❋ درس اول : تابع ❋

☜ زوج مرتب :

هر دوتایی که در آن ترتیب کنار هم قرار گرفتن مؤلفه‌ها مهم باشد را « زوج مرتب » گویند و به صورت (x,y) نمایش می دهند که در آن x مؤلفه یا مختص اول و y مولفه یا مختص دوم نام دارند.

☑ **نکته:** دو زوج مرتب وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر زوج‌های مرتب (a,b) و (x,y) زمانی برابرند اگر و تنها اگر $x=a$ و $y=b$

✎ **مثال:** $(-۱,۳)\neq(-۱,۴)$, $(-۱,۲)\neq(۲,-۱)$

✎ **مثال:** اگر زوج مرتب‌های $(x^{۲}-y,x+y)$ و $(۳,y+۲)$ برابر باشند، $۲x-y$ را بدست آورید.

← جواب : ۳

☜ رابطه : مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را « رابطه » گویند.

✎ **مثال:** $R=\{(۲,۳),(۴,۵)\}$ و $R=\{(-۱,۲),(۳,۴),(۷,۸),(-۱,۳)\}$

☜ مفهوم تابع :

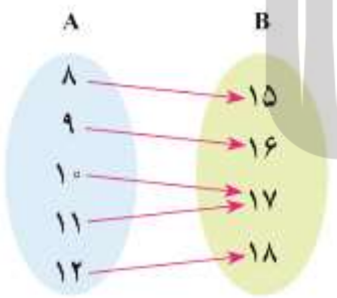
اگر A و B دو مجموعه باشند در این صورت تابع f از A به B، رابطه‌ای است که در آن به هر عضو مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده شود. (نظیر شود)

توابع را با حروف f، g و h و ... نمایش می‌دهند.

✎ **مثال:** رابطه‌ای که به هر فرد، وزن او را نسبت دهد. ☑

رابطه‌ای که به هر استان، مرکز آن را نسبت دهد. ☑

رابطه‌ای که به هر فرد، ورزش مورد علاقه او را نسبت دهد. ☒



$f=\{(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳),(۷,۳)\}$

☜ نمایش‌های مختلف یک رابطه و شرط تابع بودن آن‌ها :

۱- زوج مرتب : در این حالت تابع رابطه‌ای است که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نیستند و اگر مؤلفه‌های اولشان یکسان باشند، مؤلفه‌های دوم نیز یکسان هستند، به عبارت دیگر :

☑ $\forall x,y\in\mathbb{R}\ :\ x_۱=x_۲\Rightarrow y_۱=y_۲$

نکته: رابطه‌ی تهی یک تابع است.

✎ **مثال:** کدام‌یک از رابطه‌های داده شده، تابع است؟

$$R_1=\{(-7,2),(3,1),(-7,2),(-3,1)\} \quad , \quad R_2=\{(1,2),(2,1)\} \quad , \quad R_3=\left\{\left(1,\sqrt{2}+1\right),\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\right\}$$

✎ **مثال:** اگر $f=\{(a,3),(2,-1),(3,0),(3,a^2-2a)\}$ تابع باشد، مقدار a را بدست آورید.

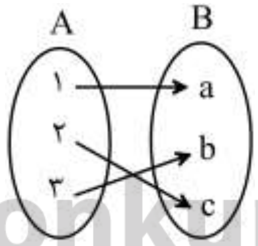
جواب → $(3,0)=(3,a^2-2a) \to a^2-2a=0 \to a(a-2)=0 \to \begin{cases} a=0 & ☑ \\ a-2=0 \to a=2 & ☒ \end{cases}$

✎ **مثال:** اگر $f=\{(5,1),(2,9^{\alpha}),(2,27^{\beta-1})\}$ تابع باشد، رابطه بین α و β را بنویسید.

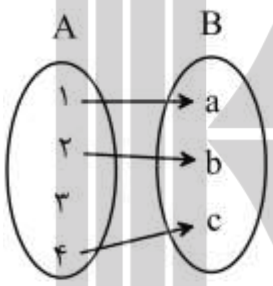
۲- نمودار وِن (نمودار پیکانی) :

اگر A و B مجموعه مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب یک رابطه باشند آنگاه اگر از هر عضو A دقیقاً یک پیکان به اعضای B رسم شود، رابطه مورد نظر تابع است.

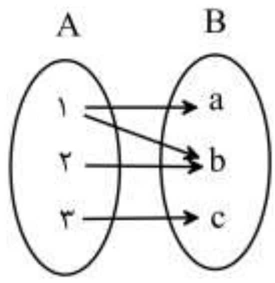
✎ **مثال:**



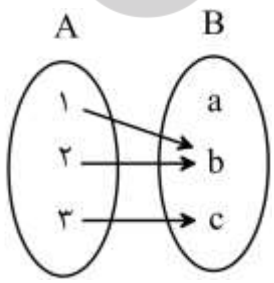
☑



☒



☒



☑

۳- جدول :

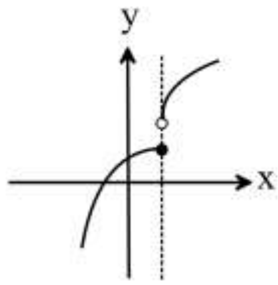
x	۳	۴	۵	۱۰
y	۲	۷	۲	۱

☑

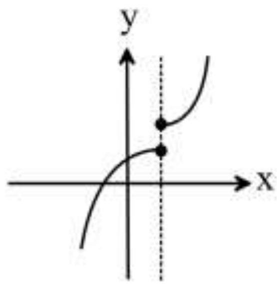
x	-1	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	۳	$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
y	۵	۱	-1	۲

☒

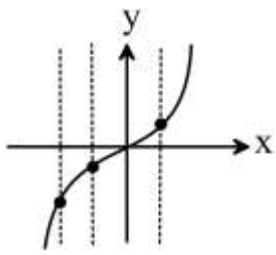
۴- نمودار : نمودار رابطه f ، در صورتی نمودار یک تابع خواهد بود که اگر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، این خط نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



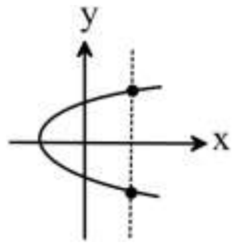
تابع هست



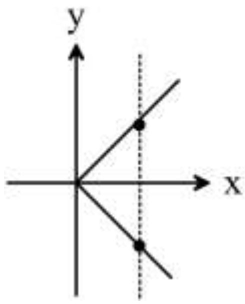
تابع نیست



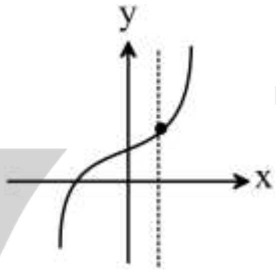
تابع هست



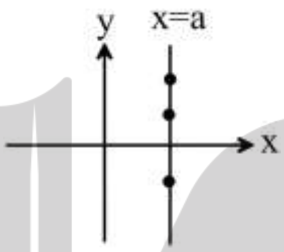
تابع نیست



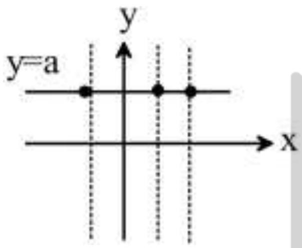
تابع نیست



تابع هست

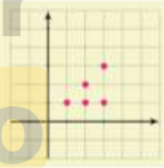
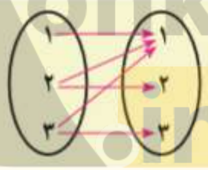
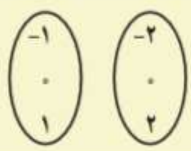


تابع نیست



تابع هست

مثال: جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه تکمیل کنید.

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		{(۱،۱)، (۲،۱)، (۲،۲)، (۳،۱)، (۳،۳)}	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
		{(۲،۴)، (۳،۹)، (۴،۱۶)}	
			به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.
			

* درس دوم : دامنه و برد تابع *

☜ دامنه و برد تابع :

الف) اگر تابع به صورت زوج مرتب نمایش داده شود، مجموعه‌ای که اعضای آن، مؤلفه‌های اول تابع باشند، دامنه نام دارد و مجموعه‌ای که اعضای آن، مؤلفه‌های دوم تابع باشند، برد نام دارد.

دامنه را با D و برد را با R نمایش می‌دهند. به‌عنوان مثال در تابع f که به صورت زیر داده شده است، دامنه و برد را می‌توان تعیین کرد :

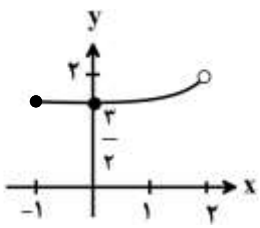
$$f=\left\{(-۱,۵),(۰,\frac{۱}{۲}),(۳,۵),(۲,۴)\right\} \to D_f=\{-۱,۰,۳,۲\} \;\; , \;\; R_f=\left\{۵,\frac{۱}{۲},۵,۴\right\}$$

✎ مثال: در تابع $f=\{(a,۲),(۱,a+b),(۲,۳)\}$ دامنه و برد برابرند، مقادیر a,b را به‌دست آورید.

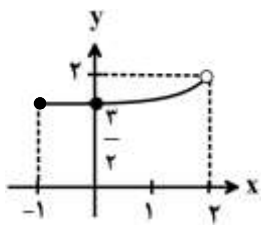
جواب ← $\begin{cases} D_f=\{a,۱,۲\} \\ R_f=\{۲,a+b,۳\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲=۲ \\ a=۳ \\ a+b=۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=-۲}$

ب) اگر تابع به صورت نمودار نمایش داده شود، ابتدا از نقطه‌های مورد نظر بر روی محور x و y عمود می‌کنیم. نقاطی که روی محور x ها باشند، نشان دهنده‌ی دامنه و نقاطی که روی محور y ها باشند، نشان‌دهنده‌ی برد تابع است.

✎ مثال: دامنه و برد تابع f را از روی نمودار شکل زیر به‌دست آورید.



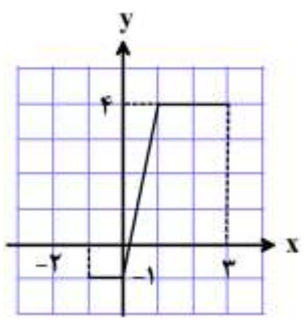
← جواب : کافی است هر نقطه را بر روی محورهای x و y عمود کنیم.



$$D_f=[-۱,۲)$$

$$R_f=[\frac{۳}{۲},۲)$$

✎ مثال: نمودار تابع f به صورت شکل زیر است، اشتراک دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.



← جواب : بعد از عمود کردن بر روی محور x و y می‌توان دامنه و برد را پیدا کرد:

$$\left.\begin{array}{l} D_f=[-۲,۳] \\ R_f=[-۱,۴] \end{array}\right\} \Rightarrow D_f \cap R_f=[-۱,۳]$$

☜ مقدار تابع :

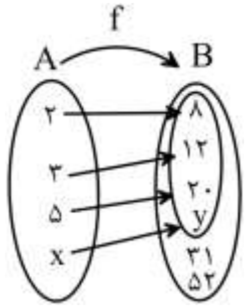
اگر f یک تابع و $(x,y)\in f$ باشد، y را مقدار تابع f در نقطه x گویند و با $f(x)$ نشان می‌دهند و داریم : $y=f(x)$

✎ **مثال:** در تابع روبرو، مقدار تابع f در نقطه ۷ برابر ۹ است یا $f(۷)=۹$ $\quad \leftarrow \quad$ $f(x)=\{(۳,۴),(۲,۵),(۷,۹)\}$

✎ **مثال:** در تابع $f(x)=\{(۲,-۲),(-۱,۳),(۴,۸)\}$ مقدار $\dfrac{f(۲)+f(۴)}{f(-۱)}$ را بدست آورید.

☜ ضابطه یا نمایش جبری تابع:

برای درک بهتر ضابطه‌ی تابع، به مثال زیر دقت کنید:



✎ **مثال:** تابع f از A به B مطابق شکل روبرو مفروض است.

$$f=\{(۲,۸),(۳,۱۲),(۵,۲۰),(x,y)\}$$

جواب : $D_f=\{۲,۳,۵,x\} \quad , \quad R_f=\{۸,۱۲,۲۰,y\}$ $\rightarrow$

☑ **نکته:** دامنه f برابر مجموع A اما برد f، زیرمجموعه‌ای از مجموعه B است.

با توجه به رابطه بین مؤلفه‌های اول و دوم می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=۸ \\ f(۳)=۱۲ \\ f(۵)=۲۰ \\ f(x)=y \end{array}\right\} \Rightarrow y=۴x$$

پس به طور دقیق داریم : $\begin{cases} f:A\rightarrow B \\ f(x)=۴x \end{cases}$

☯ **نمایش جبری یا ضابطه تابع را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد :**

رابطه یا قانون بین اعضای **دامنه و برد** تابع f که به صورت عبارت ریاضی بیان شود را « **ضابطه‌ی تابع** f » گویند و همواره داریم:

$A \Leftarrow$ دامنه $\qquad\qquad f:A\rightarrow B$

$B \Leftarrow$ هم‌دامنه $\qquad\qquad x\rightarrow f(x)$

$f \Leftarrow$ **قاعده یا قانونی است که به هر عضو A یک و تنها یک عضو B را نظیر می‌کند.**

☑ **نکته:** **(هم‌دامنه)** $\Leftarrow$ در رابطه بالا به مجموعه B هم‌دامنه تابع f گویند.

(**برد**) $\Leftarrow$ برد همواره زیرمجموعه هم‌دامنه است.

☑ **نکته:** در یک تابع، همواره تعداد اعضای دامنه بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای برد است.

تعداد اعضای $D_f \leftarrow m\geq n \rightarrow$ تعداد اعضای R_f

مثال: آیا می‌توان تابعی نوشت که :

الف) دامنه آن ۳ عضوی و برد آن ۴ عضوی باشد؟ ب) برد آن یک عضوی باشد؟

مثال: اگر $A=\{۵,۶,۷,۸\}$ و مجموعه B برابر تمام اعداد حسابی کمتر از ۵۰ باشد و داشته باشیم : $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = x^۲ - x \end{cases}$

دامنه و برد و هم‌دامنه تابع f را تعیین کنید.

جواب $\to$ دامنه $\to A=\{۵,۶,۷,۸\}$ و هم دامنه $\to B=\{۰,۱,۲,۳,\dots,۴۹\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(۵)=۵^۲-۵=۲۰ \\ f(۶)=۶^۲-۶=۳۰ \\ f(۷)=۷^۲-۷=۴۲ \\ f(۸)=۸^۲-۸=۵۶ \end{array}\right\} \to \text{برد} \qquad \to \quad f=\{(۵,۲۰),(۶,۳۰),(۷,۴۲)\}$$

مثال: اگر $f(x)=x^۲-۲x$ باشد، مطلوب است محاسبه مقادیر زیر:

الف) $f(x+۲)=$

ب) $f(۱+\sqrt{۲})=$

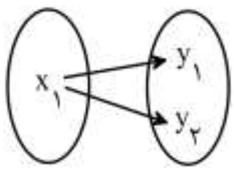
مثال: فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم : $f(x-۱)=۵x$ مطلوب است $f(۷)$ ؟

مثال: تابع $f(x)=x^۲-۴$ را در نظر بگیرید و مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$f(f(-۱))$, $f(x+۷)$, $f(-۵)$

تشخیص تابع بودن از روی معادله جبری :

☑ **نکته:** اگر تابع f، به $x_۱$ از دامنه، عضو $y_۱$ از برد را نسبت دهد و به همان $x_۱$، عضو $x_۲$ را نسبت دهد و $y_۱ \neq y_۲$ در این‌صورت f به هر عضو D_f عضو منحصر به فردی نسبت نداده است و داریم:

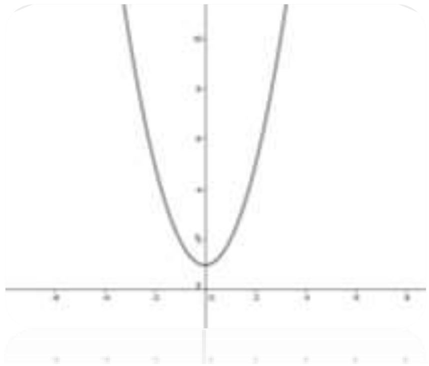


$$\left.\begin{array}{l} (x_۱,y_۱)\in f \\ (x_۱,y_۲)\in f \end{array}\right\} \to \text{با تعریف تابع در تناقض است}$$

به‌این ترتیب در معادلات جبری، y تابعی از x است هرگاه داشته باشیم :

$x_۱=x_۲ \to y_۱=y_۲$

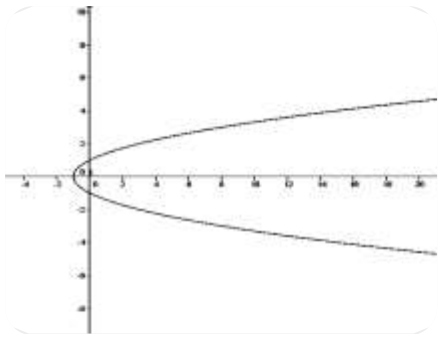
مثال: کدام‌یک از معادلات جبری زیر، y تابعی از x است؟



الف) $y = x^{۲} + ۱$ ✓✓

$$x_{۱} = x_{۲} \rightarrow x_{۱}^{۲} + ۱ = x_{۲}^{۲} + ۱ \rightarrow y_{۱} = y_{۲}$$

$$x = ۲ \rightarrow y = ۴ + ۱ = ۵ \rightarrow y = ۵$$



ب) $y^{۲} = x + ۱$ ✗

$$x_{۱} = x_{۲} \rightarrow x_{۱} + ۱ = x_{۲} + ۱ \rightarrow y_{۱}^{۲} = y_{۲}^{۲} \rightarrow y_{۱} = \pm y_{۲}$$

$$x = ۰ \rightarrow y^{۲} = ۰ + ۱ = ۱ \rightarrow y = \pm ۱$$

ج) $y + \sqrt[۳]{x^{۲} + ۱} = ۵$ ✓✓

هـ) $y^{۲} - ۳y = x$ ✗

د) $\left|y^{۲} - ۱\right| + (x + ۱)^{۲} = ۰$ ✗

✍ تمرینات درس اول و دوم :

۱. با در نظر گرفتن $A=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ رابطه‌ی زیر را با زوج‌های مرتب بنویسید.

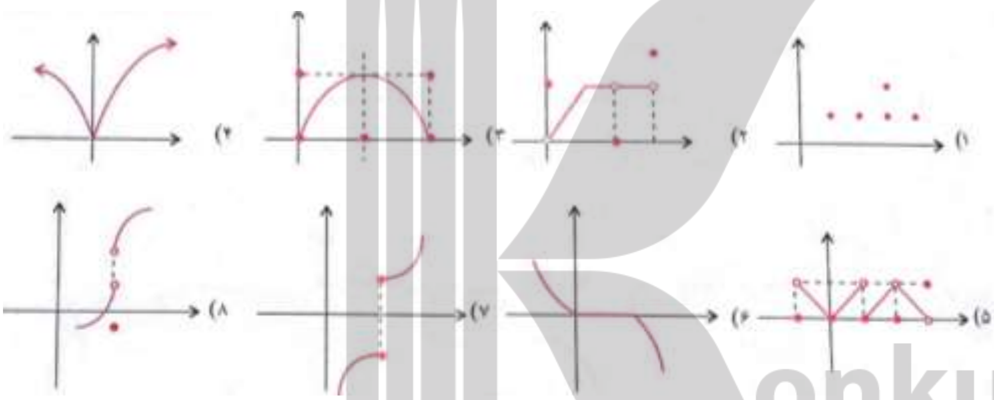
$$R=\{(x,y)|x,y\in A, ۳x+y\le ۱۰\}$$

۲. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که f, g تابع باشند.

$$f=\{(a,۲a+b),(b,a-b),(a,a-b+۱),(b,۴)\}$$

$$g=\left\{(a^۲+a,۱),(۰,b+۴),(۰,a^۲+b),(\frac{۲-a}{۴},a-b)\right\}$$

۳. کدام یک از نمودارهای زیر تابع هستند؟



۴. کدام‌یک از روابط زیر تابع هستند؟ (باذکر دلیل)

الف) $y^۲=x^۲+۲۵$

ب) $۳\sqrt{x}+۲y-۱۰=۰$

ج) $y^۳+|x|=۱$

د) $y^۳+y=x^۲$

هـ) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\ ,\ x^۲-y^۲=۰\}$

و) $\{(x,y)|\,x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ \sqrt{x+۲}+\sqrt{y-۳}=۰\}$

۵. اگر $f(x)+xf(-x)=x^۲+۱$ آنگاه $f(۲)$ را بدست آورید.

۶- در تابع خطی f داریم $f(x+۲)=f(x)+۲$ و $f(۲)=۵$ برقرار است، $f(۱)$ را بدست آورید.

✓ سؤالات چهار گزینه‌ای درس اول :

۱- رابطهٔ $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}\ ,|x|+|y|=۲\}$، چند زوج مرتب دارد؟ (سراسری ریاضی – ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲- دو تابع f و g به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

۱) $f\cup g$ ۲) $f\cap g$ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵ – با کمی تغییر)

۳) $f-g$ ۴) $g-f$

۳. رابطهٔ $f=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به‌ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ مقدار m (سراسری تجربی خارج از کشور-۸۵)

۴. اگر $f(x)=(\sqrt{x}+۶)^{-\frac{۲}{۳}}$ باشد، مقدار $f(۴)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵. اگر $f(x)=\sqrt{x+۲|x|}$، مقدار $f(f(-۱۴۴))$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۶. اگر $f(x)=\sqrt{۲-x-x^۲}$، مقدار $f(f(-۱))$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشو-۸۸)

۱) تعریف نشده ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۷. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲(۲-x)^۲$، حاصل $f(۱+x)-f(۱-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی-۸۵)

۱) صفر　　۲) $۴x$　　۳) $۲x^۲$　　۴) $۴x^۲$

۸. اگر $f(x-۳)=x^۲-۴x+۵$ باشد، آن‌گاه $f(۱-x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) $x^۲+۱$　　۲) $x^۲+۳$　　۳) $x^۲+۴x+۵$　　۴) $x^۲-۴x+۵$

۹- اگر $f(x)=۲-|x-۲|$، ضابطهٔ تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) x　　۲) $۴-x$　　۳) $f(x)$　　۴) $۲-f(x)$

۱۰. اگر مجموعهٔ $\{-۱,۲,۴\}$، دامنه‌ی تابع $f=\{(۲,۵),(a+۳b,۱),(۳a+۲b,۵)\}$ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) -۲　　۴) -۳

۱۱. اگر عبارت $\sqrt[۳]{۲x-x^۲}+\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲}-\frac{۹}{۲}}$، عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟

۱) $[\frac{۲}{۳},۲]$　　۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$

۳) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,۲]$　　۴) $[-\frac{۲}{۳},۰)\cup(۰,\frac{۲}{۳}]$

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

❋ درس سوم : انواع توابع ❋

☜ تابع چندجمله‌ای:

هر تابع که نمایش جبری آن، یک چندجمله‌ای جبری از یک نوع متغیر باشد را « تابع چندجمله‌ای » می‌نامند.

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0 \qquad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad , \quad n \in \mathbb{N})$$

توابع زیر همگی چندجمله‌ای‌اند:

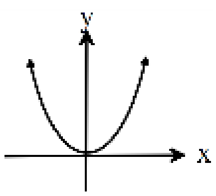
$$(1)\ f(x)=-3x^2-5x+2 \qquad , \qquad (2)\ g(x)=x^3-5x^2-7x \qquad , \qquad (3)\ h(t)=3t+7$$

☑ **نکته:** دامنه توابع چندجمله‌ای برابر کل اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ می‌باشد.

✎ **مثال:** اگر تابع $f(x)=ax^3+x^2+b$ از نقطه‌ی $(-1,-4)$ بگذرد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کند، a و b را بیابید.

🔔 **توجه:** تابعی که هر مقدار در دامنه را به مربع آن در برد نظیر کند، تابع $f(x)=x^2$ نامیده می‌شود. دامنه‌ی این تابع، اعداد حقیقی و برد آن، اعداد حقیقی نامنفی است. نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است:

$$D_f = R \quad , \quad R_f = [0, +\infty)$$

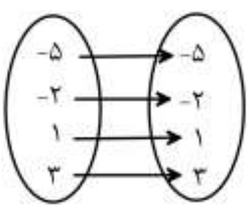


☜ توابع چندجمله‌ای خاص:

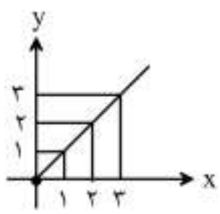
۱- توابع همانی :

تابعی است که دامنه و برد آن یکسان است. به عبارت دیگر در توابع همانی هر عضو از دامنه به همان عضو از برد نظیر می‌شود.

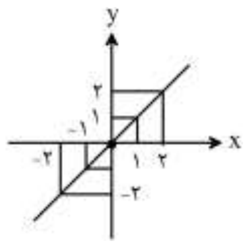
به نمودارهای زیر توجه کنید.



(الف)



(ب)



(ج)

در تمام نمودارهای فوق هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شده است. اما تفاوت این نمودارها در دامنه‌ی آن‌هاست. در نمودار « الف » دامنه‌ی تابع مجموعه‌ی $\{-5,-2,1,3\}$ می‌باشد، در نمودار « پ » دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[0,+\infty)$ می‌باشد و در نمودار « ج » دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد.

➢ **نتیجه ۱: ضابطه‌ی تابع همانی** همواره بصورت $y=x$ یا $f(x)=x$ می‌باشد.

➢ **نتیجه ۲: دامنه‌ی تابع همانی** در حالت کلی $\mathbb{R}$ می‌باشد. اما می‌تواند زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ نیز باشد که در این صورت در مسئله باید ذکر شود.

✍ **مثال:** تابع $f(x)=x$ را رسم کنید. به‌طوری‌که:

الف) $\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}=$ دامنه‌ی $f(x)$

ب) $(-۱,۱)=$ دامنه‌ی $f(x)$

ج) $(-\infty,۰)=$ دامنه‌ی $f(x)$

د) $\mathbb{R}=$ دامنه‌ی $f(x)$

✍ **مثال:** اگر رابطه‌ی $R=\{(۱,۱),(a+b,۲),(۳,۳),(۱۲,a^۲-b^۲)\}$ یک تابع همانی باشد، حاصل ab چقدر خواهد بود؟

۲- توابع ثابت :

تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است. یعنی به‌ازای هر x دلخواه از دامنه تنها یک مقدار ثابت برای برد به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر مقدار تابع به مقدار x بستگی ندارد، پس از لحاظ شهودی تابعی ثابت است که در ضابطه ی آن هیچ متغیری وجود نداشته باشد.

➢ **نتیجه ۱: ضابطه‌ی تابع ثابت** همواره به‌صورت $f(x)=c$ می‌باشد که در آن c یک عدد ثابت است.

➢ **نتیجه ۲: دامنه‌ی تابع ثابت** در حالت کلی $\mathbb{R}$ می‌باشد اما می‌تواند زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ نیز باشد که در این‌صورت، در مسئله باید ذکر شود.

✍ **مثال:** تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}$ را در هر یک از حالت‌های زیر رسم کنید.

الف) $\{-۵,-۲,۱,۴,۷\}=$ دامنه‌ی $f(x)$ ب) $[-۲,۱]=$ دامنه‌ی $f(x)$ ج) $\mathbb{R}=$ دامنه‌ی $f(x)$

۳- تابع قدرمطلق :

تابع قـدرمطلق تابعـی است که هـر مقـدار در دامنه را به قـدرمطلق آن در بـرد نظیر مـی‌کند.

➢ **نتیجه ۱: ضابطه تابع قدرمطلق** را به‌صورت $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.

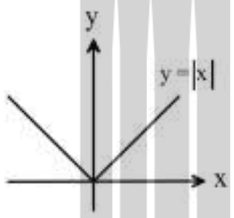
➢ **نتیجه ۲: دامنه‌ی توابع قدرمطلق** در حالت کلی برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد.(مگر آن که در صورت مسئله آن را محدود کرده باشد).

بنابه توضیح فوق قدرمطلق را به‌صورت ریاضی به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$|x|=\begin{cases} x & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

مفهوم تعریف فوق این است که اگر داخل قدرمطلق مثبت باشد، خود آن عبارت و اگر داخل قدرمطلق منفی باشد، قرینه‌ی آن عبارت حاصل می‌شود.

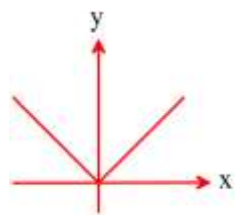
نمودار تابع $f(x)=|x|$ به این صورت است:



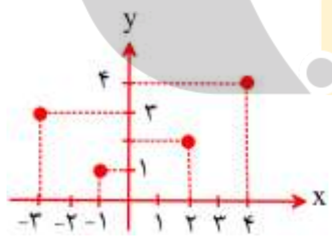
نمودار این تابع با دامنه $\mathbb{R}$ رسم شده است و برد آن بازه‌ی $[۰,+\infty)$ می‌باشد.

✎ **مثال:** نمودار تابع $f(x)=|x|$ را در هر یک از حالت‌های زیر رسم کنید و درهر حالت برد تابع را مشخص کنید.

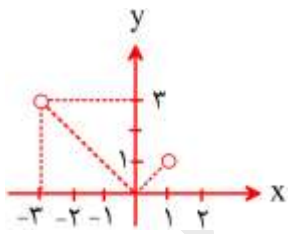
الف) همه‌ی اعداد حقیقی = دامنه‌ی f ب) $\{-۳,-۱,۰,۲,۴\}$ = دامنه‌ی f ج) اعداد بین ۳- و ۱ = دامنه‌ی f



برد f $=[۰,+\infty)$



برد f $=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$



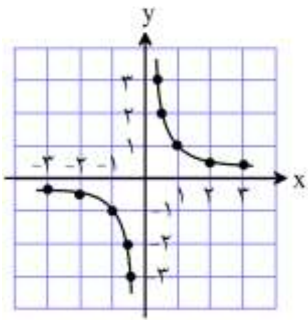
برد f $=[۰,۳)$

۴- توابع گویا :

همانطور که از اسم این تابع پیداست تابع گویا، تابعی است که می‌توان آن را به کمک یک عبارت گویا نشان داد. از لحاظ شهودی تابعی را می‌توان گویا در نظر گرفت که **اولاً کسری باشد** و **ثانیاً حتماً در مخرج آن متغیر وجود داشته باشد**.

به عنوان مثال تابع $y=\frac{x}{۲}$ را نمی‌توان یک تابع گویا در نظر گرفت زیرا در مخرج آن متغیر وجود ندارد. اما تابع $y=\frac{x^۲+۱}{\sqrt{۲x-۱}}$، یک تابع گویا می‌باشد.

ساده‌ترین <u>تابع گویا</u> تابع $y=\frac{۱}{x}$ می‌باشد. دامنه‌ی این تابع همه‌ی اعداد حقیقی به جز «صفر» می‌باشد. زیرا تقسیم بر صفر تعریف نشده است. در زیر نمودار تقریبی این تابع به کمک نقطه‌یابی رسم شده است:



x	-۳	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
$\frac{۱}{x}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۳	-۲	۳	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$

با توجه به نمودار تابع واضح است که **دامنه‌ی** آن همه‌ی اعداد حقیقی به جز صفر می‌باشد. یعنی: $\mathbb{R}-\{۰\}=$ دامنه‌ی f و **برد** این تابع نیز تمام اعداد حقیقی به جزء صفر می‌باشد یعنی $\mathbb{R}-\{۰\}=$ برد f.

➢ **نتیجه :** در توابع کسری(گویا) برای یافتن دامنه، کافی است عددهایی را که مخرج را صفر می‌کنند، بیابیم و آن‌ها را از $\mathbb{R}$ کم کنیم به‌عبارت دیگر:

$$\mathbb{R}-\{\text{عددهایی که مخرج را صفر می‌کنند}\}=\text{دامنه‌ی توابع گویا}$$

✐ **مثال:** دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\frac{x^{۳}+۲}{۲x-۱}$

۲) $g(x)=\frac{\sqrt{۲}+x}{x^{۲}-۱}$

۳) $h(x)=\frac{۲}{x^{۲}+۲}$

۴) $k(b)=\frac{b}{b^{۲}+b-۲}$

۵) $t(n)=\frac{n^{۲}+n+۱}{۴n^{۲}+۴n+۱}$

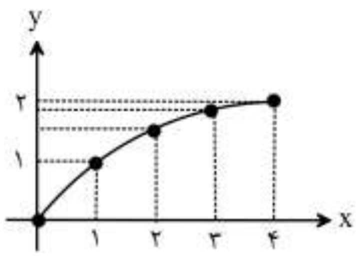
۶) $S(x)=\frac{\sqrt{۵}x-x^{۲}}{x^{۲}+x+۱}$

۷) $I(x)=\frac{x^{۵}+x^{۴}+۱}{x^{۳}+۳x^{۲}-۴x}$

۵- توابع رادیکالی (گنگ) :

توابعی هستند که در آن‌ها **متغیر زیر رادیکال** است. پس توابعی مثل $y=\sqrt{۵}x$ و $y=x-\sqrt{۲}$ توابع رادیکالی نمی‌باشد. زیرا در آن‌ها متغیر زیر رادیکال نمی‌باشد اما تابع $y=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی می‌باشد.

همان طور که می‌دانید تنها اعداد نامنفی ریشه‌ی دوم دارند. یعنی اعدادی مانند ۲- و ۴- و ... ریشه دوم ندارند پس به تابع $y=\sqrt{x}$ نمی‌توان اعداد منفی داد. در زیر نمودار این تابع به کمک نقطه‌یابی رسم شده است:



x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
$\sqrt{x}$	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲	$\sqrt{۵}$	...

➢ **نتیجه ۱: ضابطه تابع رادیکالی** را به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

➢ **نتیجه ۲: دامنه‌ی توابع رایکالی** با توجه به نمودار در حالت کلی، بازه‌ی $[۰,+\infty)$ **برد** آن نیز بازه‌ی $[۰,+\infty)$ می‌باشد. (مگر آن که در صورت مسئله آن را محدود کرده باشد).

✎ **مثال:** تابع $y=\sqrt{x+۲}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

➢ **نتیجه :** دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x)}$ تمام x هایی است که به‌ازای آن‌ها زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر شود. به عبارت دیگر برای بدست آوردن دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x)}$ کافی است نامعادله‌ی $f(x)\geq ۰$ را حل کنیم.

✎ **مثال:** دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\sqrt{x+۱}$

۲) $g(x)=\sqrt{۲x-۳}$

۳) $h(x)=\sqrt{-۳x+۱}$

☑ **نکته:** این مطلب برای تمام توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج صادق است. یعنی در تمام توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج برای یافتن دامنه کافی است زیرا رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۳}-x}$

ب) $g(x)=۱-\sqrt[۱۰]{۳x+۱}$

ج) $h(x)=\sqrt[۱۲]{۸x+۷}+۷$

☑ **نکته:** اگر توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج در مخرج کسر قرار داشته باشند، عبارت زیر رادیکال فقط باید بزرگتر از صفر شود زیرا اگر صفر شود مخرج کسر صفر شده و کل عبارت تعریف نشده شود یعنی:

$$y=\frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}} \rightarrow y \text{ دامنه‌ی}: f(x)>۰$$ ($g(x)$ تابعی با دامنه‌ی R می‌باشد.)

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$

ب) $g(x)=\frac{x+۲}{\sqrt[۴]{۲x-۵}}$

ج) $h(x)=۱-\frac{۳x^۲}{\sqrt[۲۰]{-۳x+۴}}$

☑ **نکته:** در توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد، دامنه‌ی تابع، همان دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال می‌باشد به عبارت دیگر برای محاسبه‌ی دامنه‌ی توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد می‌توان رادیکال را در نظر نگرفت. یعنی:

$$y=\sqrt[۲k+۱]{f(x)} \rightarrow y \text{ دامنه‌ی} = f(x) \text{ دامنه‌ی}$$

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$

۲) $g(x)=\sqrt[۵]{-x^۲+x+۳}$

۴) $t(x)=\sqrt[۱۳]{\frac{x-۱}{x^۳-۱}}$

۵) $s(x)=\sqrt[۷]{\frac{۱}{x^۲-۵x+۶}}$

☜ رسم نمودار به کمک انتقال:

برای رسم نمودارتابع به کمک انتقال ابتدا تابع اصلی را رسم می‌کنیم سپس به مقدار خواسته شده، به بالا یا پایین و به چپ یا راست حرکت می‌کنیم.

الف) رسم نمودار $y=f(x)+k$:

نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس به‌اندازه‌ی k واحد به بالا یا پایین حرکت می‌کنیم. به طوری که اگر $k>0$ باشد به سمت بالا و اگر $k<0$ باشد به سمت پایین حرکت می‌کنیم.

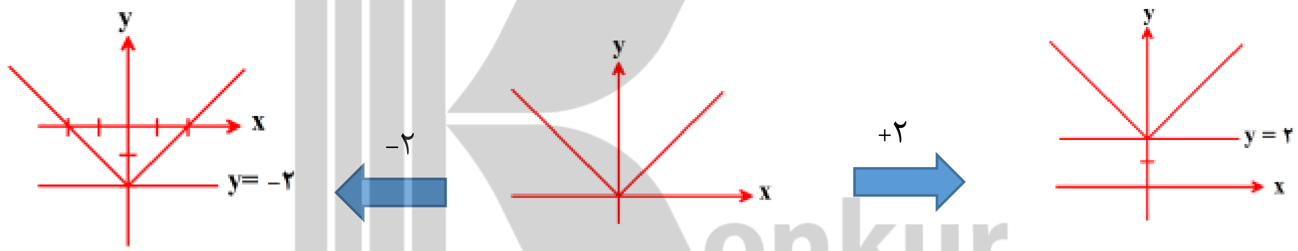
✎ **مثال:** با استفاده از نمودارهای $y=|x|$ و $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و به کمک انتقال نمودارهای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را به‌دست آورید.

$1)\ f(x)=|x|+2 \quad , \quad f(x)=|x|-2$

$2)\ g(x)=\sqrt{x}+1 \quad , \quad g(x)=\sqrt{x}-1$

$3)\ h(x)=x^2+3 \quad , \quad h(x)=x^2-3$

← جواب : ابتدا $y=|x|$ را رسم می‌کنیم سپس $f(x)$ را رسم می‌کنیم.



$y=|x|+2$ ، دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=[2,+\infty)$

$y=|x|$ ، دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=[0,+\infty)$

$y=|x|-2$ ، دامنه $=\mathbb{R}$ ، برد $=[-2,+\infty)$

ب) رسم نمودار $y=f(x+k)$:

برای رسم نمودار $y=f(x+k)$ کافی است ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم سپس به اندازه‌ی k واحد در راستای محور x ها، به سمت راست یا چپ حرکت کنیم. به‌طوری که اگر $k>0$ باشد به سمت چپ و اگر $k<0$ باشد به سمت راست حرکت می‌کنیم.

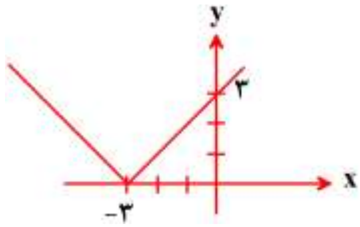
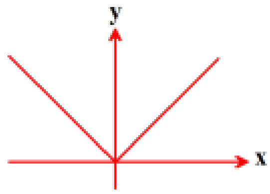
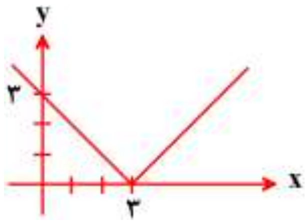
✎ **مثال:** با استفاده از نمودارهای $y=|x|$ و $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و به کمک انتقال هر یک از توابع زیر را رسم کنید و در هر مورد دامنه و برد را بیابید.

$1)\ f(x)=|x-3| \quad , \quad f(x)=|x+3|$

$2)\ g(x)=\sqrt{x-4} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+4}$

$3)\ h(x)=(x-2)^2 \quad , \quad h(x)=(x+2)^2$

← جواب : ابتدا تابع $y=|x|$ را رسم می‌کنیم سپس $f(x)$ را رسم می‌کنیم.

$y=|x+3| \xleftarrow{f(x+3)} y=|x| \xrightarrow{f(x-3)} y=|x-3|$

$y=\lvert x+3\rvert$	$y=\lvert x\rvert$	$y=\lvert x-3\rvert$
دامنه $=\mathbb{R}$	دامنه $=\mathbb{R}$	دامنه $=\mathbb{R}$
برد $=[0,+\infty)$	برد $=[0,+\infty)$	برد $=[0,+\infty)$

ج) **رسم نمودار** $y=f(x+k)+h$:

برای رسم این نمودار از هر دو قسمت «الف» و «ب» به‌طور همزمان استفاده می‌کنیم.

مثال: با استفاده از نمودارهای $y=|x|$ و $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ و به کمک انتقال هر یک از توابع زیر را رسم کنید و در هر مورد دامنه و برد را بیابید.

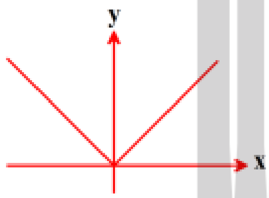
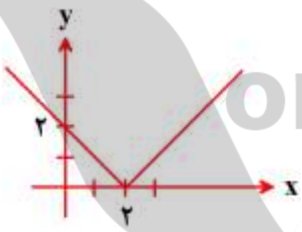
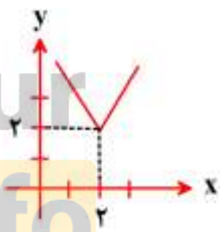
۱) $f(x)=|x-2|+2$, $f(x)=|x+2|+2$

۲) $g(x)=\sqrt{x-1}+3$, $g(x)=\sqrt{x-1}-1$

۳) $h(x)=(x-3)^2+1$, $h(x)=(x+1)^2-1$

→ جواب :

۱)

$y=|x| \longrightarrow y=|x-2| \longrightarrow y=|x-2|+2$

دامنه $=\mathbb{R}$ برد $=[2,+\infty)$

☜ رسم نمودار های $y=kf(x)$ و $y=f(kx)$:

الف) **رسم نمودار** $y=kf(x)$:

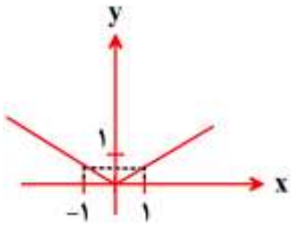
برای رسم این نمودار ابتدا تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس عرض نقاط را در k ضرب می‌کنیم.

