بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور
WWW.KONKUR.INFO
Konkur
.info
https://konkur.info

درس اوّل: معادله‌ی درجه‌ی دوم و روش‌های مختلف حل آن

هر معادله که پس از ساده شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌نامیم.

شکل کلی معادله درجه دوم

$ax^{۲}+bx+c=o \ , \ (a\neq o)$

مثال: آیا معادله‌ی $(x+۲)^{۲}-(x-۳)^{۲}=x$ یک معادله‌ی درجه‌ی دوم است؟ خیر

زیرا: $(x+۲)^{۲}-(x-۳)^{۲}=(\cancel{x^{۲}}+۴x+۴)-(\cancel{x^{۲}}-۶x+۹)=۱۰x-۵$

در نتیجه معادله به صور $۱۰x-۵=x$ درمی‌آید که یک معادله‌ی درجه‌ی یک می‌باشد.

روشهای حل معادله درجه دوم:

۱. به کمک تجزیه ۲. به کمک ریشه گیری ۳. روش مربع کامل کردن ۴. روش فرمول کلی (Δ)

https://konkur.info

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش تجزیه

یاد آوری

تجزیه چند جمله‌ای‌ها: عمل تبدیل یک چند جمله ای به حاصل ضرب حداقل دوچند جمله ای را تجزیه می گوییم.

از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادله‌ی درجه‌ی دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱.فاکتور گیری(باید $c = ۰$ باشد)

$ax^۲+bx=x(ax+b)$

۲.تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: (باید $b = ۰$ باشد)

$X^۲-a^۲=(x-a)(x+a)$

۳.تجزیه به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک:($b \neq ۰$ و $c \neq ۰$ باشد)

$X^۲+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

مثال : عبارت های زیر را تجزیه کنید.

۱) $۴x - ۸x^۲ = x(۴ - ۸x)$

۲) $x - x^۲ = x(۱ - x)$

۳) $x^۲ - ۴ = (x - ۲)(x + ۲)$

۴) $x^۲ - ۱ = (x - ۱)(x + ۱)$

۵) $x^۲ - ۲ = (x - \sqrt{۲})(x + \sqrt{۲})$

۶) $x^۲ - ۴x + ۳ = (x - ۳)(x - ۱)$

۷) $x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)(x - ۲)$

۸) $x^۲ - ۶x + ۸ = (x - ۴)(x - ۲)$

https://konkur.info

۹) $x^۲ - x - ۲ = (x - ۲)(x + ۱)$

۱۰) $x^۲ - ۶x + ۵ = (x - ۵)(x - ۱)$

۱۱) $x^۲ + x - ۶ = (x + ۳)(x - ۳)$

۱۲) $x^۲ - ۱۸x + ۷۲ = (x - ۶)(x - ۱۲)$

۱۳) $x^۲ - ۱۵x + ۵۰ = (x - ۱۰)(x - ۵)$

۱۴) $x^۲ - ۵x - ۶ = (x - ۶)(x + ۱)$

۱۵) $-x^۲ - ۷x + ۸ = -(x^۲ + ۷x - ۸) = -(x - ۸)(x + ۱)$

۱۶) $۴x^۲ - ۸x - ۱۲ = ۴(x^۲ - ۲x - ۳) = ۴(x - ۳)(x + ۱)$

نکته : در صورتی که نتوانیم از ضریب $x^۲$ فاکتور بگیریم ازروش زیر که به روش A مشهوراست استفاده می کنیم.

روش A را با ذکر یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید می خواهیم عبارت سه جمله ای $۳x^۲ - ۷x + ۴$ را تجزیه کنیم. عبارت را برابر A در نظر می گیریم و طرفین آن را در ضریب جمله ی درجه ی بالاتر، ضرب می کنیم.

$$A = ۳x^۲ - ۷x + ۴$$

$$۳A = (۳x)^۲ - ۷(۳x) + ۱۲$$

حال دنبال دو عدد می گردیم که جمعشان ۷- و ضربشان ۱۲ شود؛ این دو عدد ۳- و ۴- هستند، پس می توان نوشت:

$$۳A = (۳x - ۳)(۳x - ۴)$$

$$۳A = ۳(x - ۱)(۳x - ۴)$$

$$A = (x - ۱)(۳x - ۴)$$

حال با تقسیم طرفین عبارت بر ۳ عبارت A تجزیه می شود.

https://konkur.info

مثال: عبارت $۵t^۲ - ۴t - ۱$ را تجزیه کنید.

حل:

$$A = ۵t^۲ - ۴t - ۱$$

$$۵A = (۵t)^۲ - ۴(۵t) - ۵$$

جمع دو عدد (۴-) و حاصل ضربشان (۵-) است، این دو عدد ۵- و ۱ می باشند.

$$۵A = (۵t - ۵)(۵t + ۱) \Longrightarrow A = (t - ۱)(۵t + ۱)$$

$$\begin{aligned} ۱)\ ۳x^۲ - ۸x + ۵ \Longrightarrow ۳A &= (۳x)^۲ - ۸(۳x) + ۱۵ \\ ۳A &= (۳x - ۳)(۳x - ۵) \\ ۳A &= ۳(x - ۱)(۳x - ۵) \\ A &= (x - ۱)(۳x - ۵) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲)\ -۲x^۲ + ۵x - ۳ \Longrightarrow -۲A &= (-۲x)^۲ + ۵(-۲x) + ۶ \\ -۲A &= (-۲x + ۳)(-۲x + ۲) \\ -۲A &= (-۲x + ۳) - ۲(-۲x - ۱) \\ A &= (-۲x + ۳)(x - ۱) \end{aligned}$$

مثال: تجزیه کنید.

$$۱)\ x^۲ - x - ۱۲ = (x - ۴)(x + ۳)$$

$$۲)\ ۲x^۲ + ۷x + ۵ \rightarrow \quad A = ۲x^۲ + ۷x + ۵ \Longrightarrow ۲A = (۲x)^۲ + ۷(۲x) + ۲ \times ۵$$

$$\Longrightarrow ۲A = (۲x + ۲)(۲x + ۵) \Longrightarrow A = (x + ۱)(۲x + ۵)$$

$$۳)\ \ -a^۲ + ۷a + ۱۸ = -(a^۲ - ۷a - ۱۸) = -(a + ۲)(a - ۹)$$

$$۴)\ ۲x^۲ - ۷x + ۶ \rightarrow A = ۲x^۲ - ۷x + ۶ \rightarrow ۲A = (۲x)^۲ - ۷(۲x) + ۱۲$$

$$\Longrightarrow ۲A = (۲x - ۳)(۲x - ٤) = (۲x - ۳)۲(x - ۲) \Longrightarrow A = (۲x - ۳)(x - ۲$$

$$۵)\ ۷x^۲ - ۱۳x - ۲ \rightarrow \quad A = ۷x^۲ - ۱۳x - ۲ \Longrightarrow ۷A = (۷x)^۲ - ۱۳(۷x) - ۱۴$$

$$= (۷x - ۱۴)(۷x + ۱) \rightarrow ۷A = ۷(x - ۲)(۷x + ۱) \Longrightarrow A = (x - ۲)(۷x + ۱)$$

https://konkur.info

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و AB=۰، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی AB=۰ →A=۰ یا B=۰

مثال : $(۲x-۱)(-x+۴)=o \rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=o \rightarrow ۲x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ -x+۴=o \rightarrow x=۴ \end{cases}$

نکته

اگر بتوان عبارت درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c$ را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه کرد، آن‌گاه می‌توان از ویژگی حاصل‌ضرب صفر برای حل معادله‌ی $ax^۲+bx+c=o$ استفاده کرد.

مثال: معادله $x^۲-۲x-۳=۰$ را حل کنید.

$(x+۱)(x-۳)=o \rightarrow x+۱=o$ یا $x-۳=o \rightarrow x=-۱$ یا $x=۳$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$X=۳$	$x=-۱$
$X^۲-۲x-۳=۰$	$X^۲-۲x-۳=۰$
$۳^۲-۲(۳)-۳=۰$	$(-۱)^۲-۲(-۱)-۳=۰$
$۹-۶-۳=۰$	$۱+۲-۳=۰$
۰=۰ ✓	۰=۰ ✓

https://konkur.info

مثال: معادله‌های درجه‌ی دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^۲-۳x=۱۰$

$$x^۲-۳x-۱۰=۰ \rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۵ \\ x=-۲ \end{array} \right.$$

$$x^۲-۳x=۱۰ \xrightarrow{x=۵} ۵^۲-۱۵=۱۰ \rightarrow ۲۵-۱۵=۱۰ \rightarrow ۱۰=۱۰ \checkmark$$

$$x^۲-۳x=۱۰ \xrightarrow{x=-۲} (-۲)^۲-۳(-۲)=۱ \rightarrow ۴+۶=۱۰ \rightarrow ۱۰=۱۰ \checkmark$$

ب) $۳t^۲-t=۰$

$$۳t^۲-t=۰ \rightarrow t(۳t-۱)=۰ \rightarrow \left| \begin{array}{l} t=۰ \\ t=\frac{۱}{۳} \end{array} \right.$$

$$۳t^۲-t=۰ \xrightarrow{t=۰} ۳(۰)^۲-۰=۰ \rightarrow ۰=۰ \checkmark$$

$$۳t^۲-t=۰ \xrightarrow{t=\frac{۱}{۳}} ۳(\frac{۱}{۳})^۲-\frac{۱}{۳}=۰ \rightarrow ۰=۰ \rightarrow \frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}=۰ \rightarrow ۰=۰ \checkmark$$

مثال : معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

آ) $۳x^۲-۶x=۰$ ب) $۹x^۲-۴=o$ پ) $x^۲-۵x+۶=o$ ت) $x^۲۶x+۹=o$

ث) $۳x^۲-۴x+۱=o$ ج) $۵x^۲+۷x-۶=o$ چ) $(۲x+۱)^۲-(x+۱)^۲=۵$

آ) $$۳x^۲-۶x=۳x(x-۲)=o \rightarrow \begin{cases} x=o \\ x-۲=o \rightarrow x=۲ \end{cases}$$

ب) $$۹x^۲-۴=o \rightarrow (۳x-۲)(۳x+۲)=o$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x-۲=o \rightarrow ۳x=۲ \rightarrow x=\frac{۲}{۳} \\ ۳x+۲=o \rightarrow ۳x=-۲ \rightarrow x=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

پ) $x^۲-۵x+۶=o \rightarrow (x-۲)(x-۳)=o$

konkur.info

$$\rightarrow \begin{cases} x-۲=o \rightarrow x=۲ \\ x-۳=o \rightarrow x=۳ \end{cases}$$

ت) $x^۲+۶x+۹=o \rightarrow (x+۳)^۲=o \rightarrow x+۳=o \rightarrow x=-۳$

ث) $۳x^۲-۴x+۱=(۳x-۱)(x-۱)=o$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x-۱=o \rightarrow ۳x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۳} \\ x-۱=o \rightarrow x=۱ \end{cases}$$

ج) $۵x^۲+۷x-۶=(x+۲)(۵x-۳)=o$

$$\rightarrow \begin{cases} x+۲=o \rightarrow x=-۲ \\ ۵x-۳=o \rightarrow ۵x=۳ \rightarrow x=\frac{۳}{۵} \end{cases}$$

چ) $(۲x+۱)^۲-(x+۱)^۲=۵ \rightarrow (۴x^۲+۴x+۱)-(x^۲+۲x+۱)=۵$

$\rightarrow ۳x^۲+۲x-۵=o \rightarrow (۳x+۵)(x-۱)=o$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x+۵=o \rightarrow x=-\frac{۵}{۳} \\ x-۱=o \rightarrow x=۱ \end{cases}$$

مثال: معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^۲-۱۱x=-۱۰ \rightarrow x^۲-۱۱x+۱۰=o \rightarrow (x-۱)(x-۱۰)=o \rightarrow \left| \begin{matrix} x=۱ \\ x=۱۰ \end{matrix} \right.$

۲) $۵t^۲=۲۰ \rightarrow ۵t^۲-۲۰=o \rightarrow ۵(t-۲)(t+۲)=o \rightarrow \left| \begin{matrix} t-۲=o \rightarrow t=۲ \\ t+۲=o \rightarrow t=-۲ \end{matrix} \right.$

۳) $۵a^۲-۷a=۲a(a-۳) \rightarrow ۵a^۲-۷a=۲a^۲-۶a \rightarrow ۳a^۲-a=o \rightarrow a(۳a-۱)=o \rightarrow$

$\left| \begin{matrix} a=o \\ ۳a-۱=o \rightarrow a=\frac{۱}{۲} \end{matrix} \right.$

۴) $۴k^۲-۱۲k+۸=o \rightarrow ۴(k-۱)(k-۲) \rightarrow \left| \begin{matrix} k-۱=o \rightarrow k=۱ \\ k-۲=o \rightarrow k=۲ \end{matrix} \right.$

https://konkur.info

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به کمک ریشه گیری

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲=a$ عبارت‌اند از: $x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$

$$x^۲=۲۵ \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۲۵}=۵ \\ x=-\sqrt{۲۵}=-۵ \end{cases}$$

حالت کلی ریشه گیری :

$$u^۲=a \quad \begin{cases} \xrightarrow{a\geq ۰} u=\pm\sqrt{a} \\ \xrightarrow[a<۰]{} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

نکته:در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $b=۰$ باشد می توانیم از ریشه گیری استفاده می کنیم.

در این صورت داریم:

$$ax^۲+c=۰ \Longrightarrow x^۲=-\frac{c}{a} \quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{مختلف العلامه } a \text{ و } c} x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \xrightarrow[\text{هم علامت } a \text{ و } c]{} \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

تذکر: اگر $x^۲=a$ یک معادله‌ی درجه‌ی دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی منفی باشد آنگاه این معادله ریشه حقیقی ندارد .(چون جواب عبارت با توان ۲ هیچوقت منفی نمی شود)

https://konkur.info

$$۹x^۲ - ۴ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۴}{۹}} = \pm\frac{۲}{۳}$$

$$-x^۲ - ۱ = ۰ \rightarrow -x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = -۱$$ ریشه ندارد

$$x^۲ + ۲۵ = o \rightarrow x^۲ = -۲۵$$ ریشه حقیقی ندارد

مثال: جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $۵x^۲=۲۰$

$$\xrightarrow{\div ۵} x^۲ = ۴$$

$$\rightarrow x = \pm ۲$$

ب) $t^۲+۷=o$

$$\rightarrow t^۲ = -۷$$

که این غیر ممکن است و معادله جواب ندارد.

پ) $(r-۲)^۲=۱۶$

$$\rightarrow r - ۲ = \pm ۴$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} r - ۲ = ٤ \rightarrow r = ٦ \\ r - ۲ = -٤ \rightarrow r = -۲ \end{array} \right.$$

مثال: معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

آ) $۲x^۲=۵۰$

ب) $x^۲+۴=o$

پ) $(۳x + ۲)^۲ = ۳۶$

ت) $۴x^۲ - ۲۰ = o$

ث) $۱۶(۲x-۱)^۲-۲۵=o$

حل) آ)

$$۲x^۲ = ۵۰ \xrightarrow{+۲} x^۲ = ۲۵ \xrightarrow{۲۵>o} x = \pm\sqrt{۲۵} = \pm ۵$$

ب) معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$x^۲ + ۴ = o \rightarrow x^۲ = -۴ \xrightarrow{-۴<o}$$

پ)

$$(۳x + ۲)^۲ = ۳۶ \xrightarrow{۳۶>o} ۳x + ۲ = \pm\sqrt{۳۶} = \pm ۶$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۳x + ۲ = ۶ \rightarrow ۳x = ۴ \rightarrow x = \frac{۴}{۳} \\ ۳x + ۲ = -۶ \rightarrow ۳x = -۸ \rightarrow x = -\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

ت)

$$۴x^۲ - ۲۰ = o \rightarrow ۴x^۲ = ۲۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۲۰}{۴} = ۵ \xrightarrow{۵>o} x = \pm\sqrt{۵}$$

https://konkur.info

ث) $۱۶(۲x-۱)^۲-۲۵=o \rightarrow ۱۶(۲x-۱)^۲=۲۵$

$$\rightarrow (۲x-۱)^۲=\frac{۲۵}{۱۶} \rightarrow ۲x-۱=\pm\frac{۵}{۴} \rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=\frac{۵}{۴} \\ ۲x-۱=-\frac{۵}{۴} \end{cases}$$

مثال : هریک از معادله‌های زیر را با ریشه‌ی دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲-۲=۲۶ \rightarrow n^۲=۲۸ \rightarrow n=\pm\sqrt{۲۸}=\pm۲\sqrt{۷}$

۲) $x^۲+۱۲=۳ \rightarrow x^۲=-۹ \rightarrow$ غیر ممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $(۳t-۲)^۲=۴ \rightarrow ۳t-۲=\pm۲ \rightarrow \begin{cases} ۳t-۲=۲ \rightarrow t=\frac{۴}{۳} \\ ۳t-۲=-۲ \rightarrow t=o \end{cases}$

۴) $۳-۳k=۳k(۲k+۱) \rightarrow ۳-۳k=۶k^۲-۳k \rightarrow ۳=۶k^۲ \rightarrow k^۲=\frac{۱}{۲} \rightarrow k=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مثال :در معادله زیر، یک جواب از معادله داده شده است. مقدار m و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

$-۳x^۲+mx+۱۲=o \ , \ x=۲$

حل)با قرار دادن جواب داده شده در معادله، مقدار m را به دست می‌آوریم:

$x=۲, -۳x^۲+mx+۱۲=o$

$\rightarrow -۳(۲)^۲+۲m+۱۲=o \rightarrow m=o$

$\rightarrow -۳x^۲+۱۲=o \rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm۲$

https://konkur.info

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش مربع کامل

مرحله ۱ . در صورت نیاز با تقسیم دو طرف معادله بر ضریب $x^۲$، ضریب $x^۲$ را تبدیل به ۱ می‌کنیم.

مرحله۲.مجهول ها را درسمت چپ و عدد ثابت را به سمت راست منتقل می کنیم

مرحله ۳. به طرفین تساوی $(\frac{\text{ضریب}x}{۲})^۲$ را اضافه می کنیم تا سمت چپ مربع کامل شود.

مرحله ۴. سمت چپ را به صورت مربع کامل می نویسیم یعنی به صورت $(x \pm \frac{\text{ضریب}x}{۲})^۲$ می نویسیم

مرحله ۵ . به کمک ریشه گیری(روش قبلی) در صورت وجود ریشه ها را به دست می آوریم

مثال: معادله‌ی $x^۲ - ۶x + ۵ = o$ را به روش مربع کامل حل کنید.

۵ رابه سمت راست منتقل می کنیم $x^۲ - ۶x = -۵$

به دو طرف معادله $(\frac{-۶}{۲})^۲ = ۹$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود $x^۲ - ۶x + ۹ = -۵ + ۹$

سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم $(x - ۳)^۲ = ۴$

از دو طرف معادله، ریشه‌ی دوم می‌گیریم $x - ۳ = \pm\sqrt{۴} \rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۲ \rightarrow x = ۵ \\ x - ۳ = -۲ \rightarrow x = ۱ \end{cases}$

مثال: معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

آ) $x^۲-۴x-۵=o$ ب) $x^۲-۵x+۱=o$ پ) $۲x^۲+۳x=o$

ت) $۲x^۲+۶x=۱$ ث) $۸-x=۳x(x-۱)$

حل)

https://konkur.info

آ) $x^۲-۴x-۵=o \rightarrow x^۲-۴x=۵ \xrightarrow{(\frac{۴}{۲})^۲} x^۲-۴x+۲^۲=۵+۲^۲$

$$\rightarrow (x-۲)^۲=۹ \rightarrow x-۲=\pm ۳ \rightarrow \begin{cases} x-۲=۳ \rightarrow x=۵ \\ x-۲=-۳ \rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

