

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>

ریاضی (۱) پایه دهم

فصل ۱

درس ۴

دنباله های حسابی و
هندسی

دنباله های حسابی و هندسی

درس ۴

در این درس با دو نوع مهم از دنباله ها آشنا می شویم و ویژگی های هر کدام را بررسی می کنیم. در این درس سعی شده است از مثالهای متنوع جهت تفهیم بهتر درس استفاده شود.

اهداف

- تشخیص و شناسایی دنباله های حسابی و هندسی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله حسابی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله هندسی
- تشخیص ارتباط بین الگوهای خطی و دنباله های حسابی

دنباله حسابی (عددی)

دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می آید، یک **دنباله حسابی** نامیده می شود .
به آن عدد ثابت، **قدر نسبت** دنباله می گویند و آن را با d نشان می دهند .

مثال :

$$5, 10, 15, 20, \dots$$

$+d$ $+d$ $+d$

→ $d = 5$

در نتیجه باید گفت

قدر نسبت دنباله حسابی از تفاضل دو جمله متوالی بدست می آید. یعنی $d = t_m - t_{m-1}$

در واقع نام دیگر الگوهای عددی خطی، دنباله های حسابی است.

سال های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیراست که جملات یک دنباله حسابی اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ...

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = 2000$ $d = 4$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ $t_9 = 2000 + 8(4) = 2032$

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n	...
۲۰۰۰	$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$...	$2000 + (n-1)(4)$...

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$$t_{24} = 2000 + 23(4) = 2092$$

جمله عمومی دنباله حسابی:

فرض کنید جمله اول یک دنباله حسابی t_1 و قدر نسبت آن d باشد، در اینصورت داریم:

$$\begin{array}{l} t_1 \\ +d \curvearrowright t_2 = t_1 + d \\ +d \curvearrowright t_3 = t_1 + 2d \\ +d \curvearrowright t_4 = t_1 + 3d \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_n = t_1 + (n - 1)d \end{array}$$



جمله عمومی دنباله حسابی

سوال ۱: اگر دو جمله اول یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ و ۱۰ باشند، جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

۳ , ۱۰ , ...

$$d = 10 - 3 = 7$$

$$t_n = t_1 + d(n - 1)$$

$$t_n = 3 + 7(n - 1) = 3 + 7n - 7 = 7n - 4$$

نتیجه:

اگر d قدرنسبت و t جمله اول از یک دنباله حسابی باشند، جمله عمومی دنباله از رابطه زیر

بدست می آید:

$$t_n = dn + (t_1 - d)$$

$$t_n = 7n + (3 - 7) = 7n - 4$$

در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

$+5$
 الف) $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots$ $\xrightarrow{t_n = dn + (t_1 - d)}$ $a_n = 5n + (5 - 5) \Rightarrow a_n = 5n$

$+2$
 ب) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$ $\xrightarrow{t_n = dn + (t_1 - d)}$ $b_n = 2n + (1 - 2) \Rightarrow b_n = 2n - 1$

$+4$
 پ) $5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots$ $\xrightarrow{t_n = dn + (t_1 - d)}$ $c_n = 4n + (5 - 4) \Rightarrow c_n = 4n + 1$

$+(-6)$
 ت) $13, 7, 1, -5, -11, -17, -23, \dots$ $\xrightarrow{t_n = dn + (t_1 - d)}$ $d_n = -6n + (13 - (-6)) \Rightarrow d_n = -6n + 19$

۲ شرکت های A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت های تلفن همراه با شرایط مقابل هستند.

سیم کارت های شرکت B
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت های شرکت A
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان

فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد. الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.

$$a_n = 30n + 2000$$

$$b_n = 20n + 3000$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n : هزینه سیم کارت A	۲۰۳۰	۳۲۰۰	۳۸۰۰	۵۳۰۰	۶۸۰۰
b_n : هزینه سیم کارت B	۳۰۲۰	۳۸۰۰	۴۲۰۰	۵۲۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟ بله زیرا تفاضل هر دو جمله متوالی برابر با عدد ثابتی است.

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید. قدرنسبت a_n برابر ۳۰ و قدرنسبت b_n برابر ۲۰ است.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می کنند. به هر یک از آنها کدام سیم

$$a_{60} < b_{60}$$

$$a_{150} > b_{150}$$

کارت را پیشنهاد می کنید؟ چرا؟ سارا شرکت A و فاطمه شرکت B

کار در کلاس ۱ صفحه ۲۳ کتاب درسی

الف) یک دنباله حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بنویسید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.

۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ...

ب) یک دنباله حسابی با قدرنسبت منفی مثال بنویسید که جمله چهارم آن ۱۰ باشد.