مثال: توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید.

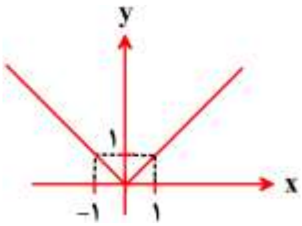
۱) $f(x)=\frac{1}{2}|x|$ ۲) $g(x)=2|x+2|$ ۳) $h(x)=3\sqrt{x-1}$

۴) $z(x)=\frac{x^2}{3}$ ۵) $k(x)=3\sqrt{x}+2$ ۶) $t(x)=2(x-1)^2+1$

← جواب : (۱)



$y=\frac{۱}{۲}|x|$



$y=|x|$

برد $=[۲,+\infty)$ دامنه $=\mathbb{R}$

ب) رسم نمودار $y=f(kx)$:

برای رسم این نمودار ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌کنیم.

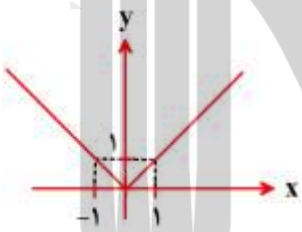
✎ **مثال:** توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را تعیین کنید.

۳) $h(x)=(\frac{x}{۳})^۲$ ۲) $g(x)=\sqrt{۳x}$ ۱) $f(x)=\left|\frac{x}{۲}\right|$

۶) $s(x)=۲|۲x+۱|-۲$ ۵) $k(x)=۲\sqrt{۲x+۱}+۱$ ۴) $z(x)=(\frac{x}{۲}-۱)^۲+۱$

← جواب : ۱) اگر فرض کنیم $y=|x|$ تابع فوق در واقع $y=(\frac{۱}{۲}x)$ می‌باشد پس ابتدا $y=|x|$ را رسم می‌کنیم. سپس طول نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$y=\left|\frac{x}{۲}\right|$



$y=|x|$

برد $=[۰,+\infty)$ و دامنه $=\mathbb{R}$

☜ رسم نمودار های $y=-f(x)$ و $y=f(-x)$:

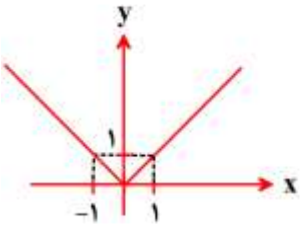
الف) رسم نمودار $y=-f(x)$:

برای رسم نمودار $y=-f(x)$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس عرض‌ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم (در حقیقت قرینه‌ی تابع را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم).

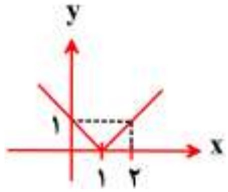
مثال: توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

۱) $f(x)=-|x-۱|$ ۲) $g(x)=-\sqrt{x}+۱$ ۳) $h(x)=-(x+۱)^{۲}-۱$

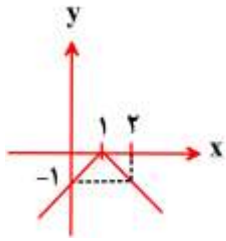
← جواب : ۱) برای رسم این تابع ابتدا تابع $y=|x|$ را رسم کرده و سپس آن را یک واحد به راست برده و در نهایت آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



$y=|x|$



$y=|x-۱|$



$y=-|x-۱|$

دامنه $=\mathbb{R}$ برد $=(-\infty,۰]$

ب) رسم تابع $y=f(-x)$:

برای رسم نمودار این تابع کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم کنیم، سپس طول‌ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (در حقیقت قرینه‌ی تابع را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.)

مثال: توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

۱) $f(x)=|-x|$ ۲) $g(x)=\sqrt{-x+۱}-۱$ ۳) $h(x)=(-x+۱)^{۲}$

۴) $R(x)=-\sqrt{۲-x}+۲$ ۵) $k(x)=-(۲-x)^{۲}+۴$

← جواب: ۱)

$y=|x|$ $y=|-x|$

$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt{-x}$ $y=\sqrt{-x+۱}$ $y=\sqrt{-x+۱}-۱$

☜ تابع چندضابطه‌ای:

۱) **تابع چندضابطه‌ای:** توابعی که در بخش‌های مختلف از دامنه‌ی آن، با ضابطه‌های مختلفی تعریف می‌شوند، توابع چندضابطه‌ای می‌نامند.

➢ ویژگی‌های توابع چندضابطه‌ای: یک تابع چندضابطه‌ای دارای سه ویژگی زیر است:

- الف) اشتراک دامنه‌ها، تهی است.(در صورت اشتراک باید مقدارضابطه‌ها به‌ازای مقدار یا مقدارمشترک مساوی باشند.)
- ب) دامنه‌ی تابع، اجتماع دامنه‌ی هر یک از ضابطه‌هاست.
- پ) برد تابع، اجتماع برد هر یک از ضابطه‌هاست.

✎ **مثال:** ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x & , -۱\le x<۱ \\ -۲ & , x\ge ۰ \end{cases}$ یک تابع را نمایش نمی‌دهد زیرا اشتراک دامنه‌ها تهی نبوده و در این دامنه‌ی مشترک، حداقل به‌ازای یک مقدار از x، مقادیر ضابطه‌ها نابرابرند.

✎ **مثال:** به دامنه‌ی توابع چندضابطه‌ای زیر توجه کنید.

(۱) $f(x)=\begin{cases} x+۵ & , x\ge ۱ \\ x^۲ & , ۲<x\le ۴ \end{cases}$

$D_f=(-\infty,۱)\cup[۱,+\infty)=R$

ضابطه‌ی پایینی ضابطه‌ی بالایی

(۲) $g(x)=\begin{cases} x & , ۰\le x<۱ \\ x^۲ & , ۲<x\le ۴ \end{cases}$

$D_g=[۰,۱)\cup(۲,۴]$

ضابطه‌ی بالایی ضابطه‌ی پایینی

(۳) $h(x)=\begin{cases} ۵ & , x<-۱ \\ ۳-x & , x>۳ \end{cases}$

$D_h=(-\infty,-۱)\cup(۳,+\infty)$

$=R-[-۱,۳]$

✎ **مثال:** در تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & , x\ge ۱ \\ -۵x & , x<۱ \end{cases}$، مقادیر $f(\sqrt{۲})$ و $f(-۱)$ را بیابید.

