابر این $f(۲) = ۰$ است:

$$f(۲) = ۲^۳ + a(۲)^۴ + b(۲) - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴a + ۲b = -۲ \xrightarrow{\div ۲} ۲a + b = -۱ \qquad (۱)$$

باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x + ۱$ برابر ۱۸- است، پس مقدار $f(-۱)$ برابر ۱۸- است:

$$f(-۱) = (-۱)^۳ + a(-۱)^۲ + b(-۱) - ۶ = -۱۸ \Rightarrow a - b = -۱۱ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ۲a + b = -۱ \\ a - b = -۱۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳a = -۱۲ \Rightarrow a = -۴ \xrightarrow{۲a+b=-۱} -۸ + b = -۱ \Rightarrow b = ۷$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۳ - ۴x^۲ + ۷x - ۶ \Rightarrow f(۱) = ۱^۳ - ۴(۱)^۲ + ۷(۱) - ۶ = -۲$$

مثال: اگر باقی ماندهی چند جملهای $f(x) = ۲x^۴ + mx + ۲$ بر $x + ۱$ برابر ۲ باشد. باقی ماندهی تقسیم آن بر $x - ۱$ را بیابید. (نهایی – دی ۹۲)

حل) $x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \rightarrow f(-۱) = ۲ \Rightarrow ۲(-۱)^۴ + m(-۱) + ۲ = ۲ \Rightarrow m = ۲$

$$\Rightarrow f(x) = ۲x^۴ + ۲x + ۲$$

$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \rightarrow f(۱) = ۲(۱)^۴ + ۲(۱) + ۲ = ۶$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}$ را در نقطهی $x = -۲$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -۲$ برابر صفرند. باید عامل $(x + ۲)$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را میتوانیم به کمک اتحاد چاق و لاغر به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیهی صورت، آن را بر $(x + ۲)$ تقسیم میکنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۴ & x + ۲ \\ \hline -(۲x^۳ + ۴x^۲) & ۲x^۲ - x + ۲ \\ \hline -x^۲ + ۴ & \\ -(-x^۲ - ۲x) & \\ \hline ۲x + ۴ & \\ -(۲x + ۴) & \\ \hline o & \end{array}$$

بنابر رابطهی تقسیم میتوان نوشت

$۲x^۳ + ۳x^۲ + ۴ = (x + ۲)(۲x^۲ - x + ۲)$ بنابر این:

$$\lim_{x\to-۲} f(x) = \lim_{x\to-۲} \frac{(x+۲)(۲x^۲-x+۲)}{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)} = \frac{۸+۲+۲}{۴+۴+۴} = ۱$$

مثال: حدهای زیر را درصورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۴}\frac{x^۳-۵x^۲+۳x+۴}{۲x^۳-۳x-۲۰}$

حل) با قرار دادن عدد ۴ به جای x ، کسر به صورت $\frac{o}{o}$ در می‌آید. بنابر این چند جمله‌ای های $x^۳-۵x^۲+۳x+۴$ و $۲x^۲-۳x-۲۰$ بر $x-۴$ بخش‌پذیرند و با تقسیم این چند جمله‌ای‌ها بر x-۴ عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۲-۵x^۲+۳x+۴=(x-۴)(x^۲-x-۱)$$

$$۲x^۲-۳x-۲۰=(x-۴)(۲x+۵)$$

$$\text{حاصل حد}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x^۲-x-۱)}{(x-۴)(۲x+۵)}=\frac{۴^۲-۴-۱}{۲(۴)+۵}=\frac{۱۱}{۱۳}$$

ب) $\lim_{x\to ۵}\frac{x^۳+۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{(x-۵)(x^۲+x-۱)}{(x-۵)(x+۵)}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^۲+x-۱}{(x+۵)}=\frac{۲۵+۵-۱}{۱۰}=\frac{۲۹}{۱۰}$$

پ) $\lim_{x\to -۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}$

$$\lim_{x\to -۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}=\lim_{x\to -۴}\frac{(x+۴)(x-۱)}{(x+۴)(x^۲+۱)}=\lim_{x\to -۴}\frac{x-۱}{x^۲+۱}=\frac{-۵}{۱۷}$$

ت) $\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳-۵x^۲-۱۲x+۴}{x^۳+۸}$

حل)با تقسیم $x^۳-۵x^۲-۱۲x+۴$ بر $x+۲$ داریم:

$$x^۳-۵x^۲-۱۲x+۴=(x+۲)(x^۲-۷x+۲)$$

عبارت $x^۳+۸$ را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$a^۳\pm b^۳=(a\pm b)(a^۲\mp ab+b^۲)$$

$$\text{حاصل حد} = \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x^۲-۷x+۲)}{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)} = \frac{(-۲)^۲-۷(-۲)+۲}{(-۲)^۲-۲(-۲)+۴} = \frac{۵}{۳}$$

ث) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲-۴x+۱}{۲x^۲+x-۱}$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲-۴x+۱}{۲x^۲+x-۱} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{\left(x-\frac{۱}{۲}\right)(۴x-۲)}{(۲x+۲)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{(۴x-۲)}{(۲x+۲)} = \frac{۰}{۳} = ۰$$

ج) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x\left(x-\frac{۱}{۲}\right)}{۲\left(x-\frac{۱}{۲}\right)(۲x+۱)} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{x}{(۲x+۱)} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

بخش دوم: رفع ابهام توابع رادیکالی با استفاده از گویا کردن

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = o$ در این حالت برای محاسبه‌ی حد $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

حالت اول : درمخرج یا صورت کسر رادیکال

توجه: