درس اوّل : احتمال

بحث احتمال، یکی از از بحث های مهم و کاربردی محسوب می شود. در این جزوه مقدمات احتمال را بیـان می کنیم.

قسمت اوّل : پدیده های تصادفی و فضای نمونه‌ای

می توان پدیده ها را از نظر پیش بینی وقوع آنها، به دو دسته تقسیم کرد.

الف) پدیده های قطعی : پدیده هایی که می توان نتیجه‌ی وقوع آنها را قبل از وقوع به طور یقین تعیین کرد.

مثلاً: طلوع خورشید در پایان یک شب ، سرد بودن هوا بعد از بارش برف ، افتادن سیب بعد از جـدا شـدن از درخت

ب) پدیده های تصادفی : پدیده هایی که نمی توان نتیجه‌ی آنها را پیش از وقوع به طور یقین تعیین کرد.

مثلاً: نتیجه‌ی یک مسابقه‌ی فوتبال ، نتیجه‌ی پرتاب یک سکه ، نتیجه‌ی پرتاب یک تـاس، نتیجـه‌ی یـک قرعه کشی

احتمال که معادل کلمه‌ی شانس است، در توصـیف پدیـده هـای تـصادفی بـه کـار مـی رود. در ایـن قبیـل پدیده ها نتایج وقوع را نمی توان پیش بینی کرد و لذا اطمینان از آنچه که رخ خواهـد داد، نداریم. به هر حال می توان فهرستی از نتایج پدیده های تصادفی تهیه کرد. مثلاً در پرتاب یک سکه ممکن است، رو (خط) و ممکن است پشت (شـیر) بیایـد. در ایـن صورت می نویسند:

$$S=\{P\ ,\ R\}$$

مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه ای** می نامند و آن را با S نمایش می دهند. هر یک از اعضای فضای نمونه ای را **برآمد** می گویند.

مثال : در هر یک از موارد زیر فضای نمونه‌ای را نوشته و تعداد برآمد های آن را تعیین کنید.

۱ : پرتاب یک سکه

حل :

$S=\{P\ ,\ R\}$ $\qquad\qquad \rightarrow n(S)=۲$

۲ : پرتاب دو سکه هم زمان (یا یک سکه دو بار)

حل :

$S=\{PP,PR,RP,RR\} \qquad \rightarrow n(S)=۴$

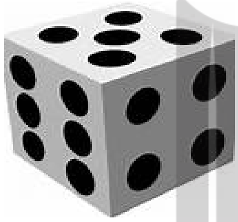
۳ : پرتاب سه سکه هم زمان (یا یک سکه سه بار)

حل:

$S=\{PPP,PPR,PRP,RPP,RRP,RPR,PRR,RRR\} \qquad \rightarrow n(S)=۸$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای پرتاب n سکه همزمان (یا یک سکه n بار) برابر ۲^n است.

۴ : پرتاب یک تاس



حل :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \qquad \rightarrow n(S)=۶$

۵ : پرتاب دو تاس همزمان (یا یک تاس دو بار)

حل :

(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

$S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۶,۶)\} \qquad \rightarrow n(S)=۳۶$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای پرتاب n تاس همزمان (یا یک تاس n بار) برابر ۶^n است.

۶ : پرتاب یک تاس و یک سکه همزمان

$(R,۱)$	$(R,۲)$	$(R,۳)$	$(R,۴)$	$(R,۵)$	$(R,۶)$
$(P,۱)$	$(P,۲)$	$(P,۳)$	$(P,۴)$	$(P,۵)$	$(P,۶)$

$S=\{(R,۱),(P,۱),(R,۲),...,(P,۶)\} \qquad \rightarrow n(S)=۲\times۶=۱۲$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه ای پرتاب m سکه و n تاس همزمان برابر $۲^m\times۶^n$ است.

۷ : استخراج یک مهره از بین ده مهره داخل کیسه که روی هر یک از آنها عددی منحصر بفرد از یک تا ده نوشته شده باشد.

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\} \qquad \rightarrow n(S)=۱۰$$

نتیجه : تعداد برآمد های فضای نمونه‌ای استخراج n مهره از m مهره داخل یک کیسه، برابر $\frac{m!}{n!(m-n)!}=\binom{m}{n}$ است.

***

تمرین ۱ : در استخراج دو مهره از ۶ مهره داخل کیسه‌ای به صورت تصادفی ابتدا تعداد برآمد های فضای نمونه‌ای را نوشته و سپس تمام برآمد ها را بنویسید.

حل : تعداد برآمد های فضای نمونه ای $۱۵=\frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۱\times۴!}=\frac{۶!}{۲!(۶-۲)!}=\binom{۶}{۲}$

حال اگر این مهره ها a و b و c و d و e و f نامگذاری شوند، در این صورت : برآمد های فضای نمونه ای به صورت زیر می شوند.

$$\begin{array}{lllll} a,b & b,c & c,d & d,e & e,f \\ a,c & b,d & c,e & d,f & \\ a,d & b,e & c,f & & \\ a,e & b,f & & & \\ a,f & & & & \end{array}$$

***

توجه : اگر n یک عدد طبیعی باشد، تساوی های زیر را به خاطر داشته باشیم.

۱) $\binom{n}{۰}=۱$

۲) $\binom{n}{n}=۱$

۳) $\binom{n}{۱}=n$

۴) $\binom{n}{n-۱}=n$

۵) $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

۶) $\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

تمرین۲ : ظرف A حاوی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است و ظرف B حاوی ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه است. از هر دو ظرف دو مهره به تصادف خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه ای را بنویسید.

حل:

$$\overbrace{\binom{۵}{۲}}^{A}\times\overbrace{\binom{۳}{۲}}^{B}=\frac{۵\times۴}{۲}\times\frac{۳\times۲}{۲}=۱۰\times۳=۳۰$$

***

تمرین۳ : ظرف A حاوی ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است و ظرف B حاوی ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه است. از ظرف A سه مهره و از ظرف B دو مهره به تصادف خارج می کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه ای را بنویسید.

حل:

$$\overbrace{\binom{۵}{۳}}^{A}\times\overbrace{\binom{۳}{۲}}^{B}=\frac{۵\times۴}{۲}\times\frac{۳\times۲}{۲}=۱۰\times۳=۳۰$$

***

توجه : در این کتاب فقط با پدیده هایی آشنا می شویم که فضای نمونه ای آنها ، یک مجموعه‌ی متناهی باشد.

قسمت دوّم : پیشامدهای تصادفی و اعمال روی آنها

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را **پیشامد تصادفی** می نامند و آنرا با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می دهند.[1]

تمرین۴ : در پرتاب یک تاس ، پیشامد آن را بنویسید که عدد اوّل رخ دهد.

حل :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه ای

$E=\{۲,۳,۵\}$ پیشامد تصادفی

توجه : اگر E یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای S باشد. واضح است که :

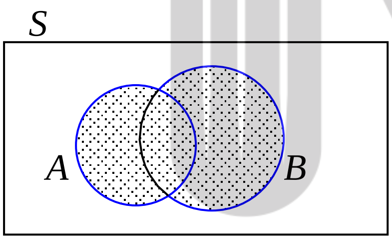
$$\Phi \subseteq E \subseteq S$$

اگر $E=\Phi$ باشد، پیشامد E را **غیر ممکن** می نامند. مثلاً در پرتاب تاس انتظار داریم عدد بیشتر از ۱۰ بیاید.

اگر $E=S$ باشد، پیشامد E را **حتمی** می نامند. مثلاً در پرتاب تاس انتظار داریم عدد کمتر از ۱۰ بیاید.

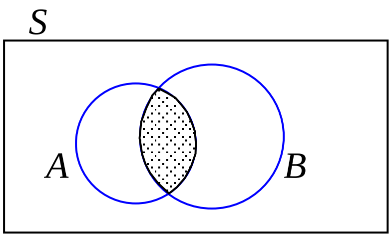
***

جبر پیشامد ها (عملیات روی پیشامد ها)



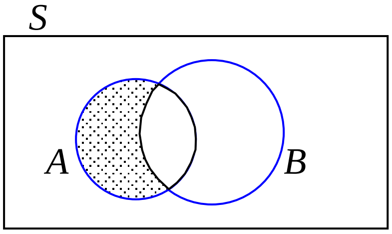
الف : اجتماع دو پیشامد A و B که با نماد $A \bigcup B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهد.

ب : اشتراک دو پیشامد A و B که با نماد $A \bigcap B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن هر دو پیشامد A و B رخ دهد.



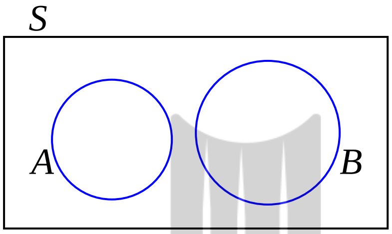
[1]. لذا برای هر فضای نمونه ای n عضوی ، به تعداد ۲^n پیشامد می توان نوشت.

ج : تفاضل پیشامد B از پیشامد A که با نماد $A-B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن A و رخ ندادن B رخ دهد.



***

پیشامدهای ناسازگار



دو پیشامد A و B را **ناسازگار** گویند، هرگاه هر دو با هم رخ ندهند. به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی است.

$$A\bigcap B=\Phi$$

تمرین۵ : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد بزرگتر از ۵ و B پیشامد رخ دادن عدد کمتر از ۳ باشد. نشان دهید که این دو پیشامد ناسازگارند.

حل :

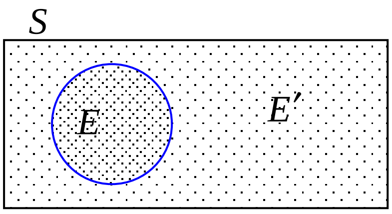
فضای نمونه ای $\quad S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\rightarrow n(S)=۶$

عدد بزرگتر از ۵ $\quad A=\{۶\}$ $\qquad$ عدد کمتر از ۳ $\quad B=\{۱,۲\}$

و چون $A\bigcap B=\{\}$ این دو پیشامد ناسازگارند.

***

پیشامد متمم



اگر S فضای نمونه‌ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E می باشد، **متمم** E می نامند و آن را با E' یا E^C نمایش می دهند. بدیهی است که

$$E'=S-E$$

تمرین۶ : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیـشامد رخ دادن عـدد مـضرب ۳ باشـد. مـتمم پیـشامد A را بنویسید.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \to n(S)=۶$

غیر مضرب ۳ $A'=S-A=\{۱,۲,۴,۵\}$ مضرب۳ $A=\{۳,۶\}$

***

تمرین۷ : تاسی را پرتاب می کنیم. پیشامد آن را بنویسید که

الف : عدد فرد یا عدد اوّل رخ دهد.

ب : عدد فرد و عدد اوّل رخ دهد.

ج : عدد فرد رخ دهد و عدد اوّل ندهد.

د : عدد زوج رخ دهد. (عدد فرد نیاید.)

حل: واضح است که $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ حال قرار می دهیم:

$A=\{۱,۳,۵\}$ پیشامد رخ دادن عدد فرد

$B=\{۲,۳,۵\}$ پیشامد رخ دادن عدد اول

الف :

$A\bigcup B=\{۱,۲,۳,۵\}$

ب:

$A\bigcap B=\{۳,۵\}$

ج:

$A-B=\{۱\}$

د :

$A'=S-A=\{۲,۴,۶\}$

***

تمرین ۸ : هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچکتر از ۱۱ را روی یک کارت می نویسیم و یکی از کارت ها را به تصادف بر می داریم.

الف : فضای نمونه ای را بنویسید.

ب : تعیین کنید که چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه ای می توان تعریف کرد؟

ج : پیشامد E را که در آن « عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد.» را مشخص کنید.

تمرین برای حل :

۹ : کدام یک از پدیده های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟

الف : نام۲۰ دانش آموز را روی۲۰ کارت می نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می کشیم، تا نام یکی از دانش آموزها ، استخراج شود.

ب : نتیجه‌ی پرتاب سکه ای که هر دو طرف آن یک شکل است.

ج : نتیجه‌ی یک آزمون چهار جوابی، وقتی که سئوالات آن را شانسی پاسخ داده ایم.

د : نتیجه‌ی خارج کردن ۲ مهره سفید از جعبه ای که در آن ۵ مهره سفید است.

۱۰ : هر یک از ارقام ۱ الی ۸ را روی یک کارت می نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم.

الف : فضای نمونه ای را بنویسید.

ب : پیشامد آن را بنویسید که در آن عدد روی کارت زوج باشد.

ج : پیشامد آن را بنویسید که در آن عدد روی کارت اوّل باشد.

د : پیشامد آن را بنویسید که در آن عدد روی کارت بزرگتر از ۲ باشد.

۱۱ : از بین اعداد دو رقمی که با ارقام ۳ و ۵ و ۷ و ۴ نوشته می شوند. عددی به تصادف انتخاب می کنیم. پیشامد آن را بنویسید که :

الف : این عدد زوج باشد.

ب : این عدد فرد و ارقام یکسان داشته باشد.

ج : این عدد فرد یا ارقام یکسان داشته باشد.

۱۱ : روی وجه یک تاس عدد ۱و روی سه وجه دیگر آن عدد ۲ نوشته شده است. در فضای نمونه ای مربوط به پرتاب این تاس، تعیین کنید که کدام پیشامد حتمی و کدام یک نشدنی است؟

الف پیشامد رو شدن عدد مضرب۳

ب : پیشامد رو شدن عدد طبیعی

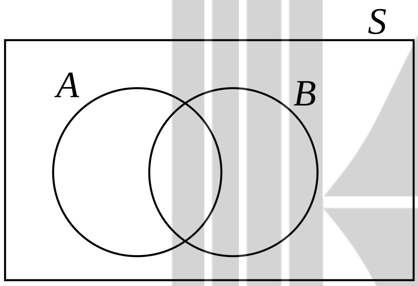
۱۲ : جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

الف: به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی .... می گوییم.

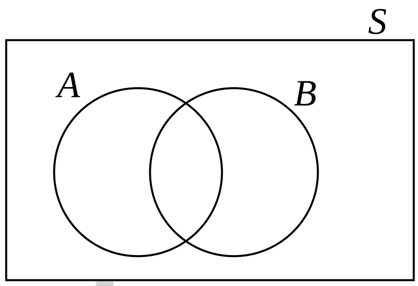
ب : فضای نمونه ای پرتاب سه سکه .... عضو دارد.

پ : پیشامد .... وقتی رخ می دهد که پیشامد A و B هر دو رخ دهند.

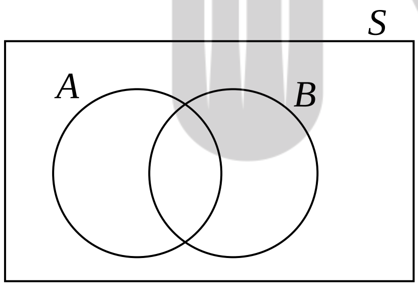
۱۳ : در هر مورد فضای نمونه‌ای و دو پیشامد A و B از آن داده شده اند. پیشامد تعیین شده در زیر شکل را هاشور بزنید.



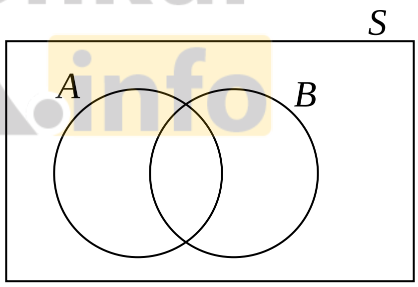
(الف) $A \cup B$



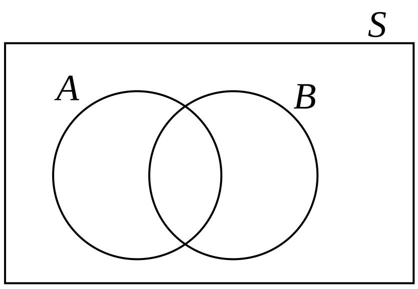
(ب) $A \cap B$



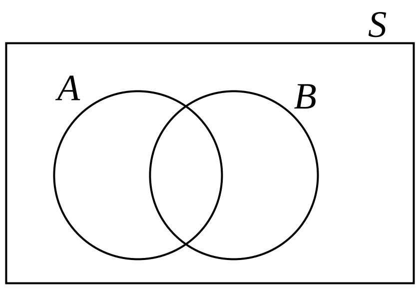
(ج) $A - B$



(د) $B - A$



(هـ) $A' \cup B$



(و) $A' \cap B'$

۱۴ : فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. هر یک از عبارت های توصیفی زیـر را با نمودار ون نمایش دهید.

الف : فقط پیشامد B رخ دهد.

ب : پیشامد B رخ دهد و C رخ ندهد.

ج : پیشامد A یا B رخ دهند ولی C رخ ندهد.

د : پیشامد A و B رخ دهند ولی C رخ ندهد.

۱۵ : تاسی را پرتاب می کنیم. پیشامد های A و B و C را با توجه به شرایط زیر بنویسید.

الف : دو پیشامد A و B ناسازگار باشند.

ب : دو پیشامد A و C ناسازگار نباشند.

۱۶ : به کمک رسم نمودار ون ، پیشامد $(A \cap B) \cup C$ را هاشور بزنید.

۱۷ : خانواده ای دارای ۳ فرزند است.

الف : فضای نمونه ای مربوط به فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب : پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

۱۸ : سکه ای را به هوا می اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می اندازیم و اگر رو بیاید، دو سکه ی دیگر را می اندازیم.

الف : فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب : پیشامد آنکه « تاس زوج بیاید » را مشخص کنید.

ج : پیشامد آنکه « حداقل ۲ سکه رو بیاید » را مشخص کنید.

۱۹ : یک سکه و یک تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم.

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد A که در آن سکه پشت و عدد تاس بزرگتر از ۳ باشد را مشخص کنید.

پ) پیشامد B که در آن سکه رو و عدد تاس زوج باشد را بنویسید.

ت) پیشامد $A' \cap B'$ را بنویسید.

۲۰ : یک تاس و دو سکه را با هم پرتاب می کنیم.

الف : به کمک نمودار درختی ، فضای نمونه ای را مشخص کنید.

ب : تعیین کنید که فضای نمونه ای دارای چند عضو است.

ج : پیشامد آن را بنویسید که دو سکه هم نام و تاس مضرب ۳ باشد.

د : تعداد اعضای متمم پیشامد بند « ج » را بنویسید.

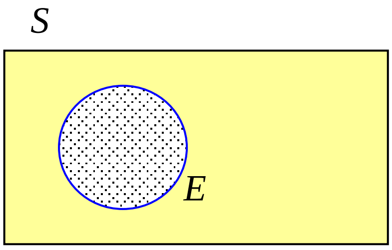
۲۱ : سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم. اگر سکه رو ظاهر شد،آنگاه تاس را می ریزیم. در غیر این صـورت یک بار دیگر سکه را می اندازیم.