← جواب : $\sqrt{۲}\in[۱,+\infty)$، پس $f(\sqrt{۲})$ از ضابطه‌ی بالایی محاسبه می‌شود.

$$f(x)=x^۲+۱ \xrightarrow{x=\sqrt{۲}} f(\sqrt{۲})=۲+۱=۳$$

$-۱\in(-\infty,۱)$، پس $f(-۱)$ از ضابطه‌ی پایینی محاسبه می‌شود.

$$f(x)=-۵x \xrightarrow{x=-۱} f(-۱)=۵$$

➢ **تذکر:** در تابع چندضابطه‌ای $y=f(x)$، برای یافتن مقدار $f(a)$ $(a\in D_f)$، ابتدا مشخص می‌کنیم که a متعلق به دامنه‌ی کدام‌یک از ضابطه‌هاست، سپس مقدار تابع را در آن ضابطه می‌یابیم.

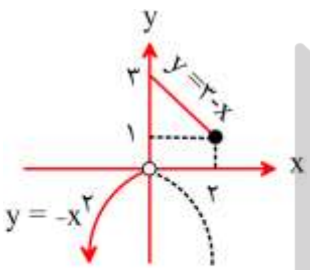
۲) **رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای:** برای رسم نمودار یک تابع چندضابطه‌ای، هر یک از ضابطه‌ها را (با توجه به دامنه‌ی آن ها) در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

🔔 **توجه:** برای تعیین برد توابع چندضابطه‌ای معمولاً از روش ترسیم استفاده می‌کنیم.

✍ **مثال:** به نمودار توابع زیر، دامنه و بردشان توجه کنید.

(۱) $g(x)=\begin{cases} ۳-x & , \quad ۰\le x\le ۲ \\ -x^{۲} & , \quad x<۰ \end{cases}$

← جواب : نمودار این تابع برای هر $x\in[۰,۲]$، خط $y=۳-x$ و برای اعداد کوچکتر از صفر، سهمی $y=-x^{۲}$ است. پس:

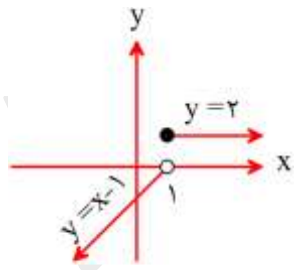


$$g \text{ دامنه‌ی تابع} =(-\infty,۰)\cup[۰,۲]=(-\infty,۲]$$

$$g \text{ برد تابع} =(-\infty,۰)\cup[۱,۳]$$

(۲) $f(x)=\begin{cases} ۲ & , \quad x\ge ۱ \\ x-۱ & , \quad x<۱ \end{cases}$

← جواب : نمودار این تابع برای اعداد بزرگتر یا مساوی ۱ خط $y=۲$ و برای اعداد کوچکتر از ۱، خط $y=x-۱$ است، پس:



$$f \text{ دامنه‌ی تابع} =(-\infty,۱)\cup[۱,+\infty)=R$$

$$f \text{ برد تابع} =\{۲\}\cup(-\infty,۰)$$

برد ضابطه‌ی بالایی　　برد ضابطه‌ی پایینی

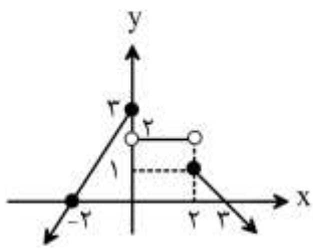
☑ **نکته:** برای رسم نمودار تابع چندضابطه‌ای f، کافی است نمودار هر یک از ضابطه‌های تابع f را روی دامنهٔ مربوط به آن ضابطه رسم کنیم. توجه کنید که اگر $x=a$ نقطهٔ مرزی دامنهٔ دو ضابطهٔ دلخواه تابع f باشد، مشخص کردن مقدار هر دو ضابطه در $x=a$ ضروری خواهد شد.

✍ **مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کرده و با استفاده از نمودار، برد آن‌ها را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\ge ۰ \\ ۲-x & x<۰ \end{cases}$

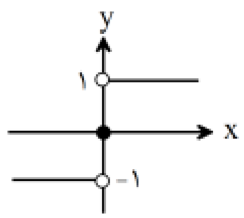
ب) $f(x)=\begin{cases} 1-2x & x<-1 \\ 2 & -1\le x\le 1 \\ 3x-2 & x>1 \end{cases}$

مثال: ضابطهٔ تابع شکل مقابل را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



تابع علامت (ویژه علاقمندان)

یکی از توابع قطعه‌ای (چندضابطه‌ای) معروف، تابع علامت می‌باشد که آن را با $\operatorname{sgn}(x)$ نمایش می‌دهیم و ضابطه و نمودار به صورت مقابل است:



$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار معلوم می‌شود که دامنه و برد تابع علامت به‌ترتیب برابر $D=\mathbb{R}$ و $R=\{-1,0,1\}$ می‌باشد.

✍ تمرینات درس دوم :

۱- ضابطه‌های زیر را بررسی کنید. نمودار آنها را رسم کنید و تعیین کنید کدام یک تابع است؟

الف) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ x & x<۰ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} ۱ & x\ge ۰ \\ ۲ & x<۰ \end{cases}$

ج) $k(x)=\begin{cases} x & x\ge ۲ \\ ۱ & ۰<x<۲ \\ -x & x\le ۰ \end{cases}$

د) $h(x)=\begin{cases} |x| & -۱<x<۱ \\ ۲ & |x|\ge ۱ \end{cases}$

۲- اگر $I=\{(۱,a^۲),(a+۱,b),(b^۲,c-۲),(d^۲,d+c)\}$ تابع همانی باشد d را بیابید.

۳- به‌ازای چه مقادیر از b,a تابع $f(x)=\dfrac{bx+a^۲-۴}{(a-۲)x+۳}$ به تابع همانی تبدیل می‌شود؟

۴- به‌ازای چه مقدار b,a تابع $f(x)=ax^۳+(b-۱)x+۲$ به تابع ثابت صفر تبدیل می‌شود؟

۵- اگر دامنه تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲+x}{ax^۲+bx-۲}$ به صورت $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۲\}$ باشد، b,a را بیابید.

۶- اگر $f(x)=۲x^۳+۴$ و دامنه تابع f برابر $[-۱,۲]$ باشد، برد تابع f را بیابید.

۷- برد تابع $y=|x+۵|-۳$ را در هر یک از حالت‌های زیر رسم کنید و برد آن را بیابید.

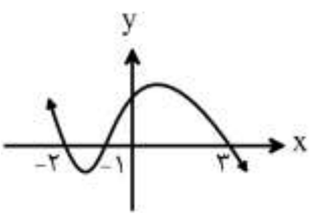
الف) $D_f=\mathbb{R}$

ب) $D_f=[-۶,۱۰]$

ج) $D_f=[۴,۱۰]-\{۵\}$

۸- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x$ برابر $[۰,۱۶]$ است، دامنه آن را بدست آورید.

۹- شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ است. دامنهٔ توابع زیر را به‌دست آورید.



الف) $g(x)=\sqrt{f(x)}$

ب) $h(x)=\frac{x^۲}{f(x)}$

ج) $r(x)=\sqrt{xf(x)}$

ت) $k(x)=\sqrt{\frac{f(x)}{x^۲-۴}}$