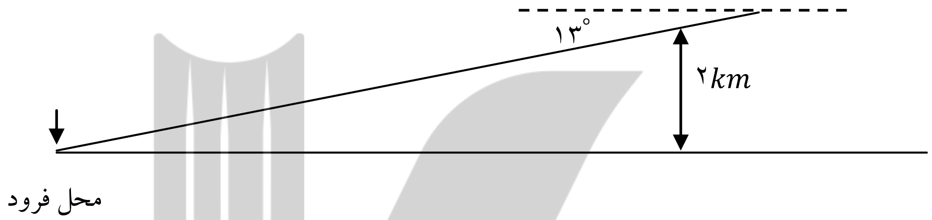
درس اول: نسبت های مثلثاتی

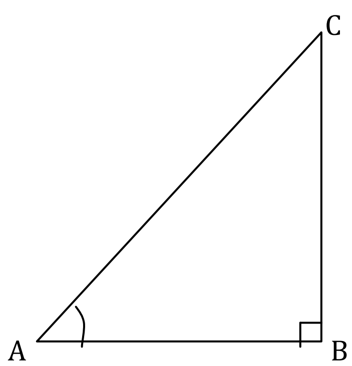
مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه برداری، نجوم و غیره کاربرد دارد.



به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق °۱۳ باشد، می خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می شوند.

در مثلث قائم الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می نامیم و آن را با tanA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، داریم.

$$\boxed{\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}}$$



عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می نامیم و آن را با cotA نشان می دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم الزویه ABC داریم:

$$cotA = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

در هر مثلث قائم الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویهٔ A می نامیم و با sinA نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

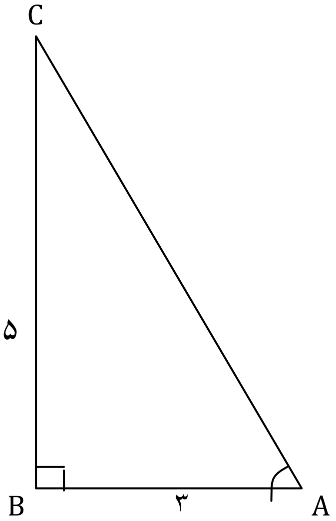
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

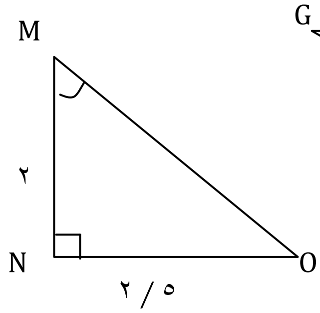
$$\cos A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

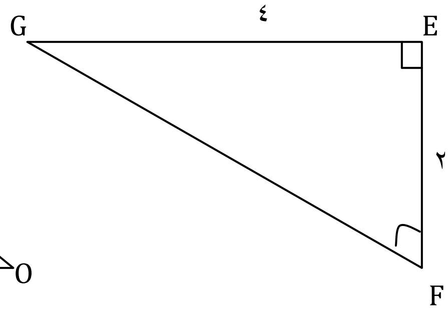
در یک مثلث قائم الزاویهٔ، نسبت های سینوس ، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت را **نسبت های مثلثاتی** می نامیم.

نکته: به سادگی میتوان دید در مثلث قائم الزاویهٔ ABC، $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ و از این رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به طور مشابه، می توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

مثال: در هر یک از شکل های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.





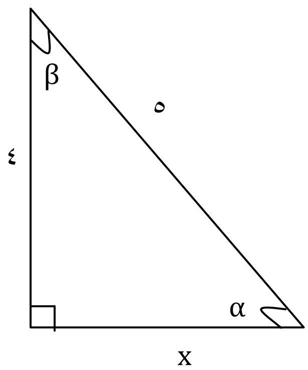


$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲ / ٥}$ $\tan G = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{٥}$ $\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲ / ٥}{۲}$ $\cot G = \frac{GE}{EF} = \frac{٤}{۲}$

مثال: در شکل مقابل نسبتهای مثلثاتی زوایای αوβ را بدست آورید.

رابطه فیثاغورس $۵^۲ = ۴^۲ + x^۲ \rightarrow ۲۵ = ۱۶ + x^۲ \rightarrow x^۲ = ۹ \rightarrow x = ۳$



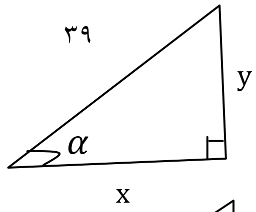
$sin\alpha = \frac{۴}{۵}$ $sin\beta = \frac{۳}{۵}$

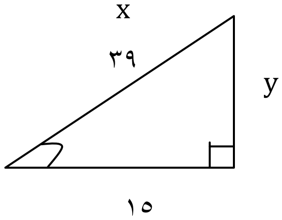
$cos\alpha = \frac{۳}{۵}$ $cos\beta = \frac{۴}{۵}$

$\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ $\tan\beta = \frac{۳}{۴}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$ $\cot = \frac{۴}{۳}$

مثال: طول وتر یک مثلث قائم الزاویه ۳۹ و کسینوس یکی از زاویه های حاده ی آن $\frac{۵}{۱۳}$ باشد محیط مثلث را بدست آورید.





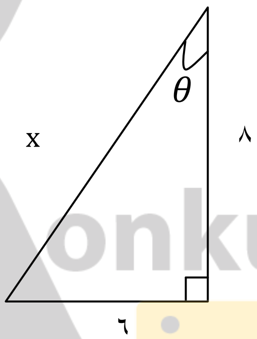
$$cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$$

$$cos\alpha = \frac{x}{۳۹} \to \frac{۵}{۱۳} = \frac{x}{۳۹} \to x = ۱۵$$

$$sin\alpha = \frac{y}{۳۹} \to (۳۹)^۲ = ۱۵^۲ + y^۲ \to$$

مثال: در هر مثلث نسبتهای مثلثاتی زاویه ی θ را بدست آورید.

الف) $x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \to x^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \to x = ۱۰$ رابطه ی فیثاغورس



$$sin\theta = \frac{۶}{۱۰}$$

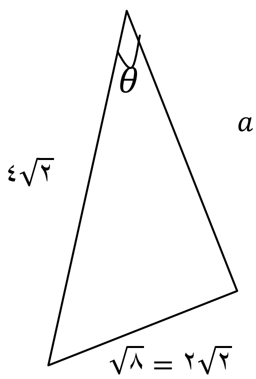
$$cos\theta = \frac{۸}{۱۰}$$

$$tan\theta = \frac{۶}{۸}$$

$$cot\theta = \frac{۸}{۶}$$

ب) $(۴\sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۸})^۲ + a^۲$ رابطه ی فیثاغورس

$$۳۲ = ۸ + a^۲ \to a^۲ = ۲۴ \to a = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$



$$sin\theta = \frac{\sqrt{۸}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

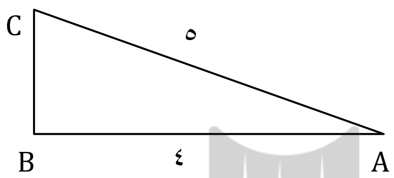
$$cos\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۱\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tan\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$cot\theta = \frac{۲\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}$$

مثال: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$, $AB = ۴$ و $AC = ۵$ می باشند. مقدار $tanA$ و $cotA$ را بدست آورید.