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

ب)پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا بنویسید.

***

قسمت سوّم : مفهوم احتمال و قوانین آن



اگر E یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد. در این صورت ، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی E بـر تعـداد اعـضای فـضای نمونه‌ای نظیر آن یعنی S را **احتمال** وقوع پیشامد تصادفی E مـی نامند.

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

مثال : در پرتاب یک تاس ، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad \rightarrow n(S)=۶$

پیشامد تصادفی $E=\{۳,۶\} \quad \rightarrow n(E)=۲$

احتمال آمدن مضرب ۳ $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

***

تمرین۲۲ : ۲۰ کارت که روی هر یک از آنها شماره ای منحصر بفرد از یک تا بیست نوشـته شـده اسـت، خوب به هم زده و یک کارت از بین آنها استخراج می کنیم. احتمال آن را بنویسید که :

الف : عدد فرد بیاید. ج : عدد بزرگتر از ۱۳ بیاید. هـ : عدد کمتر از ۲۴ بیاید.

ب : عدد اوّل بیاید. د : عدد بیشتر ۲۵ بیاید.

حل :

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\} \rightarrow n(S)=۲۰$$

الف: ....

$$A=\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳\ ,۱۵,۱۷,۱۹\} \quad \rightarrow n(A)=۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}$$

ب : ....

$$B=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\} \quad \to n(B)=۸$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۸}{۲۰}=\frac{۲}{۵}$$

ج : ....

$$C=\{۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\} \quad \to n(C)=۷$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۷}{۲۰}$$

د : ....

$$D=\{\}=\Phi \quad \to n(D)=۰$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۰}{۲۰}=۰$$

هـ : ....

$$E=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\} \to n(E)=۲۰$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱$$

***

تمرین۲۳ : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که :

الف : سه بار رو بیاید.

ب : فقط دو پشت بیاید.

ج : دو پشت به دنبال هم بیاید.

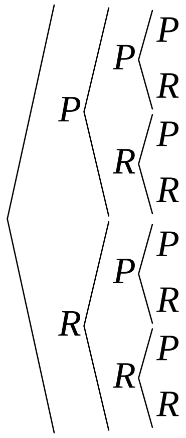
د : سه سکه، همنام رخ دهد.

هـ : لاقل دو رو بیاید.

و : حداکثر دو پشت رخ دهد.

ز : سکه‌ی اوّل و سکه‌ی دوّم همنام باشند.

حل : ابتدا فضای نمونه ای را می نویسیم.



$$S=\{PPP,PPR,PRP,PRR,RPP,RPR,RRP,RRR\}\rightarrow n(S)=۲\times۲\times۲=۸$$

الف : ....

$$A=\{RRR\}\rightarrow n(A)=۱$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$$

ب : ....

$$B=\{PPR,PRP,RPP\}\rightarrow n(B)=۳$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

ج : ....

$$C=\{PPP,PPR,RPP\}\rightarrow n(C)=۳$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

د : ....

$$D=\{PPP,RRR\}\rightarrow n(D)=۲$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

هـ : ....

$$E=\{RPR,PRR,RRP,RRR\}\rightarrow n(E)=۴$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

و : ....

$$F=\{RRR,PRR,RPR,RRP,PPR,PRP,RPP\}\rightarrow n(F)=۷$$

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{۷}{۸}$$

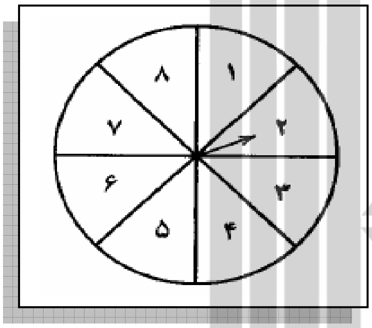
ز : ....

$$G=\{PPP,PPR\ ,RRP,RRR\}\rightarrow n(G)=۴$$

$$P(G)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

***

تمرین۲۴ : عقربه‌ای مطابق شکل زیر ، پس از به حرکت در آمدن به تصادف روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می ایستد و عددی را نشان می دهد.



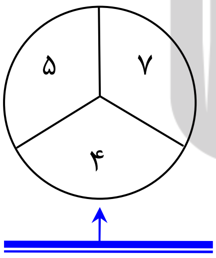
الف : فضای نمونه ای را بنویسید.

ب : احتمال آن را به دست آورید که عقربه عدد اوّل را نشان دهد.

ج : احتمال آن را به دست آورید که عقربه روی مضرب ۳ بایستد.

د : احتمال آن را به دست آورید که عقربه عدد اوّل یا فرد را نشان دهد.

تمرین۲۵ : یک صفحه‌ی دایره ای به سه ناحیه‌ی هم سطح مطابق شکل مقابل تقسیم شده است. روی هر ناحیه، یکی از اعداد ۷ و ۵ و۴ نوشته شده است. اگر صفحه را دو بار بچرخانیم و هر بار روبروی یکی از ناحیه ها، روبروی نشانگر قرار می گیرد.



الف : فضای نمونه ای را بنویسید.

ب : احتمال آن را بدست آورید که هر دو بار اعداد یکسان روبروی نشانگر قرار گیرند.

تمرین۲۶ : دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. فضای نمونه‌ای را تشکیل دهید و احتمال آن را حساب کنید که :

الف : مجموع شماره های دو تاس برابر ۶ شود.
ب : مجموع شماره های دو تاس بیشتر از ۹ شود.
ج : مجموع شماره های دو تاس مضربی از ۵ شود.
د : تفاضل شماره های دو تاس صفر شود.

حل : ابتدا فضای نمونه ای را می نویسیم.

$$\begin{array}{cccccc}
(۱,۱) & (۱,۲) & (۱,۳) & (۱,۴) & (۱,۵) & (۱,۶) \\
(۲,۱) & (۲,۲) & (۲,۳) & (۲,۴) & (۲,۵) & (۲,۶) \\
(۳,۱) & (۳,۲) & (۳,۳) & (۳,۴) & (۳,۵) & (۳,۶) \\
(۴,۱) & (۴,۲) & (۴,۳) & (۴,۴) & (۴,۵) & (۴,۶) \\
(۵,۱) & (۵,۲) & (۵,۳) & (۵,۴) & (۵,۵) & (۵,۶) \\
(۶,۱) & (۶,۲) & (۶,۳) & (۶,۴) & (۶,۵) & (۶,۶)
\end{array}$$

$$n(S)=۳۶$$

الف : ....

$$A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\} \quad \rightarrow n(A)=۵$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

ب : ....

$$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\} \quad \rightarrow n(B)=۶$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج : ....

$$C=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\} \quad \rightarrow n(C)=۷$$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۷}{۳۶}$$

د : ....

$$D=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \quad \rightarrow n(D)=۶$$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

تمرین۲۷ : چهل کارت هم اندازه به رنگ های سبز و قرمز و سفید و آبی داریم. روی هر یک از آنها شماره های یک تا ده نوشته شده است. تعداد کارت های رنگ های مختلف با هم مساوی است. اگر کارت ها را خوب به هم بزنیم و سپس یک کارت استخراج کنیم، احتمال آن را حساب کنید که :

الف: کارت بیرون آمده آبی باشد.

ب : شماره‌ی کارت بیرون آمده عدد اوّل باشد.

ج : شماره‌ی کارت بیرون آمده بر ۶ بخش پذیر باشد.

د : کارت بیرون آمده سبز و شماره‌ی روی آن مضرب ۳ باشد.

حل :

الف :

$\Rightarrow n(A)=10$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$$

ب :

$\Rightarrow n(B)=16$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$$

ج :

$\Rightarrow n(C)=4$

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$

د :

$\Rightarrow n(D)=3$

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{3}{40}$$

فضای نمونه ای

سفید	آبی	سبز	قرمز
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰

$\Rightarrow n(S)=40$

تمرین۲۸ : در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۲ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه یک مهره به تصادف استخراج می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که :

الف : مهره ی بیرون آمده سبز باشد.

ب : مهره ی بیرون آمده سبز یا سفید باشد.

ج : مهره ی بیرون آمده سبز نباشد.

حل : تعداد کل مهره ها ۱۰ است.

الف : تعداد مهره های سبز ۳ است. $P(A)=\frac{3}{10}$

ب : تعداد مهره های سبز یا سفید ۸ است. $P(B)=\frac{8}{10}$

ج : تعداد مهره هایی که سبز نیستند برابر ۷ است. $P(C)=\frac{7}{10}$

تمرین۲۹ : از بین اعداد طبیعی از۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل :

$$S=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\} \to n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۰+۱=۹۱$$

$$E=\{۱۶,۲۴,...,۹۶\} \to n(E)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۶}{۸}+۱=۱۱$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۹۱}$$

تمرین برای حل :

۳۰ : هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲و۳و ۴ و بدون تکرار ارقام نوشته می شوند را روی کارت های مجزا نوشته و خوب به هم می زنیم، سپس یک کارت به تصادف از بین آنها بر می داریم، اگر A پیشامد خارج شدن عدد زوج و B پیشامد خارج شدن عدد فرد باشد. احتمال رخ دادن هر یک از این دو پیشامد را حساب کنید.

۳۱ : روی چند کارت هم اندازه ، مضرب های طبیعی ۸ کمتر از ۱۰۰ نوشته شده است. یک کارت به تصادف از بین آنها استخراج می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که این کارت مضرب ۱۲ باشد.

