درس اوّل : مفهوم تابع

یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضی و فیزیک ، مفهوم تابع می باشد. بوسیله‌ی این مفهـوم مـی تـوان رابطه‌ی بین پدیده های پیرامون خود را به راحتی بیان نمود. در این درس با این مفهوم به صـورت مقـدماتی آشنا می شوید.

قسمت اوّل : مفهوم تابع

در لغت تابع به معنای پیرو، مطیع ، وابسته و .... شناخته می شود. در ریاضی هرگـاه رابطـه‌ی بـین دو متغیـر چنان باشد که با تغییر یکی ، دیگری تغییر کند. گویند متغیر دوّم تابعی از متغیر اوّل است و متغیر اوّل را متغیر اصلی و دوّمی را متغیر تابع یا «**تابع**» می گویند. برای مثال، هر چقدر تعداد ساعت هر یک از کارگران یک کارگاه زیاد شود، دستمزد آن نیز زیاد می شود. همچنین هر چقدر تعداد ساعت هر یک کم شود، دسـتمزد آن نیز کم می شود. لذا دستمزد کارگران کارگاه تابعی از میزان ساعت کاری آنها است.

در دیدگاه دیگر هرگاه بستگی بین دو متغیر چنان باشد که متغیر اوّل در یک لحظه فقط به یک متغیـر دیگـر نظیر شود، گویند متغیر دوّم تابعی از متغیر اوّل است.

مثال: هر یک از رابطه های زیر یک تابع می باشند.

۱ : هر دانش آموز در هر لحظه فقط یک وزن دارد. پس رابطه‌ی بین سن و وزن دانش آموز تابع است.

۲ : هر پرنده‌ی در حال پرواز در هر لحظه یک ارتفاع دارد، پس رابطه‌ی بین زمان پرواز و ارتفاع پرنـده یـک تابع است.

مثال : هر یک از رابطه های زیر یک تابع نمی باشند.

۱ : هر شخص ممکن است در هر لحظه به دو یا چند تیم ورزشی علاقه مند باشد. پس این رابطه تابع نیست.

۲ : هر شخص ممکن است در هر لحظه به دو یا چند غذا علاقه مند باشد. پس این رابطه تابع نیست.

تمرین برای حل :

۱ :کدامیک رابطه های زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.

الف : رابطه ای که به هر ضلع مربع ، محیط آن را نسبت دهد.

ب : رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت دهد.

ج : رابطه ای که به هر دانش آموز ، گروه خونی او را نسبت دهد.

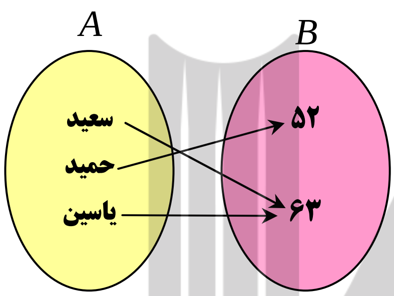
د : رابطه ای که به هر دانش آموز ، دوستان او را نسبت دهد.

هـ : رابطه ای که به هر عدد ، ریشه های دوّم آن عدد را نسبت دهد.

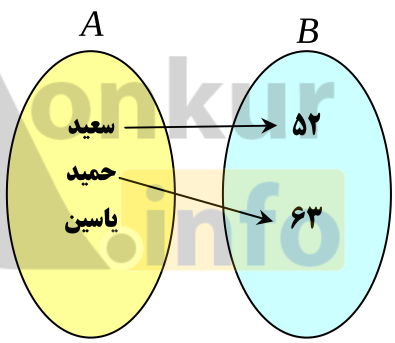
و : رابطه ای که به هر عدد ، ریشه های سوّم آن عدد را نسبت دهد.

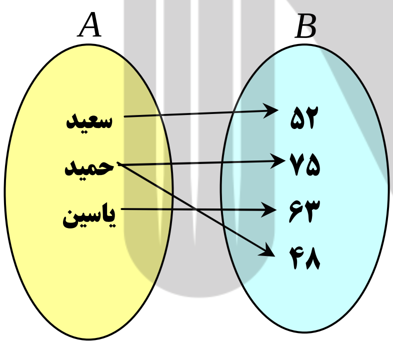
در واقع با توجه به آنچه که در بالا گفته شد، می توان گفت : هر رابطه که هر عضو مجموعه‌ی A را **دقیقاً** به یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت دهد را یک **تابع** از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B می نامند.

برای مثال اگر نمودار پیکانی نام دانش آموز کلاس و وزن آنها را در نظر بگیریم. با توجه به این تعریف، رابطه ی بین دانش آموزان و وزن آنها یک تابع است.

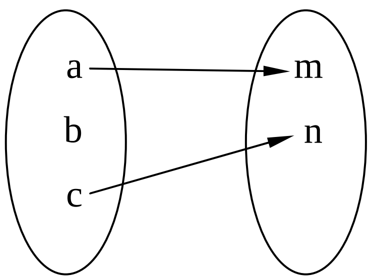


امّا طبق تعریف، رابطه های زیر تابع نمی باشند.

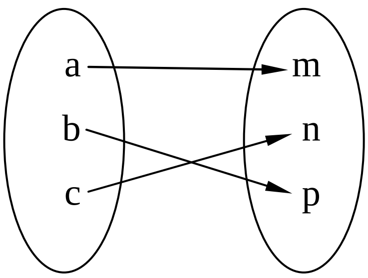




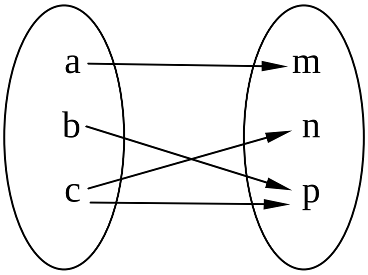
تمرین۲ : کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



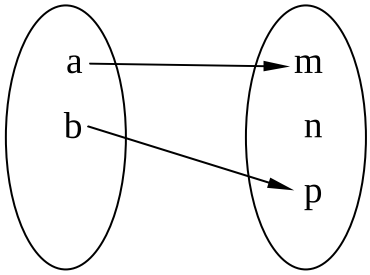
(۲)



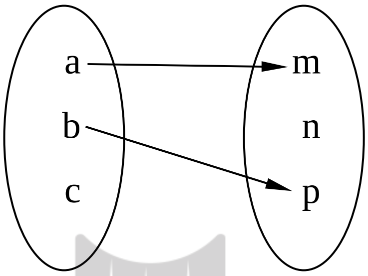
(۱)



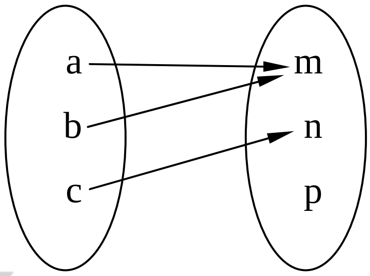
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

حل :

۱) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

۲) طبق تعریف چون از b پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۳) طبق تعریف چون از c دو پیکان خارج شده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۴) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

۵) طبق تعریف چون از c پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

۶) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

تمرین۳ : تمام تابع هایی را بنویسید که از $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{p,q\}$ تعریف می شوند. سپس تعداد آنها را تعیین کنید.

تمرین۴ : اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{p,q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

حل: طبق تعریف تابع ، هر عضو B می تواند حداکثر از ۴ عضو A به دست آمده باشد و چون B دو عضو دارد ، پس حداکثر توابعی که از A به B تعریف می شوند برابر $۱۶ = ۲^۴ = ۲\times۲\times۲\times۲$ باشند[1].

1 . به طور کلی اگر مجموعه‌ی A دارای m عضو و مجموعه‌ی B دارای n عضو باشد. حداکثر n^m تابع از A به B وجود دارد.

تمرین برای حل :

۵ : الف : اگر $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$. رابطه‌ای از A به B بنویسید که تابع باشد.

ب : اگر $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$. رابطه‌ای از A به B بنویسید که تابع نباشد.

۶ : اگر $A=\{a\}$ و $B=\{c,d,e\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۷ : اگر $A=\{a,b\}$ و $B=\{c,d\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۸ : ابتدا تعداد تابع هایی را بنویسید که از $A=\{a,b\}$ به $B=\{۵,۶,۷\}$ تعریف می شوند و سپس تمام آنها را تعیین کنید.

***

قسمت دوّم : روش های نمایش تابع

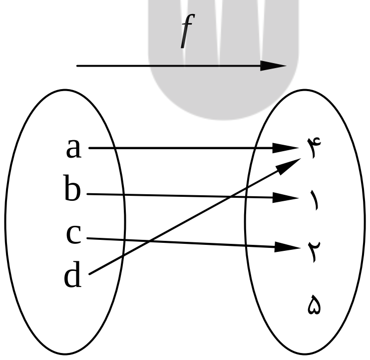
یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه‌ی A را **دامنه** و مجموعه‌ی B را **هم دامنه** یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.

$$f:A\to B$$

در ادامه روش های نمایش یک تابع را بیان می کنیم.

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، که با **روش پیکانی** یا نمودار وِن نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. مانند تابع مقابل:



دامنه (A)　　هم دامنه (B)

تذکر: در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود. یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را **برد** تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a,b,c,d\}$

هم دامنه $B = \{۱,۲,۴,۵\}$ برد $R_f = \{۱,۲,۴\}$

نتیجه‌ی۱ : مجموعه‌ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعـه‌ی A هستند.) را **دامنه** و مجموعه‌ی تمام عضوهایی از مجموعه‌ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قـرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

نتیجه‌ی۲ : در حالت کلی برد تابع همواره زیر مجموعه‌ی هم دامنه‌ی آن است.[۲] یعنی $R_f \subseteq B$

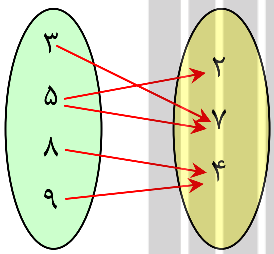
تمرین۹ : مجموعه های $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{a,b,c\}$ داده شده اند.

الف: به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B بنویسید که تابع باشند.

ب: به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B بنویسید که تابع نباشند.

ج : تعداد کل توابعی را بنویسید که می توان از A به B تعریف کرد.

تمرین۱۰: نمودار پیکانی رابطه‌ای به شکل مقابل رسم شده است.



با حذف کدام عضو، این رابطه تابع خواهد بود؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۸

***

۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه‌ای از زوج های مرتب[۳] را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اوّل آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که درآن مولفه های اوّل، اعضای دامنه و مولفه های دوّم ، اعضای برد می باشند.

---

2. در حالتی که $R_f = B$ باشد. گویند تابع پوشا است.

3. هر دو تایی به شکل (a,b) که محل قرار گرفتن اجزای آن مهم است را زوج مرتب می نامند. a را مؤلفه‌ی اوّل (طـول) و b را مؤلفه‌ی دوّم (عرض) می نامند.

به عنوان مثال، تابعی که در مورد (۱) با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه‌ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f=\{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۴)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f=\{(x,y)\,|\,x\in D_f\,,y\in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت **زوج مرتب**، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اوّل برابر باشند، باید مولفه های دوّم آن ها نیز برابر باشند[4].

تمرین ۱۱ : کدام یک از مجموعه های زیر تابع است؟

الف) $f_۱=\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۵)\}$

ب) $f_۲=\{(۱,۳),(۲,۵),(۱,۲)\}$

ج) $f_۳=\{(۲,۵),(۵,۲),(۳,۲),(۲,۳),(۰,۰)\}$

د) $f_۴=\{(۱,۳),(۲,۰),(۴,۷),(۱,۳)\}$

تمرین ۱۲ : اگر مجموعه‌ی $\{(۲,۵),(۵,۷),(۱,۴),(۵,۲k+۱)\}$ تابع باشد. مقدار k را بیابید.

تمرین ۱۳ : اگر مجموعه‌ی زیر یک تابع باشد. مقدار β و α را بیابید.

$$\{(۲,\alpha-\beta),(۲,۳),(۱,\alpha+\beta),(۳,۰),(۱,-۱)\}$$

تمرین ۱۴: اگر مجموعه‌ی زیر یک تابع باشد، مقدار t را بیابید.

$$f=\{(۱,۳),(۲,۰),(۱,t^۲-۲t)\}$$

تمرین ۱۵: اگر مجموعه‌ی زیر یک تابع باشد، مقدار m را بیابید.

$$f=\{(۱,۳),(۲,۰),(-۱,۴),(۱,m^۲-۲m),(m,۷)\}$$

تمرین ۱۶: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f=\{(۳,۲),(۵,۷),(-۳,۴),(۸,۴)\}$$

تمرین ۱۷: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f=\{(۳,۲),(۵,۲),(-۳,۲),(۲,۲),(۱,۲)\}$$

***

[4]. اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

۳ : نمایش تابع به صورت جدول

نمایش تابع به صورت **جدول**، مشابه نمایش زوج مرتبی تابع است. در این نمـایش مقـادیر x هـا ، دامنـه و مقادیر y ها برد تابع را نمایش می دهند.

$f:$

x	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	......	x_n
y	$y_۱$	$y_۲$	$y_۳$	......	y_n

به عنوان مثال، نمایش تابع مورد (۱) به صورت جدول، به شکل زیر است.

$f:$

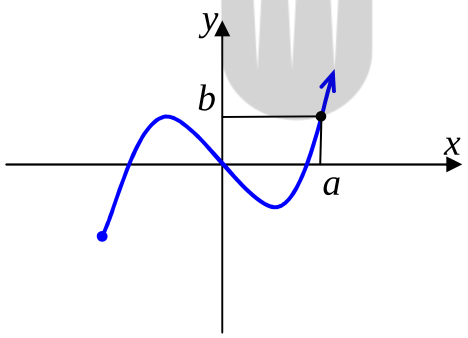
x	a	b	c	d
y	۴	۱	۲	۴

تمرین۱۸ : تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن دو عضو و برد آن یک عضو داشته باشد.

تمرین۱۹ : دو تابع بنویسید که دامنه و برد آنها یکسان باشند ولی هیچ دو زوج مرتب آنها یکسان نباشند.

***

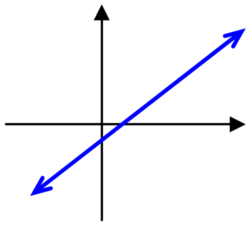
۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)



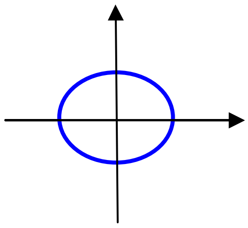
اگر مجموعه ی f ، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a,b)\in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

با توجه به آنچه در مورد تعریف تابع گفته شد ، یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (**آزمون خط قائم**)

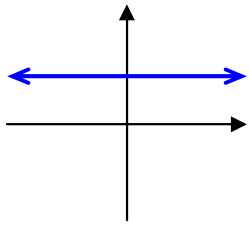
تمرین ۲۰ : کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



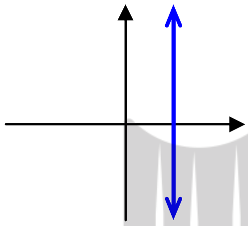
(۱)



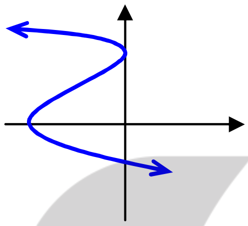
(۲)



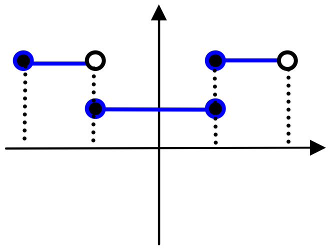
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

تمرین ۲۱ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(1,2),(3,-1),(4,0),(-1,1)\}$$

تمرین ۲۲ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(x,y)\,|\,y=x^2,-1\le x<1\}$$

تمرین ۲۳ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{x},0\le x\le 4\}$$

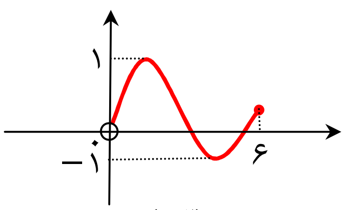
تمرین ۲۴ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f=\{(x,y)\,|\,y=|x|\}$$

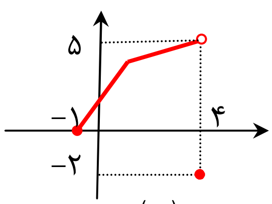
تذکر : اگر تابعی به صورت هندسی نمایش داده شده باشد، تصویر نمودار تابع روی محور x ها، دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها، برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر :

$$D_f=\{x\in R\,|\,(x,y)\in f\} \quad \text{و} \quad R_f=\{y\in R\,|\,(x,y)\in f\}$$

تمرین ۲۵ : دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.



(الف)



(ب)

تمرین ۲۶ : نمودار تابع $f=\{(x,y)\mid y=x^{۲}-۱\}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

***

۵ : نمایش تابع از طریق ضابطه

برای تابع f که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شده است. رابطه‌ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می کند. **ضابطه** یا قانون تابع می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f:A\to B$$
$$y=f(x)$$

مثال : اگر تابع به هر عضو مجموعه‌ی $A=\{۲,۳,۵,-۱\}$ مربع آن را نسبت دهد، در این صورت می توان نوشت.

$$f:A\to B$$
$$y=x^{۲}$$

که در آن $B=\{۴,۹,۲۵,۱\}$

مثال : رابطه‌ی زیر روی مجموعه‌ی $A=\{۲,۴,۵,۶,۷\}$ را در نظر بگیرید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۸ & x\geq ۵\\ x^{۲}-۳x & x<۵\end{cases}$$

واضح است که :

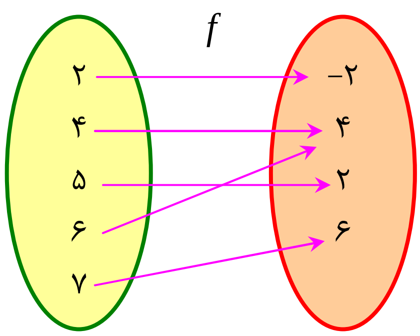
$$f(۲)=(۲)^{۲}-۳(۲)=۴-۶=-۲$$

$$f(۴)=(۴)^{۲}-۳(۴)=۱۶-۱۲=۴$$

$$f(۵)=۲(۵)-۸=۲$$

$$f(۶)=۲(۶)-۸=۴$$

$$f(۷)=۲(۷)-۸=۶$$



دامنه‌ی تابع برد تابع

طبق این تعریف می توان گفت که :

$R_f=\{-۲,۴,۲,۶\}$ برد تابع

$D_f=\{۲,۴,۵,۶,۷\}$ دامنه‌ی تابع

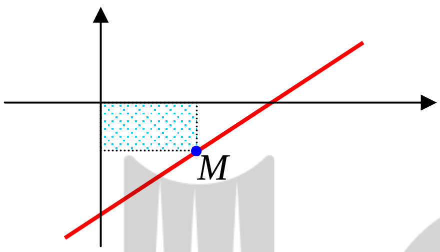
توجه : اغلب تابع را با یک معادله (ضابطه) نمایش می دهند.

تمرین۲۷ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت یک شش ضلعی منتظم را به ضلع آن وابسته کند.

تمرین۲۸ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که حجم کره را به شعاع آن وابسته کند.

تمرین۲۹ : مجموع دو عدد ۱۰ است. اگر یکی از آنها x باشد. معادله‌ی تابعی را بنویسید که حاصل ضرب آنها را به x وابسته کند.

تمرین۳۰ : در شکل مقابل یک مستطیل به محور های مختصات وخط $۲y + x = ۱$ محدود شده است، معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت مستطیل را به x وابسته کند.



تذکر ۱ : گاهی تابع را صرفاً با ارائه‌ی ضابطه معرفی می کنند و اشاره ای به دامنه‌ی آن نمی شود. در این موارد، دامنه‌ی تابع را بزرگترین مجموعه ای که ضابطه‌ی تابع روی آن تعریف شده باشد، در نظر می گیرند.

تذکر ۲ : خروجی هر عضو دامنه مانند x را با y یا $f(x)$ نمایش می دهند.

مثال الف : اگر گفته شود که تابع $f(x) = \frac{x+۱}{۲x-۶}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $R - \{۳\}$ باشد.

مثال ب : اگر گفته شود که تابع $g(x) = \sqrt{۶ - ۳x}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $(-\infty, ۲]$ باشد.

توجه: گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد.

مثال۱) تابع زیر یک تابع سه ضابطه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x - ۱ & x > ۲ \\ -x^۲ & -۲ < x < ۲ \\ ۲x + ۳ & x \leq -۲ \end{cases}$$

با توجه به این تابع جدول زیر را کامل کنید.

x	-۳	۱	۴	۰	-۲	۲
y						

توجه داشته باشید که تابع چند ضابطه ای به طور کلی به صورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases} m(x) & x\in D_m \\ n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

که در این صورت دامنه این تابع با اجتماع دامنه های تمام ضابطه های آن برابر است.

$$D_f=D_m\cup D_n$$

توجه کنید که دامنه های ضابطه ها، در تابع چند ضابطه ای بنابر تعریف تابع باید جدا از هم باشند.

$$D_m\cap D_n=\Phi$$

مثال۲) تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R\,|\,x\geq ۰\}\cup\{x\in R\,|\,x<۰\}=R$$

$$R_f=\{y\in R\,|\,y\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

مثال۳) تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R\,|\,x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R\,|\,x<۰\}=R$$

$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تذکر: تابع علامت را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

تمرین ۳۱ : نمودار توابع قدرمطلق و علامت را رسم کنید.

تمرین۳۲ : نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x>۱ \\ x^{۲} & -۱\le x\le ۱ \\ ۱ & x<-۱ \end{cases}$$

تمرین۳۳ : هر یک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.

