تعاریف فصل ۱ درس اول

❖**تعریف گزاره** : گزاره جمله ای خبری است به طوری که بتوان دقیق و بدون ابهام ارزش درستی یا نادرستی آن را مشخص کرد، هرچند در حال حاضر نتوان ارزش آن را تعیین کرد.

جملاتی که کامل نیستند و جمله های پرسشی ، امری و عاطفی و بیان کننده احساسات گزاره محسوب نمیشوند.

❖**تعریف حدس یا انگاره:**گزاره ای است که ارزش درستی یا نادرستی آن در حال حاضرمعلوم نیست و تاکنون کسی نه این گزاره را ثابت کرده و نه رد کرده است(به عبارت دیگر مثال نقضی برای آن پیدا نشده است)

❖**تعریف گزاره نما**: هر جمله خبری که شامل یک یا چندمتغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره نما نامیده می شود. گزاره نماها را بر حسب تعداد متغیرهای به کاررفته در آن ها، یک متغیره، دومتغیره و .... می نامند.

❖**نقیض یک گزاره:** عبارت است از ساختن یک گزاره جدیدی که ارزش آن دقیقا مخالف ارزش گزاره اصلی باشد نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می دهند.

❖**دو گزاره هم ارز:** دو گزاره p, q را هم ارز منطقی (هم ارزش) می گوییم هرگاه ستون مربوط به هر کدام از این دو گزاره در جدول ارزش درستی یکسان باشد.

📖 مثال ۶ : کدام جمله یک گزاره نیست؟

۱)در پرتاب یک تاس سالم احتمال آنکه عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۲)ای کاش میتوانستم در یک هوای پاک زندگی کنم

۳)هرمعادله درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی است

۴)هرعددزوج بزرگ تر از ۲ را میتوان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت.

مثال ۷ : کدام یک از گزینه ها گزاره نما نیست؟

۱) a عددی زوج است. ۲) در پرتاب یک تاس؛ احتمال رخداد پیشامد A برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۳) همه اعداد اول فرد هستند. ۴)حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر ۶ است.

گزاره های مرکب

۱-**ترکیب عطفی**: برای دو گزاره دلخواه q, p گزاره مرکب (p و q) را ترکیب عطفی میگوییم و با نماد $p \wedge q$ نمایش میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی درست است که هردو درست باشند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۲-**ترکیب فصلی**: برای دو گزاره دلخواه q, p گزاره مرکب (p یا q) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد $p \vee q$ نمایش میدهیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که هردو نادرست باشند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید

۱)۳ عددی فرد است و $\sqrt{۵}$ عددی گویا است.

۲) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

۳)۷ عددی اول است و $a\in\{a,b,c\}$

۴)پاریس پایتخت انگلستان است یا تهران پایتخت ایران است.

۵) $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست.

۶)عدد π گویا است یا در مستطیل دو قطر برهم عمودند.

📖 مثال : ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

۱) $(۲<۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$ ۲) $(۵>۳)\vee(x^{۲}+۱=۰)$

۳) $\left(\frac{۱}{۲}\neq\frac{۳}{۶}\right)\vee\left(۱\in\{۲,۳,۴\}\right)$ ۴) $\left(\sqrt{۲}\notin R\right)\wedge\left(\{۱\}\subseteq\{۱,۲,۳\}\right)$

📖 مثال : اگر گزاره $\sim p\vee q$ یک گزاره نادرست باشد، ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱) q ۲) p ۳) $p\vee q$ ۴) $p\vee\sim q$

📖 مثال : اگر $\sim p\wedge q$ گزاره ای درست باشد، کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) $p\vee\sim q$ ۲) $p\wedge q$ ۳) $p\vee q$ ۴) $p\wedge\sim q$

📖 مثال : هرگاه ارزش گزاره $p\vee q$ درست و ارزش q نادرست باشد، در مورد ارزش گزاره P چه می توان گفت؟

۳- **ترکیب شرطی**: برای دو گزاره دلخواه q, p گزاره مرکب (اگر p آنگاه q) را ترکیب فصلی میگوییم و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش میدهیم.

p را **مقدم** و q را **تالی** مینامیم. ارزش آن فقط و فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

نکته: اگر **مقدم نادرست** باشد(ن $\Rightarrow$ □)ارزش این ترکیب شرطی همواره درست است. در این حالت میگوییم به **انتفای مقدم** درست است.

نکته ۲: اگر تالی درست باشد ارزش ترکیب شرطی همواره درست است. یعنی $P \Rightarrow$ د همواره درست است.

مثال : اگر عکس گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد، ارزش کدام گزاره نادرست است؟

۱) $q \Rightarrow q$ ۲) $\sim p \vee q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $\sim p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

تبدیل یک گزاره شرطی به ترکیب فصلی

$$\boxed{p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q}$$

مثال ۱ : با جدول نشان دهید $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

📖 مثال: گزاره $p\vee\left(\sim\left(p\wedge q\right)\wedge\sim p\right)$ با کدام گزاره هم ارز است؟

۱) p ۲) $p\vee q$ ۳) $\sim q\vee p$ ۴)همواره درست است.

📖 مثال: گزاره $\left(\sim q\wedge p\right)\Rightarrow p$ معادل با کدام است؟

۱) p ۲) $\sim p$ ۳) q ۴)همواره درست است.

📖 مثال : به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره زیر همواره درست است. $p\Rightarrow\left[\left(q\Rightarrow p\right)\wedge\left(\sim q\Rightarrow p\right)\right]$

📖 مثال : به کمک جدول، ارزش گزاره $p\wedge\left[\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\sim q\right]$ را مشخص کنید.

📖 مثال : گزاره $p\Rightarrow\sim\left[\left(q\Rightarrow p\right)\wedge\sim q\right]$ هم ارز است با :

۱) $q\Rightarrow p$ ۲) $p\Rightarrow\sim q$ ۳) p ۴) $\sim q\Rightarrow\sim p$

مثال : بدون استفاده از جدول و با کمک ویژگی ها هم ارزش مقابل را ثابت کنید.

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim r \Rightarrow \sim p)$$

مثال : اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$ درست و ارزش گزاره q نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Rightarrow \sim r$ را با ذکر دلیل بیان کنید.

مثال : هرگاه $q, \sim p$ نادرست باشند، باذکر دلیل و بدون استفاده از جدول ارزش گزاره $\sim(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$ را تعیین کنید

مثال : نشان دهید برای هرسه گزاره دلخواه r, q, p گزاره های زیر همواره درست اند.

الف) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$

ب) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

پ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

مثال: برای سه گزاره r,q,p هم ارزی های منطقی زیر را بدون جدول ثابت کنید.

الف) $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\equiv(p\vee q)\Rightarrow r$

ب) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

پ) $\left[(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\right]\wedge r\equiv r$

ت) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

ث) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

مثال : اگر q و p دو گزاره باشند ارزش گزاره $p \Longrightarrow (p \wedge\sim q)$ کدام است؟

۱) T ۲) F ۳) T است اگر P درست باشد ۴) F است اگر P درست باشد

مثال : اگر q و p دو گزاره دلخواه باشند ارزش گزاره $p\Rightarrow(p\Rightarrow q)$ هم ارزش با کدام یک از گزاره های زیر است؟

۱) $p\vee q$ ۲) $p\Rightarrow q$ ۳) $p\vee q$ ۴) $q\Rightarrow p$

مثال : اگر p درست q و r گزاره های دلخواه باشند کدام یک از گزا ره های زیر همواره درست است؟

۱) $(\sim p\wedge q)\Rightarrow r$ ۲) $(\sim p\vee q)\Rightarrow r$ ۳) $(p\wedge q)\Rightarrow r$ ۴) $(p\vee q)\Rightarrow r$

مثال : اگر گزاره $X\Leftrightarrow\left[(p\Rightarrow q)\wedge(p\vee q)\right]$ همواره درست باشد، گزاره X کدام است؟

۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

مثال: کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) $(۲+۱=۴)\vee(۵>۱۳)$ ۲) $۲<۳\Rightarrow -۴<-۶$

۳) اگر ۴ فرد است آنگاه مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ است و برعکس

۴) $۳<۵\Rightarrow ۴\in\{۱,۲,۳\}$

عکس یک ترکیب شرطی : گزاره $q\Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ می گوییم. یعنی برای عکس ترکیب شرطی کافی است جای مقدم و تالی را عوض کنیم.

ارزش عکس یک ترکیب شرطی ربطی به ارزش ترکیب شرطی ندارد.

نقیض یک ترکیب شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه q,p نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ عبارت است از $p\wedge\sim q$

$$\boxed{\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q}$$

مثال : با جدول نشان دهید: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

مثال : نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

۱) عدد ۴ فرد است و ۳ عددی اول است.

۲) قطرهای مستطیل برابرند یا π عددی گویاست.

مثال : کدام گزینه در مورد گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q))$ درست است؟

۱)هم ارز با $p \Rightarrow q$ است. ۲)هم ارز با $\sim p \Rightarrow q$ است.

۳) همواره نادرست است. ۴) همواره درست است.

مثال : نقیض گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ کدام گزینه است؟

۱) $p \Leftrightarrow q$ ۲) $p \Leftrightarrow \sim q$ ۳) $p \wedge \sim q$ ۴) $\sim p \wedge q$

مثال: نقیض گزاره $p \wedge q$ درکدام گزینه به درستی آمده است؟

۱) $p \Rightarrow q$ ۲) $\sim p \Rightarrow q$ ۳) $q \Rightarrow p$ ۴) $p \Rightarrow \sim q$

مثال : ارزش گزاره زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\left(\forall x\in R; x^{۲}>۰\right)\Rightarrow\left(\forall x\in R; x^{۲}<۰\right)$$

مثال : نقیض گزاره $p \Longrightarrow q$ کدام است؟

۱) $p\wedge q$ ۲) $p\Rightarrow\sim q$ ۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $\sim p\wedge q$

مثال : اگر q و p دو گزاره باشند، گزاره $\sim\left(q\vee\sim p\right)$ هم ارز با کدام یک از گزاره ی زیر است؟

۱) $p\wedge q$ ۲) $\sim p\Rightarrow\sim q$ ۳) $p\wedge\sim q$ ۴) $\sim p\wedge q$

مثال : اگر q و p دو گزاره باشند، گزاره $\sim p\vee(\sim p\Longrightarrow q)$ هم ارز است با :

۱) $p\wedge q$ ۲) $p\vee q$ ۳) $p\vee\sim p$ ۴) $\sim p\vee q$

مثال : نقیض گزاره "اگر a زوج باشد ، $a+۱$ فرد است." کدام است؟

۱) نه a زوج است و نه $a+۱$ فرد است.

۲) هم a زوج است و هم $a+۱$ فرد است .

۳) a زوج است ولی $a+۱$ فرد نیست.

۴) a زوج نیست ولی $a+۱$ فرد است.

عکس نقیض یک ترکیب شرطی: گزاره ی $\sim q\Rightarrow\sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ میگوییم.

در واقع میتوان نشان داد که هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم ارز است. $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$

مثال۳ : با جدول نشان دهید: $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$

مثال : عکس نقیض گزاره ی "اگر او متدین باشد، آنگاه درستکار است." کدام گزینه است؟

۱)اگر او درستکار باشد، آنگاه او متدین است.

۲)اگر او متدین نباشد، آنگاه او درستکار نیست.

۳) اگر او درستکار نباشد، آنگاه او متدین نیست.

۴) او درستکار نیست ولی او متدین است.