۳۲ : حروف کلمه‌ی « جهانگردی» را به تصادف کنار هم قرار می دهیم، چقدر احتمال دارد:

الف : حرف « ی » آخر باشد؟

ب : دو حرف « ی » و « د » کنار هم باشند؟

ج : با حرف « ج » شروع و به حرف « ی » ختم شود؟

۳۳ : اگر ۷ نفر که فقط دوتای آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف : دو برادر کنار یکدیگر نباشند.

ب : یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

***

قوانین احتمال :

با توجه به تعریف احتمال، اگر E یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای (متناهی و ناتهی) S باشد. در این صورت:

۱) $P(S)=1$ (احتمال وقوع پیشامد حتمی)

۲) $P(\Phi)=0$ (احتمال وقوع پیشامد غیر ممکن)

اثبات :

$$P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=1$$

$$P(\Phi)=\frac{n(\Phi)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$$

تمرین ۳۴ : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\subseteq B$ ، ثابت کنید:

$$P(A)\le P(B)$$

حل :

$$A\subseteq B\rightarrow n(A)\le n(B)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}\rightarrow P(A)\le P(B)$$

برای هر پیشامد E از فضای نمونه ای S نیز داریم :

۳) $0\le P(E)\le 1$

اثبات :

$$\Phi\subseteq E\subseteq S\rightarrow n(\Phi)\le n(E)\le n(S)$$

$$\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(\Phi)}{n(S)}\le\frac{n(E)}{n(S)}\le\frac{n(S)}{n(S)}\rightarrow 0\le P(E)\le 1$$

همچنین اگر A و B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S باشند، در این صورت :

۴) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات :

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{\div n(S)} \frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۵) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

اثبات :

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\xrightarrow{\div n(S)} \frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$\rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

توجه : اگر E' مکمل پیشامد E باشد، در این صورت:

۱ : اجتماع دو پیشامد E و E' برابر فضای نمونه ای است.

$$E\cup E'=S \rightarrow P(E\cup E')=P(S)=۱$$

۲ : اشتراک دو پیشامد E و E' تهی است. یعنی دو پیشامد E و E' ناسازگارند. پس:

$$E\cap E'=\Phi \rightarrow P(E\cap E')=P(\Phi)=۰$$

حال با توجه به دو نتیجه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$P(E\cup E')=P(E)+P(E')-P(E\cap E')$$

$$\rightarrow ۱=P(E)+P(E')-۰ \rightarrow P(E)+P(E')=۱$$

پس :

$P(E')=۱-P(E)$ یا $P(E)=۱-P(E')$

***

توجه : اگر A و B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه ای S و $A=B$ باشند.آنگاه $P(A)=P(B)$.

ولی عکس این مطلب درست نمی باشد.

نتیجه : اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، در این صورت:

الف : $P(A\cap B)=P(\Phi)=۰$

ب : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ج : $P(A-B)=P(A)$

***

تمرین ۳۵ : تاسی را پرتاب می کنیم.

الف : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد یا مضربی از ۳ رخ دهد.

ب : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد و مضربی از ۳ رخ دهد.

ج : احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد رخ دهد و مضرب ۳ رخ ندهد.

حل :

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \rightarrow n(S)=۶$

عدد فرد $A=\{۱,۳,۵\}$

مضرب ۳ $B=\{۳,۶\}$

الف :

$$A \cup B=\{۱,۳,۵,۶\} \rightarrow n(A \cup B)=۴$$

$$\Rightarrow P(A \cup B)=\frac{n(A \cup B)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

ب :

$$A \cap B=\{۳\} \rightarrow n(A \cap B)=۱$$

$$\Rightarrow P(A \cap B)=\frac{n(A \cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

ج :

$$A-B=\{۱,۵\} \rightarrow n(A-B)=۲$$

$$\Rightarrow P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

تمرین ۳۶ : اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم :

$$P(A)=\frac{۲}{۵} \text{ و } P(B)=\frac{۱}{۴} \text{ و } P(A \cap B)=\frac{۱}{۱۰}$$

مطلوبست محاسبه‌ی : الف : $P(A \cup B)$ ب : $P(A-B)$

حل :

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۸+۵-۲}{۲۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)=\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۴-۱}{۱۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

***

تمرین۳۷ : احتمال اینکه دانش آموزی از درس های فیزیک و ریاضی نمره بیاورد، به ترتیب ۰/۴ و ۰/۳ است. اگر احتمال گذراندن حداقل یکی از آن دو درس ۰/۶ باشد. احتمال آن را حساب کنید که این دانش آموز از هر دو درس نمره بیاورد.

حل:

$$P(F\bigcup R)=P(F)+P(R)-P(F\bigcap R)$$
$$\frac{۶}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}-x\rightarrow\frac{۶}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}-x\rightarrow-\frac{۱}{۱۰}=-x\rightarrow x=\frac{۱}{۱۰}$$
$$\Rightarrow P(F\bigcap R)=x=۰/۱$$

***

تمرین۳۸ : برای کارکنان یک اداره جدول زیر تنظیم شده است. حال یک نفر به تصادف از بین آنها انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:

	خوب	متوسط	ضعیف	جمع
فوتبال	۱۰	۱۸	۵	۳۳
بسکتبال	۱۸	۵	۹	۳۲
والیبال	۴	۱۰	۱	۱۵
جمع	۳۲	۳۳	۱۵	۸۰

الف : بازی شخص انتخاب شده متوسط باشد.

ب: این شخص در تیم بسکتبال باشد.

ج: بازی این شخص متوسط و او در تیم بسکتبال باشد.

د : بازی این شخص خوب یا او در تیم والیبال باشد.

هـ : این شخص در تیم بسکتبال نباشد.

حل:

الف: $P(A)=\frac{۳۳}{۸۰}$

ب: $P(B)=\frac{۳۲}{۸۰}$

ج: $P(A\bigcap B)=\frac{۵}{۸۰}$

د: $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۳۲}{۸۰}+\frac{۱۵}{۸۰}-\frac{۴}{۸۰}=\frac{۴۳}{۸۰}$

هـ : $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۳۲}{۸۰}=\frac{۴۸}{۸۰}=\frac{۳}{۵}$

تمرین۳۹ : در پرتاب یک تاس احتمال آن را حساب کنید که عدد فرد یا مضرب ۴ بیاید.

حل: چون تمام اعداد فرد مضرب ۴ نیستند، لذا پیشامد های آمدن عدد فرد و مضرب های ۴ ناسازگار هستند.از طرفی

فضای نمونه ای $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \to n(S)=۶$

عدد فرد $A=\{۱,۳,۵\} \to n(A)=۳ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

مضرب۴ $B=\{۴\} \to n(B)=۱ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$

$P(A\cap B)=P(\Phi)=۰$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳+۱}{۶}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

تمرین۴۰ : اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را روی صد کارت می نویسیم و یک کارت به تصادف از میان آنها استخراج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف : بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد.

ب : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

ج : فقط بر یکی از دو عدد ۴ یا ۶ بخش پذیر باشد.

حل :

$S=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\} \to n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱+۱=۱۰۰$

بخش پذیر بر۴ $A=\{۴,۸,...,۹۶,۱۰۰\} \to n(A)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۱۰۰-۴}{۴}+۱=۲۵$

بخش پذیر بر۶ $B=\{۶,۱۲,...,۹۶\} \to n(B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۶}{۶}+۱=۱۶$

بخش پذیر بر۱۲ (ک م م ۴ و۶)

$A\cap B=\{۱۲,۲۴,...,۹۶\} \to n(A\cap B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۱۲}+۱=۸$

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۵}{۱۰۰}+\frac{۱۶}{۱۰۰}-\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{۳۳}{۱۰۰}$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۵}{۱۰۰}-\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{۱۷}{۱۰۰}$

ج) $P(A-B)+P(B-A)=\frac{۱۷}{۱۰۰}+\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۴}$

تمرین ۴۱ : در یک روز سرد زمستانی، احتمال آمدن برف ۰/۷۰ می باشد احتمال آن را حساب کنید که برف نیاید.

حل:

احتمال آمدن برف $P(E)=۰/۷۰$

احتمال نیامدن برف $P(E')=۱-P(E)=۱-\frac{۷۰}{۱۰۰}=\frac{۳۰}{۱۰۰}$

***

تمرین ۴۲ : تاسی را دو بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که مجموع شماره های ظاهر شده ۳ نباشد.

حل :

$$n(S)=۳۶$$
$$A=\{(۱,۲),(۲,۱)\}\rightarrow n(A)=۲$$
$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۳۶}=\frac{۳۶-۲}{۳۶}=\frac{۳۴}{۳۶}=\frac{۱۷}{۱۸}$$

***

تمرین ۴۳ : اگر A یک پیشامد از یک آزمایش تصادفی باشد و احتمال وقوع A با شش برابر احتمال وقوع A' مساوی باشد. احتمال وقوع A' را حساب کنید.

حل :

$$P(A')=x\rightarrow P(A)=۶x$$
$$P(A)+P(A')=۱\rightarrow ۶x+x=۱\rightarrow ۷x=۱\rightarrow x=\frac{۱}{۷}$$

***

تمرین۴۴ : اگر $P(A)=\frac{۲}{۱۰}$ و $P(B)=\frac{۵}{۱۰}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$ باشد. تساوی های زیـر را کامـل کنید.