الف) $f(x)=\frac{۲x}{|x|}$ ب) $g(x)=۱+|x-۲|$

حل: الف)

$$x\ne \cdot \to D_f=R-\{\cdot\}$$

$$\begin{cases} If\ \ x>\cdot \to |x|=x\to \frac{۲x}{|x|}=\frac{۲x}{x}=۲ \\ If\ \ x<\cdot \to |x|=-x\to \frac{۲x}{|x|}=\frac{۲x}{-x}=-۲ \end{cases}$$

$$\to f(x)=\begin{cases} ۲ & x>\cdot \\ -۲ & x<\cdot \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} If\ \ x\ge ۲\to x-۲\ge \cdot \to |x-۲|=x-۲ \\ If\ \ x<۲\to x-۲<\cdot \to |x-۲|=-(x-۲) \end{cases}$$

$$\to f(x)=\begin{cases} ۱+(x-۲) & x\ge ۲ \\ ۱-(x-۲) & x<۲ \end{cases} \to\to f(x)=\begin{cases} x-۱ & x\ge ۲ \\ ۳-x & x<۲ \end{cases}$$

تمرین۳۴ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\ge \cdot \\ -۲x-۳ & x<\cdot \end{cases}$$

❋❋❋

تمرین برای حل :

۳۵ : در هر مورد تابعی مثال بزنید که

الف : دامنه‌ی آن شامل دو عضو باشد.

ب : برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج : دامنه‌ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

د : دامنه‌ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ : دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳۶ : آیا جدول زیر یک تابع نشان می دهد؟چرا؟

$f:$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲

۳۷ : نمایش جبری تابع های زیر را بنویسید.

الف

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

ب

x	−۲	−۱	۰	۱	۴	۶
y	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	−۳

ج

x	۱	۲	۳	۴	۰	−۱
y	۲	۴	۸	۱۶	۱	$\frac{۱}{۲}$

د

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۴	۴	۴	۴	۴	۴

هـ

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۲	۳	۴	۵	۶

و

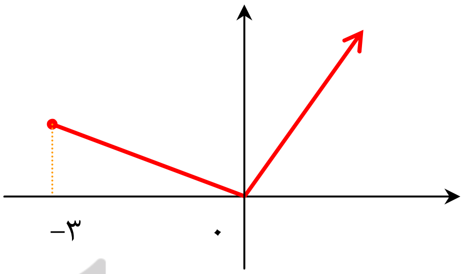
x	۱	۲	۳	۰	−۵	−۱
y	۱	۲	۳	۰	۵	۱

۳۸ : اگر $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^{۲}-۴}$ مطلوب است، تعیین :

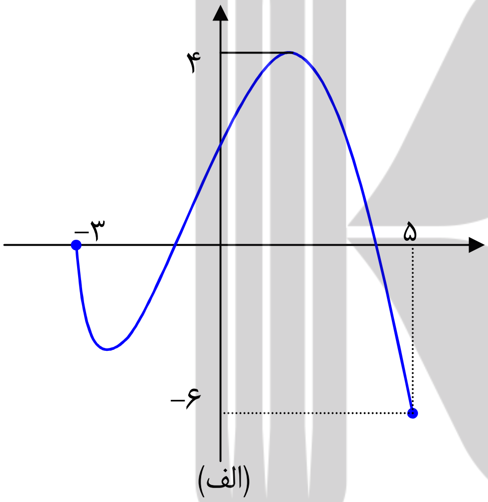
الف) $f(۰)=$ ‌ ‌ ج) $f(-\sqrt{۲})=$ ‌ ‌ هـ) $f(۱+x)=$

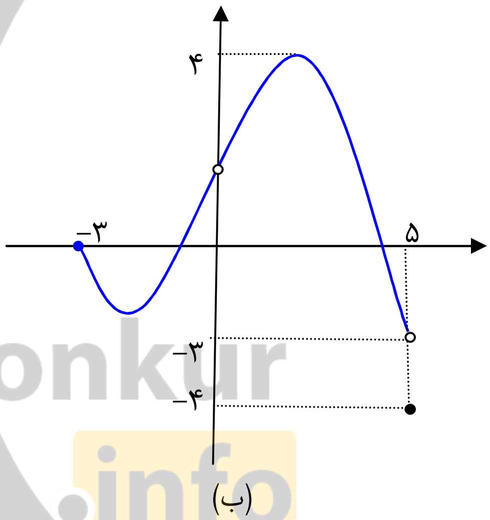
ب) $f(-۱)=$ ‌ ‌ د) $f(k)=$

۳۹ : دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

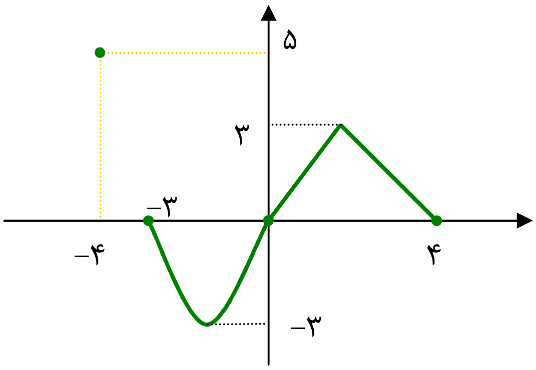


۴۰ : دامنه و برد تابع های زیر را بنویسید.





۴۱ : دامنه و برد تابع زیر را بنویسید. برد تابع شامل چند عدد طبیعی است؟ آنها را بنویسید.



۴۲ : دو تابع رسم کنید که دامنه‌ی آنها $[-۳,۳)$ و برد آنها $[۰,۵]$ باشد.

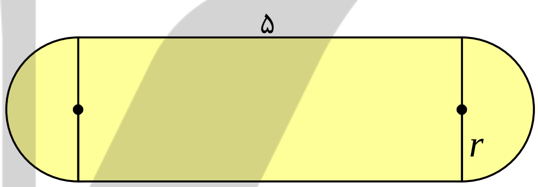
۴۳ : نمودار تابع مقابل را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x-۳ & x<۰ \end{cases}$$

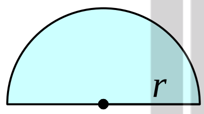
۴۴ : یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است، اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد. حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۴۵ : طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کنید.

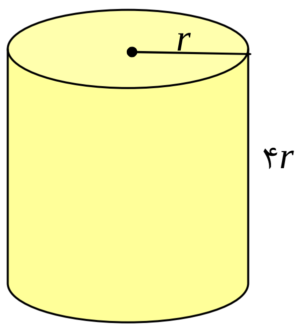
۴۶ : با توجه به شکل مقابل تابعی بنویسید که مساحت شکل را بر حسب شعاع بیان کند.



۴۷ : تابعی بنویسید که مساحت نیم دایره را بر حسب شعاع آن بیان کند.



۴۸ : محیط نیم دایره‌ی مقابل را به عنوان تابعی برحسب r بنویسید.



۴۹ : با توجه به شکل مقابل تابعی بنویسید که حجم جسم را بر حسب شعاع بیان کند.

۵۰ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-x & x>۱\\ x^۲ & -۱\leq x\leq ۱\\ x & x<-۱\end{cases}$$

۵۱ : کدام یک از موارد زیر یک تابع را نمایش می دهد. چرا؟ نمودار هر یک را رسم کنید.

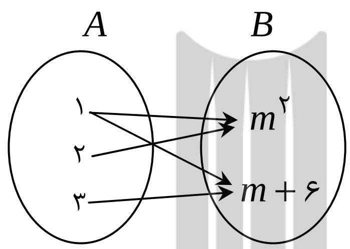
$$f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ x+۲ & x\leq ۲\end{cases}$$ و $$g(x)=\begin{cases}۲x & x<۰\\ x+۱ & x\geq ۰\end{cases}$$

۵۲ : معادله‌ی زیر یک تابع است.

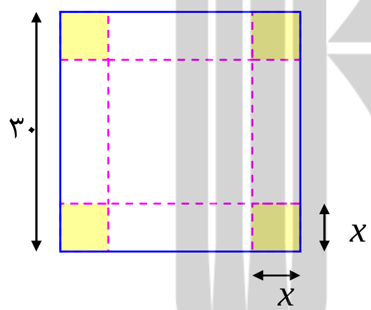
$$f(x)=\begin{cases}x^۲-ax+۱ & x\geq ۱\\ ۳x+۵a & x\leq ۱\end{cases}$$

مقدار a را بیابید.

۵۳ : مقدار m را طوری تعیین کنید که رابطه‌ی مقابل یک تابع باشد.



۵۴ : از چهار گوشه‌ی مقوایی مربع شکل به ضلع ۳۰ سانتی متر ، مربع های دیگری به ضلع x سانتی مترجدا می کنیم. سپس لبه های مقوا را از روی خط چین تا می کنیم تا جعبه ای (بدون در) به دست آید. حجم جعبه را به صورت تابعی از x بنویسید.

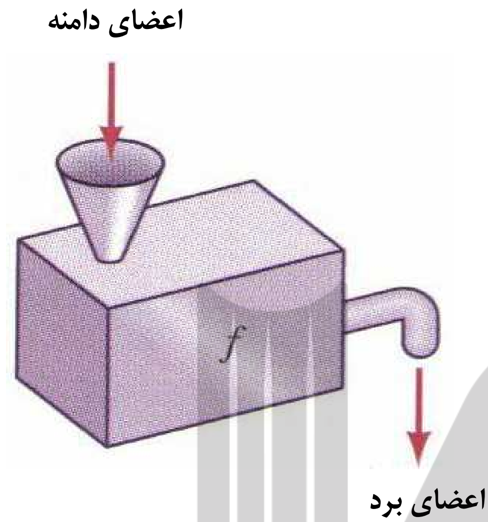


***

درس دوّم : مفاهیم تکمیلی تابع

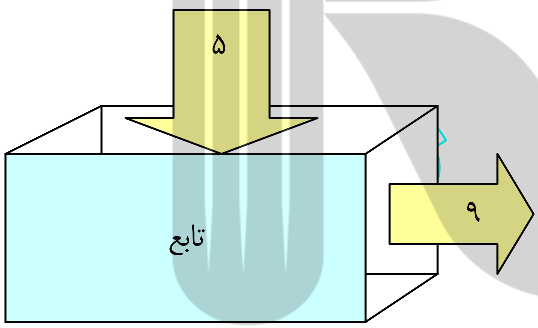
در درس قبل با مفهوم تابع آشنا شده اید. در این درس نگاهی دیگر به این مفهوم در ضمن تکمیل بحث های موجود خواهیم داشت.

قسمت اوّل : دامنه و برد تابع



اگر تابع را به عنوان یک دستگاه در نظر بگیریم ، به طوری که هر ورودی آن دقیقاً دارای یـک خروجـی باشد، در این صـورت ورودی هـای تـابع را دامنـه و خروجی های آن را برد تابع می نامند.

با توجه به روش های مختلف نمایش تابع ، دامنـه و برد را به صورت های متفاوت مـی تـوان مـشخص کرد.



تمرین ۱ : دسـتگاه مقابـل هـر عـضو مجموعـه-ی $A=\{۳,۵,۶,۷,۱\}$ را ابتدا دو برابر و سپس یک واحد از حاصل به دست آمده کم می کند.

مجموعه‌ی خروجی های این دستگاه عبارت است :

$B=\{۵,۹,۱۱,۱۳,۱\}$

چون این رابطه هر عضو A را فقط به یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت می دهد. پس این رابطه یک تـابع است. در این صورت :

الف : معادله‌ی (ضابطه‌ی) این تابع را بنویسید.