مثال : اگر q و p دو گزاره باشند، عکس نقیض گزاره $\sim q\Rightarrow p$ با کدام یک از گزاره های زیر هم ارزاست؟

۱) $\sim(p\vee q)$ ۲) $p\Rightarrow q$ ۳) $p\vee\sim q$ ۴) $\sim p\Rightarrow q$

ترکیب دو شرطی: برای هر دو گزاره دلخواه q, p ، ترکیب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را ترکیب دو شرطی می‌نامیم و با نماد $p\Leftrightarrow q$ نشان میدهیم. $\boxed{p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)}$

ارزش آن وقتی درست است که هر دوطرف $\Leftrightarrow$ دارای ارزش یکسان باشند. یعنی اگر دو طرف $\Leftrightarrow$ ارزش متفاوت داشته باشند نادرست است.

برای اثبات درستی گزاره $p\Leftrightarrow q$ کافی است نشان دهیم $p\equiv q$. در این صورت گزاره درست دوشرطی $p\Leftrightarrow q$ را قضیه دوشرطی مینامیم.

مثال : با جدول نشان دهید: $p\Leftrightarrow q\equiv (p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

مثال : جدول زیر قسمتی از یک جدول ارزش گزاره ها را نشان می دهد. گزاره X کدام می تواند باشد؟

p	q	$p\Leftrightarrow q$	X
ن		د	ن

۱) $p\vee q$ ۲) $q\Rightarrow\sim p$

۳) $q\Rightarrow p$ ۴) $p\Rightarrow q$

مثال : بدون استفاده از جدول هم ارزی ثابت کنید:

$$[(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)]\Leftrightarrow\sim[(p\vee q)\Rightarrow r]\equiv\left(\forall x\in R;\frac{x^۲-۴}{x+۲}=x-۲\right)$$

مثال : برای سه گزاره دلخواه r,q,p **بدون استفاده از جدول** نشان دهید هر یک از گزاره های زیر یک قضیه دوشرطی هستند. (راهنمایی: کافی است نشان دهید دو طرف هرگزاره دوشرطی هم ارز منطقی هستند.)

الف) $\left[(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\sim q)\right]\Leftrightarrow\sim p$

ب) $\left[\sim(p\Rightarrow q)\vee(p\Rightarrow r)\right]\Leftrightarrow\left[(p\wedge q)\Rightarrow r\right]$

مثال : به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان دهید گزاره دو شرطی زیر یک گزاره همیشه درست است.

$$\left[(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow\sim q)\right]\Leftrightarrow\sim p$$

صورت های مختلف بیان شرطی

درصورتی که گزاره دوشرطی $p\Leftrightarrow q$ درست باشد، آن را به صورت های زیر بیان میکنند:

- اگر p آنگاه q وبرعکس
- اگر q آنگاه p وبرعکس
- p اگر وتنها اگر q
- اگر وتنها اگر p
- p یک شرط لازم و کافی برای q است.
- q یک شرط لازم وکافی برای p است.
- یک شرط لازم وکافی برای q عبارت است از p
- یک شرط لازم و کافی برای p عبارت است از q

نقیض ترکیب دو شرطی:

برای دو گزاره دلخواه q, p داریم:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$
$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

مثال : به کمک جدول رابطه بالا را ثابت کنید.

سورها

❶ **سورعمومی**: گزاره ای که خاصیتی را در مورد همه عضوهای یک مجموعه بیان میکند را "گزاره کلی" یا "گزاره با سور عمومی" می گویند.

❖ اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیرگزاره نمای بیان میکند. گزاره ای که این خاصیت را به همه عضوهای دامنه نسبت می دهد سور عمومی نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده میشود.

$$\forall x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: ❊ همه x هایی که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

❊ به ازای هر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

❷ **سوروجودی**: گزاره ای که خاصیتی را در مورد بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان می‌کند را "گزاره با سور وجودی" می گویند.

❖اگر $p(x)$ گزاره نمایی باشد که خاصیتی را در مورد عضوهای دامنه متغیرگزاره نمای بیان می‌کند. گزاره ای که این خاصیت را به برخی از عضوهای دامنه نسبت می دهد سور وجودی نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\exists x: p(x)$$

و اینگونه خوانده می شود: ❖ وجود دارد x ای که در خاصیت $p(x)$ صدق میکند.

❖ به ازای بعضی مقادیر x ای، عبارت $p(x)$ برقرار است.

📖 مثال : ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $(\exists x \in Z; x^۲ = ۱۶) \Rightarrow (\forall x \in N; x^۲ > ۱)$

ب) $\forall a,b \in Z; (a > b \Rightarrow a^۲ > b^۲)$

پ) $\forall x \in R; \tan x.\cot x = ۱$

ت) $(\forall x \in N; x^۲ > ۱) \Rightarrow (\exists x \in Z; x^۲ = ۹)$

✔ ❶ **نقیض سورعمومی:** $\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

نقیض "همه x ها در خاصیت $p(x)$ صدق میکنند" عبارت است از "وجود دارد x که در خاصیت $p(x)$ صدق نمیکند. "

✔ ❷ **نقیض سور وجودی:** $\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$

نقیض گزاره "به ازای بعضی مقادیر x عبارت $p(x)$ برقرار است." عبارت است از "به ازای هر x ای عبارت $p(x)$ برقرار نیست."

گزاره با **سورعمومی** وقتی درست است که نتوان مثال نقضی برایش پیدا کرد به عبارتی $S = D$

گزاره با **سور وجودی** وقتی درست است که بتوانیم حدااقل یک عضو از دامنه یافت که به ازای آن گزاره نما به گزاره درست تبدیل شود.

مثال : ارزش کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱) $\exists x \in Z ; x = \frac{1}{x}$ ۲) $\forall x \in Z ; x^2 \geq x$

۳) $\forall x \in R ; x^2 > 0$ ۴) $\exists x \in R ; x + \frac{1}{x} = -2$

مثال : نقیض گزاره $\forall x > 0 ; x^2 > x$ را بنویسید.

مثال : نقیض گزاره های زیر را بنویسید

۱)۲ عددی گویا است.

۲) $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

۳)سعدی یک ریاضی دان است.

مثال : نقیض گزاره همه دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوشند، کدام است؟

۱) همه دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

۲) بعضی دانشجویان بعضی از دانشگاه های تهران باهوش نیستند.

۳) بعضی از دانشجویان هر دانشگاهی در تهران باهوش نیست.

۴) لا اقل یکی از دانشجویان همه دانشگاه های تهران باهوش نیست.

📖 مثال : نقیض گزاره "مریم ریاضی دان است" ، کدام گزینه نیست؟

۱)مریم ریاضی دان نیست.   ۲)این طورنیست که مریم ریاضی دان است.

۳)مریم ریاضی کار نمی کند. ۴)مریم ریاضی نمی داند.

📖 مثال : گزاره "این طورنیست که ۵ عددی اول نیست" معادل با کدام گزینه است؟

۱)ممکن است ۵ عددی غیراول باشد.   ۲) ۵ عددی اول است.

۳) ۵ عددی مرکب است.   ۴) ۵ عددی اول نیست.

📖 مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید. $\left(\exists x \in Z; \frac{۱}{x-۱} \in Z\right) \vee \left(\forall x \in R; \sqrt{x} \in R\right)$

📖 مثال : نقیض گزاره سوری زیر را بنویسید.

📖 مثال : ارزش گزاره سوری $\forall x \in R\ \exists y \in R; x+y>۰$ را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

📖 مثال : نقیض گزاره سوری $\exists x \forall y;\ p(x) \wedge \sim q(y)$ را بنویسید.

📖 مثال : گزاره سوری "عددی حقیقی وجود دارد که از هر عدد دیگر بزرگتر است" را به زبان ریاضی بنویسید.

سپس نقیض آن را بنویسید.

📖 مثال : عکس نقیض گزاره شرطی زیر را بنویسید.

$$(\forall a,b \in Z\,; a<b) \Rightarrow (\exists a,b \in Z\ ; a^{۲} > b^{۲})$$

📖 مثال : ثابت کنید گزاره های زیر همیشه درست اند.

الف) $\forall x;\ p(x) \Rightarrow \exists x;\ p(x)$

ب) $[\forall x;\ p(x)] \vee [\forall x; q(x)] \Rightarrow \forall x; [p(x) \vee q(x)]$

✔ **دامنه متغیر گزاره نما:** در هر گزاره نما به مجموعه مقادیری که میتوان آن ها را به جای متغیر(های) آن قرار داد تا این گزاره نما تبدیل به گزاره شود؛ دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

✔ **مجموعه جواب گزاره نما:** در هر گزاره نما به مجموعه عضوهایی از دامنه که به ازای آنها گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره نما می گویندو و آن را با حرف S نمایش میدهند. بدیهی است که

$S \subseteq D$

مثال: دامنه متغیر گزاره نمای $\sqrt{۲-|x|} < ۱$ کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $R-[-۲,۲]$

مثال : مجموعه جواب گزاره نمای $\frac{۱}{\sqrt{۲-|x|}} \leq ۱$ کدام است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۲,۲)$ ۴) $[-۲,۲]$

مثال : مجموعه جواب هرکدام از گزاره نماهای زیر را با توجه به دامنه متغیر گزاره نما مشخص کنید.

۱)در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۲) x مضرب ۷ است. $D=Z$

۳) $x^۲+۴x=۲$ $D=R$

۴) در پرتاب یک تاس $P(\{x\})=\frac{۱}{۶}$ $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

۵) $x+۱>۲$ $D=\{۰,۱,۲,۳\}$

۶) $\frac{۲x+۱}{۳} \leq -۱$ $D=Z$

📖 مثال : خاصیت شرکت پذیری را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

$$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$$
$$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$$

📖 مثال : خاصیت توزیع پذیری (پخشی) را با کمک جدول ارزش ها نشان دهید.

$$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$
$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

📖 مثال: قانون جذب و شبه جذب(همپوشانی) را با کمک جدول نشان دهید.

الف) جذب

$$p\wedge(p\vee q)\equiv p$$
$$p\vee(p\wedge q)\equiv p$$

ب) شبه جذب

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$
$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

📖 مثال: قانون دمرگان را با جدول ارزش ثابت کنید.

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

مجموعه

❖ **تعریف مجموعه** : دسته ای از اشیا معین است که بدون هیچ ابهامی می توان معلوم کرد که یک شی معین در آن قرار دارد یا نه

❖ نکات مهم :

۱) اشیایی که با هم مجموعه را تشکیل می دهند، عضو یا عضوهای آن مجموعه نامیده می شوند.

۲) در مجموعه ترتیب مهم نیست و نباید اعضای تکراری وجود داشته باشد. بنابراین :

$$\{۳,۳,۲,۲,۲,۱,۱,۱,۱\} =$$

۳) اگر A یک مجموعه باشد در صورتی که عضوی مانند x در مجموعه A وجود داشته باشد، می نویسیم : $x \in A$

و در صورتی که x متعلق به مجموعه A نباشد می نویسیم : $x \notin A$

نماد $\in$ به معنای عضویت است.

📖 مثال: کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان <u>نمی کند</u> ؟

۱) دسته اعداد فرد طبیعی کوچکتر از عدد ۲۰   ۲) دسته اعداد اول یک رقمی

۳) دسته شامل اعداد بزرگ   ۴) دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

📖 مثال: اگر $A = \{x, \{x\}, \{\{y\}\}\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $x \in A$ ۲) $\{x\} \in A$ ۳) $\{y\} \in A$ ۴) $\{\{y\}\} \in A$

مثال: کدام یک از گزاره های زیر یک مجموعه را بیان نمی کند؟

۱) دسته افراد فرد طبیعی کوچکتر از عدد۲۰ ۲)دسته شامل اعداد بزرگ

۳)دسته اعداد اول یک رقمی ۴)دسته اعداد طبیعی مربع کامل بزرگتر از عدد ۵۰

تعریف مجموعه مرجع: در هر مجموعه معین، عناصری قرار می گیرند که همه آن ها عضوهای یک مجموعه به نام مرجع (عام ، جهانی) می باشند. مجموعه مرجع را با حرف U نشان می دهیم.