الف : $P(A')=$ ‏ ‏ ‏ ج : $P(A\cup B)=$ ‏ ‏ ‏ هـ : $P(A\cup B)'=$

ب : $P(B')=$ ‏ ‏ ‏ د : $P(A\cap B)'=$

حل :

الف) $P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۰-۲}{۱۰}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}$

ب) $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱۰-۵}{۱۰}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$

ج) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۱۰}+\frac{۵}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$

د) $P(A\cap B)'=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱۰-۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$

هـ) $P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۵-۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$

***

تمرین۴۵ : اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، و داشته باشیم: $P(B')=\frac{۳}{۷}$ و $P(A)=\frac{۲}{۷}$

در این صورت $P(A\cup B)$ را حساب کنید.

حل :

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۳}{۷}=\frac{۷-۳}{۷}=\frac{۴}{۷}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۲}{۷}+\frac{۴}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

***

تمرین۴۶ : اگر $P(A)=\frac{۳}{۵}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۵}$ مطلوبست تعیین :

$۱: P(A-B)$ $\quad ۳: P(A\cup B)$ $\quad ۵: P(A'\cap B')$

$۲: P(B)$ $\quad ۴: P(A\cup B)'$

حل:

$$۱)\ P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\rightarrow P(A-B)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

$$۲)\ P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\rightarrow \frac{۱}{۵}=P(B)-\frac{۱}{۵}\rightarrow P(B)=\frac{۲}{۵}$$

$$۳)\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

$$۴)\ P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$۵)\ P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=\frac{۱}{۵}$$

تمرین۴۷ : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B تساوی زیر را ثابت کنید.

$$P(A'\cap B')=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

اثبات :

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$$

$$=۱-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

***

تمرین۴۸ : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید که :

$$P(A'\cup B)-P(A\cap B)=P(A')$$

حل :

$$P(A'\cup B)-P(A\cap B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A')-P(A'\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A')-\underbrace{P(B\cap A')}+\underbrace{P(B)-P(A\cap B)}$$

$$=P(A')-P(B-A)+P(B-A)=P(A')$$

تمرین برای حل :

۴۹ : اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف : هر دو تاس زوج باشند.

ب : مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند.

ج : مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند.

د : مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشد.

۵۰ : یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A و ۶۲ درصد از مشتریان کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو نوع کارت، از فروشگاه خرید کنند؟

۵۱ : برای هر دو پیشامد دلخواه A و B ثابت کنید.

$$P(A\cap B')-P(B\cap A')+P(A')=P(B')$$

***

احتمال هندسی :

گاهی در آزمایش های تصادفی، فضای نمونه ای شامل دو گروه m و n عضوی می باشد. احتمال انتخاب k عضو که x تای آنها از بین گروه m عضوی و y تای آنها از بین گروه n عضوی باشد، به شکل زیر محاسبه می شود.

$$P(E)=\frac{\overset{\text{گروه اوّل}}{\binom{m}{x}}\times\overset{\text{گروه دوّم}}{\binom{n}{y}}}{\text{کل}\binom{m+n}{k}}\qquad\qquad k=x+y$$

***

مثال ۱ : از کلاس دهم یک دبیرستان ۴ نفر و از کلاس یازدهم ۷ نفر داوطلب بازی در تیم والیبال شده اند، در صورتی که بازی در تیم فقط برای ۶ نفر ازآنها امکان دارد. احتمال آن را حساب کنید که ۲ نفر از کلاس دهم و ۴ نفر از کلاس یازدهم انتخاب شوند.

حل :

$$P(E)=\frac{\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۴}}{\binom{۱۱}{۶}}=\frac{۶\times ۳۵}{۴۶۲}=\frac{۵}{۱۱}$$

مثال ۲ : با توجه به تمرین مثال قبل احتمال آن را حساب کنید که حداقل ۵ نفر از کلاس یازدهم انتخاب شوند.

حل:

$$P(E)=\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۱}{۶}}+\frac{\binom{۴}{۰}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۱}{۶}}=\frac{۴\times ۲۱}{۴۶۲}+\frac{۱\times ۷}{۴۶۲}=\frac{۱۲}{۶۶}+\frac{۱}{۶۶}=\frac{۱۳}{۶۶}$$

***

تمرین۵۲ : سه لامپ از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشند، انتخاب می کنیم.

الف : احتمال آن را تعیین کنید که هیچکدام معیوب نباشند.

ب : احتمال آن را تعیین کنید که فقط یک لامپ معیوب باشد.

حل :

$$\text{الف)}\ P(A)=\frac{\binom{۵}{۰}\times\binom{۱۰}{۳}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{۱\times۱۲۰}{۴۵۵}=\frac{۲۴}{۹۱}$$

$$\text{ب)}\ P(B)=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۱۵}{۳}}=\frac{۵\times۴۵}{۴۵۵}=\frac{۴۵}{۹۱}$$

***

تمرین۵۳ : ۶ نفر زن و ۷ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال امکان استخدام تنها برای ۷ نفر از آنها وجود دارد. مطلوبست احتمال اینکه :

الف: ۵ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب : فقط یک زن انتخاب شود.

ج : ۴ زن و ۳ مرد انتخاب شوند.

د : بیش از ۴ مرد انتخاب شوند.

حل :

$$\text{الف)}\ P(A)=\frac{\binom{۶}{۵}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۶\times۲۱}{۱۷۱۶}=\frac{۲۱}{۲۸۶}$$

$$\text{ب)}\ P(B)=\frac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۳}{۷}}=\frac{۶\times۷}{۱۷۱۶}=\frac{۷}{۲۸۶}$$

ج) $P(C)=\dfrac{\binom{۶}{۴}\times\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۳}{۷}}=\dfrac{۱۵\times ۳۵}{۱۷۱۶}=\dfrac{۱۷۵}{۵۷۲}$

د) $P(D)=\dfrac{\binom{۶}{۲}\times\binom{۷}{۵}}{\binom{۱۳}{۷}}+\dfrac{\binom{۶}{۱}\times\binom{۷}{۶}}{\binom{۱۳}{۷}}+\dfrac{\binom{۶}{۰}\times\binom{۷}{۷}}{\binom{۱۳}{۷}}$

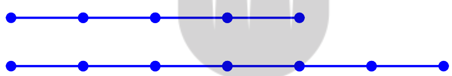
$$=\frac{۱۵\times ۲۱}{۱۷۱۶}+\frac{۶\times ۷}{۱۷۱۶}+\frac{۱\times ۱}{۱۷۱۶}=\frac{۳۱۵+۴۲+۱}{۱۷۱۶}=\frac{۳۵۸}{۱۷۱۶}=\frac{۱۷۹}{۸۵۸}$$

تمرین۵۴ : از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۲ سیب فاسد ، ۴ سیب به طور تصادفی بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه هر ۴ سیب سالم باشند.

حل :

$$P(E)=\frac{\binom{۴}{۴}\times\binom{۲}{۰}}{\binom{۶}{۴}}=\frac{۱\times ۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

تمرین۵۵ : دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند، از این نقطه ها، سه نقطه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این سه نقطه رأس های یک مثلث باشند، را به دست آورید.



حل : می توان این نقطه ها را دو گروه ۵ نقطه ای و ۷ نقطه ای در نظر گرفت. حال برای ایجاد مثلث باید دو نقطه از یک گروه و یک نقطه از گروه دیگر انتخاب کرد. در این صورت داریم:

$$P(E)=\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۳}}+\frac{\binom{۵}{۲}\times\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۵\times ۲۱}{۲۲۰}+\frac{۱۰\times ۷}{۲۲۰}=\frac{۱۷۵}{۲۲۰}=\frac{۳۵}{۴۴}$$

***

توجه : تابع احتمال هندسی برای بیش از دو گروه نیز قابل تعمیم است.

مثال : ۳ نفر دانش آموز از کلاس دوازدهم و ۴ نفر از کلاس یازدهم و ۵ نفر از کلاس دهم داوطلب بازی در تیم شطرنج دبیرستان شده اند. در صورتی که بازی در تیم فقط برای ۶ نفر امکان دارد، احتمال آن را حساب کنید که ۲ نفر از دوازدهم و یک نفر از یازدهم و بقیه از دهم انتخاب شوند.

حل :

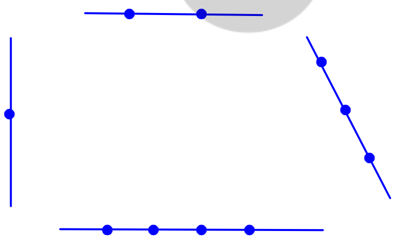
$$P(E)=\frac{\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۶}}=\frac{۳\times۴\times۱۰}{۹۲۴}=\frac{۱۰}{۷۷}$$

تمرین۵۶ : از چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۳ و ۳و ۲ و۱ نفر ، داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگـر بـه تصادف ۴ نفر از بین آنان معرفی شوند، احتمال آن را حساب کنید که از هر گروه فقط یک نفر معرفی شود.

حل :

$$P(E)=\frac{\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۴}}=\frac{۱۸}{۱۲۶}=\frac{۱}{۷}$$

تمرین ۵۷ : از میان ۱۰ نقطه مطابق شکل زیر ، چهار نقطه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنرا بیابید که با این ۴ نقطه یک چهارضلعی ساخته شود که روی هر خط فقط یک رأس آن قرار بگیرد.



