# فصل اول(تابع)

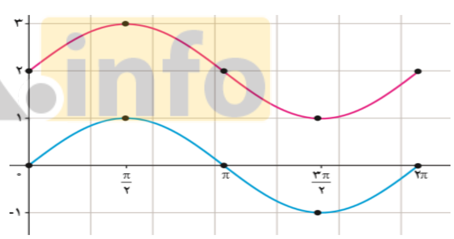
۱-تبدیل نمودار تابع:

## انتقال‌های عمودی و افقی

برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را $k$ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

مثال:



## انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $k$ ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y=kf(x)$ برای دو حالت $k>1$ و $0<k<1$ رسم شده است.

اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $x$ است.

## انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y = f(x)$ در راستای محور $x$ها به‌دست می‌آید و اگر $۰ < k < ۱$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

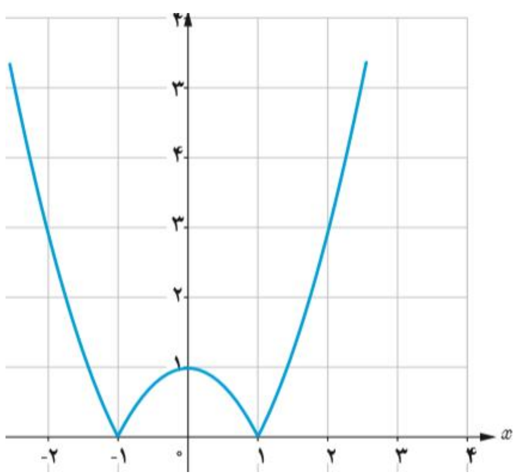
اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور $y$ است.

مثال:

نمودار تابع $f(x) = |x - ۲|$ را در بازهٔ $[-۲, ۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع

$g(x) = -|x - ۲|$ و $h(x) = \frac{۱}{۲}|x - ۲|$ و $k(x) = -\frac{۱}{۳}|۲ - x|$ را رسم کنید.






**رسم نمودار $|f|$ :**

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار $f$ زیر محور $x$هاست، قرینهٔ نمودار $f$ را نسبت به محور $x$ها رسم کنیم.

**مثال :** در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = |x^۲ - ۱|$ رسم شده است.

**مثال :** تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

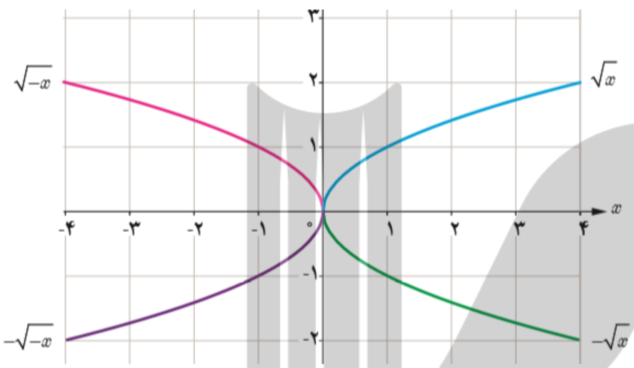
$$-۴\leq ۲x\leq ۰ \rightarrow -۲\leq x\leq ۰ \rightarrow f(۲x) \text{ دامنهٔ } : D=[-۲,۰]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-۴\leq \frac{x}{۲}\leq ۰ \rightarrow -۸\leq x\leq ۰ \rightarrow f(\frac{x}{۲}) \text{ دامنهٔ } : D=[-۸,۰]$$

مثال:

نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.




تعریف تابع چند جمله‌ای:

فرض کنید $n$ یک عدد صحیح نامنفی و $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_{n-۱}$ و $a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n\neq ۰$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** $n$ نامیده می‌شود.[۱]

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$$

تابع ثابت $f(x)=c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x)=mx+b$ که $m\neq ۰$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x)=ax^۲+bx+c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.

مثال:

**۲** نمودار هر یک از توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ در فاصله $[۰,۲]$ رسم شده است.

در فاصله $[۰,۱]$، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[۱,۲]$ چطور؟

مثال:

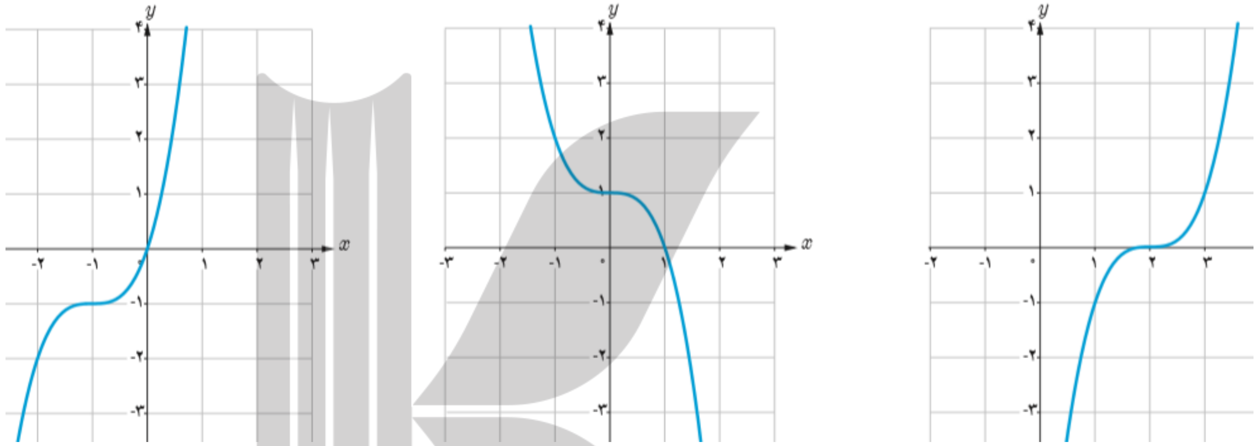
با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = -x^3 - 2$

ب) $y = (x+2)^3$

پ) $y = -(x-2)^3$

مثال: نمایش جبری توابع زیر را برحسب $x^3$ بنویسید:



نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ $D_f = [0, 2\pi]$

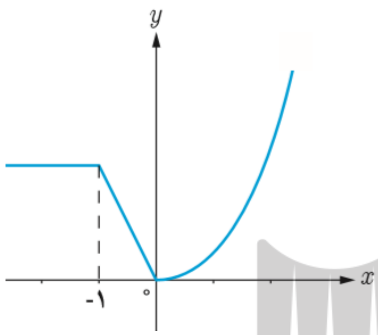
ب) $g(x) = x + |x|$

پ) $t(x) = -x^3 - 1$

سه نکته:

✤ تابع $f$ را بر مجموعهٔ $A$ یکنوا گوییم، هرگاه در این مجموعه، صعودی (نزولی) باشد.

✤ تابع $f$ را در یک مجموعه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر $x$ در این مجموعه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک مجموعه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.




✤ به تابعی که در یک مجموعه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

✤ **مثال :** نمودار تابع $f$ در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-1]$ تابع $f$ ثابت است. همچنین در فاصله $[-1,0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

مثال:

۴ تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵ تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار $a$ چقدر است؟

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

۷ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در $R$ اکیداً صعودی نباشد.

ترکیب توابع:

اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع $f$ و دامنهٔ تابع $g$ اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع $gof$ را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر :

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

**دامنهٔ تابع مرکب :**

دامنهٔ تابع مرکب $gof$ مجموعه $x$هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ $x$ در دامنهٔ $f$ قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ $g$ قرار داشته باشد.

بنابراین دامنهٔ تابع $gof$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع $fog$ به صورت زیر است :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

**مثال :** اگر $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰),(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $f=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ ، تابع $gof$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=۴\\(gof)(۵)=g(f(۵))=g(۲)=۰\\(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۵)=-۷\\(gof)(-۲)=g(f(-۲))=g(۴):\text{تعریف نشده}\end{array}\right\}\to gof=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$

**تذکر :** دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن.

**مثال :** اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ , $g(x)=۲x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع $fog$ و $gof$ را به‌دست آورید.

$$D_f=[۱,+\infty),\ D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in[۱,+\infty) \,\middle|\, \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\right\}=[۱,+\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-۱}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x-۱\geq ۰$ که بازهٔ $[۱,+\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲(f(x))^۲-۱=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g \,\middle|\, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, ۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)\right\}$$

عبارت $۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)$ به این معنی است که عبارت $۲x^۲-۱$ متعلق به بازهٔ $[۱,+\infty)$ باشد، یعنی $۲x^۲-۱\geq ۱$، بنابراین :

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, ۲x^۲-۱\geq ۱\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, x^۲\geq ۱\right\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

چند تمرین مهم:

۳ اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$.

ب) برای دو تابع $f$ و $g$ که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$ .