۱۹, ۱۶, ۱۳, ۱۰, ۷, ...

پ) دنباله ای حسابی مثال بنویسید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

۱۰, ۶, ۲, -۲, -۶, ...

واسطه حسابی

اگر a و b و c به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، در اینصورت b را واسطه حسابی بین a و c می نامیم و داریم:

$$\dots, a, b, c, \dots$$

$+d$ $+d$
↘ ↘
↘ ↘

$$d = c - b = b - a \Rightarrow 2b = c + a \Rightarrow b = \frac{c + a}{2}$$

یافتن m واسطه حسابی بین دو عدد

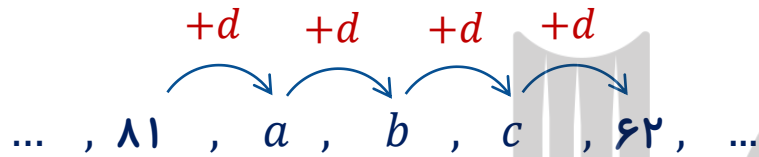
اگر بخواهیم در یک دنباله حسابی؛ بین دو عدد x و y تعداد m عدد را قرار دهیم، در اینصورت داریم:

$$\dots, x, \underbrace{\dots}_{m \text{ واسطه حسابی}}, y, \dots$$

$+d$ $+d$
↘ ↘
↘ ↘

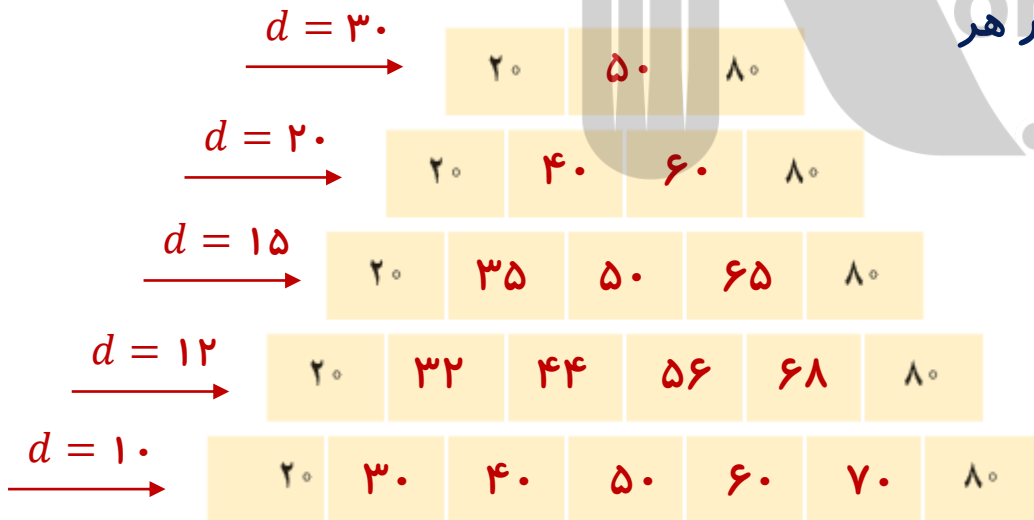
$$x + (m + 1)d = y \Rightarrow d = \frac{y - x}{m + 1}$$

الف) بین اعداد ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.



$$18 + 4d = 62 \Rightarrow 4d = 62 - 18 = 44 \Rightarrow d = 11 \rightarrow \begin{cases} a = 29 \\ b = 40 \\ c = 51 \end{cases}$$

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.



از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

$$d = 7 \quad \xrightarrow{t_n = 7n - 4} \quad t_{21} = 7(21) - 4 = 143$$

ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

دنباله حسابی نیست

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

$$d = \sqrt{3} \quad \xrightarrow{t_n = \sqrt{3}n} \quad t_{21} = 21\sqrt{3}$$

ت) $10, 7, 4, 1, \dots$

$$d = -3 \quad \xrightarrow{\begin{matrix} t_n \\ = -3n + 13 \end{matrix}} \quad t_{21} = -3(21) + 3 = -50$$

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

$$d = \frac{1}{5} \quad \xrightarrow{t_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5}} \quad t_{21} = \frac{21}{5} + \frac{1}{5} = \frac{22}{5}$$

ج) $2, 2, 2, 2, \dots$

$$d = 0 \quad \xrightarrow{t_n = 2} \quad t_{21} = 2$$

در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

$$t_7 = t_1 + 6d$$

$$t_3 = t_1 + 2d$$

$$\begin{cases} t_1 + 6d = 56 \\ t_1 + 2d = 20 \end{cases}$$

$$4d = 36 \Rightarrow d = 9$$

$$t_1 + 2d = 20 \xrightarrow{d=9} t_1 + 2(9) = 20 \Rightarrow t_1 = 2$$

۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, ۴۷, ۵۶, ۶۵, ...