حل :

$$P(E)=\frac{\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}}{\binom{۱۰}{۴}}=\frac{۱\times۲\times۳\times۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

***

تمرین برای حل :

۵۸ : در یک قفس ۵ موش سفید و ۴ موش سیاه وجود دارد. ۲ موش را به تصادف از این قفس انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه یک موش سفید و یک موش سیاه باشد، کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۱۰}$ ب) $\frac{۴}{۵}$ ج) $\frac{۴}{۹}$ د) $\frac{۵}{۹}$

۵۹ : در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد؟

الف: هر سه مهره آبی باشند.

ب : هر سه مهره همرنگ باشند.

ج : دقیقاً ۲ مهره همرنگ باشند.

۶۰ : می خواهیم از بین ۳ دانش آموز کلاس دهم رشته‌ی ریاضی و ۲ دانش آموز دهم تجربی یک تیم دو نفره‌ی تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد؟

الف : هر دو نفر ، از دانش آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب : هر دو نفر ، هم رشته باشند.؟

ج : یک نفر از رشته‌ی ریاضی و یک نفر از رشته‌ی تجربی باشد؟

۶۱ : از بین ۲ افسر و ۴ سرباز و۳ منشی ،کمیته ای ۵ نفره تشکیل می دهیم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف : در کمیته، منشی وجود نداشته باشد.

ب : در کمیته ، حداکثر یک سرباز وجود داشته باشد.

***

درس دوّم : مقدمه ای بر علم آمار ، جامعه و نمونه

برای بسیاری از تصمیم گیری های اساسی، از قبیل پیش بینی وضع هوا، تجویز یک رژیم غذایی مناسب، بررسی میزان محصولات یک باغ و ... ، نیازمند علم آمار هستیم. در این درس بحث هایی مقدماتی پیرامون آمار و موضوع آن خواهیم داشت و به معرفی جامعه و نمونه می پردازیم.

قسمت اوّل : آمار و علم آمار

برای ورود به موضوع، بهتر است ابتدا دو اصطلاح آمار و علم آمار را تعریف کنیم.

هر مجموعه از اعداد، ارقام و اطلاعات را آمار می نامند.

مثال : تعداد دانش آموزان یک دبیرستان به تفکیک کلاس های آن

مجموعه‌ی روش هایی است که شامل چهار مرحله‌ی زیر در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی را علم آمار می نامند.

الف: جمع آوری داده ها (اعداد و ارقام و ...)

ب : سازماندهی ، دسته بندی و نمایش داده ها

ج : تحلیل و تفسیر داده ها

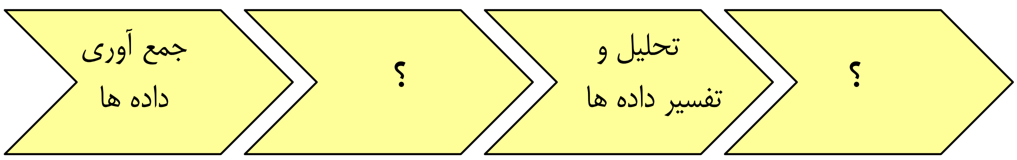
د : در نهایت نتیجه گیری ، قضاوت و پیش بینی مناسب

مثال : جمع آوری اطلاعات پیرامون تعیین درصد تعداد لامپ های معیوب تولید شده توسط یک کارخانه و تصمیم گیری پیرامون رفع مشکل در خط تولید

تمرین ۱ : دو مثال بنویسید که در آنها لازم می شود ، بر اساس اعداد و ارقام ، تصمیم گیری یا پیش بینی انجام گیرد.

تمرین ۲ : تفاوت آمار و علم آمار را بنویسید.

تمرین ۳ : مراحل علم آمار را در شکل زیر کامل کنید.



تمرین ۴ : اوّلین وآخرین مرحله از مراحل علم آمار را بنویسید.

تمرین۵ : درستی یا نادرستی جملات زیر را بنویسید.

الف : اوّلین قدم در استفاده از « علم آمار » جمع آوری داده ها است. (   )

ب : پیش بینی و تصمیم گیری برای آینده، نتیجه‌ی استفاده از « علم آمار » است. (   )

ج : « علم آمار » همان اعداد و ارقام است. (   )

تمرین ۶ : با در نظر گرفتن اخبار هواشناسی ، مراحل علم آمار را در شکل زیرکامل کنید.

***

پروژه‌ی آماری : یکی از روش های بررسی میزان چاقی افراد ، استفاده از معیاری به نام « شاخص توده‌ی بدنی[1]» است. این معیار از تقسیم وزن افراد (W) بر حسب کیلوگرم بر توان دوّم قد آنها (H) بر حسب متر به شکل زیر به دست می آید.

$$BMI = \frac{W_{kg}}{(H_m)^{۲}}$$

بعد از محاسبه‌ی این معیار برای هر شخص، از یک جدول استاندارد جهت تصمیم گیری پیرامون میزان چاقی آن شخص استفاده می کنند. این جدول به شکل زیر است.

طبقه بندی	شاخص توده‌ی بدنی
کم وزن	کمتر از ۱۸/۵
وزن طبیعی	۱۸/۵ تا ۲۴/۹
اضافه وزن	۲۵ تا ۲۹/۹
چاقی درجه یک	۳۰ تا ۳۴/۹
چاقی درجه دو	۳۵ تا ۳۹/۹
چاقی درجه سه	بیشتر از ۴۰

مثال : وزن طبیعی شخصی۱۰۰ کیلوگرم و قد او ۱ متر و ۷۴ سانتی متر است. شاخص توده‌ی بدنی ، این شخص را محاسبه و سپس در مورد میزان چاقی وی قضاوت کنید.

حل :

$$BMI = \frac{۱۰۰}{(۱/۷۴)^{۲}} = \frac{۱۰۰}{۳/۰۲۷۶} = ۳۳/۰۲$$

این شخص چاق است و چاقی او از نوع درجه‌ی یک است.

شاخص توده‌ی بدنی را برای تمام دانش آموزان کلاس محاسبه کنید و با تشکیل جدولی مانند جدول زیر در مورد هر یک از آنها و در کل کلاس قضاوت کنید.

[1] . BMI

قسمت دوّم : جامعه و نمونه

مجموعه ای از افراد یا اشیاء است که می خواهیم دربارهی اعضای آن ، موضوع یا موضوع هایی را مطالعه کنیم را جامعهی آماری یا به اختصار جامعه می نامند. به عبارت دیگر مجموعه ای از افراد یا اشیاء است که حداقل یک صفت مشترک داشته باشند. با این تعریف می توان گفت که هر مجموعه از افراد یا اشیایی که دربارهی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت می گیرد، جامعهی آماری است و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو می گویند. واضح است که لازمهی هر گونه مطالعه و بررسی و تحقیق، جمع آوری اطلاعات از هریک از عضو های جامعه است.

مثال :

ردیف	جامعه	موضوع مورد مطالعه	صفت مشترک	عضو
۱	دبیران ریاضی استان خوزستان	سابقه ی تدریس	دبیر، ریاضی، خوزستان	دبیر ریاضی
۲	نخل های شهرستان شادگان	میزان محصول	نخل، شادگان	نخل
۳	ماهی های خلیج فارس	انواع ماهی ها	ماهی، خلیج فارس	ماهی
۴	دانشجویان دانشگاه شهید چمران	طول دوره ی تحصیل	دانشجو ، شهید چمران	دانشجو
۵	پزشکان متخصص قلب وعروق	تعداد بیماران مراجع	پزشک، متخصص قلب وعروق	پزشک
۶	افراد جویای کار شهرستان اهواز	میزان تحصیلات	جویای کار، اهوازی بودن	شخص
۷	قالی های تولیدی استان اصفهان	کیفیت بافت	قالی، تولیدی استان اصفهان	قالی

تعداد اعضای جامعهی آماری را اندازهی جامعه یا حجم جامعه می نامند.

مثال :

جامعه	موضوع مورد مطالعه	صفت مشترک	عضو	اندازهی جامعه
دانش آموزان پایهی دهم رشتهی ریاضی اهواز در سال تحصیلی ۹۶-۹۵	رضایت دانش آموزان از رویکرد جدید آموزشی در کتب درسی نونگاشت	دانش آموز ، پایهی دهم رشتهی ریاضی ، اهواز سال تحصیلی ۹۶-۹۵	دانش آموز	۳۴۵۲

سرشماری و نمونه گیری

گاهی لازم است اطلاعات از تمام اعضای جامعه جمع آوری شوند. جمع آوری اطلاعات از تمام اعضای جامعه‌ی آماری را سرشماری می نامند. امّا همانطور که شاید تاکنون حدس زده اید، ممکن جمع آوری اطلاعات در یک مجموعه‌ی کوچک مانند کلاس درس ، ساکنین یک آپارتمان و .... امکان پذیر باشد، امّا جمع آوری اطلاعات پیرامون تمام افراد یک شهر کار ساده ای نیست. به عبارتی دیگر انجام سرشماری در برخی موارد مشکلاتی را به همراه دارد. مهمترین این مشکلات عبارتند از:

۱ : در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه

۲ : وقت گیر بودن دسترسی به تمام اعضای جامعه

۳ : گران تمام شدن بررسی تمام اعضای جامعه

۴ : از بین رفتن جامعه در برخی سرشماری ها

۵ : پراکندگی جغرافیایی و دور بودن اعضای جامعه

۶ : محدودیت نیروی انسانی متخصص

این مشکلات سبب می شوند تا سعی کنیم به جای آنکه تمام اعضای جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم بخشی از آن را که با دقت و مطالعه انتخاب شده است، بررسی کنیم. گرچه با این روش قسمتی از اطلاعات را از دست داده ایم، ولی در مقابل مشکلات فوق این عمل مناسبتر است. بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود را نمونه می گوییم. به عبارت دیگر نمونه زیر مجموعه ای از جامعه‌ی آماری است.