۶ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ;\ g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

ب) $k(x)=x^۵\ ;\ l(x)=۳x^۲-۴x+۱$

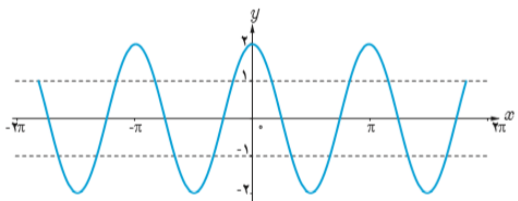
۷ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

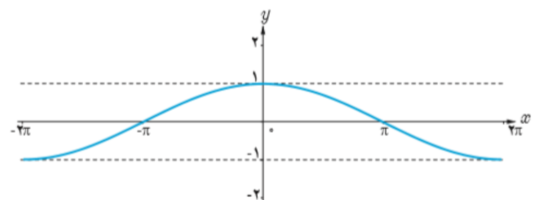
الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

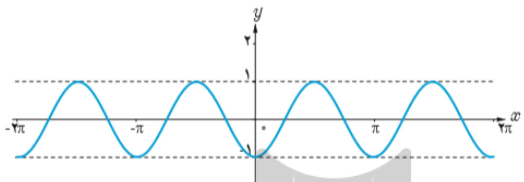
ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

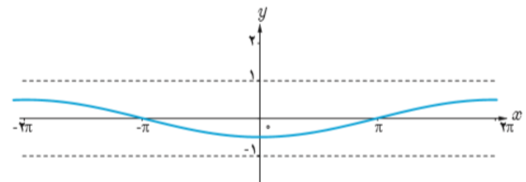
۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y=۲\cos ۲x$ پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y=-\cos ۲x$


(۱)

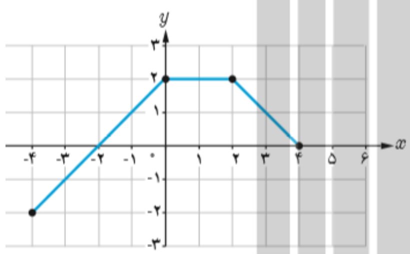

(۲)


(۳)


(۴)

۱۱ نمودار توابع $y=-\sin ۲x-۱$ و $y=۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع $f$، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$

ب) $y=-f(-x)+۲$

پ) $y=۲f(x-۱)-۳$

ت) $y=۲f(\frac{۱}{۲}x)$

## تابع وارون:

وارون تابع $f$ است و آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ $(a , b)$ روی نمودار تابع $f$ قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ $(b , a)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ قرار دارد و به عکس :

$$(a , b)\in f \Leftrightarrow (b , a)\in f^{-۱}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع $f$ و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.

## دو نکته:

بنابراین به ازای هر $x$ متعلق به دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ داریم :

$$(fof^{-۱})(x)=x$$

بنابراین به ازای هر $x$ متعلق به دامنهٔ تابع $f$ داریم :

$$(f^{-۱}of)(x)=x$$

قضیه:

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع $f$ و $g$ به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x)=x \;;\; x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x \;;\; x\in D_f$

آنگاه توابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

**مثال** : نشان دهید توابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

$f(x)=۳x-۴$

$g(x)=\frac{x+۴}{۳}$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع $f$ و $g$ برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x)=f(g(x))=۳g(x)-۴=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴=x \qquad (x\in D_g)$$

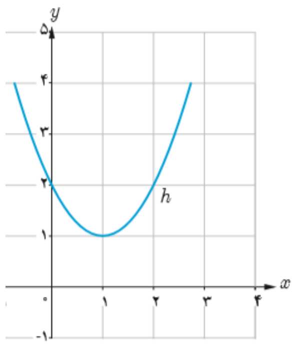
همچنین :

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+۴}{۳}=\frac{۳x-۴+۴}{۳}=x \qquad (x\in D_f)$$

بنابراین دو تابع $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند $f$، در معادلهٔ $y=f(x)$ در صورت امکان $x$ را برحسب $y$ محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل $y$ به $x$، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

**مثال** : نمودار تابع $h(x)= x^2 - 2x + 2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.




$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

مثلاً دامنهٔ تابع $h$ را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع $h$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع $k$ بازهٔ $[1\,,+\infty)$ است.

در تابع $k$، $x$ را برحسب $y$ به‌دست می‌آوریم :

$k(x)=(x-1)^2+1$

$y=(x-1)^2+1$

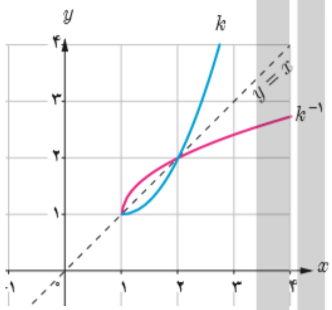
$(x-1)^2=y-1$

$x-1=\pm\sqrt{y-1}$

$x=\pm\sqrt{y-1}+1$

$k^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)




نمودار توابع $k$ و $k^{-1}$ به‌صورت روبه‌رو است :

آیا به جز بازهٔ $[1,+\infty)$، بازهٔ دیگری می‌توان یافت که تابع $h$ در آن یک به یک باشد؟

**مثال:**

در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\dfrac{-7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\dfrac{2x+6}{7}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x)=8+x^2\ ;\ x\leq 0$

مثال:

اگر $f(x)=\dfrac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(5)$