ب) $x^۲-۵x+۱=o \rightarrow x^۲-۵x=-۱$

$$\xrightarrow{(\frac{۵}{۲})^۲} x^۲-۵x+(\frac{۵}{۲})^۲=-۱+(\frac{۵}{۲})^۲ \rightarrow (x-\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۲۱}{۴}$$

پ) $۲x^۲+۳x=o \xrightarrow{\div ۲} x^۲+\frac{۳}{۲}x=o$

$$\xrightarrow{(\frac{۳}{۲})^۲=(\frac{۳}{۴})^۲} x^۲+\frac{۳}{۲}x+(\frac{۳}{۴})^۲=(\frac{۳}{۴})^۲$$

$$\rightarrow (x+\frac{۳}{۴})^۲=(\frac{۳}{۴})^۲ \rightarrow x+\frac{۳}{۴}=\pm\frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴} \rightarrow x=o \\ x+\frac{۳}{۴}=-\frac{۳}{۴} \rightarrow x=-\frac{۳}{۴}-\frac{۳}{۴}=-\frac{۶}{۴}=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

ت) $۲x^۲+۶x=۱ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+۳x=\frac{۱}{۲}$

$$\xrightarrow{(\frac{۳}{۲})^۲} x^۲+۳x+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}+(\frac{۳}{۲})^۲$$

$$\rightarrow (x+\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۴}=\frac{۱۱}{۴} \rightarrow x+\frac{۳}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$$

$$\rightarrow x=-\frac{۳}{۲}\pm\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$$

ث) $۸-x=۲x(x-۱) \rightarrow ۸-x=۳x^۲-۳x$

$$\rightarrow ۳x^۲-۲x=۸ \xrightarrow{\div ۳} x^۲-\frac{۲}{۳}x=\frac{۸}{۳}$$

$$\xrightarrow{(\frac{۲}{۲})^۲=(\frac{۱}{۳})^۲} x^۲-\frac{۲}{۳}x+(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۸}{۳}+(\frac{۱}{۳})^۲$$

$$\rightarrow (x-\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۸}{۳}+\frac{۱}{۹}=\frac{۲۵}{۹} \rightarrow x-\frac{۱}{۳}=\pm\frac{۵}{۳}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-\frac{۱}{۳}=\frac{۵}{۳} \\ x-\frac{۱}{۳}=-\frac{۵}{۳} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۳}+\frac{۱}{۳}=۲ \\ x=-\frac{۵}{۳}+\frac{۱}{۳}=-\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

https://konkur.info

مثال : معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^۲+۲x=۲۴$

$X^۲+۲x+۱=۲۵$

$\rightarrow (x+۱)^۲=۲۵$

$\rightarrow x+۱=\square ۵$

$\rightarrow x=۴ \ , \ x=-۶$

ب) $t^۲+۳t=۳$

$t^۲+۳t+\frac{۹}{۴}=۳+\frac{۹}{۴}$

$\rightarrow (t+\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۲۱}{۴}$

$\rightarrow t+\frac{۳}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۲۱}}{۲}$

$\rightarrow x=\frac{-۳+\sqrt{۲۱}}{۲}$

$x=\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۲}$

پ) $n^۲-۴n+۵=o$

$n^۲-۴n=-۵$

$\rightarrow n^۲-۴n+۴=-۵+۴$

$\rightarrow (n-۲)^۲=-۱$

$\rightarrow$ غیر ممکن است

معادله جواب حقیقی ندارد

ت) $۲r^۲+r-۲=o$

$۲r^۲+r=۲$

$\xrightarrow{\div ۲} r^۲+\frac{۱}{۲}r=۱$

$\rightarrow r^۲+\frac{۱}{۲}r+\frac{۱}{۱۶}=۱+\frac{۱}{۱۶}$

$\rightarrow (r+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱۷}{۱۶}$

$\rightarrow r+\frac{۱}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$

$\rightarrow r=\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۴}$

مثال : معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲-۶x=۷$

$x^۲-۶x+۹=۷+۹$

$\rightarrow (x-۳)^۲=۱۶$

$\rightarrow x-۳=\pm ۴$

$\rightarrow \begin{cases} x-۳=۴ \rightarrow x=۷ \\ x-۳=-۴ \rightarrow x=-۱ \end{cases}$

۲) $s^۲-۳s+۳=o$

$s^۲-۳s+۳=o$

$\rightarrow s^۲-۳s+\frac{۹}{۴}=-۳+\frac{۹}{۴}$

$\rightarrow (s-\frac{۳}{۲})^۲=-\frac{۳}{۴}$

$\rightarrow$ غیر ممکن است

$\rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

۲) $r^۲+۴r+۴=o$

$\rightarrow (r+۲)^۲=o$

$\rightarrow r+۲=o$

$\rightarrow r=-۲$

۴) $۲a^۲+۵a-۳=o$

$\xrightarrow{\div ۲} a^۲+\frac{۵}{۲}a=\frac{۳}{۲} \rightarrow a^۲+\frac{۵}{۲}a+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}$

$\rightarrow (a+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶} \rightarrow a+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۷}{۴}$

$\rightarrow \begin{cases} a+\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴} \rightarrow a=\frac{۱}{۲} \\ a+\frac{۵}{۴}=-\frac{۷}{۴} \rightarrow a=-۳ \end{cases}$

https://konkur.info

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به روش فرمول کلی

ابتدا دلتا را به دست می آوریم و با توجه به علامت دلتا تعداد جواب ها و جواب ها را به دست می آوریم

$ax^{۲}+bx+c=o \rightarrow$ $\Delta = b^{۲}-٤ac$

- $\Delta > o$ → معادله دوجواب حقیقی ساده متمایز دارد $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = ۰$ → معادله یک ریشه‌ی حقیقی(ریشه مضاعف) دارد: $x=-\frac{b}{2a}$
- $\Delta < o$ → معادله جواب حقیقی ندارد

مثال: معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^{۲}-x+۱=o$

$\Delta = (-۱)^{۲}-۴\times ۱\times ۱ = ۱-۴=-۳ \rightarrow$ معادل جواب حقیقی ندارد

ب) $-۲x^{۲}+x+۳=o$

$\Delta = ۱^{۲}-۴(-۲)\times ۳ = ۲۵ \rightarrow x\frac{-۱\pm ۵}{-۴} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ x=-۱ \end{cases}$