همچنین هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه می نامند و تعداد اعضای نمونه را اندازه یا حجم نمونه می گویند.

مثال۱: اگر بخواهید در مورد اندازه های نوعی ماهی در دریای مازندران مطالعه کنید، دراین صورت به تمام ماهی های این دریا دسترسی نخواهید داشت، لذا لازم است از طریق نمونه گیری و مطالعه‌ی نمونه این موضوع بررسی شود.

مثال۲ : برای بررسی کیفیت کنسرو های تولیدی یک کارخانه لازم است، نمونه‌ای را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم.

بر این اساس معلوم می شود که آمار گیری بر دو نوع است.

نوع اوّل : سرشماری (با مطالعه‌ی تمام اعضای جامعه)

نوع دوّم : نمونه گیری (با مطالعه‌ی اعضای نمونه)

همچنین واضح است که عمل نمونه گیری مهمترین بخش آمار را تشکیل می‌دهد. زیرا یک نمونه، گروه کوچکتری از جامعه است بطوری که نمایانگر خصوصیات اعضای جامعه می‌باشد و لذا عدم دقت در انتخاب اعضای آن موجب بدست آمدن نتایج نادرست در مورد جامعه می شود.

برای آنکه نمونه به درستی بیانگر خصوصیات اعضای جامعه باشد، باید علاوه بر اینکه به اندازه کافی بزرگ باشد، اعضای آن به صورت تصادفی انتخاب شوند، یعنی انتخاب آنها تابع قانون خاصی نباشد، در این صورت نمونه را نمونه‌ی تصادفی می‌نامند.

مثال: برای مطالعه‌ی پدیده‌ی افت تحصیلی در درس ریاضی پایه‌ی نهم متوسطه دبیرستان‌های یک شهر که۱۵۰۰ دانش آموز پایه‌ی نهم متوسطه دارد، لازم شد که پرسش نامه‌ای تنظیم و بین۶۰۰ دانش آموز که بطور تصادفی انتخاب شده‌اند (نام آنها ۴ حرفی باشد.)، توزیع شود.

الف) جامعه‌ی آماری را بنویسید؟ دانش آموزان پایه‌ی نهم متوسطه شهر مورد نظر

ب) اندازه‌ی جامعه را بنویسید؟ ۱۵۰۰ نفر

ج) نمونه‌ی آماری را مشخص کنید؟ دانش آموزانی که نام آنها ۴ حرفی باشد.

د) اندازه‌ی نمونه را بنویسید؟ ۶۰۰ نفر

هـ) موضوع مطالعه را بنویسید؟ پدیده‌ی افت تحصیلی در درس ریاضی

و) صفات مشترک اعضای جامعه رابنویسید؟ دانش آموز پایه‌ی نهم متوسطه ، شهر مورد مطالعه

ز) جامعه‌ی دارای چند طبقه (گروه) است؟ آنها را تعیین کنید؟

دو طبقه، دانش آموزان پسر و دانش آموزان دختر پایه ی مذکور

***

نمونه‌ی تصادفی و روش های دستیابی به آن

یکی از مشکلات اصلی روش انتخاب نمونه است ، زیرا نمونه باید بیانگر ویژگی‌های اعضای جامعه باشد بطوری که بتوان از طریق مطالعه‌ی آن جامعه را شناخت. نمونه‌ی خوب نمونه‌ای است که علاوه بر داشتن بزرگی کافی باید تصادفی باشد. وقتی نمونه گیری تصادفی است که:

۱ : امکان انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه ممکن باشد.

۲ : قبل از انتخاب نمونه، نتوان با اطمینان بیشتر درباره‌ی حضور یا عدم حضور عده ای در نمونه قضاوت کنیم، به عبارت دیگر هر فرد برای شرکت در نمونه همان قدر سهم داشته باشد که دیگران دارند.

۳ : هر چقدر موضوع مورد مطالعه در جامعه از تغییرات بیشتری برخوردار باشد، نمونه‌ی بزرگتری در نظر بگیریم.

برای مثال اگر بخواهیم در کلاس دهم ریاضی دبیرستان سن دانش آموزان را مطالعه کنیم، چون در یک کلاس درسی ، تقریباً همه همسن وسال هستند وتفاوت زیادی بین آنها از نظر سن مشاهده نمی شود، از این رو با یک نمونه‌ی کوچک می توان کار مطالعه را انجام داد. ولی اگر در همان کلاس بخواهیم میزان فراگیری درس آمار را مطالعه کنیم ، چون دانش آموزان از لحاظ فراگیری مطالب درسی متفاوت هستند و از هم فاصله دارند، در این شرایط لازم است نمونه‌ی بزرگتری داشته باشیم.

نمونه ای با ویژگی های بالا را نمونه‌ی تصادفی ساده می نامند که برای دستیابی به آن روش های زیر پیشنهاد می شود.

الف) قرعه کشی : که بصورت های گوناگونی انجام می شود، مانند:

نوشتن اسامی افراد جامعه و انتخاب تعدادی از طریق چرخاندن گردونه یا برداشتن از داخل کیسه

اختصاص دادن شماره ای به افراد جامعه وانتخاب چند شماره بدون دانستن اینکه این شماره ها به کدام فرد مربوط است.

ب) اعداد تصادفی: با برنامه نویسی هایی که در ماشین های حساب وکامپیوتر ها شده است می‌توان به یکسری اعدادکه خارج از کنترل وسلیقه و سابقه‌ی ذهنی انسانها باشد به صورت زیر دسترسی پیدا کرد.

۱: پس از روشن کردن ماشین حساب کلید SHIFT را فشار دهید.

۲ : سپس کلید RAN# را فشار دهید. در این صورت یک عدد (عددی تصادفی بین صفر ویک) در صفحه ظاهر می شود.

۳ : عدد ظاهرشده را دراندازه‌ی جامعه ای که می خواهیم از آن نمونه گیری کنیم ضرب کنید و در صورت لزوم حاصل ضرب را به بالا رند کنید تا شماره‌ی اوّلین فرد نمونه بدست آید.

۴ : با تکرار مراحل فوق شماره بقیه‌ی افراد نمونه نیز بدست می آید.

تذکر۱) قبل از انجام نمونه برداری به کمک اعداد تصادفی ابتدا باید تمام اعضای جامعه را کد بندی (شماره گذاری)کرد.

تذکر۲) ممکن است در تولید اعداد تصادفی دو شماره یکسان بدست آید،در این صورت از یکی از اعداد مشابه صرف نظر کرده وعمل نمونه برداری را یک بار بیشتر تکرار کنید.

مثال : یک نمونه‌ی تصادفی۴ تایی از یک جامعه‌ی ۱۰ نفره انتخاب کنید.

ابتدا اعضای جامعه را کد گذاری می کنیم.

زینب	رضا	مهدی	مریم	فاطمه	محمّد	زهرا	مرتضی	حسن	علی	نام
۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	کد

سپس نمونه گیری را انجام می دهیم.

شماره‌ی عضو در نمونه (رند کردن)	ضرب در عدد ۱۰	فشار دادن کلید های SHIFT وRAN	مرحله
۴	۳/۵۲	۰/۳۵۲	اوّل
۵	۴/۵۲	۰/۴۵۲	دوّم
۹	۸/۲۵	۰/۸۲۵	سوّم
–	۴/۸۸	۰/۴۸۸	چهارم
۷	۶/۹۱	۰/۶۹۱	پنجم

به این ترتیب ۴ عضو نمونه مشخص شدند. این اعضا عبارتند از :

۱) زهرا ۲) محمّد ۳) رضا ۴) مریم

واضح است که پس از تعیین افراد نمونه ، باید هرکدام را مطالعه نموده ونتایج حاصل را که معمولاً از اندازه‌گیری بدست می آیند را ثبت نمود،این نتایج را **داده** می‌نامند. داده ها اطلاعاتی هستند که از بررسی هریک از افراد نمونه ویا جامعه بدست می آیند.

مثال : با توجه به مثال قبل اگر مقصود، تعیین تعداد کتاب های مورد مطالعه‌ی این افراد در طول سال باشد،کافی است که جدول زیر را تکمیل نموده و در صورت لزوم نتیجه را به کل جامعه تعمیم داد.

نفر چهارم	نفر سوّم	نفر دوّم	نفر اوّل	عضو
مریم	رضا	محمد	زهرا	
۱۰	۱۸	۷	۱۲	تعداد کتاب

***

روش های نمونه گیری

برای انجام عمل نمونه گیری از اعضای جامعه ی آماری ، روش های مختلفی وجود دارد . در این قسمت دو روش را بیان می کنیم.

الف) نمونه گیری تصادفی ساده

در این روش به هر یک از افراد جامعه احتمال مساوی داده می شود تا درنمونه انتخاب شوند. انتخاب اعضای نمونه در این روش به دو صورت انجام می‌گیرد، قرعه‌کشی و استفاده از اعداد تصادفی که قبلا توضیح داده شده اند.