سوال ۲: جمله پنجم یک دنباله حسابی ۱۰ و جمله دوازدهم آن ۴۵ می باشد قدرنسبت و جمله اول آن را بیابید و جمله عمومی آن را بدست آورید.

$$t_{12} = t_1 + 11d$$

$$t_5 = t_1 + 4d$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 + 11d = 45 \\ t_1 + 4d = 10 \end{cases}$$

$$7d = 35 \Rightarrow d = 5$$

$$t + 4d = 10 \xrightarrow{d=5} t_1 + 4(5) = 10 \Rightarrow t_1 = -10$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \xrightarrow[t_1 = -10]{d=5} t_n = -10 + 5(n-1) \Rightarrow t_n = 5n - 15$$

نتیجه:

اگر t_h و t_k دو جمله دلخواه از یک دنباله حسابی باشند، قدرنسبت دنباله از رابطه زیر بدست

$$d = \frac{t_h - t_k}{h - k}$$

می آید:

$$d = \frac{45 - 10}{12 - 5} = \frac{35}{7} = 5 \quad \text{در مثال بالا داریم:}$$

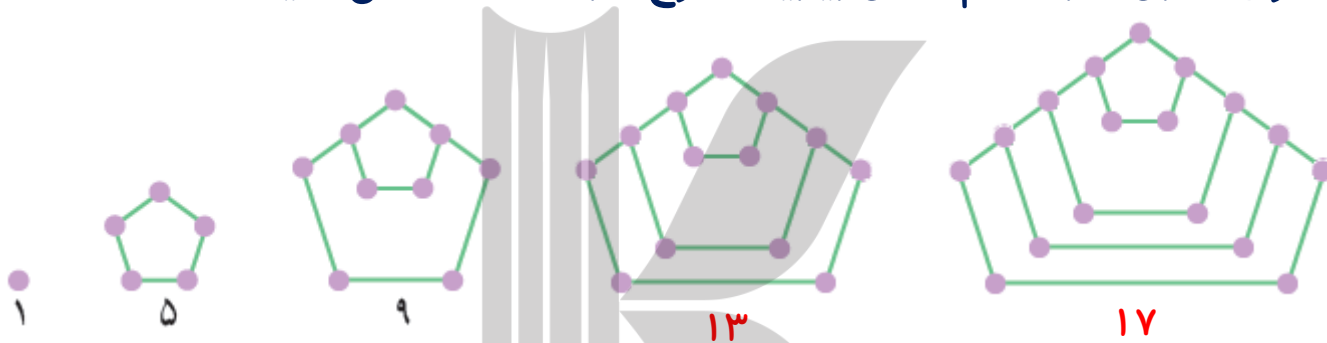
در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l}
 +d \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 = t_1 + d \\ t_3 = t_1 + 2d \\ t_4 = t_1 + 3d \end{array} \right. \Rightarrow 3t_1 + 3d = 3 \\
 +d \left\{ \begin{array}{l} t_5 = t_1 + 4d \\ t_6 = t_1 + 5d \end{array} \right. \Rightarrow 3t_1 + 12d = 39 \\
 \hline
 \left. \begin{array}{l} 3t_1 + 12d = 39 \\ - (3t_1 + 3d = 3) \\ \hline 9d = 36 \Rightarrow d = 4
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

$$3t_1 + 3d = 3 \Rightarrow t_1 + d = 1 \xrightarrow{d=4} t_1 = -3$$

-۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ...

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



دنباله حسابی

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

$$t_n = t_1 + (n - 1)d \xrightarrow[t_1 = 1]{d = 4} t_n = 1 + 4(n - 1) \Rightarrow t_n = 4n - 3$$

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

$$t_n = 4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$$

$$\begin{array}{c} +d \quad +d \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ 5, x, 11 \end{array}$$

الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

$$5 + 2d = 11 \Rightarrow 2d = 6 \Rightarrow d = 3 \rightarrow x = 8$$

$$\begin{array}{c} +d \quad +d \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ 20, x, 30 \end{array}$$

ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟

$$20 + 2d = 30 \Rightarrow 2d = 10 \Rightarrow d = 5 \rightarrow x = 25$$

$$\begin{array}{c} +d \quad +d \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ \dots, a, b, c, \dots \end{array}$$

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه ای می گیرید؟

$$d = c - b = b - a \Rightarrow 2b = c + a \Rightarrow b = \frac{c + a}{2}$$

مسئله زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.

« ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و

یک سوم مجموع سه سهم بزرگ تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک تر باشد. »

$$x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$$

$$(x - 2d) + (x - d) + (x) + (x + d) + (x + 2d) = 100 \Rightarrow 5x = 100 \Rightarrow x = 20$$

$$(x - 2d) + (x - d) = \frac{(x) + (x + d) + (x + 2d)}{3} \Rightarrow 2x - 3d = \frac{3x + 3d}{3}$$

$$\Rightarrow 6x - 9d = 3x + 3d \Rightarrow 3x = 12d \xrightarrow{x=20} 60 = 12d \Rightarrow d = 5$$

$$\dots, 10, 15, 20, 25, 30, \dots$$

سوال ۳: جمله دهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۶؛ برابر ۲۰ است، جمله بیستم آن را بیابید.

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

$$t_{10} = t_1 + 9d = 20 \xrightarrow{d=6} t_1 + 54 = 20 \Rightarrow t_1 = -34$$

$$t_n = -34 + (n - 1)6 = -34 + 6n - 6 = 6n - 40$$

$$t_{20} = 6(20) - 40 = 80$$

روش دوم :

$$d = \frac{t_n - t_k}{h - k} \Rightarrow 6 = \frac{t_{20} - t_{10}}{20 - 10} \Rightarrow 6 = \frac{t_{20} - 20}{10}$$

$$\Rightarrow t_{20} - 20 = 60 \Rightarrow t_{20} = 80$$

روش سوم :

$$t_{20} = t_1 + 19d = \underbrace{(t_1 + 9d)}_{20} + 10d \xrightarrow{d=6} t_{20} = 20 + 10(6) = 80$$

سوال ۴: جملات زیر از چپ به راست به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند.

مقدار x را بیابید.

$$۶x + ۱ \quad \text{و} \quad ۲x + ۳ \quad \text{و} \quad ۴x - ۷$$

$$\dots , a , b , c , \dots \Rightarrow b = \frac{c + a}{2}$$

$$۲(۲x + ۳) = (۶x + ۱) + (۴x - ۷)$$

$$۴x + ۶ = ۱۰x - ۶$$

$$۱۲ = ۶x \Rightarrow x = ۲$$

سوال ۵: مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند برابر ۲۱ و حاصل ضرب آنها برابر ۲۳۱ است آن سه عدد را بیابید.

... , $x - d$, x , $x + d$, ...

$$(x - d) + (x) + (x + d) = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

$$(x - d)(x)(x + d) = 231 \xrightarrow{x=7} (7 - d)(7)(7 + d) = 231$$

۳۳

$$49 - d^2 = 33 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$$

آن سه عدد ۳ و ۷ و ۱۱ هستند.

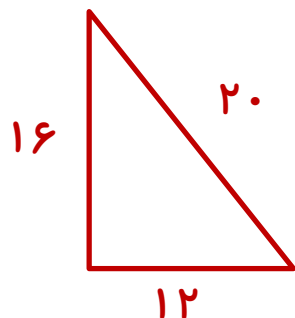
سوال ۶: در یک مثلث قائم الزاویه طول اضلاع یک دنباله حسابی هستند و محیط برابر ۴۸ واحد است. اندازه ی اضلاع و مساحت مثلث را بیابید.

$$\dots, x-d, x, x+d, \dots$$

$$(x-d) + (x) + (x+d) = 48 \Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = 16$$

مثلث قائم الزاویه ای که طول اضلاع آن تشکیل یک دنباله حسابی می دهد، دارای اضلاعی به صورت $3d$ و $4d$ و $5d$ است.

$$3d + 4d + 5d = 48 \Rightarrow 12d = 48 \Rightarrow d = 4$$



$$S = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷: مجموع جملات هشتم و دوازدهم یک دنباله حسابی ۱۱۰ است. اگر جمله پنجم آن برابر ۲۰ باشد، جمله پانزدهم آن را بیابید.

$$t_1 + 4d = 20 \Rightarrow t_1 = 20 - 4d$$

$$(t_1 + 7d) + (t_1 + 11d) = 110 \Rightarrow 2t_1 + 18d = 110$$

$$t_1 = 20 - 4d \downarrow$$

$$\Rightarrow 40 - 8d + 18d = 110 \Rightarrow 70 = 10d \Rightarrow d = 7$$

$$t_1 = 20 - 4d \xrightarrow{d=7} t_1 = -4(7) + 20 \Rightarrow t_1 = -8$$

$$t_{15} = t + 14d \xrightarrow[t_1 = -8]{d=7} t_{15} = -8 + 14(7) = 90$$

نکته

$$h + k = p + q \Rightarrow t_h + t_k = t_p + t_q$$

$$8 + 12 = 5 + 15 \Rightarrow 110 = 20 + t_{15} \Rightarrow t_{15} = 90$$

توجه

❑ اگر همه جملات یک دنباله حسابی را در عددی ثابت مانند k ضرب کنیم، قدر نسبت نیز k برابر می شود.