- معمولاً مجموعه مرجع را با مستطیل و سایر مجموعه های داخل مجموعه مرجع را با دایره یا بیضی نمایش می دهیم.

مثال: اگر مجموعه مرجع را اعداد طبیعی فرض کنیم، متمم مجموعه $A=\{x\in N; x^{۲}<۳^{x}\}$ چند عضو دارد؟

۱)۱ ۲)۲ ۳)۳ ۴)صفر

تعریف مجموعه تهی : مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی نام دارد. و با نماد $\varnothing$ نمایش داده میشود. بنابراین : $\varnothing=\{\ \}$

مثال: کدام مجموعه تهی است؟

۱) $A=\{x\in Z; x^{۲}=۴, ۳x=۶\}$ ۲) $B=\{x\in Z; x+۵=۵\}$

۳) $C=\{x\in Z; x>۳, ۲^{x}<۱۰\}$ ۴) $D=\{x\in N; x^{۲}=۸x\}$

روش های مشخص کردن یک مجموعه : معمولاً به یکی از دو روش زیر عمل می کنیم:

- نام بردن (فهرست کردن) اعضای مجموعه
- معرفی خاصیت مشترک عضوهای مجموعه با زبان ریاضی (گزاره نما) توجه شود که در این روش باید مجموعه مرجع مشخص باشد.

مثال: هریک از مجموعه های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

۳) $A=\{x\in Z \mid |x|\le ۲\}$

۴) $B=\{n\in Z \mid n^{۳}=n\}$

۵) $C=\{x\in R \mid x^{۳}-x=۰\}$

۶) $D=\{a\in S \mid$ است فضای نمونه ای پرتاب یک تاس $S\}$

۷) $E=\{۲^{x}\times ۳^{y} \mid x,y\in N\ ,\ x+y=۵\}$

۸) $F=\left\{\dfrac{x^{۲}+۴}{۳x+۲}\in Z \mid x\in N\ ,\ x<۵\right\}$

۹) $G=\{x\in Z \mid x^{۲}-۱۲x+۳۵=۰ \vee x^{۲}\le ۱۰\}$

۱۰) $H=\{x\in N \mid x^{۳}+۱=۰\}$

$۱۱)I=\{x\in Z \mid (x^۲-۴)(x^۲-۲)(۲x+۱)=۰\}$ $۱۲)J=\{x\in Z \mid n^۳+۲n=۳n^۲\}$

مثال: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{b\}\}\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{a\}\in A$ ۲) $a\in A$ ۳) $\{b\}\in A$ ۴) $\{\{b\}\}\in A$

مثال: مجموع تمام عضوهای مجموعه $A=\{k^۲+۱\ ;\ k\in N, k<۵\}$ کدام است؟

۱) ۳۴ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۳۷

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما (به زبان ریاضی) نمایش دهید.

$۱۳)A=\{-۸,-۱,۰,۱,۸,۲۷,...\}$ $۱۴)B=\{\sqrt{۳},-\sqrt{۳}\}$

مثال: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت گزاره نما نشان دهید.

$A=\{-۱,۰,۱,۸,۲۷,...\}$ $B=\{-\sqrt{۲},\sqrt{۲}\}$

📖 مثال: کدام یک از مجموعه های زیر ناتهی است؟

۱) $\{x \in Z \mid (x^۲ = ۹) \wedge (۲x = ۴)\}$ ۲) $\{x \in Z \mid x + ۸ = ۸\}$

۳) $\{x \in Z \mid x \neq x\}$ ۴) $\{x \in N \mid x^۲ = -۷x\}$

📖 مثال: دو مجموعه $A = \{x \in Z \mid |x| \leq ۳\}$, $B = \{\{۱,۲\}, \{-۳\}, ۳\}$ مفروضند. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را مشخص کنید.

۱) $\{۲\} \in A$ ۲) $\{۳\} \in A$ ۳) $۳ \in B$

۴) $\{۱,۲\} \in B$ ۵) $-۳ \in B$ ۶) $-۲ \in A$

📖 مثال: اگر $A_n = \{m \in Z , m > -n , ۲^m \leq ۲n\}, n \in N$ انگاه مجموعه $(A_۸ - A_۴) \cup A_۱$ چند عضو دارد؟

(کنکورریاضی۹۶) ۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

زیرمجموعه: مجموعه A را یک زیرمجموعه B میناميم اگر وتنها اگر هر عضوی از A، عضوی از B باشد که در این صورت می نویسیم: $A\subseteq B$ پس: $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x;(x\in A \Rightarrow x\in B)$

❖ چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو متعلق به مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و مینویسیم $A\nsubseteq B$ پس: $A\nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x;(x\in A \wedge x\notin B)$

📖 مثال: اگر $A=\{x,\{x\},\{x,\{x\}\}\}$ کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است؟(باذکر دلیل)

الف) $\{x\}\subseteq A$ ب) $\{\{x\}\}\in A$

📖 مثال: اگر $A=\{۲\}$ و $B=\{۲,\{۲\}\}$ و $C=\{\{۲\},\{۲,\{۲\}\}\}$ سه مجموعه باشند، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B\subseteq C$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $A\in B$ ۴) $B\in C$

📖 مثال: اگر چهار مجموعه $A=\{x|$ مستطیل است $x\}$ و $B=\{x|$ لوزی است $x\}$ و $C=\{x|$ مربع است $x\}$ و $D=\{x|$ متوازی الاضلاع است $x\}$ مفروض باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $A\subseteq C$ ۲) $C\subseteq B$ ۳) $A\subseteq B$ ۴) $D=A\bigcap B$

📖 مثال: اگر $A=\{a,b\}, B=\{a,b,\{a,b\}\}, C=\{a,b,\{b\},\{a,b\}\}$ کدام گزینه درست است؟

$A\in B$ $A\subseteq B$ $A\in C$ $B\in C$

📖 مثال: فرض کنید $E=\{۳,۵\}, D=\{۳,۴,۵\}, C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}, B=\{۲,۴,۶,۸\}, A=\{۱,۲,...,۹\}$ در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید X می تواند کدام یک از این مجموعه ها باشد؟

X, B عضو مشترکی ندارند. $X \subseteq A$ ولی $X \subseteq C$

$X \subseteq D$ ولی $X \not\subseteq B$ $X \subseteq C$ ولی $X \not\subseteq A$

📖 مثال: مجموعه های B, A را طوری مشخص کنید که:

الف) $A \subseteq B, A \in B$

ب) $A \subseteq B, A \notin B$

پ) $A \not\subseteq B, A \in B$

📖 مثال: کدام گزاره نادرست است؟

$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ $\varnothing = \{\varnothing\}$ $\varnothing \in \{\varnothing\}$ $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

📖 مثال: مجموعه های $C=\{\{\{۲\},۳,۵\},۲\}, B=\{۳,۵,\{۲\}\}, A=\{۲\}$ مفروض اند ، کدام بیان در مورد آن ها نادرست است؟

۱) $A \in B$ ۲) $A \in C$ ۳) $B \in C$ ۴) $A \subseteq C$

دو مجموعه مساوی: دو مجموعه B, A با مرجع U را مساوی می‌گوییم اگر و تنها اگر هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر :

$$A=B \Leftrightarrow \left[\forall x;\left(x\in A \Leftrightarrow x\in B\right)\right]$$
$$A=B \Leftrightarrow \left[\left(A\subseteq B\right)\wedge\left(B\subseteq A\right)\right]$$

مثال: فرض کنید $A=\{۱,۲\}$ با ذکر دلیل توضیح دهید کدام یک از مجموعه های زیر با مجموعه A مساوی است؟

$\{x\in Q | x^۲-۳x+۲=۰\}$ $\qquad$ $\{x\in R | ۱\le x\le ۲\}$ $\qquad$ $\{x\in Q | ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ $\qquad$ $\{x\in N | ۱\le x\le ۲\}$

مثال: اگر $A=\{۲, x+۲y, ۴\}, B=\{۴, ۵, x-y\}, A=B$ در این صورت دوتایی (x, y) کدام است؟

$(۲,۱)$ $\qquad$ $(۲,۳)$ $\qquad$ $(۱,۳)$ $\qquad$ $(۳,۱)$

مثال: اگر $A=\{۲, x+۲y, ۴\}$, $B=\{۴, ۵, x-y\}$, $A=B$. در این صورت دوتایی (x, y) کدام است؟

۱) $(۲,۱)$ $\qquad$ ۲) $(۲,۳)$ $\qquad$ ۳) $(۱,۳)$ $\qquad$ ۴) $(۳,۱)$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه:

❖ اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه های A برابر است با : ۲^n

❖اگر از زیر مجموعه های یک مجموعه ، خود مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیرمجموعه ها را زیرمجموعه محض یا سَره آن مجموعه می‌گوییم.

مثال: مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ چند زیر مجموعه دارد؟ تمام آن‌ها را بنویسید.

مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه های $(k+۳)$ عضوی ۵۶ واحد بیشتر از زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی است. k را بیابید.

مثال: اگر ۲ عضو به اعضای مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد. در این صورت مجموعه A دارای چند زیر مجموعه سره ناتهی است؟

📖 مثال: اگر تعداد زیرمجموعه های مجموعه A، ۶۴ برابر تعداد زیرمجموعه های مجموعه B باشد و این دو مجموعه روی هم ۱۰ عضو داشته باشند، تعداد عضوهای این دو مجموعه به صورت دوتایی (A,B) کدام است؟

📖 مثال: اگر تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $۲k$ عضوی، ۴۸ واحد کمتر از تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $۳k$ عضوی باشد، آنگاه برای k چند جواب وجود دارد؟

📖 مثال: اگر ۲ عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود. مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

📖 مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر با $۸^{۳n-۸}$ است. تعداد زیر مجموعه های محض مجموعه $n+۲$ عضوی را بیابید.؟

مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعه شامل عضو a و فاقد عضو b دارد؟

۳۲ ۶۲ ۱۶ ۱۴

مثال: اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$، مجموعه $A-\{A\}$ چندزیرمجموعه سره غیرتهی دارد؟

۲ ۷ ۶ ۱۴

مثال: اگر $B=\{a,b\}, A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ مجموعه ی $A-\{B\}$ چند زیر مجموعه ی سره ی غیر تهی دارد ؟

۱) ۲ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۷ ریاضی۸۹

مثال: اگر $A=\{a,b,\{a\},\{b\}\}$ باشد مجموعه ی $A-\{A\}$ چند زیر مجموعه ی سره ی غیر تهی دارد ؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) ۲ ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۷

مثال: چند زیر مجموعه از مجموعه ی $A=\{a,b,\{a,b\},\{b,a\}\}$ عضو $\{a,b\}$ ندارد ؟ ریاضی ۹۱

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

مثال: تعدادزیرمجموعه های محض مجموعه زیررابنویسید.

$$A=\{5^x+2^y \mid x,y\in N\,,x+y=3\}$$

مجموعه توانی: مجموعه همه زیرمجموعه های مجموعه A را ، مجموعه توانی A مینامیم و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم: $P(A)=\{X \mid X\subseteq A\}$

❖ واضح است که اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، در این صورت $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

❖ نتیجه: $X\in P(A)\Leftrightarrow X\subseteq A$

مثال: اگر $A=\{a,b\}$ مجموعه $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

📖 مثال: مجموعه های $A=\{\varnothing,\{\varnothing,۳\}\}$, $B=\{\varnothing,۳\}$ مفروض اند

الف) مجموعه $A\cap B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید ب) مجموعه توانی A را بنویسید

📖 مثال: اگر $A=\{\varnothing,۳\}$, $B=\{\varnothing,\{\varnothing,۳\}\}$ ، آنگاه مجموعه $P(A\cup B)$ دارای چند زیرمجموعه دارد؟

📖 مثال: اگر $A=\{a\}$ باشدتعدادعناصر $p(p(A))$ وتعدادزیرمجموعه های آن رابیابید.

❖ **اجتماع و اشتراک تعدادی مجموعه با الگویی خاص:**

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \qquad\qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

📖 مثال: اگر $A_i = [-i, 10-i]$ و $i \in \{1,2,3,\ldots,10\}$ آنگاه مجموعه های $\mathop{}_{i=1}^{10} A_i \ , \mathop{}_{i=1}^{10} A_i$ را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $A_n = (-n, n)$, $n \in N$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{6} A_i , \bigcap_{i=1}^{6} A_i$ را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $n \in N$ و $A_n = \{m \in Z | (-n \le m) \wedge (2^m \le n)\}$ ، آنگاه تعداد عضوهای $A_3 \cup A_4$ چه تعداد بیشتر از تعداد عضوهای $A_1 \cap A_4$ است؟ ۷ ۶ ۵ ۴

📖 مثال: اگر $i \in \{۱,۲,۳,...,۹\}$, $A_i = \left[-i, \frac{۹-i}{۲}\right]$، آنگاه مجموعه $(A_۲ \cap A_۵) - (A_۱ \cap A_۷)$ را مشخص کنید.

📖 مثال: اگر $n \in N$, $A_n = \{x \in Z \mid -n \le x \le n\}$ آنگاه $A_۲ - (A_۱ \cap A_۴)$ را بیابید.

📖 مثال: اگر $n \in N$, $A_n = \{k \in Z \mid -n < k, ۲^k < ۲\}$ ، آنگاه $\bigcup_{i=۱}^{۳} A_i - \bigcap_{i=۱}^{۳} A_i$ دارای چند زیر مجموعه است؟

۴ ۸ ۱۶ ۱

📖 مثال: اگر $n \in N$, $A_n = \{m \in Z \mid m \ge -n, ۲^m \le ۲n\}$ باشد، مجموعه $(A_۸ - A_۴) \cup A_۱$ چند عضو دارد؟(کنکور۹۶)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

📖 مثال: اگر $A_n=\{m\in Z, |m|\le n, 2\le 2n\}$ انگاه مجموعه $(A_6-A_4)\cup A_1$ چند عضو دارد ؟ (کنکور ریاضی ۹۴)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

📖 مثال: اگر $n\in N$, $A_n=\{m\in Z | m\ge -n, 2^m\le n\}$ انگاه مجموعه $A_3\cap A_4$ چند زیر مجموعه دارد ؟ (کنکور ریاضی۸۸)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

📖 مثال: اگر $A_i=\{m\in Z, -i\le m\le 8-i\}$ مجموعه ی $\bigcup_{i=1}^{8}A_i-\bigcap_{i=1}^{8}A_i$ چند عضو دارد ؟ کنکور ریاضی خارج۸۷

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

مثال: اگر $A_i=\left[-i,\frac{۹-i}{۲}\right], i\in\{۱,۲,۳,...,۹\}$ آن گاه مجموعه ی $(A_۲\cap A_۵)-(A_۱\cap A_۷)$ به کدام صورت است؟

(ریاضی۹۲)

۱) $[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$ ۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\varnothing$

افراز یک مجموعه

بخش بندی یک مجموعه به زیر مجموعه های نا تهی، که دو به دو با هم اشتراک ندارند واجتماع همه آنها برابر با مجموعه اولیه است، افراز یک مجموعه است.

فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی است و $A_۱, A_۲, ..., A_n$ زیر مجموعه های A باشند در این صورت میگوییم A به n زیر مجموعهٔ $A_۱, A_۲, ..., A_n$ افراز شده است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\forall i \; ۱\le i\le n : A_i\neq\varnothing$

۲) $\forall i,j \left(i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing\right)$

۳) $A_۱\cup A_۲\cup...\cup A_n=\bigcup_{i=۱}^{n}A_i=A$

مثال: فرض کنید $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ باشد، کدام یک از موارد زیر یک افراز برای مجموعه A نیست؟

۱) $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\}$ ۲) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

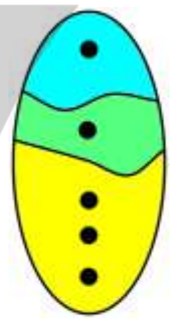
۳) $\{a,b,e,g\},\{c\},\{d,f\}$ ۴) $\{a,e,g\},\{c,d\},\{b,e,f\}$

❖ **نکته** : برای یافتن تمام افرازهای یک مجموعه n عضوی، کافی است افرازهای یک مجموعه ای(یک بخشی) افرازهای دو مجموعه ای (دوبخشی) و .... و افرازهای n عضوی آن مجموعه رابیابیم.

❖ برای پیدا کردن تعداد افرازهایی که مجموعه را به k قسمت (زیرمجموعه) افراز می‌کند ابتدا حالت های کلی که می‌توان مجموعه را به k قسمت تقسیم کرد پیدا می‌کنیم و سپس با استفاده از آنالیز ترکیبی(شمارش بدون شمردن) مساله را حل و فصل می‌کنیم.

به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه $\{a,b,c,d,e\}$ را به سه زیر مجموعه افراز کنیم حالات کلی زیر ممکن است:

$$\frac{\binom{۵}{\boxed{۱}}\binom{۴}{\boxed{۱}}\binom{۳}{۳}}{\boxed{۲}!}=۱۰$$



$$\frac{\binom{۵}{\boxed{۲}}\binom{۳}{\boxed{۲}}\binom{۱}{۱}}{\boxed{۲}!}=۱۵$$

📖 مثال: تمام افرازهای مجموعه $A=\{۱,۲\}$ را بیابید.

📖 مثال: تمام افرازهای مجموعه $B=\{a,b,c\}$ را تعیین کنید.

📖 مثال: مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ دارای چند افراز فاقد مجموعه یک عضوی است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

❖نکته:

📖 مثال: اگر مجموعه $\{\{a\},\{b\},\{\{a,b\}\},\{c\}\}$ یک افراز از مجموعه A باشد، آنگاه مجموعه A دارای چند افراز دو عضوی است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۲ ۴) ۵

📖 مثال: برای مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ ، چند افراز مختلف وجوددارد به طوری که سه عضو c,b,a در یک مجموعه قرار داشته باشند؟

۴ ۵ ۷ ۸

📖 مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ دارای چند افراز سه عضوی است؟

۶ ۷ ۵ ۴

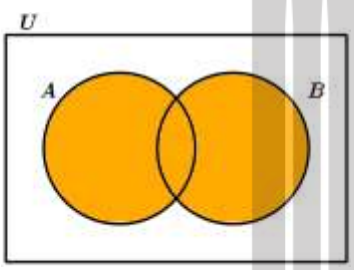
📖 مثال: یک مجموعه ۶ عضوی چند افراز ۲ عضوی و چند افراز ۳ عضوی و چند افراز ۴ عضوی دارد؟

قوانین بین مجموعه ها

همان گونه که می‌توان در مجموعه اعداد حقیقی دو یا چند عدد را جمع، ضرب یا تفریق نمود و اعدادی جدید به دست آورد، در مورد مجموعه ها هم می توانیم مشابه این اعمال را انجام دهیم و مجموعه هایی جدید به دست آوریم.

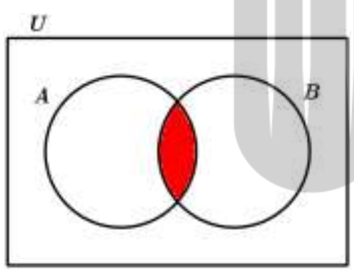
❖ **اجتماع دو مجموعه**: مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو" می باشد. با نماد $A\cup B$ نمایش داده میشود و عبارت است از $A\cup B=\{x\in U|x\in A\vee x\in B\}$

یعنی: $x\in(A\cup B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$



❖ **اشتراک دو مجموعه**: مجموعه ای است که عضوهای آن "متعلق به A و متعلق به B " می باشد. با نماد $A\cap B$ نمایش داده میشود و عبارت است از $A\cap B=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\}$ یعنی:

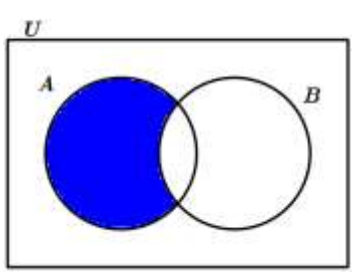
$x\in(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$



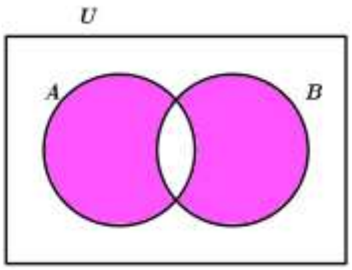
❖ **تعریف تفاضل دو مجموعه** : تفاضل دو مجموعه B,A مجموعه ای است که اعضای آن متعلق به A می باشند ولی در مجموعه B قرار ندارند و آن را به صورت $A-B$ نشان می دهیم و داریم:

$$A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}$$

به بیان دیگر: $x\in A-B\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)$



❖ تعریف تفاضل متقارن دو مجموعه :



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

📖 مثال: اگر C, B, A سه مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، آن گاه هریک از موارد زیر را به کمک نمودار ون نمایش دهید. و بیان جبری آنها را بنویسید.

الف) عضوهایی که فقط در A باشند.	ب) عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه ها باشند.
پ) عضوهایی که در C, A باشند ولی در B نباشند.	ت) عضوهایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.
ث) عضوهایی که فقط متعلق به دو مجموعه باشند.	ج) عضوهایی که حداقل به ئو مجموعه تعلق داشته باشند.

مثال: در نمودارهای ون رسم شده، قسمت هاشورزده را به کمک جبرمجموعه ها مشخص کنید.

قوانین جبر مجوعه ها

۱) $(A')' =$

۲) $A \cup A' =$

۳) $A \cap A' =$

۴) $A \cup U$

۵) $A \cap U$

۶) $A \cup A =$ $\quad A \cap A =$

۷) جا به جایی اجتماع و اشتراک $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$

اثبات:

۸) شرکتپذیری اجتماع و اشتراک $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$

اثبات:

۹) توزیع پذیری(پخشی) اجتماع و اشتراک نسبت به هم $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$

اثبات:

۱۰) قوانین جذب $A\cup(A\cap B)=A$ $\quad$ $A\cap(A\cup B)=A$

اثبات:

۱۱) قوانین دمورگان $(A\cap B)'=A'\cup B'$ $\quad$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$

اثبات:

۱۲) $A - B = A \cap B'$ متمم دومی $\cap$ اولی

اثبات:

مثال: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

پ) $A - B = B' - A'$

📖 مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$\left(A\cup B\right)-C=\left(A-C\right)\cup\left(B-C\right)$$

📖 مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$\left(A-B\right)-C=\left(A-C\right)-B$$

📖 مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$A-\left(B\cup C\right)=\left(A-B\right)\cap\left(A-C\right)$$

🕮 مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

🕮 مثال: با کمک جبرمجموعه ها ثابت کنید.

$$(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$$

🕮 مثال: برای سه مجموعه C,B,A از مرجع U ثابت کنید:

$$(A-B)'\cap(A-C')'=(B-C)\cup A'$$

🕮 مثال: اگر B,A دو مجموعه دلخواه از مرجع U باشند، حاصل $(A'\cap B')\cap A$ برابر کدام است؟

$\varnothing$ A B U

تعریف زوج مرتب

هر دوتایی مانند (a,b) را که در آنها ترتیب هم مهم است زوج مرتب مینامیم. a را مولفه یا مختص اول و b را مولفه یا مختص دوم می نامیم.