مثال : مثلاً انتخاب ۲ نفر از دانش آموزان کلاس ، جهت نظرخواهی در مورد نحوه‌ی کار دبیران، به قید قرئه

ب) نمونه گیری منظم (سیستماتیک)

برای انتخاب یک نمونه با این روش ابتدا به روش تصادفی عددی را انتخاب می کنیم . سپس بعد از اختصاص دادن کد به اعضای جامعه افرادی که کد آنها با عدد تصادفی بدست آمده هم خوانی دارد، انتخاب می شوند.

مثال : برای نظر خواهی از افرادی که از شهر بازی استفاده می کنند، در حین ورود به آنهـا قـبض شـماره دار داده می شود. حال اگر قبل از شروع نمونه گیری یک عدد تصادفی را انتخاب کنیم.(مـثلاً ۵)، افـرادی کـه یکان قبض آنها ۵ باشد، فرم نظرخواهی به آنها جهت تکمیل داده می شود.

تمرین برای حل :

۷ : در زیر یک عنوان تحقیق آماری آورده شده است. با توجه به این عنوان موضوع مورد مطالعه و جامعـه‌ی آماری را مشخص کنید.

« بررسی انواع محصولات کشاورزی در استان خوزستان»

۸ : می خواهیم درباره‌ی کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم، برای این منظـور ، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر ۱۰۰۰۰ قطعه است، به تعداد ۱۰۰ قطعه انتخاب می شود. بـا توجه به این اطلاعات جدول زیر را کامل کنید.

جامعه	اندازه‌ی جامعه	ویژگی مورد بررسی	اندازه‌ی نمونه

۹ : با توجه به تمرین فوق یک روش مناسب برای نمونه برداری پیشنهاد دهید.

۱۰ : به روش تصادفی ساده از جامعه‌ی آماری زیر سه شهر انتخاب کنید.

شهر	شیراز	مشهد	ارومیه	اصفهان	همدان	تهران	اهواز	سمنان	یزد	کرمان	تبریز
شماره	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

۱۱ : درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را تعیین کنید.

الف) اندازه‌ی جامعه کمتر از اندازه‌ی نمونه است. (   )

ب) اعضای نمونه ، همان اعضای جامعه اند. (   )

ج) نمونه ، زیر مجموعه ای از جامعه است. (   )

***

درس سوّم : متغیر و انواع آن

برای بررسی نمونه یا جامعه موضوع یا موضوع هایی را باید مورد نظر قرار داد، این موضوع یا موضوع ها چون از یک عضو جامعه یا نمونه به عضو دیگر تغییر می کند، آنرا متغیر می نامند. در ادامه مفهوم متغیر را بیان می کنیم و سپس به معرفی انواع متغیر ها می پردازیم.

قسمت اوّل : مفهوم متغیر

هر ویژگی از اعضای جامعه که مورد بررسی و مطالعه است را متغیر می نامند و معمولاً متغیر از یک عضو جامعه یا نمونه به عضو دیگر تغییر می کند.

مثال : هر یک از موارد زیر می توانند یک متغیر برای دانش آموزان یک کلاس باشند.

۱ : قد	۶ : میزان سواد والدین
۲ : وزن	۷ : تیم ورزشی مورد علاقه
۳ : رنگ چشم	۸ : رشته‌ی ورزشی مورد علاقه
۴ : میزان چاقی	۹ : معدل
۵ : تعداد افراد خانواده	۱۰ : رتبه در کلاس

تمرین ۱ : پنج نمونه از متغیر هایی که برای ساکنین یک آپارتمان می توان بیان کرد را بنویسید.

تمرین ۲ : پنج نمونه از متغیر هایی که برای خانه های روستایی می توان بیان کرد را بنویسید.

تمرین ۳ : چهار نمونه از متغیر هایی که می توان برای خودروهای تولیدی یک کارخانه بیان کرد را بنویسید.

***

قسمت دوّم : انواع متغیر

با توجه به اینکه ، متغیرها به شکل عدد بیان می‌شوند یا نمی‌شوند، در حالت کلی به دو دسته تقسیم بندی می کنند.

الف) متغیرهای کمی: متغیرهایی هستند که تغییرات آنها به شکل عدد بیان می‌شوند و لذا از اندازه گیری یا شمارش بدست می آیند. مانند : وزن، قد، درجه حرارت ، درآمد میزان بارندگی، میزان آلودگی هوا، شدت زلزله، تعداد افرادخانواده ، تعداد زنبورهای یک کندو ، تعداد غایبین ، تعداد تصادف رانندگی

ب) متغیر های کیفی: متغیرهایی هستندکه تغییرات آنها به شکل عدد بیان نمی‌شود، و لذا از اندازه گیری یا شمارش بدست نمی آیند. مانند: گروه خونی،کیفیت کالا، نوع کشت، جنسیت افراد، مراحل زندگی

***

دسته بندی گسترده تر متغیرها

می توان متغیر ها را به شکل زیر نیز دسته بندی کرد که صورت گسترده ای از تقسیم بندی فوق است.

الف) متغیرهای کمی پیوسته : متغیرهایی هستند که اگر دو مقدار b و a را بتوانند اختیار کنند، هر مقدار بین آنها را نیز بتوانند اختیار کنند. مانند: درجه حرارت ، وزن، قد، شاخص توده‌ی بدنی، میزان مصرف بنزین، معدل معمولاً این متغیر ها حاصل از اندازه گیری می‌باشند.

ب) متغیر های کمی گسسته (شمارشی) : متغیر هایی هستند که پیوسته نباشند و لذا معمولاً حاصل از شمارش می‌باشند. مانند: تعداد تصادف ، تعداد روزهای بارانی ، تعداد ماهی های یک دریا، نمره

ج) متغیر های کیفی ترتیبی: متغیرهایی هستند که به شکل عدد بیان نمی‌شوند ولی نوعی ترتیب طبیعی دارند. مانند: سطح تحصیلات ، مراحل زندگی ، میزان رضایت از مدرسه

د) متغیرهای کیفی اسمی: متغیرهایی هستندکه به شکل عدد بیان نمی‌شوند و در آنها ترتیب قابل ملاحظه ای وجود ندارد. مانند: گروه خونی، جنسیت ، رنگ مو ، نوع بارندگی(برف ، باران)

نمودار زیر تقسیم بندی متغیر ها را نشان می دهد.

متغیرها	کمی	پیوسته
		گسسته
	کیفی	ترتیبی
		اسمی

تمرین برای حل :

۴ : نوع هر یک از متغیر های زیر را بنویسید.

ردیف	عنوان متغیر	نوع متغیر
۱	سن	
۲	نمره‌ی ریاضی	
۳	وضعیت هوا (بارانی ، ابری ، آفتابی ، برفی)	
۴	وزن هلو	
۵	فشار هوا (زیاد ، کم ، متوسط)	
۶	میزان هوش (هوش بالا ، متوسط ، پایین)	
۷	نوع هواپیما (مسافربری ، باربری ، جنگنده)	
۸	کیفیت میوه (درجه ۱ ، درجه ۲ ، درجه ۳)	
۹	رنگ مو (مشکی ، طلایی ، قهوه ای)	
۱۰	تعداد سرنشینان مجاز خودرو	
۱۱	شدت بارندگی (زیاد ، متوسط ، کم)	
۱۲	اقوام ایرانی	
۱۳	میزان رضایت از کیفیت پخت نان (بسیار ، متوسط ، ضعیف)	
۱۴	نژاد انسانها (سفید پوست ، زرد پوست ، سیاه پوست)	
۱۵	میزان لذت بردن از آشپزی (بسیار زیاد، زیاد ،متوسط ، کم)	
۱۶	گروه خونی	
۱۷	مراحل رشد انسان (نوزاد، کودک،نونهال، نوجوان، جوان، میانسال،کهن سال)	
۱۸	رنگ خودرو	
۱۹	میزان بارندگی بر حسب سانتی متر	
۲۰	شماره‌ی بازیکنان فوتبال	
۲۱	معدل	
۲۲	شماره پیراهن بازیکن فوتبال	
۲۳	ملیت	
۲۴	میزان مطالعه در سال	

۵ : نوع هریک از متغیر های زیر را بنویسید.

الف) سرعت اتومبیل

ب) تعداد معلمان یک مدرسه

ج) وضع سواد

د) کیفیت کالا

۶ : کدام یک از متغیر های زیر پیوسته وکدام یک گسسته است؟

الف) درجه‌ی حرارت هوا

ب) تعداد مکالمات تلفن در یک روز

ج) مقاومت یک ترانزیستور

د) مسافت طی شده توسط یک اتوبوس

۷ : انواع متغیر های تصادفی را نام برده و برای هریک دو مثال بنویسید.

۸ : می خواهیم مدت زمانی را که طول می کشد تا کارمندان شهرمان به محل کارشان برسند، مورد بررسی قرار دهیم. برای این منظور از هزار نفر از آنها (که به صورت تصادفی انتخاب شده اند.) سوالی پیرامون این موضوع پرسیده شد. هر یک از موارد زیر را با توجه به این مطالعه کامل کنید.

الف) ویژگی مورد بررسی : ب) جامعه‌ی آماری :

ج) نمونه‌ی آماری : د) اندازه‌ی نمونه :

هـ) متغیر : و) نوع متغیر :

***

پروژه‌ی آماری : با توجه به لیست دانش آموزان کلاس ، ابتدا به روش اعداد تصادفی پنج نفر را انتخاب کنید. سپس جدول زیر را برای آنها تکمیل نمایید.

ردیف	نام و نام خانوادگی	معدل	گروه خونی	تعداد افراد خانواده	میزان رضایت از رفتار دبیران
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					

نوع هر یک از متغیر های فوق را تعیین کنید.

❋❋❋