❑ اگر همه جملات یک دنباله حسابی را با عددی ثابت (مثبت یا منفی) جمع کنیم، قدر نسبت تغییر نمی کند.

❑ جملات مشترک دو دنباله حسابی، تشکیل یک دنباله حسابی می دهند که قدر نسبت آن برابر با ک.م.م قدرنسبت های دو دنباله اولیه است.

❑ اگر همه جملات یک دنباله حسابی را به توان عددی ثابت مانند k برسانیم، دنباله حاصل ممکن است حسابی نباشد.

❑ اگر دنباله ای حسابی با قدر نسبت d_1 را با دنباله حسابی دیگری با قدر نسبت d_2 جمع یا تفریق کنیم، دنباله حاصل نیز حسابی است و دارای قدر نسبت $d_1 \pm d_2$ است.

بیشتر بدانیم

دستور یافتن مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

$$S_n = \frac{n}{2} [2t + (n - 1)d]$$

سوال ۸: مجموع ۲۶ جمله اول دنباله زیر را بیابید.

۲, ۵, ۸, ۱۱, ...

$$S_{26} = \frac{26}{2} [2(2) + 25(3)] = 13 \times 79 = 1027$$

بیشتر بدانیم

$$x, \dots, y$$

+d +d

↘ ↘

دستور یافتن مجموع جملات یک دنباله حسابی متناهی

$$S = \left(\frac{y - x}{d} + 1 \right) \left(\frac{y + x}{2} \right)$$

سوال ۹: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 + 31 + 35 =$$

$$= \left(\frac{35 - 3}{4} + 1 \right) \left(\frac{35 + 3}{2} \right) = \left(\frac{32}{4} + 1 \right) \left(\frac{38}{2} \right) = 9 \times 19 = 171$$

8 19

دنباله هندسی

دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست می آید. به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند و آن را با r یا q نشان می دهند.

مثال :

$$5, 10, 20, 40, \dots \xrightarrow{\begin{matrix} \times r & \times r & \times r \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \end{matrix}} \boxed{r = 2}$$

در نتیجه باید گفت :



قدر نسبت هر دنباله هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله قبل از خودش بدست می آید.

$$r = t_n \div t_{n-1}$$

روز: n	t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n مبتلا می‌شوند
۱	۲
۲	$۲ \times ۲ = ۲^۲$
۳	$۴ \times ۲ = ۲^۳$
۴	$۸ \times ۲ = ۲^۴$
۵	... $۲^۵$
۶	... $۲^۶$
⋮	⋮
n	$t_n = ۲^n$

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

$$t_{10} = ۲^{10} = ۱۰۲۴$$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

$$t_{11} = ۲^{11} = ۲۰۴۸$$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفلانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

$$t_n = ۲^n = ۱۶۳۸۴ = ۲^{14} \Rightarrow n = 14$$

جمله عمومی دنباله هندسی

فرض کنید جمله اول یک دنباله هندسی t_1 و قدر نسبت آن r باشد، در اینصورت داریم:

$(r \text{ و } t_1 \neq 0)$

$$\begin{array}{l} \times r \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 = t_1 r \\ t_3 = t_1 r^2 \\ t_4 = t_1 r^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_n = t_1 r^{n-1} \end{array} \right. \end{array}$$



جمله عمومی دنباله هندسی

سوال ۱۰: اگر دو جمله اول از یک دنباله هندسی به ترتیب ۴ و ۸ باشند، دو جمله بعدی این دنباله را بنویسید. سپس جمله عمومی آن را تعیین کنید.

$$۴, ۸, \dots$$

$$r = ۸ \div ۴ = ۲$$

$$t_۳ = ۱۶, \quad t_۴ = ۳۲$$

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow t_n = ۴ \times ۲^{n-1} = ۲^۲ \times ۲^{n-1} = ۲^{n+1}$$

نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ... ، ۱ ، ۳ ، ۹ ؛ روش های مقابل را به کار برده اند.

نگار

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$
$$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$$
$$= \frac{1}{81}$$

نرگس

$$r = \frac{9}{3} = 3$$
$$t_7 = 9(3)^{7-1}$$
$$= 6561$$

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ توضیح دهید.

نگار - قدر نسبت هر دنباله هندسی از تقسیم هر جمله بر جمله قبل از خودش بدست می آید.