❖ دو زوج مرتب در صورتی با هم برابرند که مولفه های نظیر آنها با هم برابر باشند یعنی :

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c)\wedge(b=d)$$

مثال: اگر $\left((x-۱)^۲+(y-۲)^۲,۳\right)=(۰,z+x)$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

مثال: اگر $\left(۱۲۸,۳^{۲x-y}\right)=\left(۲^{۲x+y},۲۷\right)$ ، آنگاه $x+y$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

مثال: اگر $(۱۳,xy)=\left(x^۲+y^۲,۶\right)$ ، آنگاه مقادیر مثبت y,x را بیابید.

تعریف ضرب دکارتی دو مجموعه

❖برای دو مجموعه B,A ضرب دکارتی مجموعه A در مجموعه B ،مجموعه ای است شامل تمام زوج های مرتبی که مولفه اول آنها از A و مولفه دوم آنها از B می باشد یعنی :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

A \ B	-۱	۲
a	$(a,-۱)$	$(a,۲)$
b	$(b,-۱)$	$(b,۲)$

❖در حالت خاص ضرب دکارتی یک مجمو ... شود:

$\wedge y\in A\}$

❖در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی باشد داریم:

$$(x,y)\in(A\times B)\Leftrightarrow[(x\in A\wedge y\in B)]$$

❖ در حالتی که عضوی در ضرب دکارتی نباشد:

$$(x,y)\notin(A\times B)\Leftrightarrow[(x\in A\wedge y\notin B)\vee(x\notin A\wedge y\in B)\vee(x\notin A\wedge y\notin B)]$$

📖 مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳\}$, $B=\{a,b\}$ باشند، آنگاه حاصلضرب دکارتی $B\times A$ و را تشکیل دهید. چه نتایجی می گیرید؟

نتیجه مهم :

❖ ۵ ویژگی مهم ضرب دکارتی:

۱-اگر A مجموعه ای دلخواه از مرجع U باشد: $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

۲- برای دو مجموعه B, A از مرجع U داریم:

۳- برای چهار مجموعه ناتهی D,C,B,A از مرجع U داریم: $(A\subseteq C\wedge B\subseteq D)\Leftrightarrow(A\times B)\subseteq(C\times D)$

۴- ضرب دکارتی روی تمام عملگرهای مجموعه ای $(-,\cup,\cap)$ توزیع پذیر است، هم از راست و هم از چپ.

$$A\times(B \,\square\, C) = (A\times B) \,\square\, (A\times C)$$

۵- برای چهار مجموعه ناتهی D,C,B,A از مرجع U داریم: $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

📖 مثال: هرگاه $B=\{x+y,۱\}, A=\{x-y,۳\}$ وداشته باشیم: $A\times B=B\times A$ مقادیر y, x رابیابید.

📖 مثال: اگر $A=\{۲^n \mid n\in N\wedge n<۴\}$ و $B=\{۲k+۱ \mid k\in Z\wedge |k|\leq ۱\}$ آنگاه $A\times B$ دارای چند عضو است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۶

📖 مثال: مجموعه A دارای ۶۳ زیرمجموعه محض و B دارای ۵ عضوباشد $A\times B$ چندعضودارد؟

مثال: اگر $A=\{۵۱۲,۳^{۲x+y}\}$, $B=\{۲^{۳x-۲y},۸۱\}$ و $A\times B=B\times A$ ، آنگاه حاصل عبارت $۵x+۴y$ کدام است؟

۱) $\frac{۵۱}{۷}$ ۲) $\frac{۵۷}{۷}$ ۳) $\frac{۵۹}{۷}$ ۴) $\frac{۶۱}{۷}$

نمودار مختصاتی ضرب دکارتی دو مجموعه

❖دو مجموعه B,A از مرجع U را در نظر میگیریم به کمک تعریف ضرب دکارتی، مجموعه $(A\times B)$ را تشکیل می دهیم.

۱) در صورتی که عضوهای مجموعهٔ $A\times B$ به صورت زوج مرتب باشد، هر عضو را همانند مختصات یک نقطه در دستگاه مختصات نمایش می دهیم. (توجه کنید برای انجام این کار، عضوهای مجموعهٔ اول، در اینجا مجموعه A ، روی محور افقی (x ها) و عضوهای مجموعهٔ دوم،در اینجا مجموعه B ، روی محور عمودی مشخص می شود.)

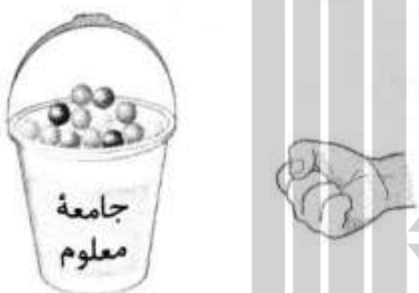
۲) درصورتی که عضوهای مجموعهٔ $(A\times B)$ به کمک بازه های حقیقی نمایش داده شوند، بازه متعلق به مجموعهٔ A را روی محور x ها و بازه متعلق به مجموعهٔ B را روی محور عمودی در نظر میگیریم. به این ترتیب معمولاً یک سطح حاصل میشود.

مثال: اگر $A=\{۱,۲\}$, $B=\{-۱,-۲,۰\}$ آنگاه مجموعه های $A\times B$, $B\times A$ را مشخص نمایید و سپس نمودار مختصاتی هرکدام را رسم کنید.

علم آمار و علم احتمال

❖**علم آمار** در پی شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه های جمع آوری شده معلوم است.

پدیده هایی که با شمارش و تعداد سر و کار دارند مربوط به علم آمار هستند



❖**علم احتمال** در پی بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است و به نوعی در جهت عکس علم آمار است.

پدیده هایی که میخواهیم امکان و شانس آن ها را بررسی کنیم مربوط به علم آمار هستند.

📖 مثال: "کارخانه هایی که سهام خود را در بورس عرضه کرده اند" و "امکان پایین آمدن شاخص داوجونز در بورس وال استریت در سال آینده" هر کدام مربوط به کدام علم است؟

۱)علم آمار- علم آمار ۲) علم احتمال- علم احتمال

۳)علم آمار- علم احتمال ۴) علم احتمال- علم آمار

📖 مثال: کدام گزینه مربوط به علم احتمال است؟

۱) تعداد افراد حاضر در کلاس درس ۲) بلندقد ترین دانش آموز مدرسه

۳) امکان ظاهرشدن ۲ رو در ۴ پرتاب ۴) بالاترین نمره در کارنامه درسی

📖 مثال: "تعداد دانش آموزان علاقه مند به درس ریاضی" و "شانس گرفتن نمره بالاتر از ۱۸ در آزمون پایان ترم درس آمار" به ترتیب مربوط به کدام علم میشود؟

۱)آمار-آمار ۲)آمار- احتمال ۳)احتمال – آمار ۴) احتمال – احتمال

فضای نمونه ای

پدیده ای که قبل از رخ دادن، نتیجه اش معلوم نیست ولی مجموعه نتایج ممکن آن مشخص است آزمایش تصادفی نامیده میشود. مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، ... مجموعه همه نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می نامند وبا S نشان می دهند و هریک ازعضوهای آن را یک برآمد می نامند.

از آنجاییکه فضای نمونه یک مجموعه است، پس به دو روش زیر میتوان آن را مشخص کرد:

نام بردن (فهرست کردن) برآمدها معرفی خاصیت مشترک برآمدها به زبان ریاضی (گزاره نما)

📖 مثال: یک راننده تاکسی در ایستگاه منتظر میماند تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند. البته ممکن است با کم تر از ۴ مسافر هم حرکت کند. اما در مسیر برگشت هرگز خالی برنمیگردد. اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، فضای نمونه ای برای توصیف چنین پدیده ای چند عضو دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۲۵

📖 مثال: برای هریک از پدیده های زیر فضای نمونه ای را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه

ب)خانواده تک فرزندی

پ)ریختن یک تاس

ت) خارج کردن یک لامپ به تصادف ازجعبه ای شامل ۵ لامپ با شماره های ۱ تا ۵

🕮 مثال: فضای نمونه ای هر یک از پدیده های زیر را مشخص کنید.

الف) پرتاب دو سکه با هم (دوبار پرتاب یک سکه)

ب) پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)

🕮 مثال: فضای نمونه ای آزمایش پرتاب دو تاس با هم (دوبار پرتاب یک تاس) را مشخص کنید.

🕮 مثال: در پرتاب یک سکه و یک تاس با هم فضای نمونه ای چند برآمد دارد؟

🕮 مثال: در یک ایستگاه هواشناسی در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص میشود:

- دمای هوا: سرد یا گرم
- رطوبت هوا: خشک یا مرطوب
- سرعت باد: باد میوزد یا باد نمیوزد
- وضعیت هوا:صاف، نیمه ابری، یا ابری
- مقدار بارش: بارندگی یا عدم بارندگی

الف) فضای نمونه را برای یک لحظه تصادفی در این ایستگاه هواشناسی مشخص کنید.

ب) این فضای نمونه چندبرآمد دارد؟

🕮 مثال: سکه ای را یک بار پرتاب میکنیم. اگر "پشت" بیاید آنگاه تاس را میریزیم. و اگر "رو" بیاید سکه را دوبار دیگرپرتاب میکنیم.

فضای نمونه را مشخص کنید.

پیشامد

هر **زیرمجموعه** از فضای نمونه ای را یک پیشامد می نامند. یعنی پیشامد **بخشی از فضای نمونه** است که مطلوب مساله است. بنابراین اگر فضای نمونه آن دارای n عضو باشد، برای آن میتوان ۲^n پیشامد در نظر گرفت.

یعنی هر عضو از فضای نمونه می تواند در پیشامد حضور داشته باشد یا نداشته باشد.

هرپیشامد تک عضوی را ساده مینامیم.

مثال: تاسی را پرتاب میکنیم. پس از ظاهر شدن عدد روی تاس، به تعداد همان عدد سکه پرتاب میکنیم. فضای نمونه ای این آزمایش چندعضوی است؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۴۸۴ ۳) ۶۴۲ ۴) ۳۸۴

مثال: از مجموعه اعداد طبیعی $\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۴۹,۵۰\}$ عددی را به تصادف انتخاب و ارقام آن را درهم ضرب می کنیم و از این حاصل ضرب ها یک مجموعه می سازیم. کدام عدد در فضای نمونه این آزمایش وجود ندارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

مثال: اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ فضای نمونه ای و $A=\{۱,۲,۳\}, B=\{۳,۴\}$ دو پیشامد در S باشند، پیشامد $(A\cap B')' \cup (A\cap B')$ کدام است؟

۱) $\{۱,۲,۳,۴\}$ ۲) $\{۱,۲,۴\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۳\}$

مثال: در آزمایش پرتاب دوتاس با هم دو پیشامد زیر را درنظر گرفته ایم.

A : مجموع دو عدد ظاهر شده فرد است.

B : مجموع دو عدد ظاهر شده اول است.

در این صورت پیشامد "A اتفاق بیفتد و B اتفاق نیفتد" چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۴

احتمال و اصول آن

احتمال یک عدد حقیقی است که به یک پیشامد نسبت داده میشود و بیان گر میزان اطمینان از وقوع آن پیشامد است.

برای هر پیشامد مانند A احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده میشود که عددی حقیقی متعلق به بازه $[0,1]$ است.