پاسخ: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع BC را بدست می آوریم:



$$BC^۲ = AC^۲ - AB^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Longrightarrow BC = ۳$$

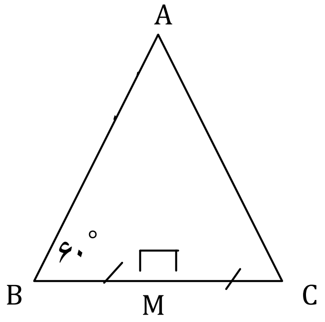
$$\Longrightarrow tanA = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{۴}, cotA = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:



$$AM^۲ = AB^۲ - BM^۲ = (۲)^۲ - (۱)^۲ = ۴ - ۱ = ۳$$

$$\Longrightarrow AM = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

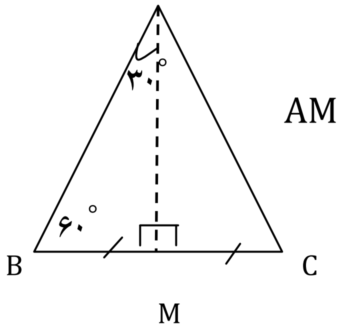
مثال: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ ، نسبت های مثلثاتی ۳۰° و ۶۰° را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM = \frac{BC}{۲} = \sqrt{۳}$

A

بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:



$$AM^۲ = AB^۲ - BM^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ - (\sqrt{۳})^۲ = ۱۲ - ۳ = ۹$$

$$\Longrightarrow AM = ۳$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۳۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} , \cot ۳۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ °۶۰ در مثلث قائم الزاویهٔ ABM :

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

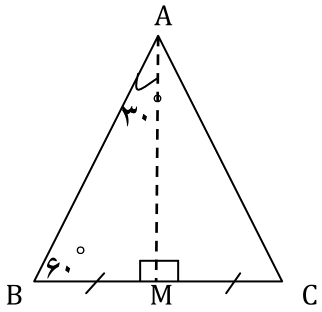
$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال : با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، نسبت های مثلثاتی °۳۰ و °۶۰ را به دست آورید

حل) در مثلث متساوی الاضلاع ABC، نیمساز زاویهٔ A رارسم می کنیم .(AM).

AM بر BC عمود است و آن را نصف می کند. بنابراین داریم: $BM=\frac{BC}{۲}=\frac{a}{۲}$



بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABM، داریم:

$$\mathrm{AM}^{۲}=\mathrm{AB}^{۲}-\mathrm{BM}^{۲}=a^{۲}-(\frac{a}{۲})^{۲}=a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}=\frac{۳a^{۲}}{۴}$$

$$\Longrightarrow AM=\frac{\sqrt{۳}a}{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۳۰^{\circ}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{a}{۲}}{a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^{\circ}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^{\circ}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳},\cot ۳۰^{\circ}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}}=\sqrt{۳}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم الزاویهٔ ABM:

$$\sin ۶۰^{\circ}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

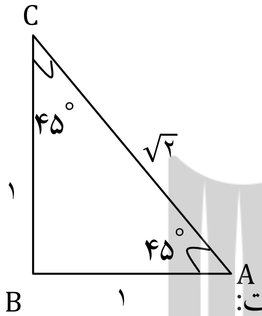
$$\cos ۶۰^{\circ}=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{a}{۲}}{a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^{\circ}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}}=\sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول ۱ ، نسبت های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید.

حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲}$$

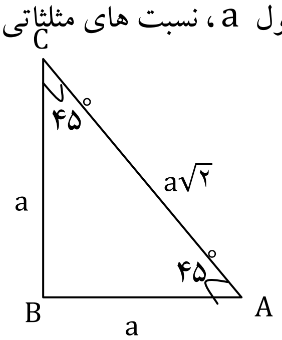
نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۱}{۱} = ۱ \, , \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

مثال: با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین با ضلع های قائمه به طول a ، نسبت های مثلثاتی ۴۵° را به دست آورید.حل) بنا بر قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = a^۲ + a^۲ = ۲a^۲$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲a^۲} = a\sqrt{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A (یا c) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC به صورت زیر است:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱ \,, \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = ۱$$

مقدار نسبت های مثلثاتی زوایای 30°, 45° و 60°

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
Sin A	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
Cos A	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
Tan A	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
Cot A	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال : مقدار عددی عبارت $۳\sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ$ را بدست آورید.

پاسخ: با توجه به این که $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$, $\cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ می باشند، داریم:

$$۳\sin ۳۰^\circ + ۴\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ = ۳ \times \frac{۱}{۲} + ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳} \times \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۳}{۲} + ۴ - ۳ = \frac{۳}{۲} + ۱ = \frac{۵}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $\sqrt{۲}cos۴۵^{\circ}+۲\sqrt{۳}\sin۶۰^{\circ}+\sqrt{۳}\tan۳۰^{\circ}$ را بدست آورید.

$$\sqrt{۲}cos۴۵^{\circ}+۲\sqrt{۳}\sin۶۰^{\circ}+\sqrt{۳}\tan۳۰^{\circ}$$

$$=\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۱+۳+۱=۵$$

مثال : مقدار عددی عبارت $٤\sqrt{۲}\sin۴۵^{\circ}-۵\cot۴۵^{\circ}-۳\cos۶۰^{\circ}$ را بدست آورید.

$$۴\sqrt{۲}\sin۴۵^{\circ}-۵\cot۴۵^{\circ}-۳\cos۶۰^{\circ}$$

$$=۴\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۵(۱)-۳\times\frac{۱}{۲}=۴-۵-\frac{۳}{۲}=-۱-\frac{۳}{۲}=\frac{-۵}{۲}$$

مثال : مقدار عددی عبارت $۸sin۳۰^{\circ}+\sqrt{۳}(\cot۶۰^{\circ}-\tan۶۰^{\circ})$ را بدست آورید.

$$۸sin۳۰^{\circ}+\sqrt{۳}(\cot۶۰^{\circ}+\tan۶۰^{\circ})$$

$$=۸\times\frac{۱}{۲}+\sqrt{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}\right)=۴+\sqrt{۳}\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}=۴+۴=۸$$

مثال : مقدار عددی عبارت $-sin۶۰^{\circ}+۲\cos۳۰^{\circ}-۴\cot۳۰^{\circ}+۲\tan۴۵^{\circ}$ را بدست آورید.

$$-sin۶۰^{\circ}+۲\cos۳۰^{\circ}-۴\cot۳۰^{\circ}+۲\tan۴۵^{\circ}$$

$$=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۴\times\sqrt{۳}+۲(۱)$$

$$=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۳\sqrt{۳}+۲=\frac{-\sqrt{۳}-۶\sqrt{۳}}{۲}+۲=\frac{-۷\sqrt{۳}}{۲}+۲$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.(زوایای داده شده بر حسب درجه هستند.)

$$۱)\sin ۴۵\ \cos ۴۵ + \sin ۶۰\ \cos ۳۰ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

$$۲)۲\sin ۳۰ + \cos^{۲} ۴۵ - \sin^{۲} ۶۰ = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۴} = \frac{۴ + ۲ - ۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

$$\boxed{a\sin^{m}\theta = a(\sin\theta)^{m}}$$

$$۳)\ \tan ۳۰\ \cot ۳۰ + \sin^{۲} ۳۰ + \cos^{۲} ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}.\sqrt{۳} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲} = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$۴)\ \sqrt{۳}\tan ۶۰ - \frac{\tan ۳۰}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} - \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۱}} = ۳ - \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$۵)۱ - ۲\sin^{۴} ۳۰ + \frac{\cos^{۲} ۳۰}{۲} = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} + \frac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}}{۲} = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right) + \frac{\frac{۳}{۴}}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۸}$$

$$= \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱) $۲\tan ۳۰ \cot ۳۰ - ۳\cot ۴۵\ \tan ۴۵$

۲) $(\cos ۳۰ - \sin ۴۵)(\sin ۶۰ + \cos ۴۵)$

۳) $\dfrac{۱ + \tan ۶۰ + \tan^{۲} ۶۰}{۱ + \cot ۶۰ + \tan^{۲} ۶۰}$

مثال: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$$۱)۲\sin ۳۰ \cos ۳۰ = \sin ۶۰ \Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$۲)۱+tan^{۲}۶۰=\frac{۱}{cos^{۲}۶۰}\rightarrow ۱+(\sqrt{۳})^{۲}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۳})^{۲}}\rightarrow ۱+۳=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}\rightarrow ۴=۴$$

تمرین: درستی تساوی های زیر را نشان دهید.