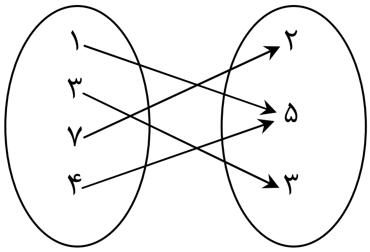
ب : مقدار $f(۷)$ چند است.

در این قسمت دامنه و برد را برای چند تابع متفاوت تعیین می کنیم.

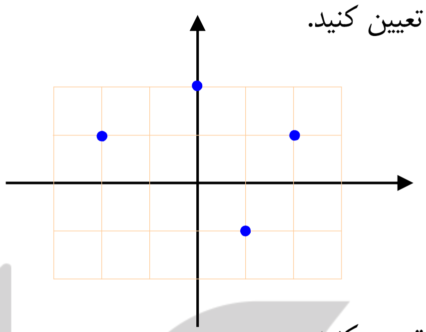
تمرین ۲ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.

$$f=\{(۱,۳),(-۲,۵),(۳,۰),(۲,۵)\}$$

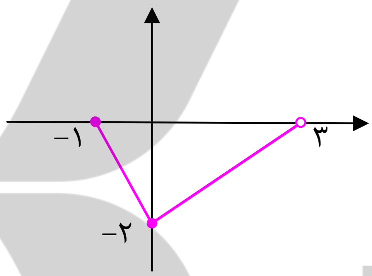
تمرین ۳ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



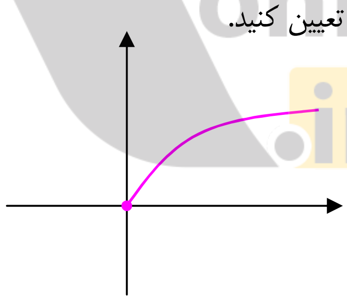
تمرین ۴ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



تمرین ۵ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



تمرین ۶ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



تمرین ۷ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.

$f(x) = -۳x^{۲} + ۶x + ۱$

تمرین ۸ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.

$f(x) = x^{۲} + ۴x$

تمرین ۹ : تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

تمرین ۱۰ : آیا تابعی وجود دارد که دامنه‌ی آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

***

روش های تعیین دامنه‌ی توابع

بزرگترین مجموعه ای که به ازای تمام اعضای آن یک تابع تعریف شده باشد، را دامنه‌ی آن تابع می نامند.

بر این اساس موارد زیر را در حالت کلی می توان برای تعیین دامنه‌ی توابع بیان کرد.

الف) تابع چند جمله ای

دامنه‌ی هر تابع چند جمله ای ، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی است.

مثال : دامنه‌ی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=۳x^{۲}+x^{۵}-۴x+۱$$

حل : این تابع یک تابع چندجمله ای است، لذا دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$D_f=R$$

ب) تابع کسری

دامنه‌ی هر تابع کسری ، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

لذا برای تعیین دامنه‌ی تابع کسری کافی است، ابتدا ریشه های مخرج را تعیین و از الگوی زیر استفاده کرد.

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۲}{۳-x}$$

حل : ابتدا ریشه های مخرج کسر (ها) را تعیین می کنیم.

$x-۱=۰\to x=۱$ و $۳-x=۰\to x=۳$

$$D_f=R-\{۱,۳\}$$

ج) تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج (تابع اصم)

دامنه‌ی هر تابع اصم ، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال نامنفی باشد.

$$f(x)=\sqrt{u}\to u\geq ۰$$

مثال : دامنه‌ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\sqrt{۵x-۱۰}$$

حل : عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد. پس :

$$5x-10 \geq 0 \rightarrow 5x \geq 10 \rightarrow x \geq 2$$

لذا دامنه‌ی این تابع می شود.

$$D_f = [2,+\infty)$$

د) تابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد

دامنه‌ی این چنین توابعی با دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال برابر است.

مثال : دامنه‌ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{5x}{x^2-4}}$$

حل: کافی است که دامنه‌ی تابع $u=\frac{5x}{x^2-4}$ را تعیین کنیم. این تابع، یک تابع کسری است، در این صورت:

$$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$$

$$D_f = R-\{+2,-2\}$$

توجه داشته باشید که قبل از تعیین دامنه‌ی یک تابع ، ساده کردن آن مجاز نمی باشد.

تمرین برای حل : دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱۱) $f(x)=2-x^3+4x$

۱۲) $f(x)=\frac{1}{3}x-2x^5+1$

۱۳) $f(x)=\frac{3x}{2x-8}$

۱۴) $f(x)=\frac{5x-1}{x^2+3x}$

۱۵) $f(x)=\frac{4x-1}{x^2-9}$

۱۶) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$

۱۷) $f(x)=\frac{x}{x^2+9}$

۱۸) $f(x)=\frac{3x}{x^3-16x}$

۱۹) $f(x)=\sqrt{8-2x}$

۲۰) $f(x)=\frac{-7}{\sqrt{2x-6}}$

۲۱) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}$

۲۲) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{3-x}}$

۲۳) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{2}{x-1}}$

۲۴) $f(x)=\sqrt{\frac{-5}{x-1}}$

۲۵) $f(x)=\sqrt[5]{x^2+7x-1}$

۲۶: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^۲-۵x+۶}$ ب) $f(x)=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۳x-۶}}$

۲۷: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن R باشد.

۲۸: تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

۲۹: تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $[۵,+\infty)$ باشد.

***

قسمت دوّم : مقدار تابع در یک نقطه

تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f=\{(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱),(-۲,۵)\}$$

می گویند مقدار تابع در نقطه‌ی $x=۲$ برابر ۵ است و می نویسند: $f(۲)=۵$

همچنین مقدار تابع در نقطه‌ی $x=۰$ برابر ۳ است، لذا $f(۰)=۳$

به طور کلی اگر (a,b) یک زوج مرتب از تابعی باشد. در این صورت مقدار تابع در نقطـه‌ی $x=a$ برابـر b است و می نویسند. $b=f(a)$

اگر معادله‌ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه‌ی $x=a$ از دامنه ی آن، کافی است مقدار a را در معادله‌ی تابع به جای x جایگزین کنیم.

مثال: اگر $f(x)=۳x-x^۲+۴$ مقدار تابع را در نقطه‌ی $x=-۱$ بدست آورید.

حل :

$$f(-۱)=۳(-۱)-(-۱)^۲+۴=-۳-۱+۴=۰$$

تمرین برای حل :

۳۰ : مقدار تابع $f=\{(۱,۷),(۰,۴),(۲,-۹),(۳,۷)\}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.

۳۱ : مقدار تابع $f(x)=۱۰x-x^۲$ را در نقطه‌ی $x=۳$ بدست آورید.

۳۲ : اگر $f(x)=x^{۲}+۳x$ مقدار تابع را در نقاط داده شده را به دست آورید.

۱) $f(-۱)=$ ۳) $f(۲)=$ ۵) $f(-۲)=$

۲) $f(۱)=$ ۴) $f(۰)=$ ۶) $f(۳)=$

۳۳ : اگر $f(x)=۱-۲x+x^{۲}$ یک تابع باشد، تساوی های زیر را بدست آورید.

الف) $f(-۳)$ ج) $f(۵k)$ هـ) $f(۱-x)$

ب) $f(k)$ د) $f(۲x)$ و) $f(f(x))$

۳۴ : اگر $f(x)=-x^{۲}+۳x$ و $g(x)=۳x^{۲}-۳x+۱$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $f(-۱)=$ ۳) $۴f(۳)=$ ۵) $۲f(۰)-g(۱)=$

۲) $g(۲)=$ ۴) $f(-۱)+g(۴)=$ ۶) $\dfrac{f(۴)+g(۲)}{g(۰)}=$

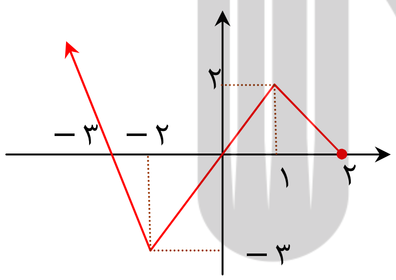
۳۵ : اگر $f(x)=۲^{x}$ نشان دهید که: $\dfrac{f(x+۳)}{f(x-۱)}=f(۴)$

۳۶ : اگر $f(x)=x^{۳}-۱$ نشان دهید که $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=a^{۲}+b^{۲}+ab$

۳۷ : با توجه به نمودار مقابل :

الف : مقدار $f(-۲)$ را تعیین کنید.

ب : دامنه و برد تابع را بنویسید.



***

تعیین مقدار تابع در توابع چند ضابطه ای

برای تعیین مقدار تابع وقتی یک تابع چند ضابطه ای داده شده باشد، به محدوده های تعیین شده برای هر ضابطه توجه شود. برای مثال در تابع دو ضابطه ای

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۲ \\ ۳x+۵ & x<۲ \end{cases}$$

اگر بخواهیم مقدار تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ حساب کنیم. با توجه به اینکه عدد «۱» از ۲ کمتر است،ضابطه‌ی پایین را بکار می بریم.

$f(۱)=۳(۱)+۵=۸$

به همین ترتیب برای محاسبه‌ی $f(۳)$ از ضابطه‌ی بالا استفاده می کنیم.

$f(۳)=(۳)^۲-۱=۸$

تمرین۳۸ : با توجه به تابع مقابل تساوی های زیر را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۲ \\ ۳x+۵ & x<۲ \end{cases}$$

۱) $f(۰)=$ ۲) $f(\sqrt{۵})=$ ۳) $f(۲)=$ ۴) $f(-۵)=$

***

تمرین برای حل :

۳۹ : تابع زیر را در نظر بگیرید سپس مقادیر داده شده را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x>۱ \\ ۵ & -۱\leq x<۱ \\ -x+۴ & x<-۱ \end{cases}$$

۱) $f(۳)=$ ۳) $f(\sqrt{۵})=$ ۵) $f(-۱)=$

۲) $f(۱)=$ ۴) $f(۰)=$ ۶) $f(-۵)=$

۴۰ : در تابع زیر اگر $f(۲)=۲$ و $f(-۲)=۰$ باشد، مقادیر b و a را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-۱} & x>۱ \\ x+b & x\leq ۱ \end{cases}$$

۴۱ : در تابع زیر مقدار a را چنان بیابید که $f(f(۲))=۵$ باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۷ & x>۱ \\ ax^۲-۴x & x\leq ۱ \end{cases}$$

***

قسمت سوّم : تابع خطی و تابع سهمی

الف : تابع خطی

هر تابع که بین مولفه های اوّل ودوّم تمام زوج های مرتب آن یک رابطه‌ی خطی[1] یکسانی وجود داشته باشد، را تابع خطی می نامند.

مانند تابع $f=\{(۱,۳),(۲,۵),(۰,۱),(-۱,-۱)\}$ که در تمام زوج های آن رابطه‌ی $y=۲x+۱$ برقرار است.

تذکر : هر تابع خطی دارای معادله ای به صورت زیر است.

$$f(x)=ax+b$$

لذا نمودار آن همواره یک خط راست است.(عدد a را شیب و عدد b را عرض از مبدأ می نامند.)