در واقع احتمال تعداد حالت های مطلوب به تعداد کل حالت هاست. $\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}$

اصول احتمال (اصول کولموگروف)

۱- احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱ است. یعنی: $P(S)=1$

۲- برای دو پیشامد ناسازگار B,A داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

مثال: احتمال مسافرت شخصی با هواپیما برابر $\frac{1}{5}$ و با قطار برابر $\frac{2}{3}$ است. احتمال این شخص با هواپیما یا قطار مسافرت کند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{15}$ ۲) $\frac{3}{15}$ ۳) $\frac{13}{15}$ ۴) $\frac{11}{15}$

مثال: یک عدد از مجموعه $s=\{۱,۲,...,۱۰\}$ به تصادف انتخاب میکنیم احتمال آنکه عدد انتخاب شده کمتر از ۷ یا زوج باشد را بیابید؟

مثال: ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف ۲ مهره را از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

نکته هم رنگ :

مثال: از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آنها در مورد ادبیات و ۷ عدد آنها در مورد تاریخ است، به طور تصادفی ۵ کتاب انتخاب کرده ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۶۶}$

۳) $\frac{۳۵}{۱۳۲}$ ۴) $\frac{۳۷}{۱۳۲}$

مثال: پنج نفر به نام های e,d,c,b,a به طور تصادفی در یک ردیف قرار می گیرند.

الف) احتمال اینکه b,a کنار هم باشند چقدر است؟

قضیه های احتمال

❶ اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه : $P(A')=۱-P(A)$

❷ قضیه دوم: برای هردو پیشامد B,A از فضای نمونه داریم: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

❸ برای دو پیشامد B,A از فضای نمونه داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

احتمال غیرهم شانس

هرگاه حداقل دوبرآمد از فضای نمونه ای S دارای احتمال نابرابر باشند، آنگاه S را فضای نمونه ای غیرهم شانس می نامیم.

برای محاسبه احتمال در فضاهای نمونه ای غیر هم شانس دو موضوع زیر را در نظر می گیریم:

الف) تمام احتمال های نسبت داده شده به هر یک از عضوهای S اعداد حقیقی نا منفی اند

ب)**مجموع** تمام احتمال های نسبت داده شده برابر یک است.

❖در حل این نوع سوالات احتمال یکی از برآمد ها را x می‌گیریم و سپس بقیه را بر حسب x به می‌آوریم. سپس جمع تمام احتمال ها را برابر ۱ می‌گیریم.

📖 مثال: درصورتی که $S=\{a,b,c\}$ مطلوبست محاسبه $P(a)$ اگر $P(\{b,c\})=\frac{۱}{۴}, P(b)=\frac{۱}{۵}$

📖 مثال: در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن "رو" نصف احتمال آمدن "پشت" است. در پرتاب این سکه؛ احتمال ظاهر شدن "رو" و احتمال ظاهر شدن "پشت" را به دست آورید.

📖 مثال: سه دونده باهم مسابقه میدهنداحتمال برد نفراول نصف احتمال بردنفردوم واحتمال برد نفردوم یک سوم احتمال برد نفرسوم است. احتمال آنکه دونده اول برنده نشود، چقدراست؟

📖 مثال: اگر $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ فضای نمونه و $P(۱)=\frac{P(۲)}{۲}=\frac{P(۳)}{۳}=\frac{P(۴)}{۴}$ آنگاه $P(\{۱,۴\})$ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۹

احتمال شرطی

در برخی مسائل اعلام میشود که پیشامدی مثل B رخ داده است و از ما میخواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگری مانند A را با توجه به این که پیشامد B رخ داده است، محاسبه نماییم. به عبارت دیگر، احتمال رخ دادن پیشامد A به تنهایی مورد نظر نیست. در این صورت می گوییم احتمال رخ دادن A به شرط رخ داد B و مینویسیم : $P(A|B)$ که به آن احتمال شرطی می گوییم.

❖قانون احتمال شرطی <u>به لحاظ مفهومی</u> عبارت است از:

P (وقوع توام دو پیشامد)= P (اولی رخ بدهد) . P (رخ دادن اولی| دومی رخ بدهد)

❖ توجه کنید نماد " | " در $P(A|B)$ به صورتِ "به شرطِ" خوانده می شود.

❖ در احتمال شرطی $P(A|B)$ چون اعلام شده است پیشامد B رخ داده است پس: $B\neq\varnothing$

❖در برخی مسائل با کاهش فضای نمونه میتوان به سادگی مسائل را حل کرد.

❖ فرمول احتمال شرطی :

📖 مثال: تاسی را پرتاب کرده ایم. زوج آمده است. احتمال آمدن عدد بزرگتر از ۳ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

📖 مثال: میوه های باغی بر حسب نوع و کیفیت مطابق جدول زیر می باشند. میوه ای به تصادف از این باغ انتخاب می شود. اگر از نوع B باشد، چقدر احتمال دارد دارای کیفیت متوسط باشد؟

کیفیت \ نوع	A	B
خوب	0/2	0/3
متوسط	0/3	0/2

📖 مثال: سازنده قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه میداند که احتمال این که سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود ۰/۹ است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع به مشتری تحویل داده شود برابر ۰/۶ است. احتمال اینکه سفارشی به موقع تحویل مشتری شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد، چقدر است؟

📖 مثال: یک تولید کننده از روی تجربه میداند احتمال آنکه کسی آگهی تبلیغاتش را بخواند برابر ۰/۷ و احتمال اینکه کسی محصول این تولید کننده را بخرد به شرط آنکه تبلیغاتش را خوانده باشد، برابر ۰/۴۵ است. احتمال اینکه کسی آگهی تبلیغات این تولید کننده را خوانده باشد و محصولاتش را بخرد چقدر است؟

📖 مثال: اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد و $P(a)=\frac{۱}{۴}, P(\{d,e\})=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $P(\{b,c,e\}|\{a,b,c\})$ کدام است؟

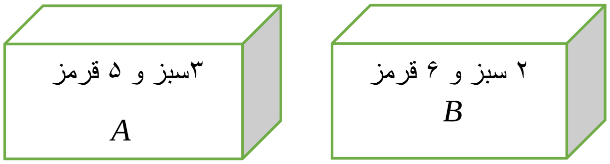
📖 مثال: یک سکه سالم را ۵ بار پرتاب کرده ایم. اگر دقیقا ۳ بار رو آمده باشد، احتمال اینکه در هیچ دو پرتابی متوالی رو نیامده باشد، چقدر است؟

📖 مثال: در تجربه پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل ضرب دو تاس زوج است، با کدام احتمال هر دو تاس زوج می آیند؟ (سراسری۸۸)

قانون احتمال کل(مسائل چند مرحله ای)

در بسیاری از مسائل احتمال، با بیش از چند تصادف مواجه ایم که پشت سرهم اتفاق می افتند مخصوصا آزمایش هایی که نتیجه اولی روی دومی تاثیرگذار است. در چنین مواردی که نتایج آزمایش اول روی آزمایش دوم تاثیرگذار است و نتیجه آزمایش دوم منوط به آزمایش اول است، بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم. در این نوع مسائل بعد از پرکردن احتمال ها در درخت، اعداد سرشاخه های متوالی را در هم ضرب و اعداد شاخه های موازی را با هم جمع می‌کنیم.

📖 مثال: دو ظرف همانند، مطابق شکل مفروض است. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب و مهره ای از آن خارج می‌کنیم. احتمال آنکه قرمز باشد، کدام است؟ (احتمال کل نوع اول)



📖 مثال: دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. یکی از دو ظرف را به تصادف انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. احتمال سفیدبودن این مهره چقدر است؟

📖 مثال: در اولین ظرف از سه ظرف همانند، ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه ، در دومین ظرف ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه وجود دارد. با چشم بسته از یکی از ظرف ها مهره ای به تصادف انتخاب میکنیم. احتمال سیاه بودن این مهره چقدر است؟

قانون بیز

در برخی مسائل همانند آنچه که در قانون احتمال کل بیان شد، فضای نمونه ای به پیشامدهایی افراز شده است. اما **نتیجه آزمایش در مرحله آخر اعلام می شود** و احتمال رخ دادن یکی از افرازها با توجه به این که نتیجه آزمایش معلوم است، مورد نظر می باشد. یعنی مطلوب مساله یک احتمال شرطی است، که برای یافتن آن، با توجه به شرط داده شده(همان نتیجه آزمایش که اعلام شده است) روی نمودار درختی، حالت های ممکن را مشخص می کنیم و سپس به محاسبه احتمال مطلوب می پردازیم. این موضوع را **قانون بیز** می نامیم. ❖ یادتان باشد همواره مخرج احتمال کل است.

📖 مثال: دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از دو ظرف را انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟

پیشامدهای مستقل و وابسته:

❖دو پیشامد را **مستقل** گوییم هرگاه رخ دادن یکی تاثیری در رخ دادن دیگری نداشته باشد، به عبارت دیگر نتیجه این دو پیشامد ربطی به هم ندارند.

در واقع دو پیشامد B, A با احتمال های غیرصفر از فضای نمونه ای S مستقل اند اگر و تنها اگر :

$$P(A|B)=P(A) \quad \text{و} \quad P(B|A)=P(B)$$

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سالم قرمز و آبی با هم:

الف) اگر بدانیم تاس قرمز زوج آمده است، باکدام احتمال در تاس آبی عدد ۶ ظاهر شده است؟

ب) اگر بدانیم تاس آبی آمده است، با کدام احتمال در تاس قرمز عددی زوج ظاهر شده است؟

📖 مثال: در آزمایش پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم،

الف) اگر سکه "رو" شود، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می آید؟

ب) اگر تاس عدد ۶ ظاهر شود، با کدام احتمال سکه "رو" می آید؟

📖 مثال: یک سکه سالم را صدبار انداخته ایم و هر صدبار رو آمده است. احتمال اینکه در پرتاب صد و یکم "رو" بیاید چقدر است؟

📖 مثال: در پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم، با کدام احتمال سکه "رو" و تاس ۶ می آید؟

📖 مثال: از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ عددی به تصادف انتخاب میشود. فرض می کنیم A پیشامد "عدد انتخابی زوج است" و B پیشامد "عدد انتخابی مضرب ۳ است" در نظر گرفته شود. آیا B, A مستقل اند؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس به طورمتوالی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن B, A را بررسی کنید.

📖 مثال: جعبه ای شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است. به طور پی در پی دو مهره به تصادف و با جایگذاری بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه:

الف)هر دو مهره قرمز باشند

ب) حداقل یک مهره آبی باشد

پ)هر دو مهره هم رنگ باشند

ناسازگاری و استقلال

می دانیم دو پیشامد ناسازگار، هیچ برآمد مشترکی ندارند. به عبارت دیگر دو پیشامد B, A ناسازگارند هرگاه

$$A\cap B=\varnothing \quad \text{یا} \quad P(A\cap B)=0$$

یعنی رخ دادن توام آنها غیرممکن است.

بنابراین واضح است که ناسازگاری دو پیشامد ربطی به مستقل بودن آنها ندارد. چون اگر B,A دو پیشامد مستقل باشند آنگاه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ ، یعنی رخ دادن توام آنها قابل قبول است.

حال اگر فرض کنیم دو پیشامد ناسازگار و مستقل اند آنگاه: $P(A).P(B)=0$ و لذا $P(A)=0$ یا $P(B)=0$ و به عبارت دیگر حدااقل یکی از این دو پیشامد غیرممکن (نشدنی) است. **پس ناسازگاری پیشامدها ربطی به مستقل بودن آنها ندارد و برعکس.**

❖**متمم گیری** استقلال پیشامدها را حفظ می کند.

قضیه: اگر B,A دو پیشامد **مستقل** از فضای نمونه ای باشند آنگاه:

الف) B,A' نیز دو پیشامد مستقل اند.

ب) B',A نیز دو پیشامد مستقل اند.

پ) B',A' نیز دو پیشامد مستقل اند.