$۱)sin۴۵cos۴۵=sin۳۰$

$۲)sin^{۲}۶۰+cos^{۲}۶۰=۱$

$۳)\frac{sin^{۲}۴۵}{۲}=sin^{۲}۳۰$

مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $\hat{B}=۹۰^{\circ}$, $AB=۴$ و $BC=۶$ می باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

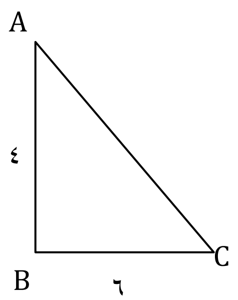
الف) $(cosA+sinC)(cosA-sinC)$

ب) $\tan A(tanC+cotC)$

حل) مطابق شکل و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر AC را به دست می آوریم:

$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}=۱۶+۳۶=۵۲$$

$$\Longrightarrow AC=\sqrt{۵۲}$$



الف)

$$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{٤}{\sqrt{۵۲}}\ ,sinC=\frac{AB}{AC}=\frac{۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$(\cos A+\sin C)(\cos A-\sin C)=(\cos A)^{۲}-(\sin C)^{۲}$$

$$=\frac{۱۶}{۵۲}-\frac{۱۶}{۵۲}=۰$$

ب)

$$\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{٦}{٤}=\frac{٣}{٢}\quad ,\qquad \tan C=\frac{AB}{BC}=\frac{٤}{٦}=\frac{٢}{٣}$$

$$\cot C=\frac{BC}{AB}=\frac{٦}{٤}=\frac{٣}{٢}$$

$$tanA\,(tanC+cotC)=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}\times\left(\frac{۴+۹}{۶}\right)=\frac{۱۳}{۴}$$

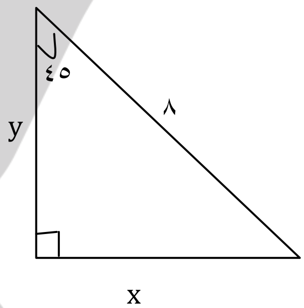
مثال: در هرشکل مقادیر مجهول را بدست آورید.

الف) $sin۴۵^\circ=\frac{x}{۸}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{x}{۸}\rightarrow x=۴\sqrt{۲}$

$cos۴۵^\circ=\frac{y}{۸}$

$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{y}{۸}\rightarrow y=۴\sqrt{۲}$

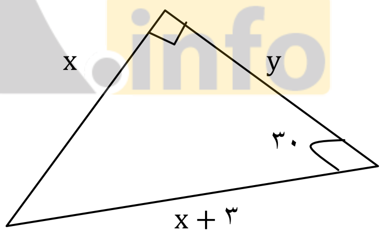


ب) $sin۳۰^\circ=\frac{x}{x+۳}$

$\frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۳}\rightarrow ۲x=x+۳\rightarrow x=۳$

فیثاغورس $y^۲=۳^۲+۶^۲$

$y^۲=۹+۳۶\rightarrow y^۲=۴۵\rightarrow y=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$

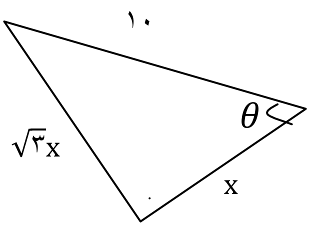


پ) $tan\theta=\frac{\sqrt{۳}x}{x}=\sqrt{۳}$

$\Longrightarrow \theta=۶۰^\circ$

$cos\theta=\frac{x}{۱۰}$

$cos۶۰^\circ=\frac{x}{۱۰}$



$\frac{۱}{۲} = \frac{x}{۱۰} \to x = ۵$

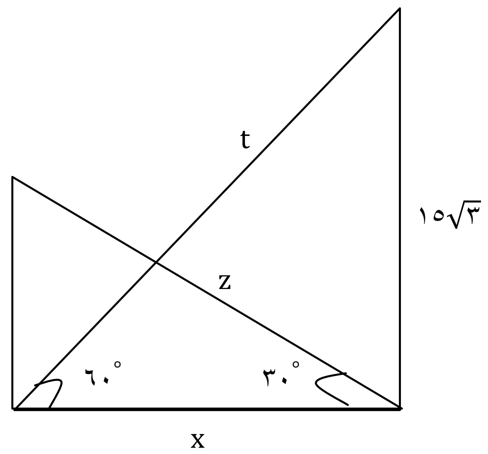
ت) در مثلث قائم الزاویه بزرگ $sin۶۰^\circ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{t} \Longrightarrow t = ۳۰$

رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه بزرگ $\Longrightarrow t^۲ = (۱۵\sqrt{۳})^۲ + x^۲$

$\Longrightarrow ۳۰^۲ = ۶\sqrt{۵} + x^۲$

$۹۰۰ - ۶\sqrt{۵} = x^۲ \Longrightarrow ۲۲۵ = x^۲ \Longrightarrow ۱۵ = x$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۳۰^\circ = \frac{x}{z}$

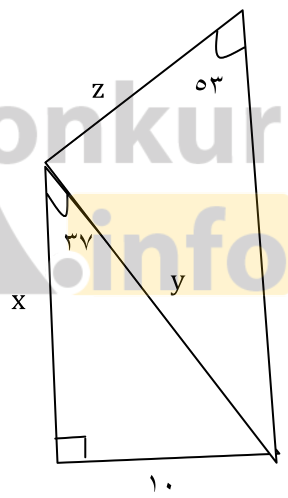


$\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۳}} = \theta ۱۰\sqrt{۳}$

$sin۳۰^\circ = \frac{y}{z} \to \frac{۱}{۲} = \frac{y}{۱۰\sqrt{۳}} \to y = ۵\sqrt{۳}$

ث) $sin۵۳^\circ = cos۳۷^\circ$ $\qquad sin۳۷ = ۰/۶ \ \ , cos۳۷ = ۰/۸$

$sin۵۳^\circ = \frac{y}{z} \Longrightarrow ۰/۸ = \frac{۱۰}{\frac{y}{z}} \to z = \frac{۱۰}{\frac{y}{۸}} \times ۱۰$



$z = \frac{۱۰۰}{y}$

$sin۳۷^\circ = \frac{۱۰}{y}$

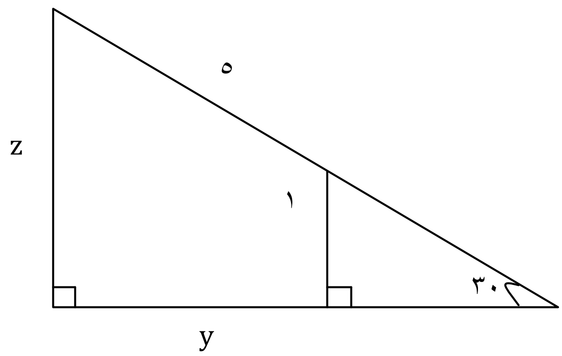
$۰/۶ = \frac{۱۰}{y} \to y = \frac{۱۰۰}{۶}$