مثال: معادله‌ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(۲,۷)$ و $(۵,۳)$ می گذرد.

حل : روش اوّل :

$$(۵,۳)\in f \to ۳=۵a+b$$

$$(۲,۷)\in f \to ۷=۲a+b$$

$$\begin{cases} ۵a+b=۳ \\ ۲a+b=۷ \end{cases} \to (-۱)\times\begin{cases} ۵a+b=۳ \\ ۲a+b=۷ \end{cases} \to \begin{cases} -۵a-b=-۳ \\ ۲a+b=۷ \end{cases}$$

$$\to -۳a=۴ \to a=\frac{۴}{-۳}\ ,\ b=\frac{۲۹}{۳}$$

$$f(x)=ax+b \to f(x)=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$ معادله‌ی تابع خطی

روش دوّم :

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱ \to y=-\frac{۴}{۳}(x-۵)+۳ \to y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۰}{۳}+۳=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

تمرین۴۲ : معادله‌ی یک تابع خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات گذشته و در آن $f(۲)=۳$ باشد.

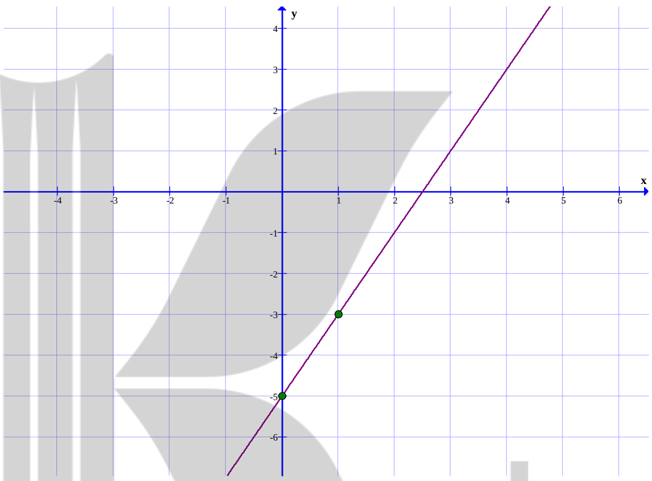
[1]. رابطه ای را خطی می نامند، هرگاه نمودار آن یک خط راست باشد.

توجه : چون نمودار هر تابع خطی همواره یک خط راست می باشد، لذا برای رسم نمودار آن، انتخاب دو نقطه کافی است.

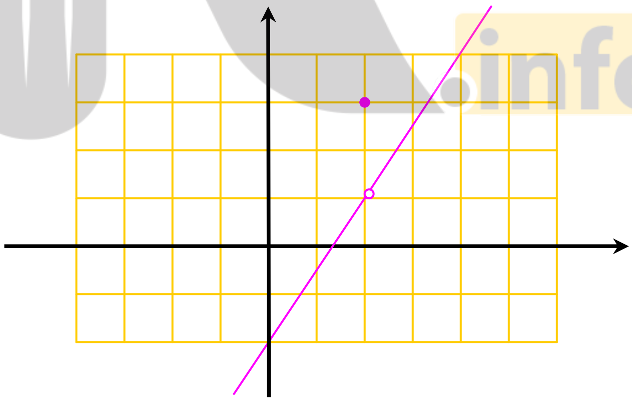
مثال : نمودار تابع $f(x) = ۲x - ۵$ را رسم کنید.

حل : کافی است دو مقدار دلخواه برای x در نظر بگیریم و بعد از تعیین مقدار y متناظر آنها، نقطه یابی کرده و نمودار را رسم کنیم.

x	۰	۱
y	-۵	-۳



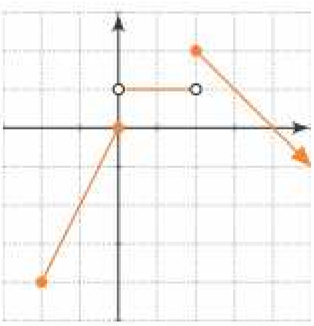
تمرین۴۳ : متناظر با نمودار زیر یک تابع دو ضابطه ای بنویسید.



تمرین۴۴ : با توجه به نمودار زیر :

الف : دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب : ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.



ب : تابع درجه‌ی دوّم (سهمی)

هر تابع به معادله‌ی کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن $a\neq 0$ باشد، را درجـه‌ی دوّم (سـهمی) مـی نامند. در فصل قبل با این تابع و روش رسم نمودار آن آشنا شده اید و فقط برای یادآوری به تمرین زیر اکتفـا می کنیم.

تمرین۴۵ : نمودار تابع $f(x)=x^2+4x-1$ را رسم کنید و سپس کمترین مقدار آن را به دست آورید.

قسمت چهارم : تعریف دقیق دنباله

با توجه به تعریف تابع می توان تعریف دقیق زیر را برای دنباله در نظر گرفت.

هر دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی می باشد.

$$N\rightarrow R$$

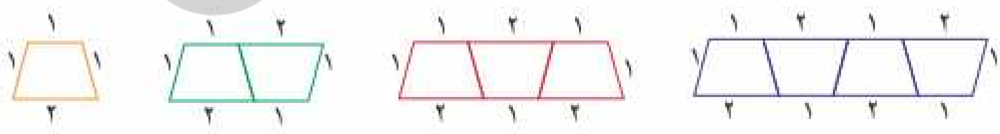
$$f(n)=t_n$$

مثال : تابع زیر به شرط n یک عدد طبیعی باشد، یک دنباله است.

$$t_n=2n+1$$

تمرین۴۶ : نمودار تابع خطی $f(x)=2x+1$ و دنباله‌ی $t_n=2n+1$ را در یـک دسـتگاه مختـصات رسم کنید. سپس در مورد تفاوت آنها بحث کنید.

تمرین ۴۷ : الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.



با توجه به این الگو ، سئوالات زیر را پاسخ دهید.

الف: جدول زیر را کامل کنید.

تعداد ذوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

ب : آیا رابطه‌ی بین تعداد ذوزنقه ها و محیط شکل یک تابع مشخص می کند؟ چرا؟

ج : نمودار این رابطه را رسم کنید.

تمرین برای حل :

۴۸ : برای یک تابع خطی داریم:

$f(۰)=۷$ و $f(۲)=۱۱$

الف : معادله‌ی این تابع را بنویسید. ب : نمودار تابع را رسم کنید.

۴۹ : نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-۴,۳)$ و $(-۳,۰)$ می گذرد. مطلوب است، تعیین:

الف) $f(-۱)=$ ب) $f(-۴)=$ ج) $f(f(۲))=$

۵۰ : برای اندازه گیری دما از واحد های سانتی گراد (C) و فارنهایت (F) استفاده می شود. ایـن دو واحـد اندازه گیری رابطه ای به شکل زیر دارند.

$$F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$$

الف : ۲۰ درجه‌ی سانتی گراد، بر حسب فارنهایت چقدر است؟

ب : صفر درجه‌ی سانتی گراد ، معادل چند درجه‌ی فارنهایت است؟

ج : ۱۰۴ درجه‌ی فارنهایت چند درجه‌ی سانتی گراد است؟

د : معادله ای بنویسید که فارنهایت را به سانتی گراد تبدیل کند.

هـ : آیا رابطه‌ی بین این دو واحد اندازه گیری ، یک تابع خطی است؟ چرا ؟

۵۱ : در تابع $f(x)=-x^۳+۳x^۲+ax+b$ مقادیر b و a را طوری به دست آورید که :

$f(۲)=۱۵$ و $f(۰)=۱$

۵۲ : ضابطه‌ی تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ را طوری به دست آورید که

الف : تابع از مبدأ مختصات بگذرد. ب : $f(۱)=۴$ ج : $f(-۱)=۲$

۵۳ : نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-۲,۱)$ و $(-۳,۲)$ می گذرد و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند.

الف : نمایش جبری سهمی(معادله‌ی) آن را بیابید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

ج : دامنه و برد سهمی را مشخص کنید.

۵۴ : فرض کنید برای تابع f داشته باشیم $f(x-۱)=۵x$ مطلوب است تعیین :

الف) $f(x)=$ ب) $f(۷)=$

۵۵ : اگر $f(x+۳)=\frac{۲x}{x-۱}$ باشد. ضابطه‌ی $f(x)$ را یافته و سپس $f(-۳)$ را تعیین کنید.

۵۶ : اگر $f(x+۵)=۲f(x)+۴$ و $f(۲)=۳$ مطلوبست تعیین مقدار $f(۷)$ و $f(-۳)$

۵۷ : در یک تابع خطی رابطه‌ی زیر همواره برقرار است. ضابطه‌ی این تابع را به دست آورید.

$f(x+۱)=f(x)+۱$ و $f(۱)=۳$

۵۸ : برای هر مورد ضابطه‌ی یک تابع را مثال بزنید.

الف : تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $R-\{-۱\}$ باشد.

ب : تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $R-\{-۲,۳\}$ باشد.

پ : تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $R-\{۱,۳,-۵\}$ باشد.

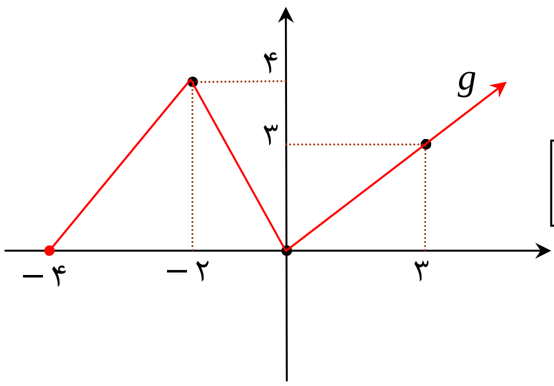
ت : تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $(-\infty,۳]$ باشد.

ث : تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $(-\infty,۳)$ باشد.

ج : تابعی مثال بزنید که دامنه و برد آن مساوی باشند.

۵۹ : معادله‌ی تابع f و نمودار تابع g در زیر داده شده اند. حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

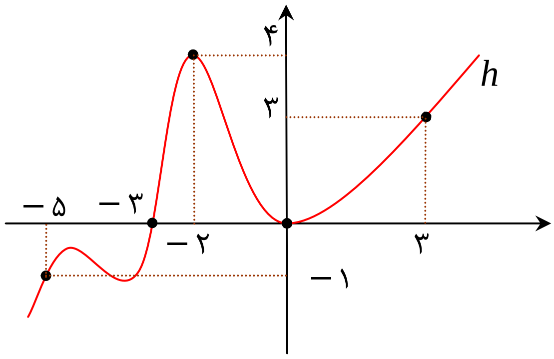
$$A=\frac{f(۲)+g(-۲)}{g(-۴)+g(۳)-f(۰)}$$



$$\boxed{f(x)=۳x+۱-x^۲}$$

۶۰ : توابع $f(x)=۳x^{۲}-\sqrt{x}$ و $g=\{(۳,-۱),(۴,۲),(۰,۳),(۲,-۱)\}$ و نمودار تابع h را در نظر

بگیرید و سپس تساوی های زیر را کامل کنید.