❖**سه پیشامد مستقل:**

سه پیشامد C,B,A از یک فضای نمونه ای مستقل هستند هرگاه:

$$\begin{cases} P(A\cap B)=P(A).P(B) \\ P(A\cap C)=P(A).P(C) \\ P(B\cap C)=P(B).P(C) \\ P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C) \end{cases}$$

این چهار شرط باید همگی برقرار باشند. ممکن است سه تای اول برقرار باشد یعنی دو به دو مستقل باشند اما سه تا با هم مستقل نباشند.

📖 مثال: در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه A به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و احتمال اینکه B به هدف بزند برابر $\frac{۷}{۱۰}$ است.

اگر هر کدام یک بار تیراندازی کنند، باکدام هدف:

الف) هر دو به هدف می زنند؟

ب) فقط A به هدف می زند؟

پ) فقط یکی به هدف می زند؟

ت) هیچ کدام به هدف نمی زنند؟

📖 مثال: اگر B,A دو پیشامد مستقل با احتمال های به ترتیب $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۳}$ باشند، حاصل $P(A\cup B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

📖 مثال: سه تیم کوهنوردی C, B, A با احتمال موفقیت به ترتیب ۴۰ و ۴۵ و ۵۰ درصد به طورجداگانه به جهت صعود به قله دماوند، اعزام می شوند. احتمال اینکه حدااقل یکی از این تیم ها موفق به صعود شوند چقدر است؟

📖 مثال: یک سکه و دو تاس همگن را به طور هم زمان پرتاب می کنیم. احتمال اینکه این سکه "رو" و هر دو تاس ۶ ظاهر شوند، چقدر است؟

📖 مثال: خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) احتمال اینکه هر ۴ فرزند این خانواده دختر باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

📖 مثال: احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر این دارو بر روی ۱۰ نفر امتحان شود، با کدام احتمال روی همه آنها جواب منفی می دهد؟

📖 مثال: در یک کلاس ۱۰ نفری احتمال اینکه

الف) همگی روز شنبه متولد شده باشند،-چقدر است؟ ب) همگی در یک روز هفته متولد شده باشند، چقدر است؟

آزمون برنولی

هرآزمایشی که فقط دو نتیجه موفقیت و شکست برای آن در نظر گرفته شود، آزمون برنولی نامیده می شود.

*اگر احتمال موفقیت در هر بار تکرار یک آزمون برنولی برابر α درنظرگرفته شود، آنگاه احتمال k بار موفقیت در n بار تکرار یک آزمون برنولی عبارت است از:

انتخاب k بارموفقیت از n بار تکرار — k بارپیروزی — $n-k$ بار شکست

P (دقیقا k بار موفقیت در n بار تکرار یک آزمون برنولی) $=\binom{n}{k}\alpha^{k}.(۱-\alpha)^{n-k}$

📖 مثال: یک سکه سالم را ده بار می اندازیم. احتمال این که نیمی از پرتاب ها "رو" ظاهر شود چقدر است؟

📖 مثال: در یک خانواده ۶ فرزندی با کدام احتمال ۴ فرزند پسر است؟

📖 مثال: در پرتاب چهار سکه سالم با هم، با کدام احتمال ۳ بار "رو" **یا** "پشت" ظاهر می شود؟

📖 مثال: در پرتاب یک سکه سالم، اگر رو بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند و اگر پشت بیاید ۳ تیر رها می کند.

احتمال اصابت هر تیر رها شده به هدف برابر $\frac{۳}{۵}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر به هدف اصابت می کند؟

مثال: ۶۰ درصد کارکنان یک سازمان مرد و ۴۰ درصد آنان زن هستند. می دانیم ۲۰ درصد مردان و ۴۵ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر از بین آن ها ۳ نفر انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آن ها تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۰/۱۸۹ ۲) ۰/۱۷۲ ۳) ۰/۱۵۶ ۴) ۰/۱۴۱

اصطلاحات اولیه

❖ واقعیت هایی درباره یک شئ یا فرد که در محاسبه ، برنامه ریزه و پیش بینی به کار می‌روند **داده** نام دارد.

❖هر ویژگی از اشیا یا افراد که در اعضای جامعه یکسان نیستند و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند، **متغیر** نام دارد.

❖ عددی که به آن ویژگیِ یک عضو از جامعه نسبت داده می‌شود **مقدار متغیر** یا به اصطلاح **مشاهده** میگویند.

❖ به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آنها داده ها را گردآوری کنیم **جامعه آماری** گفته می‌شود و به تعداد افراد یا تعداد اعضای یک جامعه آماری **اندازه جامعه** می‌گوییم.

❖به هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روشی مشخص انتخاب شده باشد، **نمونه** می‌گویند و به تعداد عضوهای یک نمونه ، **اندازه نمونه** گفته می‌شود.

🕮 مثال: هر ویژگی از اشیا یا افراد که در اعضای یک جامعه یکسان نیستند و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر میکند چه نامیده میشود؟

الف) داده　　ب) نمونه　　پ) متغیر　　ت)مقدار متغیر

🕮 مثال: کدام یک از تعاریف زیر صحیح نیست؟

داده ها: واقعیت هایی درباره یک شی یا فرد هستند که در محاسبه ، برنامه ریزی و پیش بینی به کار میروند.

متغیر: هر ویژگی از اشیا یا اشخاص که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

فراوانی یک داده: تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می شود را فراوانی آن داده می گویند.

انواع متغیر

انواع متغیر

- **کیفی**: غیرقابل اندازه گیری هستند
  - **ترتیبی**: دارای نوعی ترتیب طبیعی است
  - **اسمی**: دارای هیچ ترتیب طبیعی نیست
- **کمّی**: قابل اندازه گیری هستند
  - **پیوسته**: اگر دو مقدار را بپذیرد هر مقداری بین آنها را میپذیرد
  - **گسسته**: اگر دو مقدار را بپذیرد بعضی مقدارها را بین آن دو نمیپذیرد

ترتیبی	اسمی	پیوسته	گسسته
مقام های یک ورزشکار	گروه خونی	وزن و قد و سن	تعداد طبقات خانه
میزان لذت از آشپزی	رنگ چشم	قطر تنه درختان	درصد یک درس
مراحل رشد	ملّیت	حجم آب	تعداد مسافرین
مراحل تحصیل	جنسیت	دما و زمان	تعداد غایبین امروز
درجه افسران	نوع آلودگی هوا	میزان آلودگی هوا	تعداد نامه های ارسالی

مثال: قطر تنه درختان یک باغ یک متغیر تصادفی است. نوع متغیر کدام است؟

۱) کمی گسسته ب)کمی پیوسته پ)کیفی ترتیبی ت) کیفی اسمی

مثال: میزان بارش باران چه نوع متغیری است؟

۱) کمی گسسته ب)کمی پیوسته پ)کیفی ترتیبی ت) کیفی اسمی

📖 مثال: نوع کدام متغیر با سایرین فرق دارد؟

الف) نوع آلاینده های هوا ب)مقام های یک ورزشکار پ)میزان لذت از آشپزی ت)درجه سربازان در ارتش

فراوانی و فراوانی نسبی

❖ تعداد دفعاتی که هر داده تکرار می‌شود را فراوانی می‌گوییم و با f نمایش می‌دهیم

❖ با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده ها، فراوانی نسبی به دست می‌آید. که با F نمایش می‌دهیم $F=\frac{f}{n}$

❖ مجموع همه فراوانی ها برابر تعداد کل داده هاست. $f_۱+f_۲+\dots+f_k=n$

❖ مجموع همه فراوانی نسبی ها برابر ۱ است. $F_۱+F_۲+\dots+F_k=۱$

اگر فراوانی نسبی ها را در ۱۰۰ ضرب کنیم درصد داده ها به دست می‌آید که اصطلاحا درصد فراوانی گفته می‌شود.

درصدفراوانی را با P نمایش می‌دهیم و داریم: $P_۱+P_۲+\dots+P_k=۱۰۰$

📖 مثال: اگر فراوانی نسبی یک داده ۰/۵ و فراوانی آن ۴۰ باشد، تعداد کل داده های چند تاست؟

📖 مثال: یک موسسه ۶۰ کارمند دارد که ۱۵ نفر دارای مدرک دکتری و ۳۰ نفر کارشناسی ارشد و ۶ نفر کارشناسی و ۹ نفر دیپلم هستند. اطلاعات مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی و درصد فراوانی نسبی را در یک جدول نشان دهید.

مثال: جدول فراوانی نسبی گروه خونی ۸۰ دانش اموز به صورت روبرو است. گروه خونی چند دانش اموز از نوع A است؟

گروه خونی	A	B	AB	O
فراوانی نسبی	x	۰.۳	۰.۱۵	۰.۱

مثال: از n نفر کارمند یک اداره ۱۲ نفر دارای گروه خونی A ، تعدادی دارای گروه خونی B ، ۱۰ نفر دارای گروه خونی AB و ۳ نفر دارای گروه خونی O هستند. اگر ۳۷/۵ درصد افراد دارای گروه خونی B باشند، تعداد کل کارمندان کدام است؟

مثال: اگر ۷۰ درصد از ۱۱۹ داده آماری دارای یک ویژگی باشند، فراوانی نسبی این داده های کدام است؟

الف) ۰/۵ ب)۰/۶ پ)۰/۷ ت)۰/۴

مثال: در یک نمونه گیری از اتومبیل های در حال حرکت، اطلاعاتی مطابق جدول زیر به دست آمده است؟ چند درصد اتومبیل ها بیش از سه سرنشین دارند؟

تعداد سرنشینان	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی	۹۰	۱۹۰	۲۲۰	۲۶۰	۴۰

مثال: جدول زیر مربوط به ارقام تصادفی حاصل از ۴۰ بار پرتاب یک تاس است. چند بار عدد رو شده عددی اول است؟

الف)۱۵ ب)۲۱ پ)۲۰ ت)۱۸

عددتاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درصدداده ها	۲۲.۵	۱۵	a	۲۲.۵	۱۰	۱۰

نمودارها

❶ برای متغیرهای کمّی گسسته یا متغیرهای کیفی می‌توان نمودار میله ای رسم کرد

روی محور افقی با فاصله های مساوی متغیرها را نشان می‌دهیم و روی‌محور عمودی فراوانی یا فراوانی نسبی یا درصد داده ها را نشان می‌دهیم

❷ برای متغیر های کمّی گسسته و متغیرهای کیفی می‌توان نمودار دایره ای بر اساس درصد داده ها رسم کرد

دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می کنیم که هر قسمت نشان دهنده ۱۰ درصد داده هاست. مثلا اگر داده های ۱۵ درصد بود یک و نیم قسمت را رنگ می کنیم.

❸ نمودار بافت نگاشت (هیستوگرام) برای داده های کمّی پیوسته کاربرد دارد

روی محور افقی حدود دسته های داده شده و روی محور عرض ها به اندازه فراوانی آن دسته این مستطیل را بالا می‌بریم.

در این روش معمولا چند مستطیل رنگی به هم چسبیده به دست می‌آید.

📖 مثال: جدول روبرو مربوط به داده های ۲۵ بار پرتاب یک تاس است. نمودار میله ای را برای فراوانی داده ها رسم کنید.

عددروشده	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۳	۵	۲	۶	۴	۵

📖 مثال: نمودار میله ای را برای فراوانی نسبی داده های مثال قبل رسم کنید.

📖 مثال: در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان به صورت روبرو است. نمودار دایره ای رارسم کنید.