$cos۳۷^\circ = \frac{x}{y} \quad , ۰/۸ = \frac{۸}{\frac{۱۰۰}{۶}} \to x = \frac{۸\times\frac{۱۰۰}{۶}}{۱۰} = \frac{۸۰}{۶}$

ج) در مثلث کوچک $tan۳۰^\circ = \frac{۱}{x} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{x} \to x = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۳۰^\circ = \frac{z}{۵} \to \frac{۱}{۲} = \frac{z}{۵} \to z = \frac{۵}{۲}$

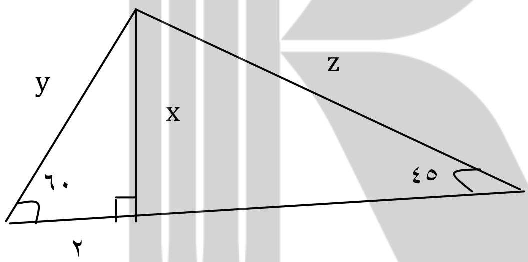
در مثلث بزرگ $cos۳۰^\circ = \frac{x+y}{۵} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}+y}{۵} \to ۵\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} + ۲y \to \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = y$



ج) در مثلث قائم الزاویه کوچک $cos۶۰^{\circ} = \frac{۲}{y} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{y} \to y = ۴$

در مثلث قائم الزاویه کوچک $sin۶۰^{\circ} = \frac{x}{y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{x}{۴} \to x = ۲\sqrt{۳}$

در مثلث بزرگ $sin۴۵^{\circ} = \frac{x}{z} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{z} \to z = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$



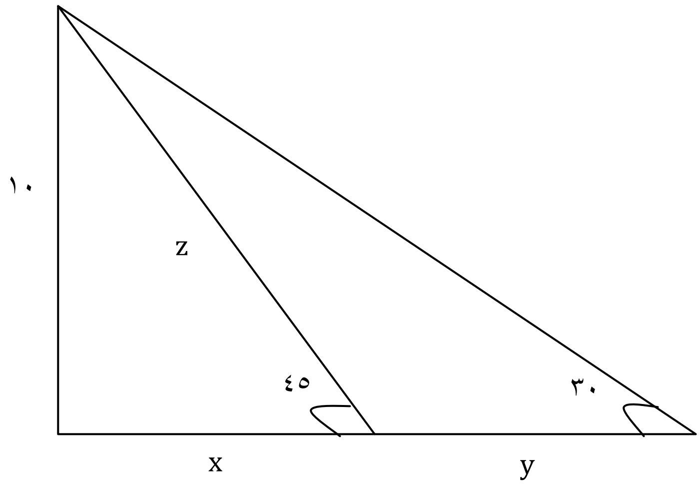
ح) در مثلث قائم الزاویه کوچک $\Longrightarrow sin۴۵^{\circ} = \frac{۱۰}{z}$

$\Longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۰}{z} \to z = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}} = ۱۰\sqrt{۲}$

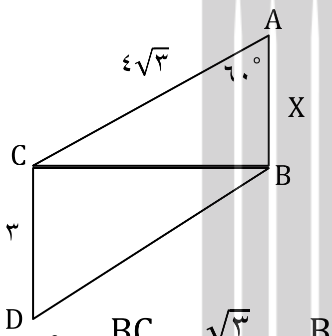
در مثلث قائم الزاویه کوچک $\cos ۴۵ = \frac{x}{z} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{۱۰\sqrt{۲}} \to x = ۱۰$

در مثلث قائم الزاویه بزرگ $\tan ۳۰^{\circ} = \frac{۱۰}{x + y} \to \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰}{۱۰ + y}$

$\Longrightarrow ۱۰\sqrt{۳} + \sqrt{۳}y = ۳۰ \to y = \frac{۳۰ - ۱۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$



مثال : در شکل رو به رو ، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ D را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ، داریم:

$$\sin ۶۰^{\circ} = \frac{BC}{AC} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۴\sqrt{۳}} \Longrightarrow BC = ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶$$

در مثلث قائم الزاویهٔ BCDو با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول وتر BD را به دست می آوریم:

$$BD^{۲} = BC^{۲} + CD^{۲} = ۶^{۲} + ۳^{۲} = ۳۶ + ۹ = ۴۵$$

$$\Longrightarrow BD = \sqrt{۴۵} = \sqrt{۹ \times ۵} = ۳\sqrt{۵}$$

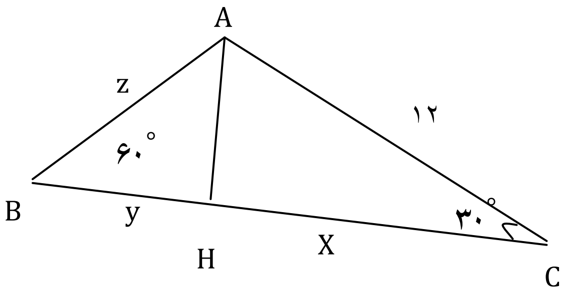
بنابراین:

$$\sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{۶}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos D = \frac{CD}{BD} = \frac{۳}{۳\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\tan D = \frac{BC}{CD} = \frac{٦}{٣} = ٢ \,, \qquad \cot D = \frac{CD}{BC} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

مثال : در مثلث روبه رو، مقادیر y, x و Z را به دست آورید.



حل) در مثلث قائم الزاویهٔ ACH داریم:

$$\cos ٣٠^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{x}{١٢} \Rightarrow x = ١٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٦\sqrt{٣}$$

حال برای به دست آوردن AHبه دو روش می توان عمل کرد:

روش اول: بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^٢ = AC^٢ - CH^٢ = ١٢^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢$$

$$= ١٤٤ - ١٠٨ = ٣٦ \Rightarrow AH = ٦$$

$$\sin ٣٠^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{١}{٢} = \frac{AH}{١٢} \Rightarrow AH = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

$$\sin ٦٠^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٦}{z} \Rightarrow \sqrt{٣}z = ١٢$$

$$\Rightarrow z = \frac{١٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{١٢\sqrt{٣}}{٣} = ۴\sqrt{٣}$$

از دو روش برای به دست آوردن y استفاده می کنیم:

روش اول:

$$BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = \left(۴\sqrt{۳}\right)^۲ - ۶^۲ = ۴۸ - ۳۶ = ۱۲$$

$$\Rightarrow y = BH = \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{y}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow y = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

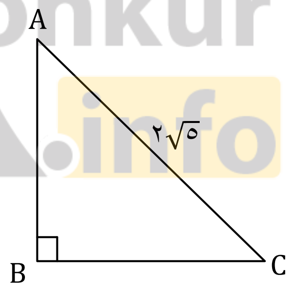
مثال : در مثلث قائم الزاویهٔ ABC, $B = ۹۰^\circ$ ؛ طول وتر $۲\sqrt{۵}$ و $\tan C = ۲$ می باشد.

الف) طول اضلاع قائم مثلث را به دست آورید .

ب) نسبت های مثلثاتی زاویهٔ A را به دست آورید .