الف) $A=\dfrac{f(۴)+g(۲)}{h(۳)}$

ب) $B=h(-۳)+g(۰)+۴f(۱)$

ج) $f(۰)+h(-۵)-h(-۲)$

❋❋❋

درس سوّم : انواع تابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارد. در این درس با برخی از آنها آشنا می شوید.

معرفی برخی از انواع توابع خاص

در ادامه چند تابع خاص که کاربردی های زیادی دارند، معرفی می کنیم

۱) توابع چند جمله‌ای

هر تابع که نمایش جبری آن ، چندجمله‌ای های جبری از یک متغیر باشد، را تابع چندجمله‌ای می نامیم.

مانند توابع زیر

الف) $f(x)=۲x^{۲}+۵x+۱$ ب) $g(t)=t^{۳}+\frac{۱}{۵}t^{۲}+\sqrt{۲}$ ج) $h(r)=۴\pi r^{۳}$

ولی توابع زیر چندجمله‌ای نیستند.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب) $g(t)=|t|$ ج) $h(\theta)=\sin\theta$

هر تابع خطی، یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی اوّل است.

$$f(x)=ax+b \quad و \quad (a\neq ۰)$$

هر تابع درجه‌ی دوّم (سهمی) یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی دوّم است.

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c \quad و \quad (a\neq ۰)$$

تمرین ۱ : یک تابع سه جمله ای درجه‌ی ۵ بنویسید.

تمرین۲ : کدام یک از توابع زیر چند جمله ای است؟

الف) $f(x)=\sqrt{۲}x^{۳}$ ب) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ج) $f(x)=۳^{x}$

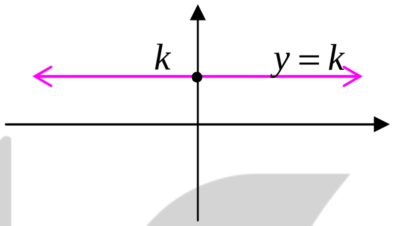
***

۲) تابع ثابت

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=k$ که در آن k یک عدد حقیقی باشد را تابع ثابت می نامند.

مانند تابع $f(x)=5$

در تابع ثابت، هر x عضو دامنه به عدد k نظیر می شود. بنابراین برد این تابع همواره مجموعه‌ی یک عضوی $\{k\}$ خواهد بود. همچنین با توجه به این مطلب نتیجه گرفته می شود که نمودار تابع ثابت بر خط موازی محور طولها و گذرا از نقطه‌ی k ، روی محور عرض ها منطبق است.



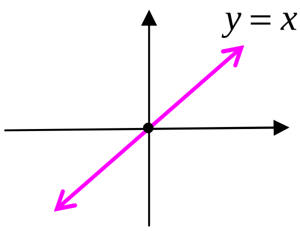
نتیجه : در حالت کلی دامنه‌ی تابع ثابت مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی یک عضوی $\{k\}$ است.

تمرین۳ : نمودار تابع $f(x)=-2$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

۳) تابع همانی

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x$ را تابع همانی می نامند.

در تابع همانی، هر x عضو دامنه به همان x از برد نظیر می شود. بنابراین برد این تابع همواره با دامنه‌ی آن برابر است. همچنین با توجه به این مطلب نتیجه گرفته می شود که نمودار تابع ثابت بر خط موسوم به نیمساز ربع اوّل و سوّم منطبق است.



نتیجه : در حالت کلی دامنه و برد تابع همانی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

تمرین۴ : آیا هر تابع که دامنه و برد آن برابر باشند، یک تابع همانی است؟ چرا؟

***

۴) تابع قدرمطلق

اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق x را با نماد $|x|$ نمایش می دهند و آن را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

برای مثال :

الف) $|-۴| = -(-۴) = ۴$

ب) $|۳/۱۴| = ۳/۱۴$

ج) $|-\sqrt{۲}| = -(-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}$

همچنین با این تعریف نتیجه می شود که

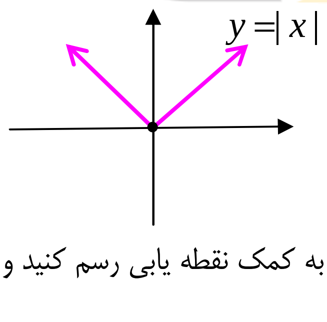
الف) قدر مطلق عدد صفر ، صفر است.

ب) دو عدد قرینه، قدر مطلق مساوی دارند. $|-x| = |x|$

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می نامند. واضح است که دامنه‌ی تابع قدر مطلق در حالت کلی مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی غیر منفی است.

$$D_f = R \quad \text{و} \quad R_f = [۰, +\infty)$$

بنابراین نمودار تابع قدر مطلق به شکل زیر است.



تمرین۵: نمودار تابع $f(x) = |x|$ به کمک نقطه یابی رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

تمرین برای حل :

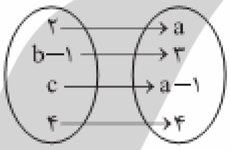
۶ : اگر f یک تابع ثابت باشد، به طوری که $f(۴)+۳f(۶)-f(۸)=۱۸$. در این صورت $f(۳)$ را بیابید.

۷ : اگر f یک تابع همانی باشد، به طوری که $f(۴)+af(۲)-f(۸)=۱۸$. در این صورت مقدار a را بیابید.

۸ : اگر f یک تابع همانی و g یک تابع ثابت باشد. با توجه به تساوی زیر مقدار $g(۹)$ را بیابید.

$$۵f(۴)+۳g(۰)-f(۱)=۷$$

۹ : تابع زیر همانی است. مقادیر c و b و a را بیابید.



۱۰ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}|=$

ب) $|\sqrt{۵}-\sqrt{۷}|=$

۱۱ : جدول زیر دمای سنگ های زیر زمین در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف: معادله ای برای تابع جدول فوق بنویسید.

ب: دمای یک سنگ در عمق ۱۰ کیلومتری را بیابید.

۱۲ : تعیین کنید که کدام تابع همانی، کدام تابع ثابت و کدام یک تابع قدرمطلق و کدام سهمی است؟

الف

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

ب

x	−۲	−۱	۰	۱	۴	۶
y	۲	۱	۰	۱	۴	۶

ج

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۳	۳	۳	۳	۳	۳

د

x	۲−	۱−	۰	۱	۴	۶
y	۲−	۱−	۰	۱	۴	۶

۱۳ : برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

الف) مثالی از یک تابع چند جمله ای ارائه کنید.

ب) یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $\{\alpha,\beta,۲,۵\}$ باشد.

ج) یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند، ولی تابع همانی نباشد.

د) یک تابع ثابت مثال بزنید که دامنه‌ی آن $\{\alpha,\beta\}$ باشد.

هـ) مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه‌ی آن ۵ عضوی باشد.

و) مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

۱۴ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) دامنه‌ی تابع $f(x)=x^۲-۱$ برابر $(۰,+\infty)$ و برد آن نیز $(۰,+\infty)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=|x|-\frac{۱}{۳}$ همه‌ی اعداد حقیقی و برد آن $(۲,+\infty)$ است.

ج) دامنه‌ی تابع ثابت $f(x)=۲$ برابر R است.

د) اگر $f(x)=۲x+۱$ آنگاه $f(۱)=\frac{f(۲)}{۲}$

❉❉❉

گاهی لازم است نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابع دیگری رسم کنیم. برای این کار از ویژگی های تبدیلات از قبیل انتقال یا بازتاب و ... استفاده می شود. در این درس روش های رسم نمودار توابع به کمک ویژگی های تبدیلات را نیز معرفی می کنیم.

رسم نمودار توابع به کمک تبدیلات

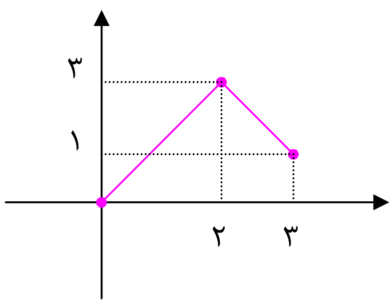
اگر نمودار تابع $y = f(x)$ که تابع اصلی نیز نامیده می شود، معلوم باشد در این صورت نمودار توابع جدید را به کمک نمودار تابع اصلی می توان رسم کرد. برای انجام این کار می توان از جداول زیر استفاده کرد که برای سادگی کار به دو حالت تبدیل کرده ایم.در این جداول a یک عدد مثبت فرض شده است.

حالت اوّل :

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل		نتیجه	
$y = f(x) + a$	طول نقاط ثابت می ماند.	به عرض نقاط a واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد بالا می رود.	مطیع
$y = f(x) - a$		از عرض نقاط a واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد پایین می رود.	
$y = af(x)$		عرض نقاط در a ضرب می شود.	اگر $0 < a < 1$ نمودار فشرده می شود. اگر $a > 1$ نمودار کشیده می شود.	

توجه : با انتخاب نقاط خاصی از نمودار تابع اصلی و انجام تبدیل روی آنها می توان نمودار تابع جدید را به دست آورد.

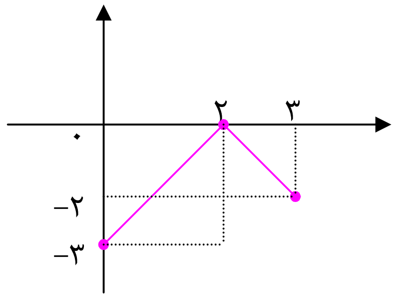
مثال : نمودار تابع f به شکل مقابل داده شده است. می خواهیم، به کمک این نمودار، نمودار تابع $y = f(x) - 3$ را رسم کنیم. برای این کار می توان ویژگی های تبدیلات را به کمک جدول فوق بکار برد.



حل : مختصات نقاط خاصی از این تابع به شکل زیر است.

x	۰	۲	۳
y	۰	۳	۱

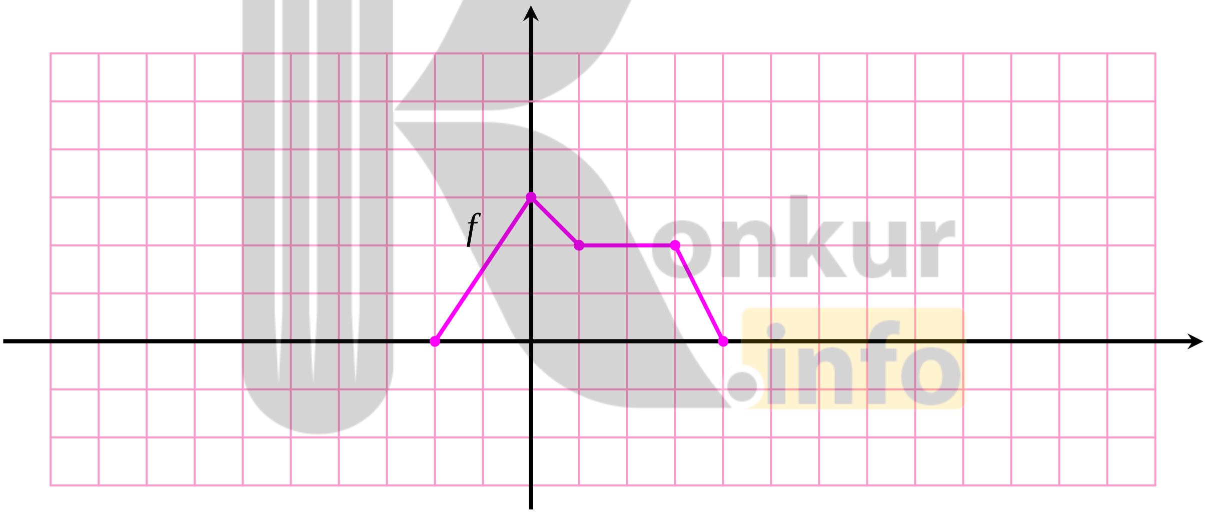
اکنون با انجام تبدیل روی این نقاط، نقاط تابع جدید را می توان به دست آورد و سپس نمودار آن را نیز رسم نمود. طول نقاط ثابت می ماند ولی از عرض هر نقطه سه واحد کم می شود.



x	۰	۲	۳
y	−۳	۰	−۲

تمرین ۱ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ داده شده است. به کمک تبدیلات نمـودار توابـع زیـر را رسـم کنید.

