

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

فصل دوم (مثلثات)

دوره تناوب:

تعریف:

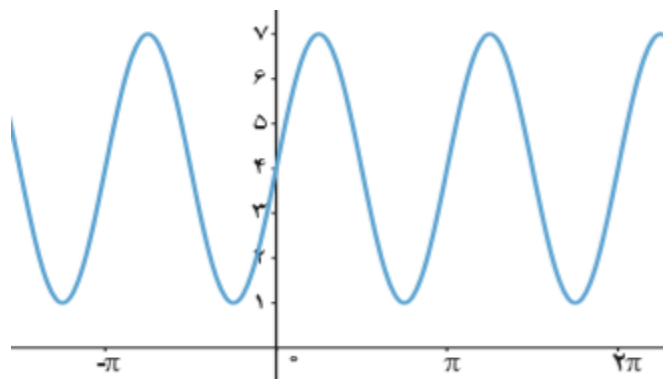
تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیم $|a| + c$ و مقدار مینیم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته:

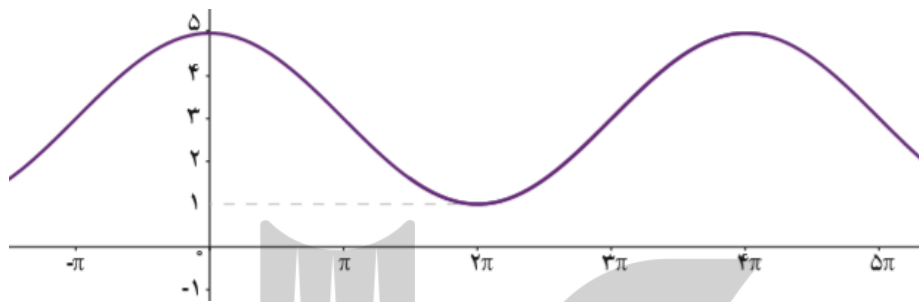
همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیم و مینیم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیم و مینیم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دوره تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیم و مینیم تابع تأثیرگذار است.

مثال: ضابطه؟



الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.
 از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

مثال: ضابطه؟

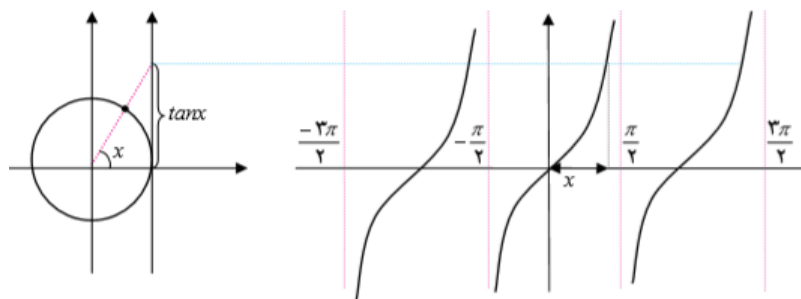


پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم: $y = 2 \cos\left(\frac{x}{4}\right) + 3$.

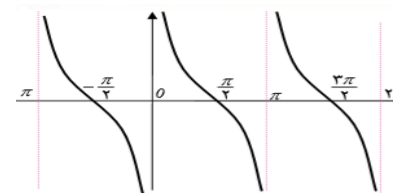
۲- تابع تانژانت:

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan x$ مشخص می‌کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan x$ ، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا:
 $\tan(\pi + x) = \tan x$

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعه $\left[0, 2\pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ بررسی کنید.



رسم نمودار تانژانت و کتانژانت:



مثال:

- ۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟
الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.
ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.
پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad (\text{ب})$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (\text{الف})$$

روابط دو الف با بر حسب الف

به طور کلی داریم:

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 3^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 3^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

۳- معادلات مثلثاتی:

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های کلی؟

$$4 \sin x + \sqrt{8} = 0$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

مثال: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید.

جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

حل:

جواب‌هایی قابل قبول اند که باقی‌مانده k ($k \in \mathbb{Z}$) بر ۴ برابر ۲ نباشد. (چرا؟)

مثال:

معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تمرین:

۱) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
الف) $\cos^2 \alpha$
ب) $\sin^2 \alpha$

۲) نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

ت) $\cos^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

۴) مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>