حل الف) داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} = ۲ \Rightarrow AB = ۲BC \quad (*)$$



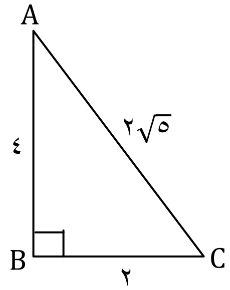
بنابر قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \xrightarrow{(*)} \left(۲\sqrt{۵}\right)^۲ = (۲BC)^۲ + BC^۲$$

$$\Rightarrow ۲۰ = ۴BC^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۵BC^۲ = ۲۰ \Rightarrow BC^۲ = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

$$\Rightarrow BC = ۲ \xrightarrow{(*)} AB = ۴$$

ب)



$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{۲}{۲\sqrt{٥}} = \frac{۱}{\sqrt{٥}}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{٤}{۲\sqrt{٥}} = \frac{۲}{\sqrt{٥}}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۲}{٤} = \frac{۱}{۲} \; , \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{٤}{۲} = ۲$$

مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مقدار X را به دست آورید

الف) $$x\cos ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}\tan ۳۰^\circ - ۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ + \tan ۴۵^\circ}$$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ - ۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ + \tan ۴۵^\circ} = \dfrac{\sqrt{۳} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} - ۴ \times \frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} = \dfrac{۱ - ۲}{۲ + ۱} = \dfrac{-۱}{۳} \\ x\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x = \frac{-۱}{۳} \Rightarrow x = -\frac{۲}{۳}$$

$$\sin^۲ ۴۵^\circ = (\sin ۴۵^\circ)^۲ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب) $\dfrac{۲tan۳۰^\circ + cot۳۰^\circ}{\frac{۱}{۳}(cot۴۵^\circ - \sin^۲۴۵^\circ)} = ۲۰sinx \quad , \quad ۰^\circ < x < ۹۰^\circ$

حل) ابتدا حاصل سمت راست تساوی را به دست آورده و آن را با عبارت سمت چپ مساوی قرار می دهیم .

سپس با حل معادله، مقدار x را به دست می آوریم:

$$\sin^۲۴۵^\circ = (\sin ۴۵^\circ)^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}{۲\times۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲\tan۳۰^\circ + \cot۳۰^\circ}{\frac{۱}{۳}(\cot ۴۵^\circ - \sin^۲۴۵^\circ)} = \frac{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}(۱-\frac{۱}{۲})} = \frac{\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{۱}{۶}} = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$\Longrightarrow ۲۰\text{sinx} = ۱۰\sqrt{۳} \Longrightarrow \text{sinx} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰^\circ < x < ۹۰^\circ \Longrightarrow \text{x} = ۶۰^\circ$$

مثال : اگر $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید:

الف) $-۲sin\alpha + \sqrt{۳}\cot\alpha$

حل) چون $۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است، بنابراین: $\alpha = ۳۰^\circ$

$$-۲sin\alpha + \sqrt{۳}\cot\alpha = -۲\sin۳۰^\circ + \sqrt{۳}\cot۳۰^\circ$$

$$= -۲\times\frac{۱}{۲} + \sqrt{۳}\times\sqrt{۳} = -۱ + ۳ = ۲$$

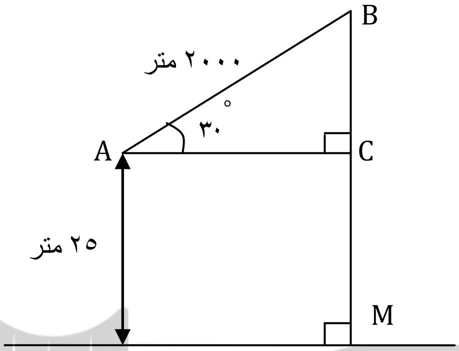
ب) $۴cos۲\alpha + \cot(\alpha + ۱۵^\circ)$

حل)

$$٤cos^۲\alpha + \tan(\alpha + ۱۵^\circ) = ٤\cos^۲(۳۰^\circ) + \cot(۳۰^\circ + ۱۵^\circ)$$

$$= ۴\cos ۶۰^\circ + cot\, ۴۵^\circ = ۴ \times \frac{۱}{۲} + ۱ = ۲ + ۱ = ۳$$

مثال : یک موشک در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می سازیم . با توجه به شکل زیر، به سادگی می توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

$$\mathrm{BC} + \mathrm{MC} = \mathrm{BC} + ۲۵$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم . می دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{\mathrm{BC}}{۲۰۰۰} \Rightarrow \mathrm{BC} = ۱۰۰۰$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = ۱۰۰۰ + ۲۵ = ۱۰۲۵$$

مثال : یک موشک از ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۶۰° پرتاب می شود. موشک پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر با همین زاویه، به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل) شکل هندسی رو به رو را برای حل این مسأله در نظر می گیریم.

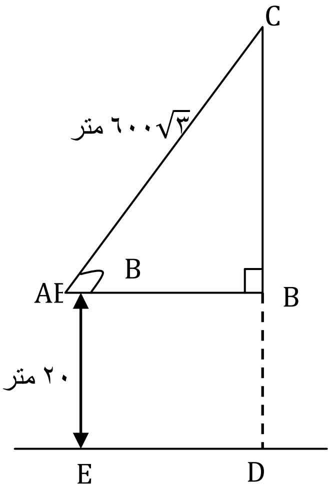
پس از طی $۶۰۰\sqrt{۳}$ متر، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر $DB + BC$ است. داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC} : \widehat{B} = ۹۰ \Rightarrow \sin ۶۰^{\circ} = \frac{BC}{AC}$$

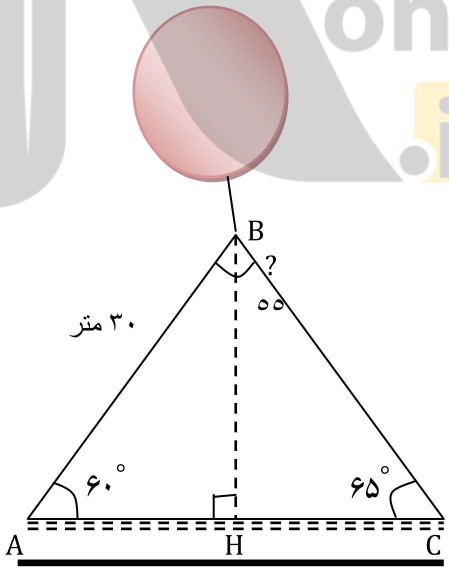
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶۰۰\sqrt{۳}} \Rightarrow BC = ۶۰۰\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹۰۰$$

$$DB = AE = ۲۰$$

$$\Rightarrow DC = DB + BC = ۲۰ + ۹۰۰ = ۹۲۰$$



مثال : در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را پیدا کنید؟ $\sin ۶۵^{\circ} = ۰/۹$



حل) ابتدا ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم می کنیم و آن را BHمی نامیم.

سپس طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به دست می آوریم.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} \to \mathrm{BH} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۳۰ = ۱۵\sqrt{۳}$$

اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\overset{\Delta}{\mathrm{BHC}} \to \sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \to BC = \frac{BH}{\sin ۶۵} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰ / ۹} \cong ۲۸ / ۸۶$$

مثال: در یک جاده کوهستانی مشابه شکل زیر، طول جاده سرپائینی ۱۲ m و زاویه جاده ی سربالایی و سرپائینی با سطح زمین به ترتیب $۴۵^\circ, ۳۰^\circ$ است:

الف) ارتفاع قله را بدست آورید.