پ) $-x^{۲}+٤x-٤=o-$

$\Delta = ۱٦-۱٦=o \rightarrow x\frac{-٤\pm o}{-۲}=۲$

مثال: هر یک از معادلات زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

آ) $۲x^{۲}-x-۵=o$

ب) $۳x-x^{۲}=-۷$

پ) $\frac{x^{۲}}{۵}-\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۲}=o$

ت) $(۳x+۱)^{۲}-(۲x+۳)^{۲}+۱=o$

ث) $x^{۲}+(\sqrt{۵}+۱)x-(۲+\sqrt{۵})=o$

Konkur.info

حل)

آ) a=۲ , b=-۱ , c=-۵

$$\rightarrow \Delta = b^{۲} - ۴ac = ۱ - ۴(۲)(-۵) = ۴۱ > o$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱ \pm \sqrt{۴۱}}{۴}$$

ب) ۳x-x۲=-۷→x۲-۳x-۷=o

A=۱ , b=-۳ , c=-۷→Δ=b۲-۴ac=۹-۴(۱)(-۷)=۳۷>o

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۳۷}}{۲}$$

پ) معادله را در ۳۰=۵×۳×۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسرها از بین بروند:

۶x۲-۱۰x-۱۵=o , a=۶ , b=-۱۰ , c=-۱۵

→Δ=b۲-۴ac=۱۰۰-۴(۶)(-۱۵)=۴۶۰

$$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۴۶۰}}{۱۲} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۴ \times ۱۱۵}}{۱۲}$$

$$= \frac{۱۰ \pm ۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۲} = \frac{۲(۵ \pm \sqrt{۱۱۵})}{۱۲} = \frac{۵ \pm \sqrt{۱۱۵}}{۶}$$

ت) با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

(۳x+۱)۲-(۲x+۳)۲+۱=o

→(۹x۲+۶x+۱)-(۴x۲+۱۲x+۹)+۱=o →۵x۲-۶x-۷=o

A=۵ , b=-۶ , c=-v →Δ=b۲-۴ac=۳۶-۴(۵)(-۷)=۱۷۶

$$\rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۷۶} = \sqrt{۱۶ \times ۱۱} = ۴\sqrt{۱۱}$$

https://konkur.info

$$\rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۶\pm۴\sqrt{۱۱}}{۱۰}=\frac{۲(۳\pm۲\sqrt{۱۱})}{۱۰}=\frac{۳\pm۲\sqrt{۱۱}}{۵}$$

ث) $a=۱۰b=\sqrt{۵}+۱۰c=-(۲+\sqrt{۵})$

$$\rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=(\sqrt{۵}+۱)^{۲}-۴(۱)(-(۲+\sqrt{۵}))$$

$$=(۵+۲\sqrt{۵}+۱)+۸+۴\sqrt{۵}=۹+۶\sqrt{۵}+۵=(۳+\sqrt{۵})^{۲}$$

$$x_{۱}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(\sqrt{۵}+۱)+(۳+\sqrt{۵})}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$$\rightarrow x_{۲}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(\sqrt{۵}+۱)-(۳+\sqrt{۵})}{۲}$$

$$=\frac{-۴-۲\sqrt{۵}}{۲}=-۲-\sqrt{۵}$$

مثال: هریک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $۴x^{۲}-۱۳x+۳=o\xrightarrow{\Delta=۱۶۹-۴۸=۱۲۱}x=\frac{۱۳\pm۱۱}{۸}\rightarrow x=۳\,,x=\frac{۱}{۴}$

۲) $r-r^{۲}=۳\rightarrow r^{۲}-r+۳=o\rightarrow\Delta=۱-۱۲=-۱۱\rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $a^{۲}+۲\sqrt{۳a}=۹\rightarrow a^{۲}+۲\sqrt{۳a}-۹=o\xrightarrow{\Delta=۴۸}a=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm\sqrt{۴۸}}{۲}=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm۴\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\left|\begin{array}{l}a=\sqrt{۳}\\a=-۳\sqrt{۳}\end{array}\right.$

۴) $\frac{t^{۲}}{۳}-\frac{t}{۲}-\frac{۳}{۲}=o\xrightarrow{\times۶}۲t^{۲}-۳t-۹=o\xrightarrow{\Delta=۸۱}t=\frac{۳\pm۹}{۴}\rightarrow t=۳\,,t=\frac{-۳}{۲}$

مثال: هریک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $۲x^{۲}=۲۵۰\xrightarrow{\div۲}x^{۲}=۱۲۵\rightarrow x=\pm\sqrt{۱۲۵}=\pm۵\sqrt{۵}$

۲) $۹-۶z+z^{۲}=o\rightarrow(z-۳)^{۲}=o\rightarrow z-۳=o\rightarrow z=۳$

۳) $۴a^{۲}+۳a=۱\rightarrow ۴a^{۲}+۳a-۱=o\xrightarrow{\Delta=۲۵}a=\frac{-۳\pm۵}{۸}\rightarrow a=\frac{۱}{۴}\,,a=-۱$

۴) $b^{۲}+\sqrt{۲}b-۴=o\xrightarrow{\Delta=۱۸}b=\frac{-\sqrt{۲}\pm\sqrt{۱۸}}{۲}=\frac{-\sqrt{۲}\pm۳\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow b=\sqrt{۲}\ ,\ b=-۲\sqrt{۲}$

https://konkur.info

مثال: در معادله زیر، یک جواب از آن داده شده است. مقدار m و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

$۴x^۲-۵x+m+۱=o$, $x=-۳$

حل)با قرار دادن جواب داده شده در معادله، مقدار m را به دست می‌آوریم:

$x=-۳$, $۴x^۲-۵x+m+۱=o$

$$\rightarrow ۴(-۳)^۲-۵(-۳)+m+۱=o$$

$$\rightarrow ۴x^۲-۵x-۵۱=o$$

$$\rightarrow \Delta= b^۲-۴ac=۲۵-۴(۴)(-۵۱)=۸۴۱=۲۹^۲$$

$$\rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۵\pm۹}{۸}\rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۵+۲۹}{۸}=\frac{۳۴}{۸}=\frac{۱۷}{۴}\\ x_۲=\frac{۵-۲۹}{۸}=-\frac{۲۴}{۸}=-۳\end{cases}$$

مثال: در هریک از قسمت‌های زیر، ابتدا مقدار m را طوری به‌دست آورید که معادله‌ی داده شده ریشه‌ی مضاعف داشته باشد و سپس ریشه‌ی مضاعف را مشخص کنید.