الف) $y=f(x)+۱$ ب) $y=f(x)-۲$ ج) $y=۲f(x)$



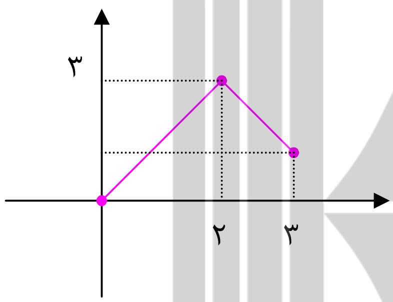
نتیجه : نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول ها است.

حالت دوّم :

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل		نتیجه	
$y=f(x+a)$	عرض نقاط ثابت می ماند.	از طول نقاط a واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد به عقب می رود.	لجباز
$y=f(x-a)$		به طول نقاط a واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد به جلو می رود.	
$y=f(ax)$		طول نقاط در $\frac{۱}{a}$ ضرب می شود.	اگر $۰<a<۱$ نمودار منبسط می شود. اگر $a>۱$ نمودار منقبض می شود.	

توجه : با انتخاب نقاط خاصی از نمودار تابع اصلی و انجام تبدیل روی آنها می توان نمودار تابع جدید را بـه دست آورد.

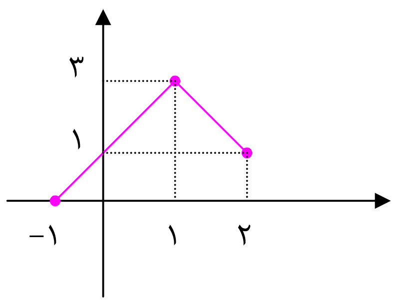
مثال : نمودار تابع f به شکل مقابل داده شده است. می خواهیم، به کمک این نمودار، نمودار تابع $y=f(x+۱)$ را رسم کنیم. برای این کار می توان ویژگی های تبدیلات را به کمک جدول فوق بکار برد.



حل : مختصات نقاط خاصی از این تابع به شکل زیر است.

x	۰	۲	۳
y	۰	۳	۱

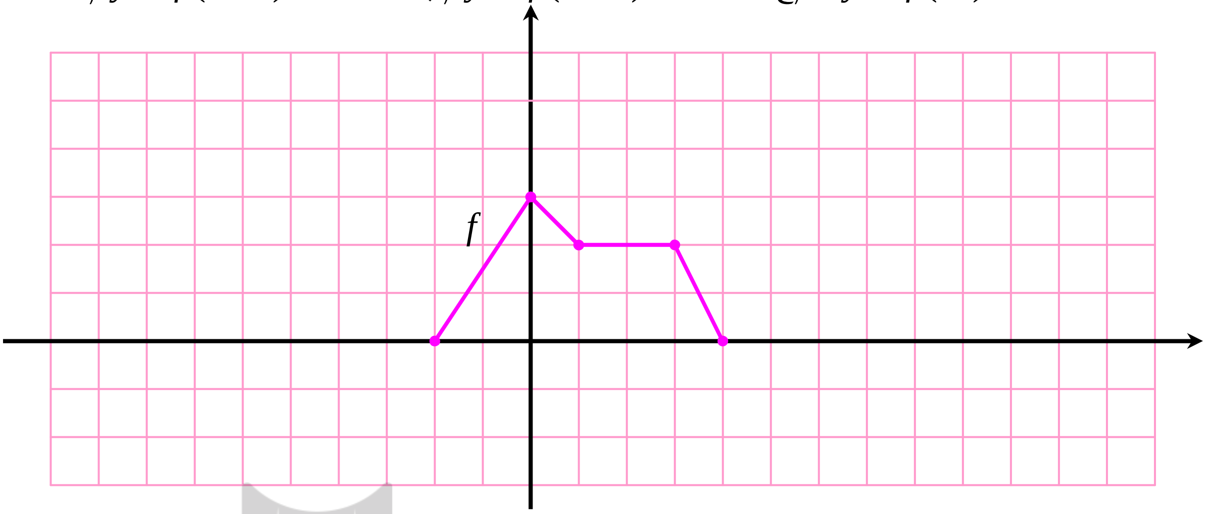
اکنون با انجام تبدیل روی این نقاط، نقاط تابع جدید را می توان به دست آورد و سپس نمودار آن را نیز رسم نمود. عرض نقاط ثابت می ماند ولی از طول هر نقطه یک واحد کم می شود.



x	۱-	۱	۲
y	۰	۳	۱

تمرین ۲ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ داده شده است. به کمک تبدیلات نمودار توابع زیر را رسم کنید.

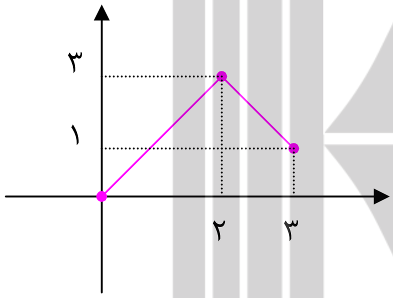
الف) $y = f(x+۱)$ ب) $y = f(x-۲)$ ج) $y = f(۲x)$



نتیجه : نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.

***

مثال : نمودار تابع f به شکل مقابل داده شده است. می خواهیم، به کمک این نمودار، نمودار توابع زیر را رسم کنیم. برای این کار می توان ویژگی های تبدیلات را به کمک جدول فوق بکار برد.



الف) $f(x)-۳$ ب) $f(x+۱)$ ج) $۲f(x)$

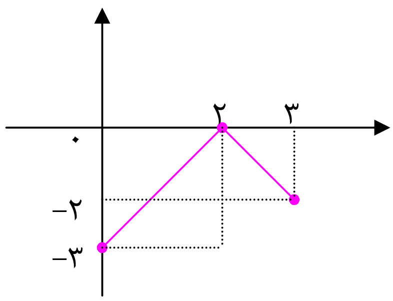
حل : مختصات نقاط خاصی از این تابع به شکل زیر است.

x	۰	۲	۳
y	۰	۳	۱

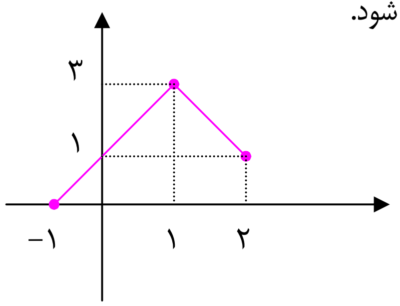
اکنون با انجام تبدیل روی این نقاط، نقاط تابع جدید را می توان به دست آورد و سپس نمودار آن را نیز رسم نمود.

الف : طول نقاط ثابت می ماند ولی از عرض هر نقطه سه واحد کم می شود.

x	۰	۲	۳
y	-۳	۰	-۲

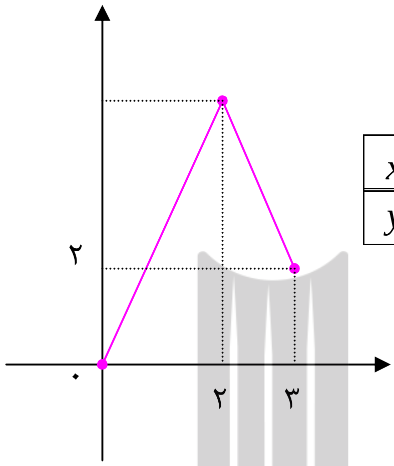


ب : عرض نقاط ثابت می ماند ولی از طول هر نقطه یک واحد کم می شود.



x	−۱	۱	۲
y	۰	۳	۱

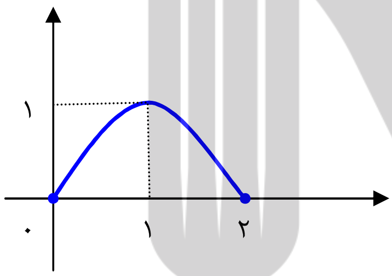
ج : طول نقاط ثابت می ماند ولی عرض نقاط دو برابر می شود.



x	۰	۲	۳
y	۰	۶	۲

***

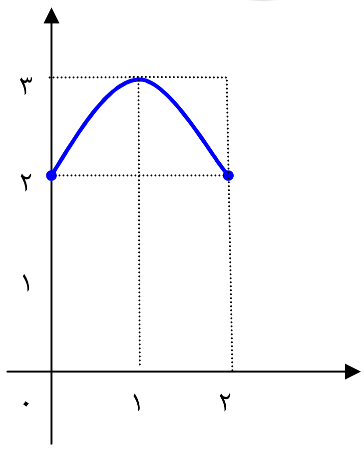
مثال : نمودار تابع f با دامنه‌ی $[۰,۲]$ و برد $[۰,۱]$ در شکل مقابل نشان داده شده است. می خواهیم نمودار های تابع های زیر را رسم و دامنه و برد هر کدام را پیدا کنیم.



....

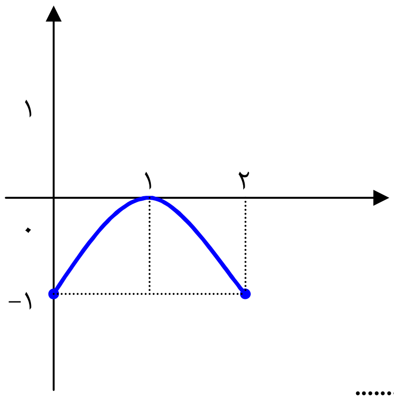
۱) $f(x)+۲$

نمودار تابع $f(x)$ دو واحد بالا می رود.



$$D_{f(x)+۲}=[۰,۲]$$
$$R_{f(x)+۲}=[۲,۳]$$

۲) $f(x)-۱$

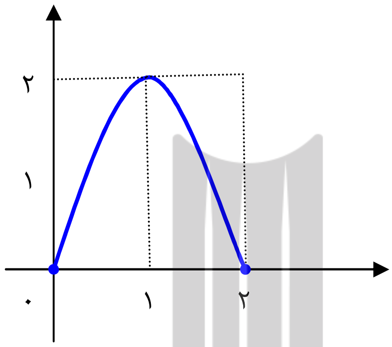


نمودار تابع $f(x)$ یک واحد پایین می رود.