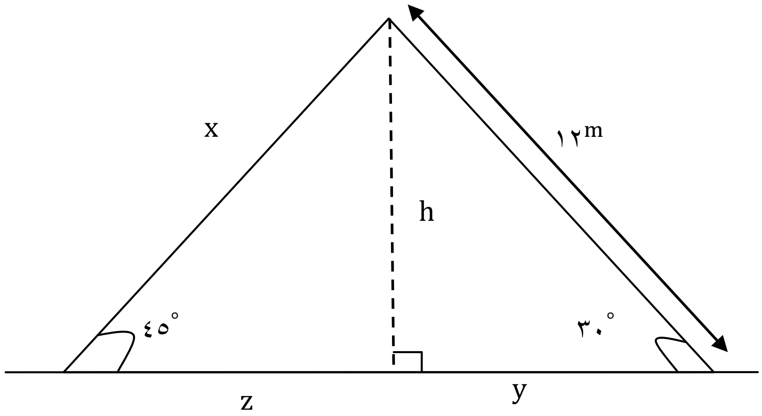
ب) طول جاده سربالایی را بدست آورید.

پ) طول تونل احداث شده بین دو نقطه ی A و B چقدر است؟

الف) $\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{۱۲} \to \frac{۱}{۲} = \frac{h}{۱۲} \to h = ۶$

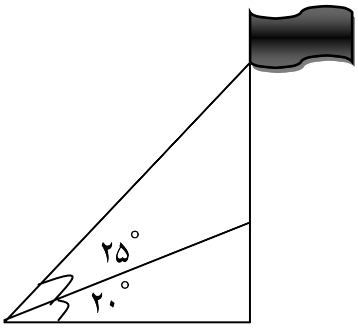
ب) $\sin ۴۵^\circ = \frac{h}{x} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۶}{x} \to x = \frac{۱۲}{\sqrt{x}} = ۶\sqrt{۲}$ گویا

ج) $\begin{cases} \cos ۳۰^\circ = \frac{y}{۱۲} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{y}{۱۲} \to y = ۶\sqrt{۳} \\ \cos ۴۵^\circ = \frac{z}{x} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{z}{۶\sqrt{۲}} \to z = ۶ \end{cases}$ طول تونل $= y + z = ۶\sqrt{۳} + ۶$

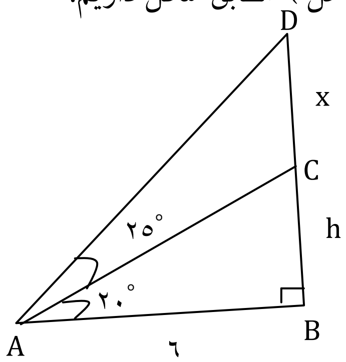


مثال : مطابق شکل، شخصی در فاصلهٔ ۶ متری ستونی ایستاده که بر بالای آن میلهٔ پرچمی نصب شده است.

طول میله را با فرض $tan۲۰^\circ = ۰ / ۳۶$ به دست آورید.



حل) مطابق شکل داریم:



$$\overset{\text{A}}{ABC}: \tan ۲۰^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow ۰/۳۶ = \frac{h}{۶}$$

$$\Longrightarrow h = ۶ \times ۰/۳۶ = ۲/۱۶ \quad (*)$$

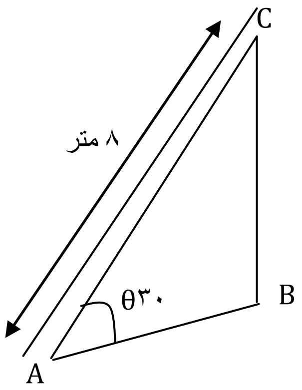
در مثلث قائم الزاویهٔ ABD، $A = ۴۵^\circ$. داریم:

$$\tan A = \frac{BD}{AB} \Longrightarrow \tan ٤٥^\circ = \frac{h + x}{٦} \Longrightarrow ١ = \frac{h + x}{٦}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲/۱۶ + x = ۶ \Longrightarrow x = ۳/۸۴$$

بنابراین طول میلهٔ پرچم ۳/۸۴متر است.

مثال: مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



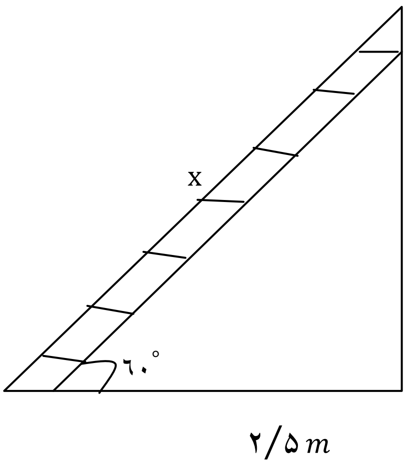
$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Longrightarrow ۲BC = ۸ \Longrightarrow BC = ۴$$

اکنون به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ٤^۲ = ٤۸ \Longrightarrow AB = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

مثال: اگر نردبانی را به دیواری تکیه داده باشیم بطوریکه فاصله ی پای نردبان تا دیوار $۲/۵\,m$ باشد و زاویه ای که نردبان با سطح افق می سازد، ۶۰° باشد، طول نردبان را محاسبه کنید. انتهای نردبان در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار گرفته است؟

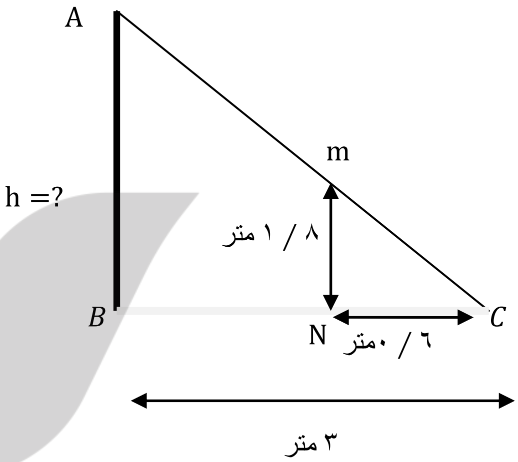
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{۲/۵}{x} \to \frac{۱}{۲} = \frac{۲/۵}{x} \to x = ۵$$



مثال : کیان می خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد کیان۸ / ۱ متر و سایهٔ او در همان لحظه ٦ / ۰متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

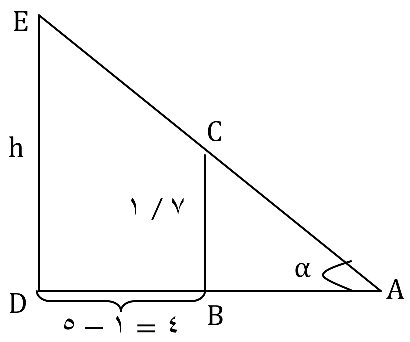
$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{N}=۹۰^{\circ}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases}\rightarrow \overset{\Delta}{\widehat{ABC}}\sim\overset{\Delta}{\widehat{MNC}}\Longrightarrow$$

$$\frac{CN}{CB}=\frac{CM}{AC}=\frac{MN}{AB}\rightarrow\frac{۰/٦}{۳}=\frac{۱/۸}{h}\rightarrow h=\frac{٥/٤}{۰/٦}=۹m$$



مثال : کمیل می خواهد ارتفاع یک میله را که طول سایهٔ آن ۵ متر است، حساب کند. قد علی۷ / ۱ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۱ متر است. ارتفاع میله چه قدر است؟