آ) $۲x^۲+(m+۱)x+۸=o$ ب) $(۲m+۱)x^۲+۶x+۱=o$

حل) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=o$ ، اگر $\Delta= o$ ، آن‌گاه معادله دارای ریشه‌ی مضاعف $x=-\frac{b}{۲a}$ است:

آ) $\Delta=(m+۱)^۲-۴(۲)(۸)=(m+۱)^۲-۶۴=o$

$$\rightarrow (m+۱)^۲=۶۴\rightarrow\begin{cases}m+۱=۸\rightarrow m=۷\\ m+۱=-۸\rightarrow m=-۹\end{cases}$$

اگر $m=۷$ ، آن گاه : $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{m+۱}{۴}=-\frac{۸}{۴}=-۲$

اگر $m=-۹$ ، آن گاه : $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{m+۱}{۴}=-\frac{-۸}{۴}=۲$

ب) $\Delta= ۳۶-۴(۲m+۱)\times۱=o\rightarrow ۳۶=۴(۲m+۱)$

$$\rightarrow ۲m+۱=۹\rightarrow ۲m=۸\rightarrow m=۴$$

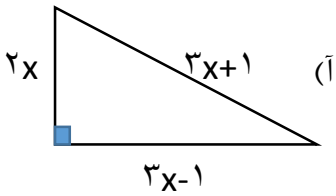
(ریشه‌ی مضاعف) $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۶}{۲(۲m+۱)}=\frac{-۶}{۲\times۹}=-\frac{۱}{۲}$

https://konkur.info

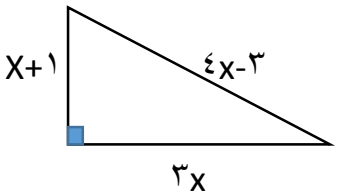
حل چند مسأله به کمک معادلات درجه دوم

مثال: در هریک از شکل‌های زیر مقدار x را به‌دست آورید.

آ)



ب)



حل) آ) با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه و تشکیل معادله، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$(۳x+۱)^۲ = (۲x)^۲ + (۳x-۱)^۲$$

$$\rightarrow \cancel{۹x^۲} + ۶x + \cancel{۱} = ۴x^۲ + \cancel{۹x^۲} - ۶x + \cancel{۱} \rightarrow ۴x^۲ - ۱۲x = o$$

$$\rightarrow ۴x(x-۳) = o \rightarrow \begin{cases} ۴x = o \rightarrow x = o \\ x - ۳ = o \rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

طول ضلع مثبت است، بنابر این $x=o$ غیر قابل قبول و فقط $x=۳$ قابل قبول می باشد.

ب)

$$(۴x-۳)^۲ = (x+۱)^۲ + (۳x)^۲$$

$$\rightarrow ۱۶x^۲ - ۲۴x + ۹ = x^۲ + ۲x + ۱ + ۹x^۲$$

$$\rightarrow ۶x^۲ - ۲۶x + ۸ = o \xrightarrow{\div ۲} ۳x^۲ - ۱۳x + ۴ = o$$

$$\rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶۹ - ۴(۳)(۴) = ۱۲۱ \rightarrow x = \frac{۱۳ \pm ۱۱}{۶}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۳ + ۱۱}{۶} = ۴ \\ x = \frac{۱۳ - ۱۱}{۶} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

به ازای $x = \frac{۱}{۳}$ مقدار ۴x-۳ عددی منفی می‌شود، پس غیر قابل قبول است.

https://konkur.info

مثال: مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

گیریم آن دو عدد k و k+۲ باشند، بنابر این:

$$k^{۲}+(k+۲)^{۲}=۲۹۰ \rightarrow k^{۲}+k^{۲}+۴k+۴=۲۹۰ \rightarrow ۲k^{۲}+۲k-۲۸۶=o$$

$$\xrightarrow{\div ۲} k^{۲}+k-۱۴۳=o \rightarrow (k+۱۳)(k-۱۱)=o \rightarrow$$

$k=-۱۳ \rightarrow -۱۱ , -۱۳$ آن دو عدد فرد عبارتند از

$k=۱۱ \rightarrow ۱۳ , ۱۱$ آن دو عدد فرد عبارتند از

مثال: مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی ۲۶۵ است. این دو عدد را پیدا کنید.

حل) فرض کنیم n و n+۱ دو عدد طبیعی متوالی باشند. داریم:

$$n^{۲}+(n+۱)^{۲}=۲۶۵ \rightarrow n^{۲}+(n^{۲}+۲n+۱)=۲۶۵$$

$$\rightarrow ۲n^{۲}+۲n-۲۶۴=o \xrightarrow{+۲} n^{۲}+n-۱۳۲=o$$

$$\rightarrow \Delta= b^{۲}-۴ac=۱-۴(۱)(-۱۳۲)=۵۲۹=۲۳^{۲}$$

$$\rightarrow n=\frac{-۱\pm ۲۳}{۲} \xrightarrow{n\geq ۱} n=\frac{-۱+۲۳}{۲}=۱۱$$

بنابر این دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ می‌باشد.

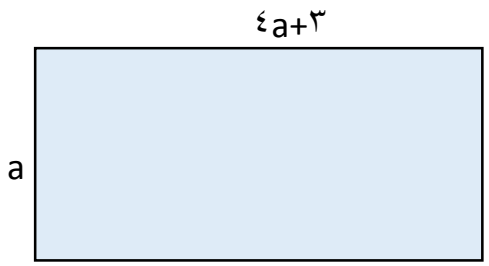
مثال: مجموع مربع عددی طبیعی با سه برابر همان عدد برابر ۴۰ است. عدد را پیدا کنید.

حل) $n^{۲}+۳n=۴۰ \rightarrow n^{۲}+۳n-۴۰=o \rightarrow (n+۸)(n-۵)=o$

$$\rightarrow \begin{cases} n+۸=o \rightarrow n=-۸ \\ n-۵=o \rightarrow n=۵ \end{cases} \xrightarrow[\text{طبیعی است}]{\text{عددی } n} n=۵$$

https://konkur.info

مثال :طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.



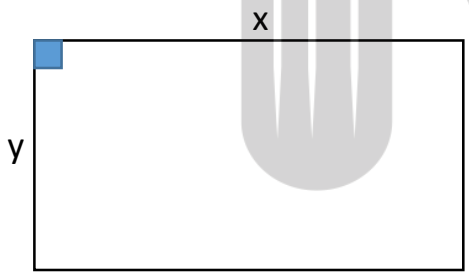
$$s = a(۴a + ۳) = ۴۵ \rightarrow ۴a^{۲} + ۳a - ۴۵ = o \xrightarrow{\Delta=۷۲۹} a = \frac{-۳\pm۲۷}{۸} \rightarrow$$

$a = -\frac{۱۵}{۴}$ غیر قابل قبول

$a = ۳ \rightarrow$ عرض مستطیل ۳ و طول آن ۱۵ است

مثال:محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۲۰ و ۲۴ می‌باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل)فرض کنیم طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر x و y باشند $(x>y)$ ، داریم:



(محیط) P= ۲(x+y)= ۲۰→x+y= ۱۰→ Y= ۱۰-x

(مساحت) S=xy=x(۱۰-x)= ۲۴→ ۱۰x-x^{۲} = ۲۴

→x^{۲} − ۱۰x + ۲۴= o →(x- ۴)(x-۶)=o

$$\rightarrow \begin{cases} x - ۴ = o \rightarrow x = ۴ \\ x - ۶ = o \rightarrow x = ۶ \end{cases} \xrightarrow{y=۱۰-x} \begin{cases} y = ۱۰ - ۴ = ۶ \\ y = ۱۰ - ۶ = ۴ \end{cases}$$

بنابر این طول و عرض مستطیل ۶ و ۴ می‌باشند.

https://konkur.info

مثال: طول مستطیلی یک متر بیش‌تر از دو برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۵۵ متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل)فرض کنیم عرض مستطیل x باشد، در این صورت طول مستطیل ۲x+۱ است. طبق فرض داریم:

$$X(۲x+۱)=۵۵ \rightarrow ۲x^{۲}+x=۵۵ \rightarrow ۲x^{۲}+x-۵۵=o$$

$$\rightarrow \Delta = b^{۲}-۴ac = ۱+۴۴۰ = ۴۴۱$$

$$\rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۴۴۱}}{۴}=\frac{-۱\pm ۲۱}{۴}\xrightarrow{x>o} x\frac{-۱+۲۱}{۴}=۵$$

مثال: اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$\left.\begin{array}{l} \text{سن برادر کوچک} = x \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} = x+۴ \\ \text{سن برادر بزرگ} = x+۴ \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} = x+۸ \end{array}\right\} \rightarrow (x+۴)(x+۸)=۶۰ \rightarrow x^{۲}+۱۲x+۳۲=۶۰ \rightarrow$$

$$x^{۲}+۱۲x-۲۸=o \rightarrow (x-۲)(x+۱۴)=o \rightarrow \left|\begin{array}{l} x=-۱۴ \text{ غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم} \\ x=۲ \rightarrow \text{ برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله‌اند} \end{array}\right.$$

مثال: اختلاف سنی دو برادر با یک دیگر ۵ سال است. اگر سه سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۲۰۴ شود. سن کنونی هر کدام را به‌دست آورید.

حل)فرض کنیم سن برادر کوچک‌تر x باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} \text{سن برادر کوچک} = x \xrightarrow{\text{سه سال بعد}} = x+۳ \\ \text{سن برادر بزرگ} = x+۵ \xrightarrow{\text{سه سال بعد}} = x+۸ \end{array}\right\} \rightarrow (x+۳)(x+۸)=۲۰۴ \rightarrow x^{۲}+۱۱x+۲۴=۲۰۴ \rightarrow$$

$$\rightarrow x^{۲}+۱۱x-۱۸۰=o$$

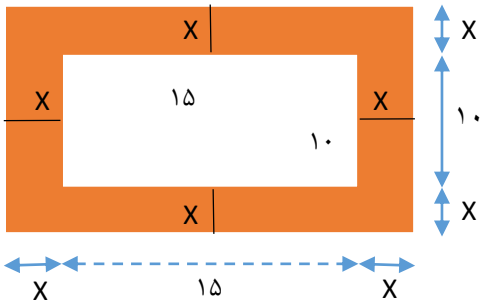
$$\rightarrow \Delta = b^{۲}-۴ac = ۱۲۱+۷۲۰ = ۸۴۱ = ۲۹^{۲}$$

$$\rightarrow x=\frac{-۱۱\pm ۲۹}{۲}\xrightarrow{x>o} x=\frac{-۱۱+۲۹}{۲}=\frac{۱۸}{۲}=۹$$

https://konkur.info

پس هم اکنون سن برادرها ۹ و ۱۴ می‌باشد.

مثال: یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌مترمربع، قرار دارد، اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



طبق شکل، طول مستطیل ۲x+۱۵ و عرض آن ۲x+۱۰ است . بنابر این طبق فرمول مساحت،

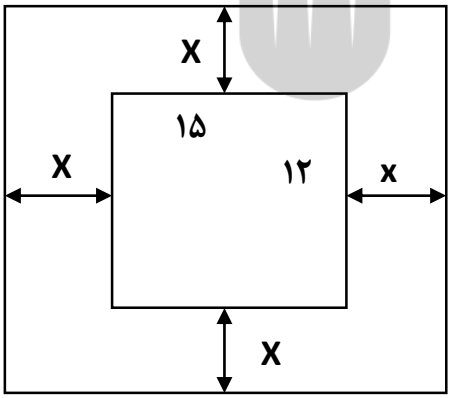
$$(۲x+۱۰)(۲x+۱۵)=۳۰۰ \rightarrow ۴x^۲+۵۰x+۱۵۰=۳۰۰ \rightarrow ۴x^۲+۵۰x-۱۵۰$$

$$=o \xrightarrow{+۲} ۲x^۲+۲۵x-۷۵=o \xrightarrow{\Delta=۱۲۲۵} x=\frac{-۲۵\pm ۳۵}{۴}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=-۱۵ & \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{۵}{۲} \rightarrow & \text{طول قاب عکس برابر ۲۰ و عرض آن برابر ۱۵ .می‌باشد} \end{cases}$$

مثال: یک عکس به اندازه‌ی ۱۲ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب مستطیلی با مساحت ۲۷۰ سانتی متر مربع قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد. ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

حل) فرض کنیم فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب مستطیلی، x باشد:



ابعاد قاب عکس: ۱۲ +۲x , ۱۵+۲x

مساحت قاب = ۲۷۰ =(۱۲+۲x)(۱۵+۲x)

$\rightarrow ۴x^۲+۲x(۱۲+۱۵)+۱۲\times۱۵=۲۷۰ \rightarrow ۴x^۲+۵۴x-۹۰=o$

$\xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲+۲۷x-۴۵=o$

$\rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۲۷^۲-۴(۲)(-۴۵)=۱۰۸۹=۳۳^۲$

https://konkur.info

$$\rightarrow x = \frac{-۲۷ \pm ۳۳}{۴} \xrightarrow{x>o} x = \frac{-۲۷ + ۳۳}{۴} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

بنابر این ابعاد قاب برابر است با:

۱۲ + ۲x = ۱۲ + ۲(۱/۵)=۱۵

۱۵ + ۲x = ۱۵ + ۲(۱/۵)= ۱۸

مثال: دریک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست اورید.