در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید.
سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$ $\Rightarrow a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) $5, 10, 20, 40, 80, 160, \dots$ $\Rightarrow b_n = 5 \times 2^{n-1}$

پ) $6, -60, 600, -6000, 60000, -600000, \dots$ $\Rightarrow c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $\Rightarrow d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

واسطه هندسی

اگر a و b و c به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، در اینصورت b را واسطه هندسی بین a و c می نامیم و داریم:

$$\dots, a, b, c, \dots$$

$\times r$ $\times r$

↘ ↘

$$r = c \div b = b \div a \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = ac$$

یافتن m واسطه هندسی بین دو عدد

اگر بخواهیم در یک دنباله هندسی؛ بین دو عدد x و y تعداد m عدد را قرار دهیم، در اینصورت داریم:

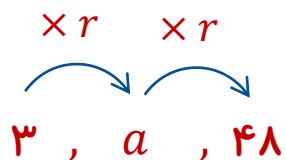
$$\dots, x, \underbrace{\dots}_{m \text{ واسطه هندسی}}, y, \dots$$

$\times r$ $\times r$

↘ ↘

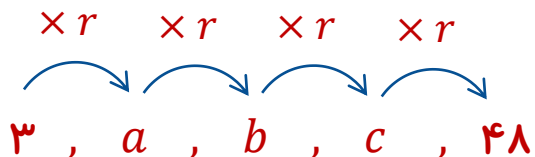
$$xr^{m+1} = y \Rightarrow r^{m+1} = \frac{y}{x}$$

الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ یک واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟

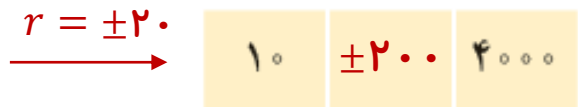


$$3r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 4 \rightarrow a = \pm 12$$

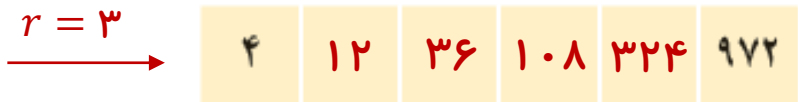
ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ **خیر**



$$3r^4 = 48 \Rightarrow r^4 = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow r = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} a = \pm 6 \\ b = 12 \\ c = \pm 24 \end{cases}$$



پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.



سوال ۱۱: بین اعداد ۷ و ۴۴۸ دو واسطه هندسی بیابید.

$$7, a, b, 448$$

$\times r$ $\times r$ $\times r$

$$7r^3 = 448 \Rightarrow r^3 = \frac{448}{7} = 64 \Rightarrow r = 4$$

$$a = 28$$

$$b = 112$$

از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \dots$

$$r = 4$$

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

دنباله هندسی نیست

پ) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$

$$r = \frac{-1}{2}$$

ت) $5, 5, 5, 5, \dots$

$$r = 1$$

نتیجه :

دنباله های **ثابت** مانند دنباله $5, 5, 5, 5, 5, \dots$ هم حسابی و هم هندسی هستند.

تمرین ۲ صفحه ۲۴ کتاب درسی

چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

بیشمار . به جمله اول دنباله بستگی دارد و جمله اول دنباله هر عدد حقیقی به غیر از صفر می تواند باشد.

$$1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \dots$$

$$5, 4, \frac{16}{5}, \dots$$

تمرین ۳ صفحه ۲۴ کتاب درسی

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

نادرست - مثال نقض: $1, 5, -2, 8, \dots$

ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

نادرست - دنباله های ثابت هم حسابی هستند و هم هندسی.

پ) هر دنباله ای دارای الگوی باشد.

نادرست. دنباله هایی که جمله عمومی ندارند؛ دارای الگو نیستند. مانند دنباله اعداد اول.

علی دوچرخه ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟
 ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

$$r = \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۴}{۵}$$

۵۰۰۰۰۰ ، ۴۰۰۰۰۰ ، ۳۲۰۰۰۰ ، ...

الف) $t_3 = ۳۲۰۰۰۰$

ب) $t_n = ۵۰۰۰۰۰ \times \left(\frac{۴}{۵}\right)^{n-1}$

حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

۲, ۴, ۸, ...

$$2 \times 4 \times 8 \times \dots \times t_{20} = 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} =$$

$$2^{(1+2+3+\dots+20)} = 2^{\left(\frac{20 \times 21}{2}\right)} = 2^{210}$$

جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} t_6 &= t_1 r^5 = 96 \\ t_3 &= t_1 r^2 = 12 \end{aligned} \Rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_1 r^2 = 12 \Rightarrow 4(t_1) = 12 \Rightarrow t_1 = \frac{12}{4} = 3$$

۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ...

بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

الف) پیش بینی می شود در هر یک از سال های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم وطن های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله ای تشکیل می دهند؟ دنباله هندسی با قدر نسبت ۰/۹۵

سوال ۱۲: قیمت اولیه یک گوشی تلفن همراه ۴۰۰ دلار می باشد. اگر هر سال قیمت گوشی ۱۰ درصد کاهش یابد قیمت گوشی در سال هشتم چقدر خواهد بود؟

$$r = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

۴۰۰ ، ۳۶۰ ، ۳۲۴ ، ...

$$t_n = t_1 r^{n-1} = 400 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

$$t_8 = 400 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 = 191/3$$

بیشتر بدانیم

دستور یافتن مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

سوال ۱۳ : مجموع ۲۰ جمله اول دنباله زیر را بیابید.

۱, ۲, ۴, ۸, ...

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1} \xrightarrow[n=20]{\substack{t_1=1 \\ r=2}} S_{20} = \frac{1(2^{20} - 1)}{2 - 1} = \frac{1048576 - 1}{1} = 1048575$$

بیشتر بدانیم

اگر r بین یک و منفی یک باشد ، مقدار r^n تقریباً برابر **صفر** خواهد شد . در نتیجه :

$$S_n \cong \frac{-t_1}{r - 1}$$

سوال ۱۴ : حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots =$$

$$r = \frac{1}{3} \Rightarrow S_n \cong \frac{-t_1}{r - 1} \cong \frac{-1}{\frac{1}{3} - 1} \cong \frac{-1}{-\frac{2}{3}} \cong \frac{3}{2}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵: اگر جمله چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۲۰ و ۵۴۰ باشند، قدر نسبت و جمله اول این دنباله را بدست آورید.

$$\begin{aligned} t_7 &= t_1 r^6 = 540 \\ t_4 &= t_1 r^3 = 20 \end{aligned} \Rightarrow \frac{t_7}{t_4} = \frac{t_1 r^6}{t_1 r^3} = \frac{540}{20} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$t_1 r^3 = 20 \Rightarrow 27(t_1) = 20 \Rightarrow t_1 = \frac{20}{27}$$

نتیجه:

اگر t_h و t_k دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله از

$$r^{k-h} = \frac{t_k}{t_h}$$

رابطه زیر بدست می آید:

در مثال بالا داریم: $r^{7-4} = \frac{t_7}{t_4} \Rightarrow r^3 = \frac{540}{20} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۶: جملات $x + 1$ و $2x + 2$ و $5x - 11$ به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$$\dots, a, b, c, \dots \Rightarrow b^2 = ac$$

$\times r$ $\times r$

$$(2x + 2)^2 = (x - 1)(5x + 11)$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 5x^2 + 6x - 11 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 & \xrightarrow{r = \frac{2x+2}{x+1}} r = \frac{12}{6} = 2 \\ x = -3 & \xrightarrow{r = \frac{2x+2}{x+1}} r = \frac{-4}{-2} = 2 \end{cases}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۷: اگر مجموع جملات اول و سوم یک دنباله هندسی برابر ۳۰ و مجموع جملات دوم و چهارم ۶۰ باشد، قدرنسبت و جمله ی اول دنباله را بیابید.

$$\begin{array}{l} \times r \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 = tr \end{array} \right. \\ \times r \quad \left\{ \begin{array}{l} t_2 = tr \\ t_3 = tr^2 \end{array} \right. \\ \times r \quad \left\{ \begin{array}{l} t_3 = tr^2 \\ t_4 = tr^3 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\frac{t_1 + t_3}{t_2 + t_4} = \frac{t_1 + t_1 r^2}{t_1 r + t_1 r^3} = \frac{30}{60} \Rightarrow \frac{t_1(1+r^2)}{t_1 r(1+r^2)} = \frac{30}{60}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 2$$

$$t(1+r^2) = 30 \xrightarrow{r=2} t(1+4) = 30 \Rightarrow 5t = 30 \Rightarrow t = 6$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۸: در یک دنباله هندسی اگر داشته باشیم $\frac{a_4 + a_5}{a_3} = 6$ ، قدر نسبت را بیابید.

$$\frac{t_1 r^3 + t_1 r^4}{t_1 r^2} = 6 \Rightarrow \frac{r^3 + r^4}{r^2} = 6 \Rightarrow r^3 + r^4 = 6r^2 \Rightarrow r^4 + r^3 - 6r^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2(r^2 + r - 6) = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r + 3)(r - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = -3 \end{cases}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۹: اگر در یک دنباله هندسی حاصلضرب جملات سوم و یازدهم برابر ۴ باشد، حاصل عبارت

$$t_3 \times t_5 \times t_6 \times t_7 \times t_8 \times t_9 \times t_{11} = \text{زیر را بیابید.}$$