حل) فرض کنیم ED میلهٔ مورد نظر باشد. حال کمیل باید در نقطه ای قرار بگیرد که انتهای سایه های میله و خودش بر هم منطبق شوند. فرض کنیم α زاویهٔ پرتو تابش خورشید با سطح افق باشد . در این صورت:



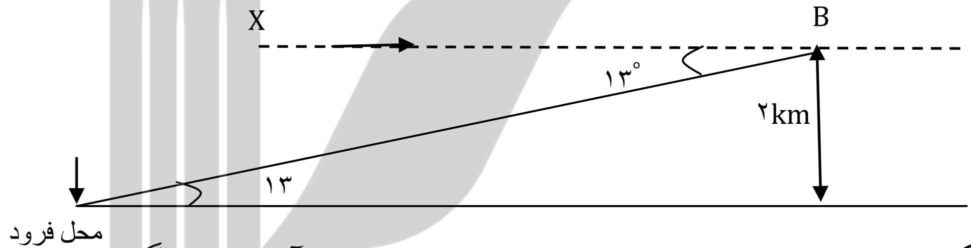
$$ABC: tan\alpha = \frac{BC}{AB} \quad (۱), \qquad ADE: \tan\alpha = \frac{DE}{AD} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Longrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \Longrightarrow \frac{۱/۷}{۱} = \frac{h}{۵} \Longrightarrow h = ۵ \times ۱/۷ = ۸/۵$$

مثال : یک هواپیما در ارتفاع $۲km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله ای از نقطهٔ Aفرود می آید.

$$\tan ۱۳^\circ \cong ۰/۲۳ \qquad BX \parallel AC \xrightarrow{CB\ \text{مورب}} \widehat{B_۱} = \hat{C} = ۱۳^\circ$$

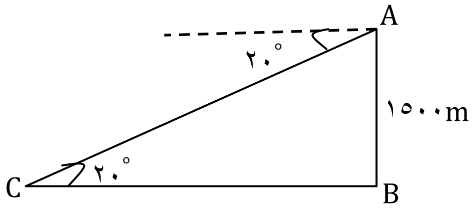
$$\tan ۱۳^\circ = \frac{AB}{AC} \to AC = \frac{۲}{۰/۲۳} \to AC \cong ۸/۶۹\ km$$



مثال : یک هواپیما در ارتفاع ۱۵۰۰ متری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق ۲۰° باشد، هواپیما تقریباََ چه مسافتی را طی می کند تا روی زمین بنشیند؟($\sin ۲۰^\circ = ۰ / ۳۴$)

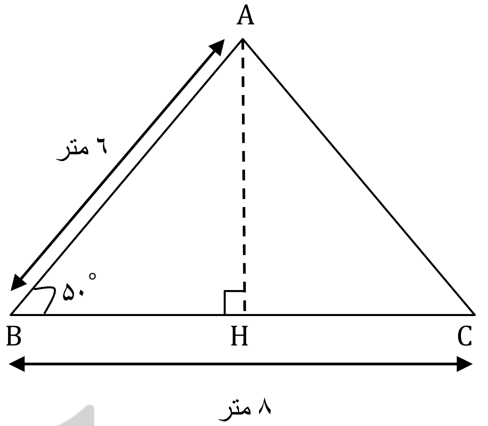
حل) مطابق شکل، اگر هواپیما در نقطهٔ A باشد، آن گاه بنابر قضیهٔ موازی و مورب، اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۲۰° است و داریم (C محل فرود هواپیما است):

$$\sin C = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \sin ۲۰^\circ = \frac{۱۵۰۰}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{۱۵۰۰}{۰/۳۴} \cong ۴۴۱۲$$



محاسبه مساحت مثلث با داشتن دوضلع و زاویه بین آن ها

می خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می دانیم:



$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ = ۰ / ۷۶$، داریم:

$$\sin\ ۵۰^\circ = \frac{\text{AH}}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Longrightarrow \text{AH} = ۰/۷۶ \times ۶ = ۴ / ۵۶$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۴ / ۵۶ \times ۸ \cong ۱۸ / ۲۴$$

قضیه : در مثلث دلخواه ABC، داریم:

$$\text{ABC مساحت مثلث} = S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times sinA$$

به زبان ساده ، مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آنها

اثبات) در مثلث ABD ، ارتفاع BH را رسم می کنیم. داریم:

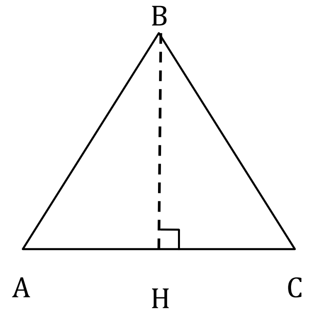
$$s = \frac{١}{٢} \times BH \times AC \quad (١)$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویهٔ ABH، داریم:

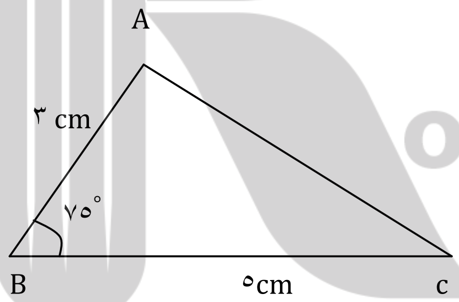
$$\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \times \sin A \quad (٢)$$

$$(١)(٢) \Rightarrow S = \frac{١}{٢} \times (AB \times \sin A) \times AC$$

$$= \frac{١}{٢} \times AB \times AC \times \sin A$$



مثال : فرض کنید $\sin ٧٥^\circ = ٠ / ٩٦$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

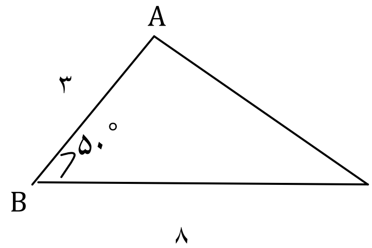


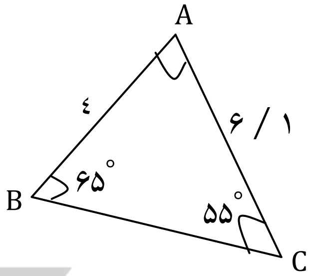
$$S = \frac{١}{٢} AB \times BC \sin ٧٥^\circ$$

$$S = \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٥ \times {}^{B}/٩٦ = ٧ / ٢$$

مثال : در هر یک از شکل های زیر، مساحت مثلث ها را به دست آورید: $(\sin ۵۰^\circ = ۰/۷۶)$

الف)





ب)

حل) مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف)

$$S = \frac{۱}{۲} \times BA \times BC \times \sin ۵۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۸ \times ۰/۷۶ = ۹/۱۲$$

ب) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است. پس:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \widehat{A} + ۶۵^\circ + ۵۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Longrightarrow \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\Longrightarrow S = \frac{۱}{۲} \times AB \times AC \times \sin ۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶/۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۴/۴}{۴}\sqrt{۳}$$

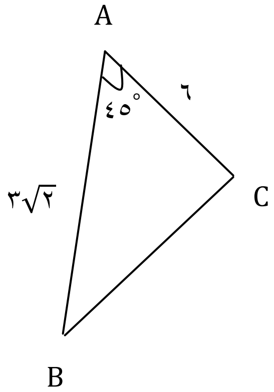
مثال : در هر یک از قسمت های زیر، مساحت شکل را به دست آورید.

الف) طول دو ضلع مثلث $۳\sqrt{۲}$ و ۶ و زاویهٔ بین آن ها ۴۵° است .

ب) طول اضلاع متوازی اضلاع ۷ و ۱۶ و اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۶۰° است .