اگر تعداد تیم‌ها n هر تیم با n-۱ تیم بازی دارد. پس با توجه به اینکه بین هر دو تیم تنها یک بازی صورت میگیرد و اصطلاحاً رفت و برگشت نیست. تعداد کل بازی‌ها برابر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است . بنابر این:

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۴۵ \rightarrow n^۲ - n = ۹۰ \rightarrow n^۲ - n - ۹۰ = o \rightarrow (n - ۱۰)(n + ۹) = o \rightarrow$$

$n = -۹$ غیر قابل قبول

$n = ۱۰$ تیمگان مورد نظر دارای ۱۰ تیم است

مثال: در یک مسابقه‌ی دوره‌ای بین تعدادی شطرنج‌باز، ۳۶ بازی انجام شده است. (در مسابقات دوره‌ای بین هر دو نفر فقط یک بازی انجام می‌شود) تعداد شطرنج‌بازان این دوره از مسابقات را به دست آورید.

حل) فرض کنیم تعداد شرکت کننده‌ها n نفر باشد، نفر اول با n-۱ نفر دیگر، نفر دوم با n-۲ نفر دیگر و ..... بازی متفاوت انجام می‌دهند، بنابراین داریم:

$$(n - ۱) + (n - ۲) + \cdots + ۱ = \frac{(n - ۱) \times n}{۲} = ۳۶$$

$\rightarrow n^۲ - n = ۷۲ \rightarrow n^۲ - n - ۷۲ = o$

$$\rightarrow (n - ۹)(n + ۸) = o \rightarrow \begin{cases} n - ۹ = o \rightarrow n = ۹ \\ n + ۸ = o \rightarrow n = -۸ \end{cases}$$

https://konkur.info

مثال: فشار خون نرمال یک شخص مذکر، که بر حسب میلی‌متر جیوه *(mmHg)* اندازه‌گیری می‌شود. با رابطه‌ی $p = ۰/۰۰۶s^۲ - ۰/۰۲s + ۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن p فشار خون نرمال یک فرد بان سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید)

$$p = ۱۲۵ \rightarrow ۰/۰۰۶s^۲ - ۰/۰۲s + ۱۲۰ = ۱۲۵ \rightarrow ۰/۰۰۶s^۲ - ۰/۰۲s - ۵ = ۰$$

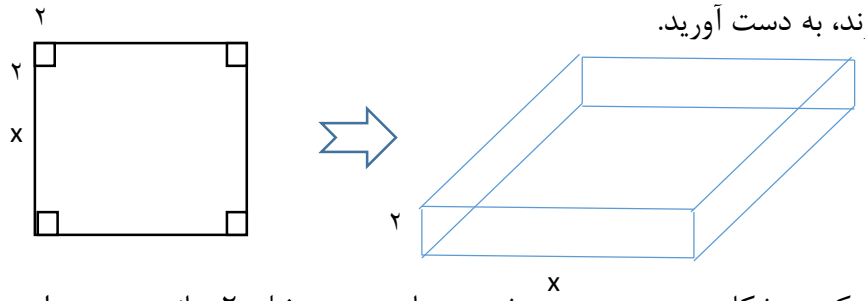
$$\xrightarrow{\Delta = ۰/۱۲۰۴} s = \frac{۰/۰۲ \pm ۰/۳۴۶۹}{۰/۰۱۲} \rightarrow$$

$S = ۳۰/۵۷۵$ شخص مورد نظر تقریباً ۳۰ سال و ۲۰۷ روز سن داشته است

$S = -۲۷/۲۴۱$ غیر قابل قبول

توجه: قرار داد کرده‌ایم که S بر حسب سال است

مثال: با یک دستگاه برش، یک صفحه‌ی مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جدا شده به ضلع ۲ سانتی متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (x)(x)(۲) = ۲x^۲$$

https://konkur.info

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باید باشد، داریم: $۲x^۲=۲۰۰$ بنابر این $x^۲=۱۰۰$ و با محاسبه‌ی ریشه‌های دوم این معادله، جواب‌های $x=-۱۰$ به دست می‌آید. و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها $x=۱۰$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x + ۴ = ۱۰ + ۴ = ۱۴$ سانتی‌متر است.

مثال: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم، طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰متر است. پس $۲(s+t)=۵۰$ از ساده کردن این معادله به معادله‌ی $s+t=۲۵$ می‌رسیم، بنابر این $t=۲۵-s$.

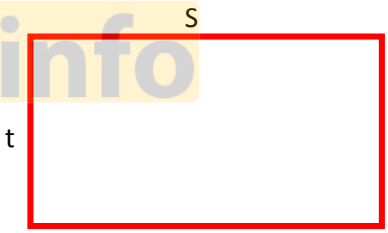
از سوی دیگر $st=۱۴۴$ با جای گذاری t بر حسب s در این معادله به شکل $s(۲۵-s)=۱۴۴$ می‌رسیم که بعد از ساده شدن، معادله‌ی درجه‌ی دوم $s^۲-۲۵s+۱۴۴=o$ به‌دست می‌آید.

در این معادله $c=۱۴۴$ و $b=-۲۵$ و $a=۱$ بنابر این

$$\Delta= b^۲ - ۴ac = (-۲۵)^۲ - ۴(۱)(۱۴۴) = ۶۲۵ - ۵۷۶ = ۴۹$$

پس $\Delta > o$ و معادله‌ی دو ریشه‌ی حقیقی دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_۱ = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \dfrac{۲۵ + ۷}{۲} = \dfrac{۳۲}{۲} = ۱۶ \\ s_۲ = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \dfrac{۲۵ - ۷}{۲} = \dfrac{۱۸}{۲} = ۹ \end{cases}$$



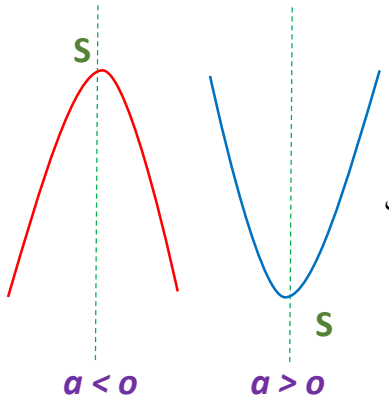
و چون $t=۲۵-s$ پس برای t نیز دو جواب به دست می‌آید:

بنابر این در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی متر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} s_۱ = ۱۶ \rightarrow t_۱ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \\ s_۲ = ۹ \rightarrow t_۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \end{cases}$$

https://konkur.info

درس دوم: سهمی (تابع درجه دوم)



سهمی: نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2 + bx +c$ را که در آن c, b, a اعداد حقیقی هستند و $a\neq o$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است.

محور تقارن سهمی : خطی که سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند (خطوط نقطه چین در شکل های بالا)

رأس سهمی: نقطهٔ تلاقی سهمی و

Konkur.info

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور
WWW.KONKUR.INFO
Konkur
.info
https://konkur.info