نکته:

اگر بین اندیس های چهار جمله از یک دنباله هندسی رابطه $h + k = p + q$ برقرار باشد،

$$h + k = p + q \Rightarrow t_h \times t_k = t_p \times t_q$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$t_3 \times t_{11} = t_4 \times t_1. \Rightarrow 4 = t_4 \times t_1.$$

$$t_3 \times t_{11} = t_5 \times t_9 \Rightarrow 4 = t_5 \times t_9$$

$$t_3 \times t_{11} = t_6 \times t_8 \Rightarrow 4 = t_6 \times t_8$$

$$t_3 \times t_{11} = t_7 \times t_7 \Rightarrow 4 = t_7 \times t_7 \Rightarrow 2 = t_7$$

$$t_4 \times t_5 \times t_6 \times t_7 \times t_8 \times t_9 \times t_{11} = 4 \times 4 \times 4 \times 2 = 128$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲۰: اگر مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی برابر ۳۵ و حاصل ضرب آنها برابر ۱۰۰۰

باشد، این سه جمله را بیابید.

$$\dots, \frac{x}{r}, x, xr, \dots$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)(x)(xr) = 1000 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x = 10$$

$$\frac{x}{r} + x + xr = 35 \Rightarrow \frac{x + rx + xr^2}{r} = 35 \xrightarrow{x=10} \frac{10 + 10r + 10r^2}{r} = 35$$

$$\Rightarrow 10 + 10r + 10r^2 = 35r \Rightarrow 10r^2 - 25r + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

آن سه عدد ۵ و ۱۰ و ۲۰ هستند.

تمرین تکمیلی

سوال ۲۱: اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم از یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی را به دست آورید.

اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، داریم:

$$\dots, a, b, c, \dots \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow (t_6)^2 = t_4 \times t_{12}$$

$$(t + 5d)^2 = (t + 3d)(t + 11d) \Rightarrow t^2 + 10td + 25d^2 = t^2 + 11td + 3td + 33d^2$$

$$t^2 + 11td + 3td + 33d^2 - t^2 - 10td - 25d^2 = 0 \Rightarrow 4td + 8d^2 = 0 \Rightarrow 4d(t + 2d) = 0$$

$$\begin{aligned} 4d \neq 0 \\ \Rightarrow t + 2d = 0 \Rightarrow t = -2d \end{aligned}$$

$$r = \frac{b}{a} = \frac{t_6}{t_4} = \frac{t + 5d}{t + 3d} = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = \frac{3d}{d} = 3$$

اگر t_h و t_k و t_l سه جمله از یک دنباله حسابی باشند و به ترتیب جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت r را نیز تشکیل دهند، آنگاه r را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$r = \frac{h - k}{k - l}$$

$$r = \frac{12 - 6}{6 - 4} = \frac{6}{2} = 3$$

بیشتر بدانیم

- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **مثبت** و قدر نسبت بزرگتر از یک باشد، دنباله **افزایشی** خواهد بود.
مثال $\longrightarrow 1, 2, 4, 8, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **مثبت** و قدر نسبت بین صفر و یک باشد، دنباله **کاهشی** خواهد بود.
مثال $\longrightarrow 8, 4, 2, 1, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **منفی** و قدر نسبت بزرگتر از یک باشد، دنباله **کاهشی** خواهد بود.
مثال $\longrightarrow -1, -2, -4, -8, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **منفی** و قدر نسبت بین صفر و یک باشد، دنباله **افزایشی** خواهد بود.
مثال $\longrightarrow -8, -4, -2, -1, \dots$
- ❖ در دنباله هندسی؛ اگر جمله اول **مخالف صفر** و قدر نسبت منفی باشد، دنباله **دارای نوسان** خواهد بود.
مثال $\longrightarrow 1, -2, 4, -8, \dots$

توجه

□ اگر همه جملات یک دنباله هندسی را به توان عددی ثابت مانند k برسانیم ، قدر نسبت نیز به توان k خواهد رسید .

□ اگر همه جملات یک دنباله هندسی را در عددی غیر صفر مانند k ضرب کنیم ، قدر نسبت تغییر نمی کند .

□ اگر همه جملات یک دنباله هندسی را معکوس کنیم ، قدر نسبت نیز معکوس می شود .

□ اگر دنباله ای هندسی با قدر نسبت r_1 را در دنباله هندسی دیگری با قدر نسبت r_2 ضرب کنیم ، دنباله حاصل نیز هندسی است و دارای قدر نسبت $r_1 \times r_2$ است .

بروزترین و برترین
سایت کنکوری کشور

WWW.KONKUR.INFO

Konkur
.info

<https://konkur.info>