پ) طول ضلع لوزی ٨ و یک زاویهٔ آن ٣٠° است .

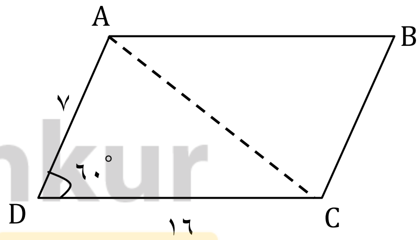
حل الف)



$$S = \frac{١}{٢} \times AB \times AC \times \sin ٤٥^\circ$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٣\sqrt{٢} \times ٦ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٩$$

ب) اگر قطر متوازی الاضلاع را رسم کنیم، متوازی الاضلاع به دو مثلث هم نهشت تقسیم می شود. بنابراین با توجه به شکل داریم:



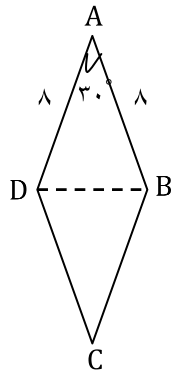
$$S_{\underset{ADC}{\Delta}} = \frac{١}{٢} \times DA \times DC \times \sin ٦٠^\circ$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٧ \times ١٦ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢٨\sqrt{٣}$$

مساحت متوازی الاضلاع ABCD ، دو برابر مساحت مثلث ADC است. پس:

$$\text{ABCD مساحت متوازی الاضلاع} = ٢ \times ٣٠\sqrt{٣٠} = ٦٠\sqrt{٣}$$

پ)اگر قطر لوزی را رسم کنیم، لوزی به دو مثلث یکسان تقسیم می شود:



$$S_{\underset{ABD}{\Delta}} = \frac{١}{٢} \times AB \times AD \times \sin ٣٠^\circ$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times \frac{١}{٢} = ١٦$$

$$\Longrightarrow S_{ABCD} = ٢S_{\underset{ABD}{\Delta}} = ٢ \times ١٦ = ٣٢$$

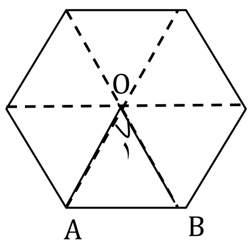
مثال : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

حل) در مثلث متساوی الاضلاع، طول هر سه ضلع برابر a و هر زاویه آن ۶۰° می باشد، بنابراین:

$$S = \frac{١}{٢} \times AB \times AC \times \sin ٦٠^\circ = \frac{١}{٢} \times a \times a \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} a^{٢}$$

مثال : مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع a را به دست آورید.

حل اگر مرکز شش ضلعی منتظم را به رأس های آن وصل کنیم، ۶ مثلث مساوی ایجاد می شود مثلث OAB متساوی الاضلاع است . زیرا:



$$O_{١} = \frac{٣٦٠^\circ}{٦} = ٦٠^\circ \;, OA = OB$$

$\Longrightarrow$. مثلث OAB متساوی الاضلاع است

$$\Longrightarrow OA = OB = AB = a$$

$$\Longrightarrow S_{\underset{OAB}{\Delta}} = \frac{١}{٢} \times OA \times OB \times \sin ۶۰^\circ$$

$$= \frac{١}{٢} \times a \times a \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} a^{٢}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = ۶ S_{\underset{OAB}{\Delta}} = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^{۲}$$

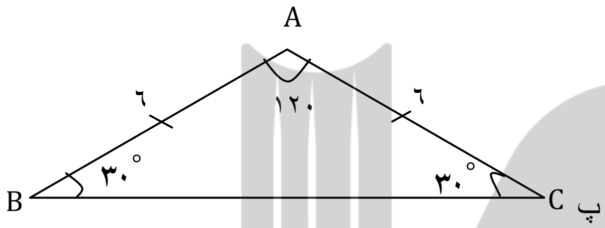
مثال : مساحت شش ضلعی منظم به ضلع ۳ را به دست آورید.

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} ۳^{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

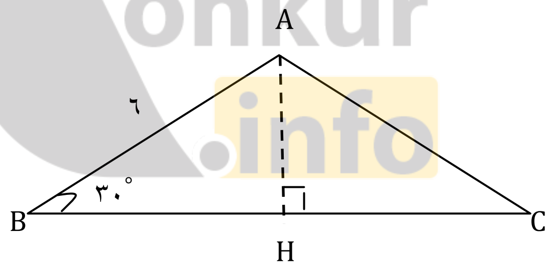
مثال : در مثلث ABC ، $BC = ۶, AC = ۴$ و $\hat{C} = ۲۵^\circ$ می باشد، با فرض $\sin۲۵^\circ = ۰/۴۲$، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

$$S = \frac{۱}{۲} \times CA \times CB \times \sin C = \frac{۱}{۲} \times ٤ \times ٦ \times \sin ٢٥^\circ = ١٢ \times ٠/۴٢ = ۵ / ٠۴$$

مثال : مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



حل)مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین:



$$\hat{C} = \hat{B} = ٣٠^\circ, AC = AB = ٦$$

ارتفاع AH را رسم می کنیم. داریم:

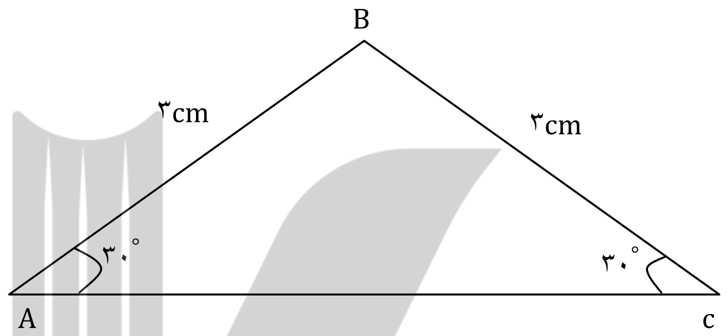
$$\overset{\Delta}{ABH} = \sin ٣٠^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin ٣٠^\circ = ٦ \times \frac{١}{٢} = ٣$$

$$\Rightarrow BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ = ۳۶ - ۹ = ۲۷$$

$$\Longrightarrow BH = \sqrt{۲۷} = \sqrt{۹ \times ۳} = ۳\sqrt{۳} \Longrightarrow \mathrm{BC} = ۲\mathrm{BH} = ۶\sqrt{۳}$$

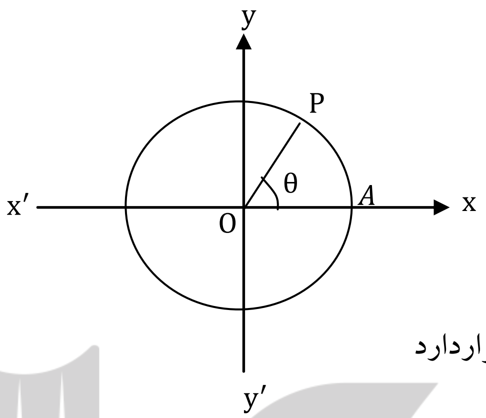
$$\Longrightarrow S = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۳ \times ۶\sqrt{۳}}{۲} = ۹\sqrt{۳}$$

تمرین : مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



درس دوم: دایره مثلثاتی

دایره ی زیرکه دارای سه ویژگی است را دایره مثلثاتی گوییم.



۱- مرکزدایره در مبدأ مختصات قراردارد

۲- شعاع دایره۱ است

۳- نقطهٔ Aمبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

قرارداد:گر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و اگرحرکت در جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه منفی است.