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	ارشد	دکترا
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

📖 مثال: جدول زیر، زاویه مرکزی ۹۰ داده آماری در نمودار دایره ای است. فراوانی دسته سوم چقدر است؟

داده	A	B	C	D	E
زاویه مرکزی	۷۷°	۴۵°	x°	۹۰°	۸۰°

🕮 مثال: رسم نمودار دایره ای که ترتیب کنار هم قرار دادن نواحی ان اهمیت نداشته باشد، برای کدام یک از متغیرها مناسب است؟

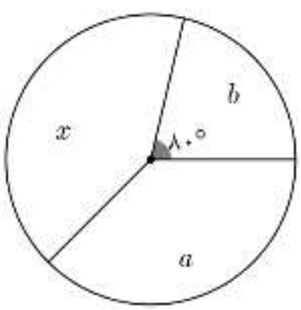
الف) قدافراد ب)وزن افراد پ)تعداد تصادفات ت)گروه خونی افراد

🕮 مثال: در یک نمودار دایره ای تعداد هر یک از داده هارا ۱۰ برابر می کنیم. چه تغییری در نمودار به وجود می آید؟

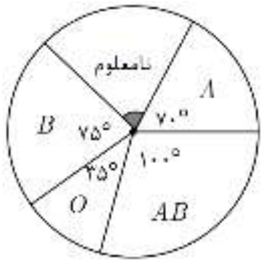
الف) هر قسمت از نمودار، ده برابر می شود. ب)هرقسمت از نمودار $\frac{۱}{۱۰}$ برابر میشود.

پ) هر قسمت نمودار ۳۶ برابر می شود ت) تغییری نمی کند.

🕮 مثال: دو نفر با نام های b,a به جشن تولد x دعوت شده اند. این سه نفر قرار گذاشته اند که کیک را به نسبت سن شان، بین خودتقسیم کنند. اگر a ، ۱۳سال و ۲ ماه و b ، ۸ سال و ۴ ماه داشته باشد و کیک تولد به شکل زیر تقسیم شده باشد، x چند ساله شده است؟



📖 مثال: نمودار دایره ای روبه رو متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از انها تعیین نشده است. چند نفر از آن ها دارای نوع خون B هستند؟



الف) ۳۵ ب) ۳۰

پ) ۳۶ ت) ۴۰

📖 مثال: جدول زیر مربوط به فراوانی و درصد داده های شاخص کیفیت هوای تهران (AQI) درچند روز متوالی در سال ۹۷ در تهران است. مقدار x کدام است؟

وضعیت هوا	کیفیت شاخص هوا	فراوانی	درصدداده ها
سالم یا پاک	$۰ \le AQI \le ۱۰۰$	۷	y
ناسالم	$۱۰۰ \le AQI \le ۲۰۰$	x	۲۰
خطرناک	$۲۰۰ \le AQI \le ۳۰۰$	z	۴۵

📖 مثال: نمودار بافت نگاشت مربوط به فراوانی جدول فراوانی زیر را رسم کنید.

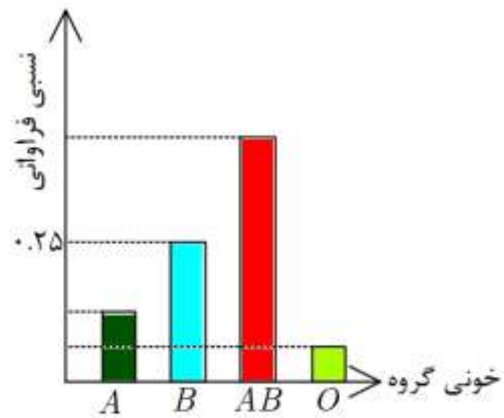
دسته‌ها	۲ − ۴	۴ − ۶	۶ − ۸	۸ − ۱۰
فراوانی	۴	۷	۵	۲

📖 مثال: نمودار میله ای زیر برای گروه خونی یک نمونه ۴۰ نفری از افراد یک شرکت رسم شده است.اگر تعداد افرادحاضر در نمونه گیری دوبرابر شود، بلندی گروه میله مربوط به AB به ۰/۳۵ می

چند نفر به این گروه اضافه شده است؟

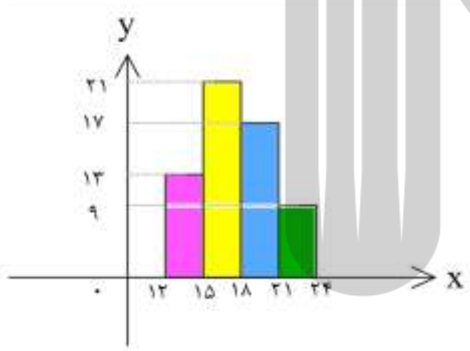
الف)۱۵ ب)۱۸

پ)۱۲ ت)۲۲



📖 مثال: از داده های آماری با نمودار بافت نگاشت مقابل سه داده ۱۴، ۱۶ و ۱۶ حذف شده است.

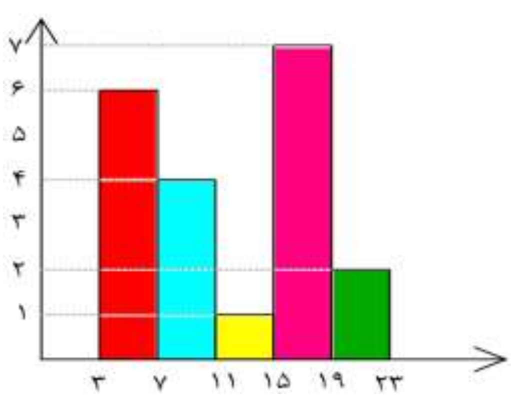
در نمودار دایره ای داده های جدید، بزرگترین زاویه مرکزی چند درجه است؟



📖 مثال: با توجه به نمودار بافت نگاشت مقابل، فراوانی نسبی دسته وسط کد

الف)۰/۵ ب)۰/۰۵

پ) ۰/۰۴ ت)۰/۴



میانگین : اگر n داده ی $x_1,x_2,\dots,x_n$ داشته باشیم میانگین(متوسط یامعدل) داده ها را با $\bar{x}$ نمایش دهیم و داریم:

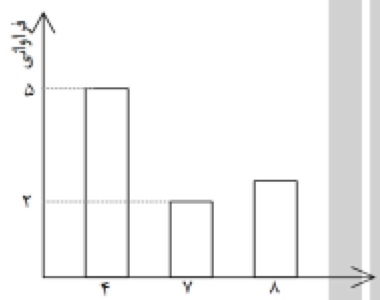
$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

میانه : عدد وسط داده ها را میانه می‌گوییم. اگر تعداد داده ها زوج باشد دقیقا عدد وسطی میانه است و اگر تعداد داده ها فرد باشد میانگین دو عدد وسطی میانه خواهد بود.

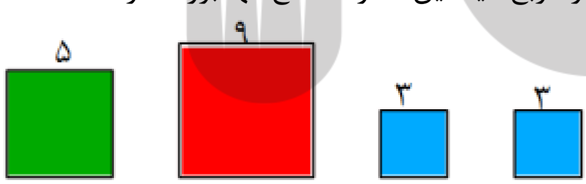
مثال: در نمودار میله ای رو به رو ، اگر میانگین داده ها برابر ۶ باشد، در آن صورت میانه کدام است؟

الف) ۱۱ ب)۷

پ)۴ ت)نمیتوان چیزی گفت

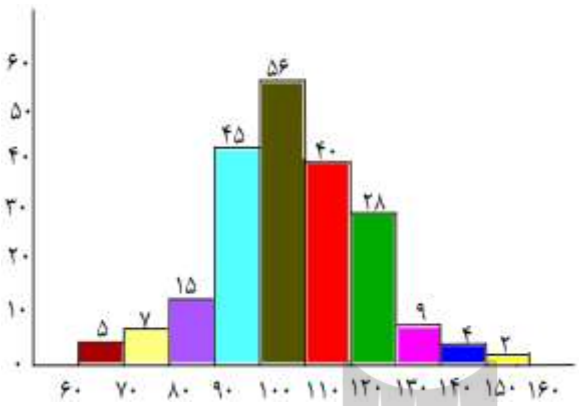


مثال: میانگین مساحت های مربع های شکل زیر چقدر از مربع میانگین اندازه اضلاع انها بزرگ تر است؟



مثال: علی برای شروع یادگیری زبان روز اول ۳ لغت و روز دوم ۴ لغت و همین طور هر روز یک لغت بیشتر یاد می گیرد. او در پایان ماه n ام میانگین تعداد تمام لغت هایی را که یاد گرفته است محاسبه می کند و ۱۸ به دست می آید. n را بیابید.

📖 مثال: نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهد کودک به صورت روبرو است. با توجه به این نمودار، به سوالات زیر پاسخ دهید:



الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها مورد بررسی قرار گرفته است، چند

ب) نمره IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

پ)چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۱۰ تا ۱۴۰ هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید.

📖 مثال: جدول فراوانی روبرو مربوط به وزن ۸۰ ورزشکار است. این جدول را کا

وزن افراد	فراوانی	فراوانی نسبی
۵۰ − ۶۰	۵	؟
۶۰ − ۷۰	؟	۰.۲۵
۷۰ − ۸۰	؟	؟
۸۰ − ۹۰	۵	؟
۹۰ − ۱۰۰	۱۵	؟

معیارهای پراکندگی

واریانس یکی از بهترین شاخص ها در تشخیص پراکندگی داده هاست

$$\delta^{۲}=\frac{\left(x_{۱}-\bar{x}\right)^{۲}+\left(x_{۲}-\bar{x}\right)^{۲}+....+\left(x_{n}-\bar{x}\right)^{۲}}{n}$$

جذر واریانس یعنی δ را انحراف معیار می‌گوییم.

📖 مثال: واریانس داده های آماری ۳, ۶, ۴, ۳, ۵, ۴, ۱, ۶ کدام است؟

الف)۱/۷۵		ب)۲		پ)۲/۲۵		ت)۲/۵

📖 مثال: اگر انحراف معیار داده های $a,۴,d,c,b$ کوچک تر از واحد بوده و با واریانس انها برابر باشد، میانگین داده های $a^{۲},\sqrt{b},\sqrt{c},\frac{d}{۴},۹$ کدام است؟

الف)۷		ب)۶		پ)۴		ت)۳

📖 مثال: واریانس داده های ۱۷, ۲۶, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۱۴, ۲۳ کدام است؟

الف) ۱۲		ب)۶		پ)۴		ت)۳۶

📖 مثال: جدول زیر مربوط به تعداد باجه های ۵ بانک مختلف و تعداد افراد در انتظار هر کدام از انها می باشد. واریانس افراد در انتظار چقدر است؟

نام‌بانک	ملی	ملت	پاسارگاد	سپه	پارسیان
افراددرانتظار هر باجه	۱۱	۹	۷	۵	۳
تعداد باجه	۶	۵	۴	۳	۲

آمار استنباطی

مثال: می خواهیم وزن ماهی های یک حوضچه پرورش ماهی را تخمین بزنیم. بدین منظور ۵ ماهی از میان آنها صید می کنیم و وزن آنها را اندازه گیری می کنیم. این ۵ ماهی معرف .... و هر ماهی درون حوضچه .... و کل ماهی های درون حوضچه معرف .... و وزن تک تک ماهی های درون حوضچه .... است.

الف) واحد آماری – داده – جامعه آماری – متغیر

ب) نمونه – واحد آماری - جامعه آماری – داده های آماری

پ) نمونه – متغیر - جامعه آماری – واحد آماری

ت) نمونه – واحد آماری - جامعه آماری – اندازه جامعه

مثال: در بررسی ویژگی های مگسهای سفید مزاحم تهران، هر مگس یک .... است و ۲۰۰ مگس جمع آوری شده معرف یک .... است.

مثال: در هر سال تقریبا ۱۵ درصد قبول شدگان کنکور از شهر A هستند. در این گزارش آماری، جامعه آماری کدام است؟