$D_{f(x)-۱}=[۰,۲]$

$R_{f(x)-۱}=[-۱,۰]$

۳) $۲f(x)$

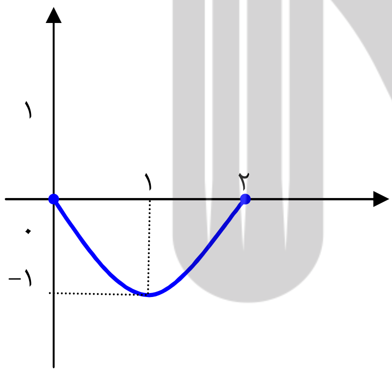


عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ دو برابر می شوند.

$D_{۲f(x)}=[۰,۲]$

$R_{۲f(x)}=[۰,۲]$

۴) $-f(x)$

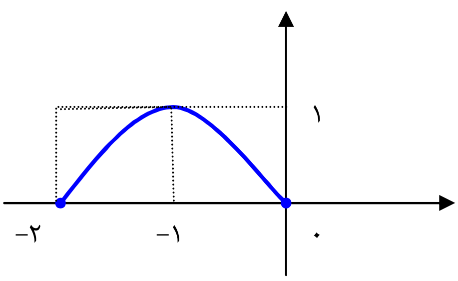


عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ قرینه می شوند.

$D_{-f(x)}=[۰,۲]$

$R_{-f(x)}=[-۱,۰]$

۵) $f(x+۲)$



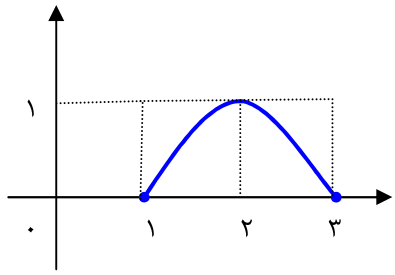
نمودار تابع $f(x)$ دو واحد عقب می رود.

$D_{f(x+۲)}=[-۲,۰]$

$R_{f(x+۲)}=[۰,۱]$

$۰\le x+۲\le ۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۰$

$f(x-۱)$ (۶



نمودار تابع $f(x)$ یک واحد جلو می رود.

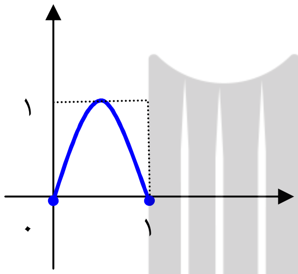
$D_{f(x-۱)}=[۱,۳]$

$R_{f(x-۱)}=[۰,۱]$

$۰\leq x-۱\leq ۲\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳$

....

$f(۲x)$ (۷



طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می شوند.

$D_{f(۲x)}=[۰,۱]$

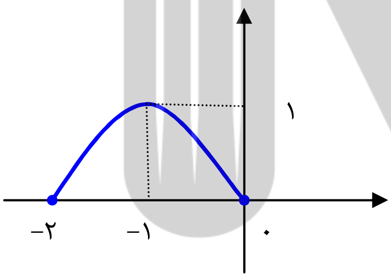
$R_{f(۲x)}=[۰,۱]$

$۰\leq ۲x\leq ۲\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱$

....

$f(-x)$ (۸

طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در -۱ ضرب می شوند.



$D_{f(-x)}=[-۲,۰]$

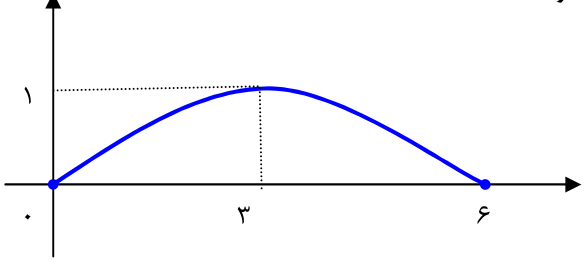
$R_{f(-x)}=[۰,۱]$

$۰\leq -x\leq ۲\Rightarrow -۲\leq x\leq ۰$

....

$f(\frac{x}{۳})$ (۹

طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در ۳ ضرب می شوند.

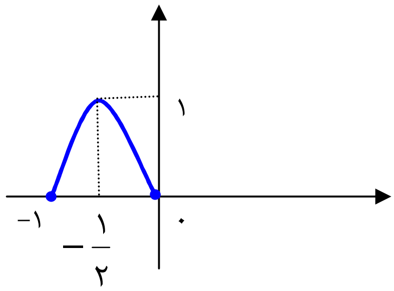


$D_{f(\frac{x}{۳})}=[۰,۶]$

$R_{f(\frac{x}{۳})}=[۰,۱]$

....

۱۰) $f(-۲x)$



طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $-\frac{۱}{۲}$ ضرب می شوند.

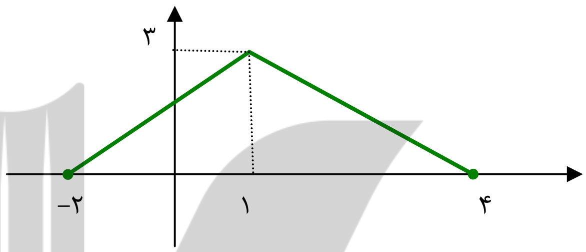
$$D_{f(-۲x)} = [-۱,۰]$$

$$R_{f(-۲x)} = [۰,۱]$$

$$۰ \le ۲x \le ۲ \Rightarrow -۱ \le x \le ۰$$

***

تمرین۱۵ : نمودار تابع معین f با دامنه‌ی $[-۲,۴]$ و برد $[۰,۳]$ در شکل زیر داده شده است.



در هر مورد نمودار تابع داده شده را رسم نموده و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

۱) $y = f(x+۲)$ ۴) $y = f(x)+۱$ ۷) $y = \frac{۱}{۳} f(x-۱)$

۲) $y = f(x-۳)$ ۵) $y = -۲f(x)$ ۸) $y = ۲f(x)-۱$

۳) $y = f(۲x)$ ۶) $y = f(-\frac{۱}{۲}x)-۳$ ۹) $y = f(۲x-۱)$

***

تمرین برای حل :

۳ : به کمک نمودار تابع $y = |x|$ در فاصله‌ی $-۲ \le x \le ۲$ رسم کنید. سپس به کمک آن نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = |x-۱|$ ج) $y = |۲x|$ هـ) $y = |x|+۲$

ب) $y = |x+۳|$ د) $y = |\frac{۱}{۲}x|$ و) $y = -۳|x-۱|+۲$

۴ : به کمک نمودار تابع $y = x^{۲}$ نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

هـ) $y = -x^{۲}$ ج) $y = ۲x^{۲}$ الف) $y = x^{۲} - ۱$

و) $y = (x + ۳)^{۲}$ د) $y = \frac{۱}{۲}x^{۲}$ ب) $y = x^{۲} + ۳$

۵ : به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

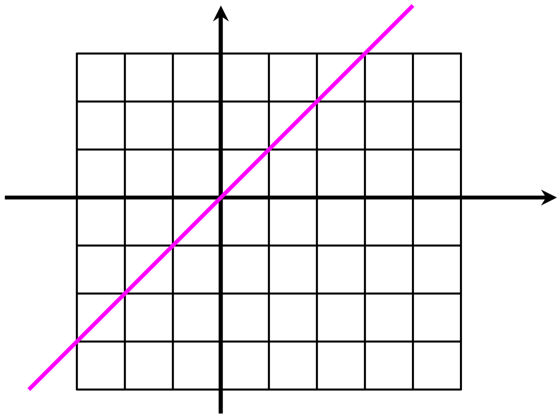
الف) $y=1+\sqrt{x+2}$

ب) $y=\sqrt{x-3}-1$

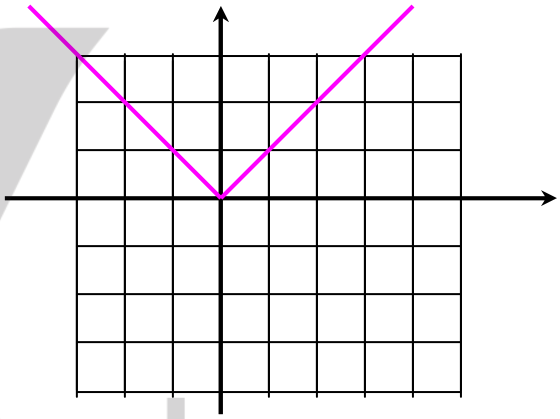
ج) $y=1+\sqrt{2x}$

پیوست : نمودار چند تابع مهم

الف) $f(x) = x$

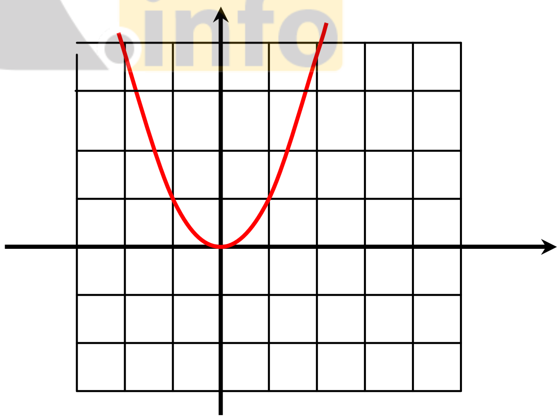


ب) $f(x) = |x|$

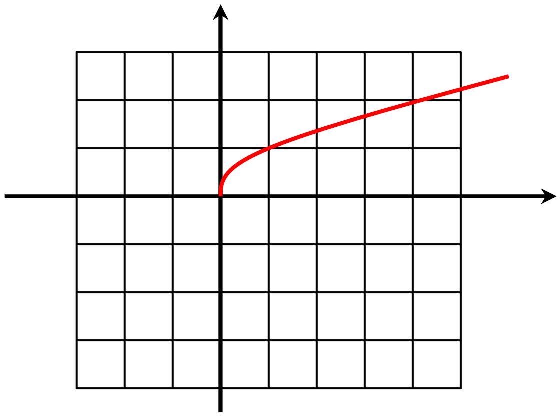


پ) $f(x) = x^{۲}$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

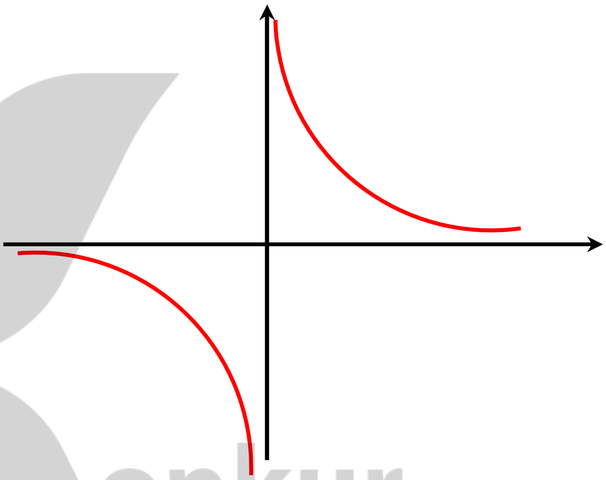


ت) $f(x)=\sqrt{x}$



ث) $f(x)=\frac{۱}{x}$

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱



ج) $f(x)=x^۳$